



N° d'ordre:

UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE: Faculté des Sciences et des Sciences de l'Ingénieur

Département de : Génie Mécanique

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de:

Magistère

Spécialité: génie mécanique

Option: construction mécanique

P a r

HAMRIT Fareh

SUJET

**ANALYSE DES STRUCTURES DISCRETES PAR LA METHODE
DES ELEMENTS FINIS**

Soutenu publiquement le devant le jury composé de:

M ^r : BOUCHOUCHA. A	Président	Pr	Université de Constantine
M ^r : NECIB.B	Rapporteur	Pr	Université de Constantine
M ^r : MAIRECHE. A	Examineur	MC	Université de M'sila
M ^r : FARSI .CH	Examineur	Dr	Université de M'sila

RESUME

Les structures discrètes en forme de barre ou poutre sont d'une application de grande importance dans de nombreux secteurs de l'industrie, telle que : la construction mécanique spatiale ou robotique, aérodynamique, le génie civil. La technique de calcul de ces structures a connu durant ces dernières années un développement considérable. La méthode des éléments finis est de nos jours un outil puissant, disponible à des coûts raisonnables, le temps de modélisation est désormais réduit, telle que la prise en main l'utilisation de l'ordinateur. Pour atteindre des calculs de ces structures moins coûteux et plus rapide, on a développé un programme en langage « PASCAL », qui permet la détermination des déplacements, les réactions dans les nœuds, et les forces axiales dans les éléments. Des exemples de vérification ont été faits, sous différentes charges et conditions aux limites. Les structures proposées nous a permis d'approfondir nos connaissances à l'application de la méthode des éléments finis dans l'analyse des structures discrètes. Ce programme développé donne des meilleurs résultats de calcul comparé au logiciel « SAP 2000 ».

ABSTRACT

The discrete structures bar or beam-shaped are of great importance application in many sectors of industry, such as: space mechanical engineering or robots, aerodynamic and civil engineering. The techniques of calculation of these structures experienced in the last few years a considerable development. The finite element method is nowadays a powerful tool, available at reasonable cost, and time of modeling reduced, with the use of computer. To reach calculation of these structures less expensively and more rapidly, we have developed a program in "PASCAL", which allows the determination of displacements, the reactions in the nodes and the axial forces in the elements. Examples of tests were made, under various loads and boundary conditions. The suggested structures allowed us to look further into our knowledge with the application of the finite element method in the analysis of discrete structures. The developed program gives better computation results compared with software "SAP 2000".

خلاصة

معرفة المنشآت المصنوعة من روافد و محاور في تطبيقات جد هامة في عدد من القطاعات الصناعية. حيث البناءات الميكانيكية الفضائية و الأذرع الآلية، و الديناميكا الموائية و المنحمة المدنية. تقنية الحساب لهذه المنشآت في تطور كبير خاصة خلال السنوات الأخيرة. و طريقة العناصر المنتهية في أيامنا هذه تمثل أداة ذات قدرة كبيرة، متوفرة و غير مكلفة، في الزمن و الوقت، وهذا راجع للتطور المهتمل للحاسبات الالكترونية. ولقد طورنا برنامجا تحتج بلغة « باسكال»، حيث سمح لنا هذا البرنامج باختصار الوقت و التكلفة في حساب هذه المنشآت. كما سمح لنا بحساب الأحمال و حدود الأفعال في حل معقدة، و الأحمال في حل مبسر. تم إجراء عدة أمثلة للتحقق من مصداقية البرنامج من خلال تطبيقات مختلفة للحمولة و تنوع في المساند. إن المنشآت المختلفة المدروسة في هذا العمل تمكننا من التحقق في طريقة العناصر المنتهية و طريقة تطبيقها في تحليل هذه المنشآت. في الأخير أجرينا مقارنة النتائج المحصل عليها بنتائج برنامج «SAP 2000» والتي كانت جد متطابقة

SOMMAIRE

Index des notations	01
Listes des figures	03
Listes des tableaux	05
Introduction générale	07
Chapitre I : Introduction à la mécanique des milