



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

Présenté pour l'obtention du diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et de L'informatique

Filière : Mathématiques

Option : Équation différentielle partielle

Présenté par
LACHACHE ALIA

Sujet

Inégalité anisotrope de Sobolev

Soutenu le :29/06/2022

Devant le jury :

Mr. Dahmane Bouafia

M.C.A. Univ de M'sila

Président

Mr. Rabah Mecheter

M.C.B. Univ de M'sila

Rapporteur

Mr. Dechoucha Nouredine

M.A.A. Univ de M'sila

Examineur

Promotion : 2021/2022

Remerciements

Avant tout, j'adresse mes remerciements en premier lieu, à Dieu tout puissant pour la volonté, le courage et la patience qu'il m'a donné durant toutes ces longues années de formation.

*Je tiens à remercier sincèrement **Mr : Rabah MECHETER**, pour avoir accepté de diriger ce mémoire, pour ses conseils.*

Mes remerciements vont également aux membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'examiner ce travail.

Aussi mes remerciements à tous les enseignants de département de mathématiques et précisément, les enseignants de spécialité équations aux dérivées partielles et applications.

Enfin je ne voudrais pas oublier de remercier toute personne qui m'a aidé à réaliser ce travail.

Merci

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

-À ma mère,

-A mes sœurs,

-A mes frères ,

-A toute la famille LACHACHE,

-A tous mes amis et toute ma famille de département

de Mathématiques,

-A toutes mes adorables que j'ai connu pendant

toute ma vie ...

-Enfin, je vous demande de prier pour mon père pour la

miséricorde,

LACHACHE ALIA

Table des matières

Remerciements	1
Dédicace	2
Notation	4
1 Préliminaires et outils de base	10
1.1 Rappels et quelques définitions	10
1.2 Espaces fonctionnels	11
1.2.1 Espaces de Lebesgue	11
1.2.2 Inégalités principales	12
1.3 Espaces de Sobolev	13
1.4 Les injection de Sobolev :	16
1.5 Dualité	17
2 Espaces anisotropes de Sobolev	20
2.1 Notations et définitions	20
2.1.1 Inégalité de Hölder	25
2.1.2 Inégalité de Minkowski	26
2.2 Injections anisotropes de Sobolev :	27
3 Inégalités anisotrope de Sobolev	29
3.1 Inégalité de Sobolev	29
3.2 Norme mêlée	31
3.2.1 Normes mêlées permutées	32
3.3 Inégalités anisotrope de Sobolev	33
Abstract	43

Notation

Nous introduisons les notations et les définitions nécessaires qui sont utilisées par la suite.

X'	Dual topologique de X .
\mathbb{R}^N	Espace euclidien de dimension N , N un nombre naturel non nul
x	Vecteur de \mathbb{R}^N , $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq N$
dx	Mesure de Lebesgue N -dimensionnelle
$ E $	ou $\text{mes}(E)$ Mesure de Lebesgue d'un ensemble E
Ω	partie ouverte de \mathbb{R}^N
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Crochet de dualité entre X et son dual
$\int_E f(x) dx$	Intégrale de f sur E par rapport à la mesure de Lebesgue
$\text{supp } u$	Support de la fonction u
$\nabla u = Du$	$= (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N})$ Gradient de u
$ \nabla u $	La norme euclidienne de ∇u
$f_n \rightarrow f$	Dénote que la suite $\{f_n\}$ converge vers f .
$L^p(\Omega)$	$= \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } (\int_{\Omega} u(x) ^p dx)^{1/p} < +\infty \text{ tel que } 1 \leq p < \infty\}$
$ u _p$	$= [\int_{\Omega} u(x) ^p dx]^{1/p} = u _{L^p}$.
$L^\infty(\Omega)$	$= \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable, } \exists M > 0, u(x) \leq M \text{ p.p.}\} \text{ sur } \Omega$
$\ u\ _{L^\infty}$	$= \inf\{C : u(x) \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}$.
q	Conjugué de Hölder de p : $q = \frac{p}{p-1}$ si $p > 1$ et $q = \infty$ si $p = 1$
$\mathcal{D}(\Omega)$	Espace des fonctions indéfiniment dérivables sur Ω à support compact dans Ω
$W^{1,p}(\Omega)$	$= \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \nabla u \in (L^p(\Omega))^N \right\}$.
$W_0^{1,p}(\Omega)$	$= \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega), \text{ avec } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$.
p.p.	Presque partout.
\hookrightarrow	Injection continue.
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	Injection compacte.
$\mathbb{L}^{\vec{p}}(\Omega)$	$= \prod_{i=1}^N L^{p_i}(\Omega)$

$$W^{1,\vec{p}}(\Omega) = \{v \in L^{p_i}(\Omega) | D_i v \in L^{p_i}(\Omega), \forall i = 1, \dots, N\}.$$

$$W_0^{1,\vec{p}}(\Omega) = \{v \in W^{1,\vec{p}}(\Omega) | v = 0 \quad \partial\Omega\}.$$

$$\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N).$$

p_i Un nombre réel supérieur ou égale à 1 pour tout $i=1,\dots,N$.

$$p_- = \min \{p_i, i = 1, \dots, N\} \text{ et } p_+ = \max \{p_i, i = 1, \dots, N\}.$$

\bar{p} La moyenne harmonique de p_i , i.e., $\frac{1}{\bar{p}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i}$.

$\partial\Omega = \Gamma$ Frontière de Ω .

$$Q =]0, T[* \Omega.$$

$\bar{\Omega}$ La fermeture de Ω .

$C_0^\infty(\Omega)$ espace des fonctions indéfiniment différentiables (de classe $C^\infty(\Omega)$) à support compact .

$$p^* = \frac{Np}{N-p} > p$$

$C^{0,\alpha}(\Omega)$ espaces des fonctions Höldériennes à exposant α

Introduction générale

Dans sa forme classique, l'inégalité de Sobolev fournit une estimation de la norme L^q d'une fonction u régulière $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ ($C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ espace des fonctions indéfiniment différentiables (de classe $C^\infty(\Omega)$) à support compacte dans \mathbb{R}^N), en termes de norme L^p du gradient de u . Plus précisément, si $1 \leq p < N$ alors

$$\|u\|_q \leq K \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_p, \quad (1)$$

avec q défini par

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} \quad (2)$$

où D_i dénote l'opérateur différentiel partiel $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\|\cdot\|_p$ désigne la norme dans l'espace $L^p(\mathbb{R}^N)$ et la constante K dépend seulement de p et de N .

Notre but dans cette mémoire est de généraliser l'inégalité classique de Sobolev (1) au cas anisotrope où la fonction u et ses différentes dérivées partielles $D_i u$ appartiennent à des espaces de Lebesgue différents L^{p_i} , $i = 1, \dots, N$. Plus précisément, si $p_i \geq 1$ et u une fonction tel que

$$u \in L^{p_i}(\mathbb{R}^N) \quad \text{et} \quad D_i u \in L^{p_i}(\mathbb{R}^N), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

L'inégalité de la forme

$$\|u\|_{L^q} \leq k \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^{p_i}}, \quad k \text{ est une constante indépendante de } u \quad (3)$$

avec q défini par

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}.$$

Où \bar{p} la moyenne harmonique des p_i définie par

$$\frac{1}{\bar{p}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i}.$$

L'inégalité (3) s'appelle inégalité anisotrope de Sobolev, parce que différentes normes de L^{p_i} sont employées pour estimer des dérivées dans différentes directions.

Nous nous basons principalement sur les deux articles [1, 14]. Nous mettons en avant des résultats importants, comme les espaces anisotropes de Sobolev. Nous nous permettons d'omettre certaines preuves qui ne paraissent pas essentielles à la compréhension du sujet, renvoyant par conséquent le lecteur aux articles cités plus haut.

Il est bien connu qu'aucune inégalité de type (1) n'est possible pour tout $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ sauf si q satisfait (2). Pour voir cela, observez que pour une donnée $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, la fonction dilatée u_λ Définie par $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$, ($\lambda > 0, x \in \mathbb{R}^N$) appartient aussi à $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ et satisfait

$$\|u_\lambda\|_q \leq \lambda^{1-N/q} \|u\|_q, \quad \|D_i u_\lambda\|_p \leq \lambda^{1-N/q} \|D_i u\|_p$$

de sorte que si (1) est vraie on doit avoir, pour tout $\lambda > 0$,

$$\lambda^{-(\frac{N}{q})+(\frac{N}{p})-1} \geq K \frac{\sum_{i=1}^N \|D_i u\|_p}{\|u\|_q}$$

ceci n'est pas possible à moins que l'exposant de λ soit zéro ($-(\frac{N}{q}) + (\frac{N}{p}) - 1 = 0$), i.e.,

$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$. Cette unicité de q s'étend comme nous le verrons, au cas anisotrope aussi.

Description de la Mémoire

Cette mémoire est constituée de trois chapitres :

Le chapitre 1 :

Ce premier chapitre est dédié à la présentation de préliminaires nécessaires pour la bonne compréhension de la mémoire. Le lecteur y trouvera des résultats plus au moins connus concernant les espaces de Lebesgue et de Sobolev usuels et quelques Inégalités principales (Hölder, Young), ainsi on aura un point de repère pour comprendre les résultats qui peuvent être généralisés au cas anisotrope et ceux qui ne le peuvent pas.

Le chapitre 2 :

Dans ce chapitre on présente résultats concernant les espaces de Lebesgue et de Sobolev anisotropes sont définis comme suit :

$$L^{p_i}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |u(x)|^{p_i} < \infty \right\}.$$

On le munit de la norme suivante

$$\|u\|_{L^{p_i}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_i}}, \quad p_i \geq 1, \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

si $p_i = +\infty$ on a :

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

et

$$W^{1,(p_i)}(\Omega) = \left\{ v \in W^{1,1}(\Omega); \partial_i v \in L^{p_i}(\Omega) \right\}$$

$$W_0^{1,(p_i)}(\Omega) = W^{1,(p_i)}(\Omega) \cap W_0^{1,1}(\Omega)$$

dotés de la norme habituelle

$$\|v\|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)} = \sum_{i=1}^N \|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

Nous supposons sans perte de généralité que $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_N$, alors :

$$\frac{1}{\bar{p}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} \quad \text{et} \quad \bar{p}^* = \frac{N\bar{p}}{N - \bar{p}}, \quad \text{pour } \bar{p} < N.$$

Nous avons l'injection de Sobolev suivante :

$$W_0^{1,(p_i)}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega), \forall r \in [1, \bar{p}]$$

De plus cette injection est compacte si $r < \bar{p}^*$.

Nous Rappelons aussi un résultat important concernant les espaces $L^{\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$ qui sont les inégalités Hölder et Minkowski.

Le chapitre 3 :

Ce troisième chapitre est dédié à prouver le résultat principal dans cette mémoire , qui est le théorème suivant

Théorème 0.1. *Soit $p_i \geq 1$ pour $i = 1, \dots, N$. Si*

$$\bar{p} < N \quad \text{avec} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{\bar{p}} - \frac{1}{N}$$

alors il existe une constante K telle que l'inégalité anisotrope de Sobolev

$$\|u\|_q \leq K \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^{p_i}}. \quad (4)$$

tient pour tous $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$

Si $\bar{p} \geq N$ l'inégalité (4) est vraie pour tout $q \geq 1$ et K dépend de q et $\text{supp}(u)$

Préliminaires et outils de base

Ce chapitre est consacré à introduire les notions nécessaires et quelques outils d'analyse fonctionnelle (définitions, théorèmes, résultats...) qui seront utilisés dans les différents chapitres de ce mémoire, et qui sont en relation avec le problème (P)

1.1 Rappels et quelques définitions

Dans tout ce qui suit Ω désignera un domaine borné de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, i.e. un ouvert connexe et borné de \mathbb{R}^N . Sa frontière sera désignée par Γ ou $\partial\Omega$ et son adhérence par $\bar{\Omega}$.

Soit $u = u(x_1, \dots, x_N)$ un fonction définie dans $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. En supposant qu'il existe, on appelle gradient de u au point x le vecteur

$$\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}(x) \right)$$

La norme euclidienne de ∇u est notée par $|\nabla u|$:

$$|\nabla u| = \left[\left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 + \dots + \left| \frac{\partial u}{\partial x_N} \right|^2 \right]^{1/2}$$

Définition 1.1. (*Espace des fonctions tests*). L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ ou $C_0^\infty(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ indéfiniment différentiables (de classe $C^\infty(\Omega)$) et à support compact dans Ω .

$\mathcal{D}(\Omega)$ est un espace vectoriel et tout élément de cet espace s'appelle une fonction-test.

- $\text{supp } \varphi = \overline{\{x \in \Omega, \varphi(x) \neq 0\}}$,
- $\mathcal{D}(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$.

Définition 1.2. (Espace séparable). On dit qu'un espace de Banach E est séparable s'il existe un ensemble au plus dénombrable qui est dense dans E .

Définition 1.3. (Espaces Duals). Le dual topologique d'un espace vectoriel E sur le corps \mathbb{K} , ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) est par définition, l'ensemble des formes linéaires continues de E , c'est-à-dire des applications linéaires continues de E dans \mathbb{K} . On note cet ensemble par $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

E' muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par :

$$\|u\|_{E'} = \sup_{x \in E, \|x\|=1} |u(x)| = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |u(x)| = \sup_{x \in E, \|x\| \neq 0} \frac{|u(x)|}{\|x\|}$$

Proposition 1.1.

1. $E_1 \subset E_2$ alors $E_2' \subset E_1'$,
2. $\langle u, x \rangle_{E'E} \leq \|u\|_{E'} \|x\|_E$.

1.2 Espaces fonctionnels

1.2.1 Espaces de Lebesgue

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et p un nombre réel supérieur ou égale à 1. On définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |u(x)|^p < \infty \right\}.$$

On le munit de la norme suivante

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

Quand $p = 2$, cette norme provient d'un produit scalaire. De plus si $p = +\infty$ on a :

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ mesurable et il existe une constante } c \text{ telle que } |u(x)| \leq c \text{ sur } \Omega \right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty} \equiv \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \left\{ c, |u(x)| \leq c \text{ p.p sur } \Omega \right\}$$

Remarque 1.1.

- Soit $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par p' l'exposant de p

$$\text{i.e. } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

- Soit $1 \leq p < \infty$. Alors l'espace dual de $L^p(\Omega)$ est $L^{p'}(\Omega)$.

Théorème 1.1. ([2]) Supposons que Ω soit de classe C^1 . soit¹

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega}) \text{ avec } 1 \leq p < \infty.$$

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $u = 0$ sur Γ .
2. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

1.2.2 Inégalités principales

Soit $1 \leq p \leq q \leq \infty$ deux réels et p' l'exposant conjugué de p , i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Lemme 1.1. ([10]) (**Inégalité de Hölder**) Si $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$, alors $f \cdot g \in L^1(\Omega)$

et

$$\|f \cdot g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

Si de plus $|\Omega| < \infty$ et $f \in L^q(\Omega)$, alors $f \in L^p(\Omega)$ et

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(\Omega)}$$

1. Rappelons que si $p > N$, alors $u \in W^{1,p}(\Omega) \Rightarrow u \in C(\bar{\Omega})$ (voir corolaire 9,14 dans Brezis-Functional-Analysis-EDP-2010)

En particulier

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega), \quad \forall 1 \leq p \leq q < \infty$$

Lemme 1.2. ([10]) Soient $p_i \in [1, +\infty]$ des exposants avec $1 \leq i \leq k$ tels que :

$1/p = 1/p_1 + \dots + 1/p_k \leq 1$. Alors, pour toutes fonctions $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, nous avons

$f = f_1 \dots f_k \in L^p(\Omega)$ et l'inégalité de Hölder généralisée

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p_1} \dots \|f\|_{p_k}.$$

Lemme 1.3. ([10]) (**Inégalité de Young**) Soient a et b deux réels positifs. Soit $p > 1$, alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}, \quad \text{avec } p' = \frac{p}{p-1}. \quad (1.1)$$

1.3 Espaces de Sobolev

Définition 1.4. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \nabla u \in (L^p(\Omega))^N \right\}.$$

Dans cette définition le gradient est entendue au sens des distributions.

Définition 1.5. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , et soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Sobolev² $W^{1,p}(\Omega)$, est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \exists g_1, g_2, \dots, \in L^q(\Omega) \text{ telque } \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall i = 1, 2, \dots, N \right\}$$

pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on note $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ ³, si $p = 2$, alors nous notons

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \equiv \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

2. Serguei Lvovitch Sobolev (1908-1989) est un mathématicien et physicien atomique russe de l'époque soviétique.

3. La dérivée au sens de distribution

ou bien de la norme équivalente

$$\|u\|_{W^{1,p}} = (\|u\|_{L^p}^p + \|\nabla u\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}} (1 \leq p < \infty).$$

Lemme 1.4. *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme (1.3) est un espace de Banach pour $1 \leq p < +\infty$.*

Démonstration.

Soit $\{u_n\}$ une suite de Cauchy dans l'espace $W^{1,p}(\Omega)$. Alors, la suite $\{\nabla u_n\}$ est de Cauchy dans $L^p(\Omega)$. Rappelons alors que l'espace $L^p(\Omega)$ est complet et de ce fait, il existe des fonctions u et ξ telles que u_n et ∇u_n convergent vers u , respectivement vers ξ dans $L^p(\Omega)$. De plus, vu que $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, on voit que

$$u_n \rightarrow u \quad \text{dans} \quad L^1_{loc}(\Omega) \quad \text{quand} \quad n \rightarrow +\infty$$

ou encore

$$u_n \rightarrow u \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{quand} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Donc, on a d'une part

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{quand} \quad n \rightarrow +\infty$$

et d'autre part

$$\nabla u_n \rightarrow \xi \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{quand} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Maintenant, grâce à la séparabilité de $\mathcal{D}(\Omega)$, on voit que $\nabla u = \xi$. Alors, le lemme en découle. □

Proposition 1.2. .

1. *L'espace $W^{1,p}$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.*
2. *L'espace $W^{1,p}$ est un espace séparable pour $1 \leq p < \infty$.*
3. *L'espace $W^{1,p}$ est un espace réflexif pour $1 < p < \infty$.*

Définition 1.6. *Étant donné $1 \leq p < \infty$, on désigne par $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture (l'adhérence) de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ ($W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$).*

L'espace $W_0^{1,p}$ est muni de la norme induite par $W^{1,p}$

$$\|u\|_{W_0^{1,p}} = (\|u\|_{L^p}^p + \|\nabla u\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}} \text{ (si } 1 \leq p < \infty \text{)}. \quad (1.2)$$

La norme (1.2) est équivalente à la norme

$$\|u\|_{W_0^{1,p}} = \|\nabla u\|_{L^p}.$$

on note $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

Remarque 1.2. *Les espaces $L^p(\Omega)$ sont caractérisés par des classes de fonctions identifiées en dehors d'ensembles de mesure nulle.*

On vérifié sans difficulté que l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace fonctionnel muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_p + \|\nabla u\|_p. \quad (1.3)$$

Définition 1.7. *L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est défini par la fermeture de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$, relativement à la norme (1.3). Autrement dit*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega), \text{ avec } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

Cette espace muni d'une norme équivalente à la norme (1.3), donnée par

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Pour les résultats sur les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $W^{1,p}(\Omega)$ le lecteur pourra trouvé toutes les démonstrations dans l'ouvrage de Adams [1].

Citons cependant, que dans la plupart des cas, les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $W^{1,p}(\Omega)$ ne coïncident pas.

Lemme 1.5. ([10])(*Inégalité de Poincaré*) Soit $1 \leq p < \infty$. Alors, il existe une constante C dépend de p telle que pour toute fonction $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}. \quad (1.4)$$

De plus, par la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, l'inégalité (1.4) reste vraie pour toute fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Remarque 1.3. Il est évident que cette inégalité ne peut être généralisée aux espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer les fonctions constantes sur Ω borné (ou de mesure finie).

1.4 Les injection de Sobolev :

Les injections de Sobolev sont très utilisées lorsque nous étudions les EDP elliptiques. Elles fournissent des inégalités entre les normes des espaces de Sobolev et les normes L^p . Ce résultat de compacité est un outil fort dans l'étude des EDP qui nous permet de passer d'un espace de Sobolev à un espace de Lebesgue.

Théorème 1.2. ([2])(*Théorème de compacité*) Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N avec $N \geq 1$ et $1 \leq p < \infty$. Toute partie bornée de $W_0^{1,p}(\Omega)$ est relativement compact dans $L^p(\Omega)$. Ceci revient à dire de toute suite bornée de $W_0^{1,p}(\Omega)$, on peut extraire une sous suite qui converge dans $L^p(\Omega)$.

Théorème 1.3. ([2])(*Injection continue*).

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N soit égal \mathbb{R}^N , avec $N \geq 1$ et $1 \leq p < \infty$.

• Si $1 \leq p < N$ alors $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ avec $p^* = \frac{Np}{N-p} > p$. Et l'injection continue

i.e $\exists C \in \mathbb{R}_+$ (indépendant que de p, N et) telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C \|u\|_{W_0^{1,p}}.$$

- Si $p > N$ alors $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{N}{p}}(\Omega)$.

Où pour $\alpha > 0$, $C^{0,\alpha}(\Omega)$ est l'injection des fonctions Höldériennes d'exposant α , défini par

$$C^{0,\alpha}(\Omega) = \left\{ u \in C(\Omega, \mathbb{R}) / \exists k \in \mathbb{R}_+, |u(x) - u(y)| \leq k \|x - y\|^\alpha, \forall (x, y) \in \Omega^2 \right\}$$

- Si $p = N$ alors $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty[$,

Théorème 1.4. ([2])(Rellich-Kondrachov)

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , avec $N \geq 1$ et $1 \leq p < \infty$

Si $p < N$ alors $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, p^*]$.

Si $p = N$ alors $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, +\infty[$.

Si $p > N$ alors $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(\Omega), \quad \text{pour } 0 \leq \gamma \leq 1 - \frac{N}{p}$

toutes ces injections sont compactes.

1.5 Dualité

Nous allons dans ce paragraphe nous intéresser au dual d'un espace de Sobolev. Le dual d'un espace de Banach existe toujours, nous nous proposons d'identifier ses éléments dans le cas des espaces de Sobolev. Il est souvent commode de considérer les espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ comme le produit de copie des espaces fonctionnels $L^p(\Omega)$. Nous introduirons pour cela un nouvel espace de fonctions, qui nous donnera notamment quelques nouveaux résultats concernant les espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$.

définissons l'opérateur linéaire P par

$$\begin{aligned} P : W^{1,p}(\Omega) &\rightarrow (L^p(\Omega))^{N+1} \\ u &\mapsto Pu = \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) \end{aligned}$$

On remarque sans difficulté que pour toute fonction $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on a

$$\|Pu\|_{L^p(\Omega)^{N+1}} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Autrement dit, P est un isomorphisme isométrique de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W \subset (L^p(\Omega))^{N+1}$.

On peut de plus montrer que

1. $\forall 1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ est séparable.
2. $\forall 1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ est réflexif
3. Le produit d'espaces vectoriels séparable, respectivement réflexif, est encore un espace séparable, resp. réflexif.

On peut donc conclure que $W^{1,p}(\Omega) = P^{-1}(W)$, possède les mêmes propriétés. Avant de donner une caractérisation de l'espace dual d'un de l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, rappelons deux principaux résultats d'analyse fonctionnelle bien connus, dont on trouvera les preuves respectives par exemple dans l'ouvrage de Brezis [4].

Théorème 1.5. ([10])(*Hahn-Banach*) Soient $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ un espace normé sur le corps \mathbf{K} , $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{K}$ une application linéaire et bornée. Alors il existe un élément $\hat{T} \in \mathbf{E}'$ tel que

$$\hat{T}(u) = T(u), \forall u \in \mathcal{D}(T) \quad \text{et}$$

$$\|\hat{T}\|_{\mathbf{E}'} = \sup\{|T(u)| : u \in \mathcal{D}(T) \quad \text{et} \quad \|u\| = 1\}$$

Théorème 1.6. ([10])(*Théorème de Représentation de Riesz*) Soient $1 \leq p < \infty$, $T \in (L^p(\Omega))'$ et p' le conjugué de p . Alors, il existe $v \in L^{p'}(\Omega)$ tel que pour tout $u \in L^p(\Omega)$

$$T(u) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx = \langle u, v \rangle \quad \text{et} \quad \|v\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|T\|_{(L^p(\Omega))'}$$

Corollaire 1.1. Soit $1 \leq p < \infty$ Pour tout opérateur $T \in (L^p(\Omega)^{N+1})'$ il existe un unique $v = (v_0, v_1, \dots, v_N) \in (L^{p'}(\Omega))^{N+1}$ telle que pour toute fonction

$$u = (u_0, u_1, \dots, u_N) \in (L^p(\Omega))^{N+1}$$

$$T(u) = \sum_{i=0}^N \langle u_i, v_i \rangle \quad \text{et} \quad \|v\|_{L^{p'}(\Omega)^{N+1}} = \|T\|_{(L^p(\Omega)^{N+1})'}$$

Théorème 1.7. Soit $1 \leq p < \infty$, Pour tout opérateur $T \in (W^{1,p}(\Omega))'$, il existe un élément $v \in (L^{p'}(\Omega))^{N+1}$, telle que pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$T(u) = \langle u, v_0 \rangle + \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, v_i \right\rangle \quad \text{et} \quad \min \|v\|_{L^{p'}(\Omega)^{N+1}} = \|T\|_{(W^{1,p}(\Omega))'}$$

où le minimum (atteint) est pris sur tout les $v \in (L^{p'}(\Omega))^{N+1}$, pour qui vérifie la condition précédente.

Démonstration.

Définissons

$$\begin{aligned} T^* : W &\rightarrow \mathbb{R} \\ Pu &\mapsto T^*(Pu) = T(u) \end{aligned}$$

Vu que P est un isomorphisme isométrique, $T^* \in W'$ et $\|T^*\|_{W'} = \|T\|_{(W^{1,p}(\Omega))'}$. Par le théorème de Hahn⁴ -Banach⁵, il existe une extension \tilde{T} de T^* défini sur tout $L^{p'}(\Omega)^{N+1}$, et par le corollaire précédent, il existe un élément $v \in (L^{p'}(\Omega))^{N+1}$ tel que si $u = (u_0, u_1, \dots, u_N) \in (L^{p'}(\Omega))^{N+1}$, alors

$$\tilde{T}(u) = \sum_{i=0}^N \langle u_i, v_i \rangle$$

Ainsi $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} T(u) = T^*(Pu) &= \tilde{T}(Pu) = \langle u, v_0 \rangle + \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, v_i \right\rangle \\ \|T\|_{(W^{1,p}(\Omega))'} &= \|T^*\|_{W'} = \|\tilde{T}\|_{W'} = \|v\|_{(L^{p'}(\Omega))^{N+1}} \end{aligned}$$

□

Théorème 1.8 ([1]). *Soient $1 < p < \infty$ et $p' = \frac{p}{p-1}$. Le dual de l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est $W^{-1,p'}(\Omega)$.*

4. Hans Hahn (1879–1934) est un mathématicien et philosophe autrichien

5. Stefan Banach (1892–1945) est un mathématicien polonais.

Espaces anisotropes de Sobolev

On commence par rappeler la notion d'espaces de Sobolev anisotropes. Ces espaces ont été introduits et étudiés par [12], [13], et [14]

2.1 Notations et définitions

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes. Soient Ω un domaine ouvert dans \mathbb{R}^N , p_1, \dots, p_N , N nombres réels avec $p_i \geq 1$, $i = 1, 2, \dots, N$. On note

$$\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N), p_- = \min\{p_i, 1 \leq i \leq N\}, \quad p_+ = \max\{p_i, 1 \leq i \leq N\}, D_i u = \frac{Du}{Dx_i}$$

et \bar{p} la moyenne harmonique des p_i définie par

$$\frac{1}{\bar{p}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i}.$$

On définit l'espace de Lebesgue anisotrope $L^{p_i}(\Omega)$ par :

$$L^{p_i}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |u(x)|^{p_i} < \infty \right\}.$$

On le munit de la norme suivante

$$\|u\|_{L^{p_i}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^{p_i} dx \right)^{\frac{1}{p_i}}, \quad p_i \geq 1, \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

si $p_i = +\infty$ on a :

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

Remarque 2.1. Notons que $\bigcap_{i=1}^N L^{p_i}(\Omega) = L^{p_+}(\Omega)$. Si $p_i = p$ pour tout $i = 1, \dots, N$, l'espace $L^{p_i}(\Omega)$ coïncide avec $L^p(\Omega)$. De plus, on a

$$\|u\|_{L^{p_i}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p} \quad \text{si } 1 \leq p < +\infty$$

et

$$\|u\|_{L^{p_i}(\Omega)} = \|u\|_{\infty} = \sup_{x_i \in \Omega} |u(x)| \quad \text{si } p = +\infty$$

On introduit l'espace de Sobolev anisotrope

$$W^{1, \vec{p}}(\Omega) = \{v \in L^{p_i}(\Omega) \mid D_i v \in L^{p_i}(\Omega), \forall i = 1, \dots, N\}.$$

muni de la norme

$$\|v\|_{W^{1, \vec{p}}(\Omega)} = \sum_{i=1}^N \left(\|v\|_{L^{p_i}(\Omega)} + \|D_i v\|_{L^{p_i}(\Omega)} \right) \quad (2.1)$$

Nous définissons aussi $W_0^{1, \vec{p}}(\Omega)$ comme suit

$$W_0^{1, \vec{p}}(\Omega) = \left\{ v \in W^{1, \vec{p}}(\Omega) \mid v = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \right\}$$

muni de la norme

$$\|v\|_{W_0^{1, \vec{p}}(\Omega)} = \sum_{i=1}^N \left(\int_{\Omega} |D_i v|^{p_i} dx \right)^{1/p_i} \quad (2.2)$$

Signalons que les deux normes $\|\cdot\|_{W^{1, \vec{p}}}$, $\|\cdot\|_{W_0^{1, \vec{p}}}$ sont équivalentes.

On peut aussi écrire cette définition des espaces de Sobolev anisotropes comme suit

Définition 2.1. (Espaces anisotropes de Sobolev) Soit un ouvert Ω de \mathbb{R}^N , les espaces de Sobolev anisotropes sont définis comme suit :

$$W^{1, p_i}(\Omega) = \{v \in W^{1,1}(\Omega); \partial_i v \in L^{p_i}(\Omega)\}$$

et

$$W_0^{1, p_i}(\Omega) = W^{1, p_i}(\Omega) \cap W_0^{1,1}(\Omega)$$

dotés de la norme habituelle

$$\|v\|_{W_0^{1, p_i}(\Omega)} = \sum_{i=1}^N \|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

Lemme 2.1. [10] Soit $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$, l'espace des fonctions indéfiniment dérivables et à support compact, par rapport la norme $\|\cdot\|_{W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)}$. Alors

$$W_0^{1,p^+}(\Omega) \subset W_0^{1,\vec{p}}(\Omega) \subset W_0^{1,p^-}(\Omega), \quad i = 1, \dots, N$$

Démonstration. .

1. Montrons que $\|v\|_{W_0^{1,p^-}(\Omega)} \leq C \|v\|_{W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)}$ tel que C est une constante strictement positive

$$\begin{aligned} \|v\|_{W_0^{1,p^-}(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^{p^-} dx \right)^{\frac{1}{p^-}} \\ &= \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{\frac{p^-}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p^-}} \\ &\leq C \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^{p^-} dx \right)^{\frac{1}{p^-}} \\ &\leq C' \sum_{i=1}^N \left(\int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^{p^-} dx \right)^{\frac{1}{p^-}} \end{aligned}$$

alors, grâce à l'inégalité de Hölder, on voit que

$$\begin{aligned} \|v\|_{W_0^{1,p^-}(\Omega)} &\leq C \sum_{i=1}^N \left[\left(\int_{\Omega} (|\partial_i v|^{p^-})^{\frac{p_i}{p^-}} dx \right)^{\frac{p^-}{p_i}} \cdot \left(\int_{\Omega} 1^{\gamma} dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right]^{\frac{1}{p^-}} \quad \text{tel que } \frac{1}{\gamma} + \frac{p^-}{p_i} = 1 \\ &\leq C' \sum_{i=1}^N \left[\left(\int_{\Omega} |\partial_i v|^{p_i} dx \right)^{\frac{p^-}{p_i}} \right]^{\frac{1}{p^-}} \\ &\leq C'' \sum_{i=1}^N \left(\int_{\Omega} |\partial_i v|^{p_i} dx \right)^{1/p_i} = C'' \|v\|_{W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)} \end{aligned}$$

d'où l'existence d'une constante $C = C''$ on a , $\|v\|_{W_0^{1,p^-}(\Omega)} \leq C \|v\|_{W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)}$.

par conséquent

$$W_0^{1,\vec{p}}(\Omega) \subset W_0^{1,p^-}(\Omega).$$

2. Maintenant pour prouver l'autre inclusion on rappelle que

$$\forall a \geq 0, \quad \alpha \leq \beta \Rightarrow a^{\alpha} \leq a^{\beta} + 1. \quad (2.3)$$

Soit $u \in W_0^{1,p_+}(\Omega)$, Alors pour tous $i = 1, \dots, N$ on a $p_i < p_+$, d'après l'inégalité (2.3) on voit que

$$\begin{aligned} |D_i u|^{p_i} &\leq |D_i u|^{p_+} + 1 \\ &\leq |\nabla u|^{p_+} + 1 \end{aligned}$$

donc, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |D_i u|^{p_i} dx &\leq \int_{\Omega} |\nabla u|^{p_+} dx + \int_{\Omega} 1 dx \\ &\leq \|u\|_{W_0^{1,p_+}(\Omega)}^{p_+} + |\Omega| \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{i=1}^N \left(\int_{\Omega} |D_i u|^{p_i} dx \right)^{\frac{1}{p_i}} \leq C, \quad \forall u \in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$$

Donc

$$W_0^{1,p_+}(\Omega) \subset W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$$

□

Lemme 2.2. *Il existe une constante c_i dépend de i , telle que*

$$\forall \varphi \in W_0^{1,p_i}(\Omega), \quad \|\varphi\|_{L^{p_i}(\Omega)} \leq c_i \|D_i \varphi\|_{L^{p_i}(\Omega)}, \quad i = 1, \dots, N$$

Démonstration. .

Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $x \in \text{supp}(\varphi)$, alors

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x_i} D_i \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_N) dt$$

posons $\hat{x}_i(t) = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_N)$, et comme

$$\text{supp}(\varphi) \subset [-a, a]^N = R_a, \quad a \in \mathbb{R}_+^*,$$

on voit que :

$$\varphi(x) = \int_{-a}^{x_i} D_i \varphi(\hat{x}_i(t)) dt$$

alors

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &\leq \int_{-a}^{x_i} |D_i \varphi(\hat{x}_i(t))| dt \\ &\leq \int_{-a}^a |D_i \varphi(\hat{x}_i(t))| dt \quad (\text{d'après l'inégalité de Hölder}) \\ &\leq (2a)^{1-\frac{1}{p_i}} \left(\int_{-a}^a |D_i \varphi(\hat{x}_i(t))|^{p_i} dt \right)^{\frac{1}{p_i}} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$|\varphi(x)|^{p_i} \leq C_i \int_{-a}^a |D_i \varphi(\hat{x}_i(t))|^{p_i} dt$$

on intègre sur R_a on obtient que :

$$\int_{R_a} |\varphi(x)|^{p_i} dx \leq \tilde{C}_i \int_{R_a} |D_i \varphi|^{p_i} dx$$

ce qui implique

$$\int_{\Omega} |\varphi(x)|^{p_i} dx \leq \tilde{C}_i \int_{\Omega} |D_i \varphi|^{p_i} dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Grâce à la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_0^{1,p_i}(\Omega)$ il vient

$$\int_{\Omega} |\varphi(x)|^{p_i} dx \leq \tilde{C}_i \int_{\Omega} |D_i \varphi|^{p_i} dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p_i}(\Omega)$$

Donc,

$$\|\varphi\|_{L^{p_i}(\Omega)} \leq C \|D_i \varphi\|_{L^{p_i}(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p_i}(\Omega). \quad (2.4)$$

□

Nous énonçons tout d'abord l'inégalité de Hölder dans $L^{\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$

2.1.1 Inégalité de Hölder

Rappelons un résultat important concernant les espaces $L^{\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$, qui sera utile dans la suite.

Lemme 2.3. (Inégalité de Hölder) Soit $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$, $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ tels que $1 < p_i \leq +\infty$ et $1 < q_i \leq +\infty$ pour tout $i = 1, \dots, N$.

Alors pour tout $u \in L^{\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$, $v \in L^{\vec{q}}(\mathbb{R}^N)$ et $\vec{r} = (r_1, r_2, \dots, r_N)$ avec

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i}, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.5)$$

on a

$$uv \in L^{\vec{r}}(\mathbb{R}^N) \quad \text{and} \quad \|uv\|_{L^{\vec{r}}} \leq \|u\|_{L^{\vec{p}}} \|v\|_{L^{\vec{q}}} \quad (2.6)$$

Démonstration.

Commençons par le cas où p_i et q_i sont finis pour tout $i = 1, 2, \dots, N$. Appliquant l'inégalité de Hölder usuelle sur la fonction uv avec $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1}$, nous obtenons

$$\|uv\|_{L^{r_1}(dx_1)} \leq \|u\|_{L^{p_1}(dx_1)} \|v\|_{L^{q_1}(dx_1)}$$

en tenant compte que $\frac{1}{r_2} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2}$ et utilisant de nouveau l'inégalité de Hölder, on voit que

$$\begin{aligned} \left\| \|uv\|_{L^{r_1}(dx_1)} \right\|_{L^{r_2}(dx_2)} &\leq \left\| \|u\|_{L^{p_1}(dx_1)} \|v\|_{L^{q_1}(dx_1)} \right\|_{L^{r_2}(dx_2)} \\ &\leq \left\| \|u\|_{L^{p_1}(dx_1)} \right\|_{L^{p_2}(dx_2)} \left\| \|v\|_{L^{q_1}(dx_1)} \right\|_{L^{q_2}(dx_2)}, \end{aligned}$$

Il résulte par récurrence, que

$$\|uv\|_{L^{\vec{r}}} \leq \|u\|_{L^{\vec{p}}} \|v\|_{L^{\vec{q}}}, \quad \frac{1}{r_i} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i}, \quad i = 1, \dots, N$$

Cas où :

Il existe $i_0 \in \{1, 2, \dots, N\}$ tel que $p_{i_0} = +\infty$ et q_{i_0} fini.

On prend dans ce cas $r_{i_0} = q_{i_0}$ et utilisons l'inégalité

$$\|uv\|_{L^{r_{i_0}}(dx_{i_0})} \leq \|u\|_{L^{+\infty}(dx_{i_0})} \|v\|_{L^{q_{i_0}}(dx_{i_0})}.$$

le résultat en découle.

Cas où : $p_{i_0} = q_{i_0} = +\infty$. Dans ce cas, nous posons $r_{i_0} = +\infty$ et utilisons le fait que

$$\|uv\|_{L^{+\infty}(dx_{i_0})} \leq \|u\|_{L^{+\infty}(dx_{i_0})} \|v\|_{L^{+\infty}(dx_{i_0})}.$$

Donc, l'inégalité (2.6) est prouvée. L'itération de (2.6) mène à la version suivante pour un produit de k fonctions : □

Corollaire 2.1. ([9]) Soit $\vec{r} = (r_1, r_2, \dots, r_N)$ et $\vec{p}^i = (p_1^i, p_2^i, \dots, p_N^i)$ tel que $1 < r_i \leq +\infty$, $1 < p_j^i \leq +\infty$ et

$$\frac{1}{r_j} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{p_j^i}, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Alors

$$\left\| \prod_{i=1}^k u_i \right\|_{\vec{r}} \leq \prod_{i=1}^k \|u_i\|_{\vec{p}^i}$$

2.1.2 Inégalité de Minkowski

Lemme 2.4. (Inégalité de Minkowski)

Soit $r \geq 1$, pour tous $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, nous avons

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} |v(x_1, \cdot)| dx_1 \right\|_{L^r(dx_2)} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \| |v(x_1, \cdot)| \|_{L^r(dx_2)} dx_1.$$

Démonstration.

Si $r = +\infty$ le résultat est évident. Supposons que $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et $r \in [1, +\infty[$, comme $\text{supp}(v) \subset [-a, a]^2$ avec $a > 0$, on peut écrire

$$I = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} |v(x_1, \cdot)| dx_1 \right\|_{L^r(dx_2)} = \left\| \int_{-a}^{+a} |v(x_1, \cdot)| dx_1 \right\|_{L^r(dx_2)}$$

grâce à la formule d'intégration de Riemann par rapport à x_1 sur l'intervalle $[-a, a]$ on voit ce

$$I = \left\| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2a}{n} \sum_{k=1}^n |v(-a + k \frac{2a}{n}, \cdot)| \right\|_{L^r(dx_2)}$$

et comme $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, il découle du théorème de convergence dominée de Lebesgue que

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \frac{2a}{n} \sum_{k=1}^n \left| v\left(-a + k \frac{2a}{n}, \cdot\right) \right| \right\|_{L^r(dx_2)}$$

pour que

$$\begin{aligned} I &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2a}{n} \sum_{k=1}^n \left\| \left| v\left(-a + k \frac{2a}{n}, \cdot\right) \right| \right\|_{L^r(dx_2)} \\ &= \int_{-a}^{+a} \left\| \left| v(x_1, \cdot) \right| \right\|_{L^r(dx_2)} dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| \left| v(x_1, \cdot) \right| \right\|_{L^r(dx_2)} dx_1 \end{aligned}$$

□

2.2 Injections anisotropes de Sobolev :

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N borné et régulier, $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ avec $\frac{1}{p} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i}$.

Nous avons maintenant le Théorème, concernant les injections anisotropes, suivant

Théorème 2.1. ([7]) Soit

$$\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N) \quad \text{et} \quad \bar{p} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i}.$$

Alors :

1. Si $\bar{p} < N$. On a, d'une part $W_0^{1, \vec{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{N\bar{p}}{N-\bar{p}}}(\Omega)$ et d'autre par :

$$W_0^{1, \vec{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in \left[1, \frac{N\bar{p}}{N-\bar{p}}\right].$$

2. Si $\bar{p} = N$. on a

$$W_0^{1, \vec{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, +\infty[.$$

3. Si $\bar{p} > N$. on a

$$W_0^{1, \vec{p}}(\Omega) \hookrightarrow C^{0, \beta}(\bar{\Omega}) \quad 0 < \beta = \frac{\alpha}{\frac{N}{p} + \alpha} < 1, \quad \alpha = 1 - \frac{N}{\bar{p}}.$$

où $W \hookrightarrow Y$ désigne une injection continue de W dans Y et $W \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ une injection compacte de W dans Y .

Corollaire 2.2. ([11]) Soit $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ tel que $1 < p_i < \frac{\bar{p}(N-1)}{N}$. L'injection

$$W_0^{1, \vec{p}}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p_i}(\Omega), \quad \forall i = 1, \dots, N$$

est compacte.

En effet, si $\bar{p} \geq N$, le résultat est évident. Soit $p_i \in \left] 1, \frac{\bar{p}(N+1)}{N} \right[$ tel que $\bar{p} < N$. Le fait que

$$\frac{\bar{p}(N+1)}{N} - \frac{N\bar{p}}{N-\bar{p}} = \bar{p} \left[\frac{N-\bar{p}-N\bar{p}}{N(N-\bar{p})} \right] = \bar{p}(N+1) \frac{\frac{N}{N+1} - \bar{p}}{N(N-\bar{p})} < 0,$$

montre que

$$p_i < \frac{\bar{p}(N+1)}{N} < \frac{N\bar{p}}{N-\bar{p}}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

De sorte que l'injection

$$W_0^{1, \vec{p}}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p_i}(\Omega)$$

est compacte pour tout $i = 1, \dots, N$.

Remarque 2.2. En générale l'injection

$$W_0^{1, \vec{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_i}(\Omega)$$

n'est pas toujours compacte pour tout $p_i > 1$ et $i = 1, \dots, N$. En effet, nous prenons l'exemple suivant

$$p_1 = p_2 = p_3 = 2, \quad p_4 = 100 \quad \text{et} \quad N = 4$$

nous obtenons que

$$\bar{p} = \frac{400}{151} < N = 4 \quad \text{et} \quad \bar{p}^* = \frac{N\bar{p}}{N-\bar{p}} = \frac{400}{51} < p_+ = 100.$$

Inégalités anisotrope de Sobolev

Le but de ce chapitre est de généraliser l'inégalité classique de Sobolev au cas anisotrope où la fonction et ses différentes dérivées partielles appartiennent à des espaces de Lebesgue différents. Nous nous basons principalement sur les deux articles [1, 14]. Nous mettons en avant des résultats importants, comme les espaces anisotropes de Sobolev. Nous nous permettons d'omettre certaines preuves qui ne paraissent pas essentielles à la compréhension du sujet, renvoyant par conséquent le lecteur aux articles cités plus haut.

3.1 Inégalité de Sobolev

Sous sa forme classique, l'inégalité de Sobolev fournit pour la fonction régulière une estimation d'une fonction régulière u pour la norme de L^p du gradient de la fonction u . Spécifiquement, si $1 \leq p < N$, on a

$$\|u\|_q \leq K \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_p, \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \quad (3.1)$$

avec q défini par

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} \quad (3.2)$$

où D_i dénote l'opérateur différentiel partiel $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\|\cdot\|_p$ désigne la norme dans l'espace $L^p(\mathbb{R}^N)$ et la constante K dépend seulement de p et de N . Dans sa forme classique, l'inégalité de Sobolev fournit pour la fonction régulière une estimation d'une fonction régulière u pour la norme L^p du gradient de la fonction u . Spécifiquement, si $1 \leq p < N$ on a

Notre but, dans ce chapitre, est de généraliser l'inégalité de Sobolev au cas anisotrope où les diverses dérivées $D_i u$ appartiennent à espace des L^{p_i} différents, $i = 1, \dots, N, p_i \geq 1$,

i.e.

$$u \in L^{p_i}(\mathbb{R}^N) \quad \text{et} \quad D_i u \in L^{p_i}(\mathbb{R}^N), \quad i = 1, \dots, N.$$

Il est bien connu qu'aucune inégalité de type (3.1) n'est possible pour tout $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ à moins que q satisfasse (3.2). Pour le voir, on choisit dans (3.1) la dilatation $u_\lambda = u(\lambda x)$, $\lambda > 0$ de la fonction u au lieu de u . Il vient, d'une part :

$$\begin{aligned} \|D_i u_\lambda\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |D_i(u(\lambda x))|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \lambda \left(\int_{\mathbb{R}^N} |D_i(u(\lambda x))|^p dx \right)^{1/p} \end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable $t = \lambda x$, on peut écrire

$$\|D_i u_\lambda\|_p = \lambda^{1-N/p} \|D_i u\|_p, \quad \forall \lambda > 0$$

Et d'autre part on a aussi, pour tout $\lambda > 0$:

$$\|u_\lambda\|_q = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(\lambda x)|^q dx \right)^{1/q} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\lambda^N} |u(x)|^q dx \right)^{1/q} = \lambda^{-N/q} \|u\|_q$$

il résulte alors de (3.1), pour tout $u \neq 0$, que

$$K \frac{\sum_{i=1}^N \|D_i u_\lambda\|_p}{\|u_\lambda\|_q} = \lambda^{(N/q)-(N/p)+1} K \frac{\sum_{i=1}^N \|D_i u\|_p}{\|u\|_q}, \quad \forall \lambda > 0$$

on a aussi, pour tout $\lambda > 0$:

$$K \frac{\sum_{i=1}^N \|D_i u\|_p}{\|u\|_q} \geq \lambda^{-\left(\frac{N}{q}\right) + \left(\frac{N}{p}\right) - 1}$$

ceci n'est pas possible à moins que l'exposant de λ soit zéro $(-\frac{N}{q}) + (\frac{N}{p}) - 1 = 0$, i.e., $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$. Cette contrainte sur q se prolonge, car nous la verrons, au cas anisotrope également.

Pour traiter le cas anisotrope et voir à quelle condition, sur le réel $q \geq 1$, on a

$$\|u\|_q \leq K \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{p_i}, \quad \forall u \in L^{p_i}(\mathbb{R}^N) \quad \text{et} \quad D_i u \in L^{p_i}(\mathbb{R}^N), \quad i = 1, \dots, N.$$

on aura besoin de ce qui suit .

3.2 Norme mêlée

Soit u une fonction réelle mesurable sur \mathbb{R}^N et $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N) \in \mathbb{R}^N$ avec

$1 \leq p_i \leq +\infty$ tel que pour tout $i = 1, \dots, N$.

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N)|^{p_i} dx_i < +\infty & \text{si } 1 \leq p_i < +\infty, \\ \text{ess sup}_{x_i \in \mathbb{R}} |u(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N)| < +\infty & \text{si } p_i = +\infty, \end{cases}$$

Nous pouvons donc, calculer la norme de $u(x_1, x_2, \dots, x_N)$ par rapport à x_1 dans $L^{p_1}(\mathbb{R})$, puis la norme du résultat par rapport à x_2 dans $L^{p_2}(\mathbb{R})$, enfin on termine par la norme par rapport à x_N dans $L^{p_N}(\mathbb{R})$, on obtient un nombre réel qu'on le note

$$\|u\|_{L^{\vec{p}}(\mathbb{R}^N)} = \left\| \dots \left\| \|u\|_{L^{p_1}(dx_1)} \right\|_{L^{p_2}(dx_2)} \dots \right\|_{L^{p_N}(dx_N)}$$

où

$$\|u\|_{L^{p_i}(dx_i)} = \begin{cases} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N)|^{p_i} dx_i \right)^{1/p_i} & \text{si } 1 \leq p_i < +\infty, \\ \sup \text{ess}_{x_i \in \mathbb{R}} |u(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N)| & \text{si } p_i = +\infty, \end{cases}$$

Par exemple si les nombres p_i sont finis, alors

$$\|u\|_{\vec{p}} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x_1, x_2, \dots, x_N)|^{p_1} dx_1 \right]^{p_2/p_1} dx_2 \right]^{p_3/p_2} \dots dx_N \right]^{1/p_N}$$

Notons par $L^{\vec{p}} = L^{\vec{p}}(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des fonctions mesurables définies de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} , telles que $\|u\|_{L^{\vec{p}}} < \infty$. L'espace $L^{\vec{p}}$ est un espace de Banach ($p_i \geq 1$) muni de la norme $\|\cdot\|_{\vec{p}}$ voir par exemple [3]

Exemple 3.1. Soit p_i fini pour tout $i = 1, 2, 3$, on a

1. $N = 2$:

$$\|u\|_{(p_1, p_2)} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right]^{p_2/p_1} dx_2 \right]^{1/p_2}$$

2. $N = 3$:

$$\|u\|_{(p_1, p_2, p_3)} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x_1, x_2, x_3)|^{p_1} dx_1 \right]^{p_2/p_1} dx_2 \right]^{p_3/p_2} dx_3 \right]^{1/p_3}$$

Si $N = 3$ et $p = +\infty$, on obtient

$$\|u\|_{(p_1, p_2, +\infty)} = \sup \text{ess}_{x_3 \in \mathbb{R}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x_1, x_2, x_3)|^{p_1} dx_1 \right]^{p_2/p_1} dx_2 \right]^{1/p_2}$$

Donnons deux résultats élémentaires au sujet de normes mêlées, une inégalité concernant l'effet, sur les normes mêlées, de permuter l'ordre dans lequel les normes de $L^{p_i}(\mathbb{R}^N)$ sont évaluées.

3.2.1 Normes mêlées permutées

La définition de $\|u\|_{\vec{p}}$ exige des normes successives de L^{p_i} d'être calculées dans l'ordre de l'aspect des variables dans la forme de la fonction u .

Cet ordre peut être changé en permutant l'ordre des intégrales et les réels associés.

Soit σ une permutation de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ définie par :

$$\sigma x = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \quad \text{et} \quad \sigma \vec{p} = (p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(2)}, \dots, p_{\sigma(n)}).$$

Si σu définie par $\sigma u(\sigma u) = u(x)$, (i.e. $\sigma u(x) = u(\sigma^{-1}x)$) donc $\|\sigma u\|_{\sigma \vec{p}}$ s'appelle une norme mêlée permutée de la fonction u .

Exemple 3.2. pour $N = 2$ et $\sigma\{1, 2\} = \{2, 1\}$, donc

$$\|u\|_{\vec{p}=(p_1, p_2)} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right]^{p_2/p_1} dx_2 \right]^{1/p_2}$$

et

$$\|u\|_{\sigma \vec{p}} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x_1, x_2)|^{p_2} dx_2 \right]^{p_1/p_2} dx_1 \right]^{1/p_1}$$

Notez que $\|u\|_{\vec{p}}$ et $\|u\|_{\sigma \vec{p}}$ contiennent les mêmes normes de L^{p_i} qui sont associées à les mêmes variables ; seulement l'ordre de l'évaluation de ces normes est changé.

Lemme 3.1. (Inégalité de permutation) Soit $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$, $p_i \geq 1$,

$i = 1, 2, \dots, N$. Pour toute permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, \dots, N\}$ il existe deux permutations σ^* et σ_* de l'ensemble $\{1, 2, \dots, N\}$ telles que les composantes de $\sigma_* \vec{p}$ et de $\sigma^* \vec{p}$ sont croissantes et décroissantes respectivement :

$$p_{\sigma_*(1)} \leq p_{\sigma_*(2)} \leq \dots \leq p_{\sigma_*(N)}$$

$$p_{\sigma^*(1)} \geq p_{\sigma^*(2)} \geq \dots \geq p_{\sigma^*(N)}$$

Alors pour toute permutation σ de $\{1, 2, \dots, N\}$ et pour toute fonction $u \in D(\mathbb{R}^N)$ on a

$$\|\sigma_* u\|_{\sigma_* \vec{p}} \leq \|\sigma u\|_{\sigma \vec{p}} \leq \|\sigma^* u\|_{\sigma^* \vec{p}} \quad (3.3)$$

Démonstration.

Comme pour toute permutation σ on peut la décomposer en produit de permutations σ_i transforme deux éléments successifs et laisse les autres fixés. Donc la preuve réduite au cas particulier : pour tout $1 \leq p_1 \leq p_2$, on a

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |u|^{p_1} dx_1 \right]^{p_2/p_1} dx_2 \right]^{1/p_2} \leq \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |u|^{p_2} dx_2 \right]^{p_1/p_2} dx_1 \right]^{1/p_1} \quad (3.4)$$

En effet, utilisant le lemme 2.4 (Inégalité de Minkowski) pour $v = |u|^{p_1}$ avec $r = \frac{p_2}{p_1}$ et p_2 fini, il vient

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x_1, \cdot)|^{p_1} dx_1 \right\|_{L^{\frac{p_2}{p_1}}(dx_2)} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \| |u(x_1, \cdot)|^{p_1} \|_{L^{\frac{p_2}{p_1}}(dx_2)} dx_1.$$

par conséquent

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x_1, \cdot)|^{p_1} dx_1 \right\|_{L^{\frac{p_2}{p_1}}(dx_2)}^{\frac{1}{p_1}} \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \| |u(x_1, \cdot)|^{p_1} \|_{L^{\frac{p_2}{p_1}}(dx_2)} dx_1 \right)^{\frac{1}{p_1}}.$$

d'où l'inégalité (3.4). Si p_1 fini et $p_2 = +\infty$, écrivant :

$$\sup_{x_2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\sup |u(x_1, x_2)||^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{1}{p_1}}.$$

nous obtenons

$$\|u\|_{(p_1, +\infty)} \leq \|\sigma u\|_{(+\infty, p_1)} \quad \text{with} \quad \sigma(p_1, +\infty) = (+\infty, p_1).$$

Si $p_1 = p_2 = +\infty$, le résultat est évident. □

3.3 Inégalités anisotrope de Sobolev

Soient $p_i \geq 1$, $q \geq 1$ et u une fonction tel que

$$u \in L^{p_i}(\mathbb{R}^N) \quad \text{et} \quad D_i u \in L^{p_i}(\mathbb{R}^N), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

L'inégalité de la forme

$$\|u\|_{L^q} \leq k \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^{p_i}}, \quad k \text{ est une constante indépendante de } u \quad (3.5)$$

S'appelle inégalité anisotrope, parce que différentes normes de L^{p_i} sont employées pour estimer des dérivées dans différentes directions. Dans cette partie nous voulons voir à quelles conditions sur les réels p_i et q_i l'inégalité (3.5) sera vraie, ensuite sur ces conditions nous la prouverons. Commençons par

Lemme 3.2. *Soit \bar{p} la moyenne harmonique de p_i , i.e. $\frac{1}{\bar{p}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i}$. S'il existe une constante k telle que, pour toute fonction $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on a*

$$\|u\|_q \leq K \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^{p_i}(\Omega)}$$

Alors

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{\bar{p}} - \frac{1}{N} \quad \text{avec } \bar{p} < N$$

Démonstration.

Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ tel que $0 < \lambda_i < +\infty$ pour tout $i = 1, \dots, N$ et u une fonction appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ vérifiant l'inégalité (3.5). Introduisons la fonction u_λ (la dilatation anisotrope) définie par

$$u_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_N) = u(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_N x_N), \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$$

On a, d'une part

$$\|u_\lambda\|_q^q = \int_{\mathbb{R}^N} |u(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_N x_N)|^q dx = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_N)^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |u(t_1, t_2, \dots, t_N)|^q dt$$

d'où

$$\|u_\lambda\|_q = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_N)^{-\frac{1}{q}} \|u\|_q \quad (3.6)$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \|D_i u_\lambda\|_{p_i}^{p_i} &= \lambda_i^{p_i} \int_{\mathbb{R}^N} |D_i u(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_N x_N)|^{p_i} dx \\ &= \lambda_i^{p_i} (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_N)^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |D_i u(t_1, t_2, \dots, t_N)|^{p_i} dt \end{aligned}$$

de sorte que

$$\|D_i u_\lambda\|_{p_i} = \lambda_i (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_N)^{\frac{-1}{p_i}} \|D_i u\|_{p_i} \quad (3.7)$$

Soit $t > 0$, on peut choisir λ de telle sorte que :

$$\lambda_i (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_N)^{\frac{1}{p_i}} = t^{-1}, \quad i = 1, \dots, N$$

Ce qui donne

$$\prod_{i=1}^N \lambda_i (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_N)^{\frac{-1}{p_i}} = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_N)^{1 - \sum_{i=1}^N 1/p_i} = t^{-N}$$

donc, en remarquant que $\bar{p} < N$ implique que $\sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} > 1$, on obtient

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_N = t^{N / (\sum_{i=1}^N 1/p_i - 1)} \quad \text{et} \quad \lambda_i = t^{-1} \cdot t^{N/p_i (\sum_{i=1}^N 1/p_i - 1)}.$$

Soit maintenant $u_\lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et vérifie (3.5), en tenant compte de (3.6) et (3.7), on voit que

$$K \frac{\sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^{p_i}}}{\|u\|_q} = \sum_{i=1}^N K \frac{\|D_i u_\lambda\|_{L^{p_i}}}{\|u_\lambda\|_q} \frac{(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_N)^{-1/q}}{\lambda_i (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_N)^{-1/p_i}} \quad \text{pour} \quad u \neq 0.$$

de (3.5), il vient que

$$\begin{aligned} K \frac{\sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^{p_i}}}{\|u\|_q} &\geq \frac{t^{-N/[q(\sum_{i=1}^N 1/p_i - 1)]}}{t^{-1}} \\ &\geq t^{-N/[q(\sum_{i=1}^N 1/p_i - 1)] + 1}, \quad \forall t > 0 \end{aligned}$$

par conséquent

$$-\frac{N}{q(\sum_{i=1}^N 1/p_i - 1)} + 1 = 0$$

ceci montre que

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{\bar{p}} - \frac{1}{N}$$

□

Théorème 3.1. Soit $p_i \geq 1$ pour $i = 1, \dots, N$. Si

$$\bar{p} < N \quad \text{avec} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{\bar{p}} - \frac{1}{N}$$

alors il existe une constante K telle que l'inégalité anisotrope de Sobolev

$$\|u\|_q \leq K \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^{p_i}}. \quad (3.8)$$

est valable pour tous $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$

Si $\bar{p} \geq N$ l'inégalité (3.8) est vraie pour tout $q \geq 1$ et K dépend de q et $\text{supp}(u)$

Démonstration.

• Cas où : $\bar{p} < N$. Soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et $s_i \geq 1$, pour $i = 1, 2, \dots, N$. Comme la fonction u a support compact dans \mathbb{R}^N , on peut donc écrire (pour $s_i > 1$) :

$$|u(x_1, x_2, \dots, x_N)|^{s_i} = \int_{-\infty}^{x_i} D_i |u(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_N)|^{s_i} dt$$

par conséquent

$$\sup_{x_i \in \mathbb{R}} |u(x_1, x_2, \dots, x_N)|^{s_i} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} D_i |u(x_1, x_2, \dots, x_N)|^{s_i} dx_i$$

intégrant l'inégalité précédente par rapport les $n-1$ composantes $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N$, il obtient

$$\|\sigma_i |u|^{s_i}\|_{(+\infty, 1, 1, \dots, 1)} \leq \|D_i |u|^{s_i}\|_1 = \|D_i |u|^{s_i}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \quad (3.9)$$

où σ_i est une permutation de l'ensemble $\{1, 2, \dots, N\}$ défini par

$$\sigma_i(1) = i, \quad \sigma_i(i) = 1, \quad \text{et} \quad (\sigma_i(j) = j, \quad \forall j \neq 1, i)$$

de sorte que

$$\sigma_i(p_1 = 1, 1, \dots, 1, p_i = +\infty, 1, \dots, 1) = (+\infty, 1, \dots, 1).$$

Posons maintenant

$$\vec{v}_i = (1, 1, \dots, +\infty, 1, 1, \dots, 1) = (v_1^i = 1, v_2^i = 1, \dots, v_i^i = +\infty, \dots, v_N^i = 1) \quad (3.10)$$

tel que la composante d'ordre i du vecteur \vec{v}_i égale à ∞ et les autres composantes prennent la valeur 1.

Comme

$$v_{\sigma_i(1)}^i = v_i^i = +\infty \geq v_{\sigma_i(2)}^i = 1 \geq \dots \geq v_{\sigma_i(N)}^i = 1$$

et grâce au lemme 3.1, l'inégalité (3.9) devient

$$\| |u|^{s_i} \|_{\vec{v}_i} \leq \| \sigma_i |u|^{s_i} \|_{(+\infty, 1, 1, \dots, 1)} \leq \| D_i |u|^{s_i} \|_1 = s_i \| |u|^{s_i-1} D_i u \|_1$$

il résulte alors de l'inégalité de Hölder que

$$\| |u|^{s_i} \|_{\vec{v}_i} \leq \| D_i |u|^{s_i} \|_1 = s_i \| |u|^{s_i-1} D_i u \|_1 \leq K \| |u|^{s_i-1} \|_{(s_i-1)p'_i} \| D_i u \|_{p_i} \quad (3.11)$$

avec $p'_i = p_i/(p_i - 1)$ et ($p'_i = +\infty$ if $p_i = 1$)

Soit $s = s_1 + s_2 + \dots + s_N$ et $1/r = 1/r_i = \sum_{k=1, k \neq i}^N 1/v_k^i$, donc $r = \frac{1}{N-1}$ et

$$\| \cdot \|_{\vec{r}} = \| \cdot \|_{1/(N-1)}, \quad \vec{r} = (r, r, \dots, r)$$

Écrivant

$$\| |u|^{s/(N-1)} \|_{\vec{r}} = \| |u|^s \|_{1/(N-1)} = \| |u|^{s_1+s_2+\dots+s_N} \|_{\vec{r}} = \left\| \prod_{i=1}^N |u|^{s_i} \right\|_{\vec{r}}$$

et utilisant le corollaire 2.1, on obtient

$$\| |u|^{s/(N-1)} \|_{\vec{r}} = \left\| \prod_{i=1}^N |u|^{s_i} \right\|_{\vec{r}} \leq \prod_{i=1}^N \| |u|^{s_i} \|_{\vec{v}_i} \quad \text{avec} \quad 1/r_i = \sum_{k=1, k \neq i}^N 1/v_k^i \quad (3.12)$$

De (3.11) et l'inégalité ci-dessus, il vient

$$\| |u|^{s/(N-1)} \|_{\vec{r}} \leq K^N \prod_{i=1}^N \| |u|^{s_i-1} \|_{(s_i-1)p'_i} \| D_i u \|_{p_i} \quad (3.13)$$

On choisit s de telle sorte que

$$s = \frac{N(N-1)}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} - 1} \quad \text{et} \quad s_i = \frac{N(p_i-1)}{p_i(\sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} - 1)} + 1, \quad p_i \geq 1.$$

ce choix est possible car la condition $\bar{p} < N$ montre que $\sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} > 1$. Si $p_i = 1$ nous obtenons $s_i = 1$ (est la preuve dans ce cas similaire à celle du cas $p_i > 1$). si $p_i > 1$ nous écrivons

$$s = \frac{N(N-1)}{N-1 - \sum_{i=1}^N \frac{1}{p'_i}} \quad \text{et} \quad s_i = \frac{N}{p'_i(N-1 - \sum_{i=1}^N \frac{1}{p'_i})} + 1.$$

Posons $q = \frac{s}{N-1}$, par conséquent

$$(s-1)p'_i = \frac{s}{N-1} = q, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^N s_i = s \quad (3.14)$$

Donc, il résulte de (3.13) et (3.14) que :

$$\|u\|_q^s \leq K^N \prod_{i=1}^N \|u\|_q^{s_i-1} \|D_i u\|_{p_i} = K^N \|u\|_q^{s-N} \prod_{i=1}^N \|D_i u\|_{p_i}$$

cela implique que

$$\|u\|_q \leq K \left(\prod_{i=1}^N \|D_i u\|_{p_i} \right)^{\frac{1}{N}}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \quad (3.15)$$

par conséquent,

$$\|u\|_q \leq K \left(\prod_{i=1}^N \|D_i u\|_{p_i} \right)^{\frac{1}{N}} \leq K \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{p_i}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$$

En fin, il reste de vérifier que

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{\bar{p}} - \frac{1}{N}$$

Utilisant (3.14), on voit que

$$\sum_{i=1}^N s_i = \sum_{i=1}^N \left[1 + q \left(1 - \frac{1}{p_i} \right) \right] = N + q \left(N - \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} \right) = s = q(N-1),$$

Donc,

$$N + q \left(N - \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} \right) = q(N-1) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\bar{p}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i}$$

d'où

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{\bar{p}} - \frac{1}{N} \quad \text{avec} \quad \bar{p} < N$$

- Cas où : $\bar{p} \geq N$. Remarquer que $\bar{p} \geq N$ montre que $\sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} \leq 1$. Posons $\tau_i = p_i \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i}$,

donc on a

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{\tau_i} = 1 \quad \text{et} \quad 1 < \tau_i < p_i; \quad i = 1, \dots, N.$$

Fixons $q > 1$ tel que :

$$q > \frac{\tau_i}{\tau_i - 1}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Prenant

$$a_i = \frac{1}{N-1} \left(\frac{\tau_i - 1}{\tau_i} \right), \quad i = 1, \dots, N$$

et en répétant le même raisonnement comme celui de (3.11) avec

$$s_i = a_i q(N-1) \quad \text{et} \quad s = \sum_{i=1}^N s_i = q(N-1),$$

on montre que

$$\| |u|^{s_i} \|_{\vec{v}_i} \leq \| D_i |u|^{s_i} \|_1 = s_i \| |u|^{s_i-1} D_i u \|_1$$

où \vec{v}_i donné par (3.10). Utilisant l'inégalité précédente et Hölder, on voit que

$$\begin{aligned} \| |u|^{s_i} \|_{\vec{v}_i} &\leq s_i \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q_i} dx \right)^{\frac{\tau_i-1}{\tau_i}} \cdot \| D_i u \|_{\tau_i} \\ &\leq s_i \left(\int_{\text{supp}(u)} |u|^{q_i} dx \right)^{\frac{\tau_i-1}{\tau_i}} \cdot \| D_i u \|_{\tau_i} \end{aligned}$$

où

$$q_i = (a_i q(N-1) - 1) \frac{\tau_i}{\tau_i - 1} = q - \frac{\tau_i}{\tau_i - 1} < q.$$

Il résulte de Hölder de nouveau, en tenant compte que $\tau_i \leq p_i$:

$$\| |u|^{s_i} \|_{\vec{v}_i} \leq K \| u \|_q^{q_i \frac{\tau_i-1}{\tau_i}} \cdot \| D_i u \|_{p_i}, \quad K \text{ une constante dépend de } \text{supp}(u).$$

En répétant, de la même manière, le raisonnement de celui de (3.12) on prouve que

$$\| u \|_q^s \leq \prod_{i=1}^N \| |u|^{s_i} \|_{\vec{v}_i} \quad \text{et} \quad s = q(N-1).$$

En combinant les deux dernières inégalités, on voit que

$$\| u \|_q^s \leq K^N \| u \|_q^{s-N} \cdot \prod_{i=1}^N \| D_i u \|_{p_i}$$

où

$$\sum_{i=1}^N q_i \frac{\tau_i - 1}{\tau_i} = \sum_{i=1}^N (a_i q(N-1) - 1) = s - N.$$

Par conséquent

$$\| u \|_q \leq K \left(\prod_{i=1}^N \| D_i u \|_{p_i} \right)^{\frac{1}{N}}, \quad \forall q > \frac{\tau_i}{\tau_i - 1}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Maintenant, prenons $q \in [1, +\infty[$.quelconque. Posons

$$r = \max \left\{ q, 1 + \max_{1 \leq i \leq N} \frac{\tau_i}{\tau_i - 1} \right\} > \max_{1 \leq i \leq N} \frac{\tau_i}{\tau_i - 1}$$

de sorte que

$$\|u\|_r \leq K \left(\prod_{i=1}^N \|D_i u\|_{p_i} \right)^{\frac{1}{N}}$$

et, comme $q \leq r$ on peut déduire que

$$\|u\|_q \leq K \left(\prod_{i=1}^N \|D_i u\|_{p_i} \right)^{\frac{1}{N}}, \quad \forall q \in [1, +\infty[.$$

Ceci achève la démonstration du Théorème 3.1 . □

Corollaire 3.1. ([8]) Soit Ω un borné et régulier dans \mathbb{R}^N ouvert, u est une fonction appartient à l'espace $\bigcap_{i=1}^N W_0^{1,\alpha_i}(\Omega)$

En utilisant (3.15) et la densité de $W_0^{1,\alpha_i}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$,on voit que

$$\|u\|_s \leq K \left(\prod_{i=1}^N \|D_i u\|_{\alpha_i} \right)^{\frac{1}{N}}, \quad \forall u \in \bigcap_{i=1}^N W_0^{1,\alpha_i}(\Omega) \quad (3.16)$$

où

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{\bar{\alpha}} - \frac{1}{N} \quad \text{avec } \bar{\alpha} < N.$$

Si $\bar{\alpha} \geq N$, l'inégalité (3.16) est vraie pour tout $s \in [1, +\infty[$ et la constante K dépend de $|\Omega|$.

Lemme 3.3. (Inégalité anisotrope de Sobolev[14])

Soit $Q_T = (0, T)\Omega$ un cube de \mathbb{R}^N avec des faces parallèles de coordonnées. Supposons $p_i \geq 1, \quad i = 1, \dots, N$ et $u \in \bigcap_{i=1}^N W^{1,p_i}(\Omega)$. Alors

$$\|u\|_{L^s(Q)} \leq K \prod_{i=1}^N \left(\|u\|_{L^{p_i}(Q)} + \|D_i u\|_{L^{p_i}(Q)} \right)^{\frac{1}{N}}, \quad (3.17)$$

où $s = \bar{p}^* = \frac{N\bar{p}}{N-\bar{p}}$ si $\bar{p} < N$ avec \bar{p} donné par $\frac{1}{\bar{p}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i}$. La constante K dépend de N et p_i , En outre, si $\bar{p} \geq N$, l'inégalité (3.17) est vrai pour tous $s \geq 1$, et K dépend de s et $|Q|$.

Bibliographie

- [1] R.Adams, *Anisotropic sobolev inequalties*. Casopis pro pestovani matematiky **113**, 276-279 (1988).15
- [2] S. Aliane ,*Existence et régularité de la solution de quelques problemes elliptiques dégénérés* Université Ben youcef benkhadda (2020), algeria
- [3] A. Benedek and Panzone.R. *The space L^p with mixed norme*. Duke Math. J**28**, 301-324 (1961).17
- [4] H.Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, Paris (1987).117
- [5] H.Brézis, *Equation et inéquation non linéaire dans les espaces vectoriels en dualité*. Annales de l'institut Fourier 18.1 115-175 (1968).
- [6] H. Brézis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York, 2011.
- [7] J. Haskovec and Schmeiser.C.A *Note on the anisotropic generalizations of the sobolev and morrey embedding theorems*. Monatshefte für Math **158**,181-195 (2009). 29
- [8] F.Li, *Anisotropic Elliptic Equations in L^{m^*}* , Nonlinear Analisis **8** 417-422 (2001).28
- [9] R. Mecheter, *Anisotropic parabolic problem in R^N with variable exponent and locally integrable data*, doctoral thesis, university of M'sila. Algéria (2020).
- [10] R.Mecheter, *Étude d'un problème parabolique anisotrope a données mesures* université de M'sila.Algérie (2009).
- [11] F. Mokhtari, *Problèmes paraboliques anisotropes à données dans un espace d'Orlicz ou mesures* (2011).

- [12] S. M. Nikolskii, *Imbedding theorems for functions with partial derivatives considered in various metrics*, Izd. Akad. Nauk SSSR **22** (1958), 321-336.
- [13] L.N. Slobodeckii, *Generalized Sobolev spaces and their application to boundary problems for partial differential equations*, Leningrad. Gos. Ped. Inst. Ucen. Zap, (1958), vol. 197, 54-112.
- [14] M.Troisi, *Theoremi di inclusione per spazi di Sobolev non isotropi*, Ricerche Mat **18**,3-24 (1969).35

Abstract

The goal in this thesis is to generalize the classical Sobolev inequality (1) to the anisotropic case where the function u and its different partial derivatives $D_i u$ belong to different Lebesgue L^{p_i} , $i = 1, \dots, N$. More specifically, if $p_i \geq 1$, $q \geq 1$ and u a function such that

$$u \in L^{p_i}(\mathbb{R}^N) \quad \text{et} \quad D_i u \in L^{p_i}(\mathbb{R}^N), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

The inequality of form

$$\|u\|_{L^q} \leq k \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^{p_i}}, \quad k \text{ is a constant independent of } u \quad (3.18)$$

with q defined by $\frac{1}{q} = \frac{1}{\bar{p}} - \frac{1}{N}$. where \bar{p} the harmonic mean of p_i defined by $\frac{1}{\bar{p}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i}$.

The inequality (3.18) is called anisotropic Sobolev inequality.

keywords : anisotropic Sobolev space, mixed norm L^p space, Sobolev inequality.

Résumé

Le but dans cette mémoire est de généraliser l'inégalité classique de Sobolev (1) au cas anisotrope où la fonction u et ses différentes dérivées partielles $D_i u$ appartiennent à des espaces de Lebesgue différents L^{p_i} , $i = 1, \dots, N$. Plus précisément, si $p_i \geq 1$, $q \geq 1$ et u une fonction tel que

$$u \in L^{p_i}(\mathbb{R}^N) \quad \text{et} \quad D_i u \in L^{p_i}(\mathbb{R}^N), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

L'inégalité de la forme

$$\|u\|_{L^q} \leq k \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^{p_i}}, \quad k \text{ est une constante indépendante de } u \quad (3.19)$$

avec q défini par $\frac{1}{q} = \frac{1}{\bar{p}} - \frac{1}{N}$. Où \bar{p} la moyenne harmonique des p_i définie par $\frac{1}{\bar{p}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i}$.

L'inégalité (3.19) s'appelle inégalité anisotrope de Sobolev.

mots-clés : espace de Sobolev anisotrope, norme mixte L^p espace, inégalité de Sobolev

ملخص

الهدف من هذه الرسالة هو تعميم متباينة سوبولاف الكلاسيكية (١) الى الحالة متعددة الخواص حيث تنتمي الدالة u ومشتقاتها الجزئية المختلفة $D_i u$ إلى فضاءات لوبيغ المتعددة L^{p_i} , $i = 1, \dots, N$ وبشكل أكثر تحديداً، إذا كان $q \geq 1$, $p_i \geq 1$ و u دالة حيث

$$u \in L^{p_i}(\mathbb{R}^N) \quad \text{et} \quad D_i u \in L^{p_i}(\mathbb{R}^N), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

المتراجحة من الشكل

$$(٣.٢٠) \quad \|u\|_{L^q} \leq k \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^{p_i}},$$

حيث k ثابت مستقل عن u و q معرف كما يلي $\frac{1}{q} = \frac{1}{\bar{p}} - \frac{1}{N}$. حيث \bar{p} الوسط التوافقي للقيم p_i

المعرف بالعبارة التالية

$$\frac{1}{\bar{p}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i}.$$

المتراجحة (٣.٢٠) تسمى متراجحة سوبولاف المتعددة

كلمات مفتاحية: فضاءات سوبولاف المتعددة، متراجحة سوبولاف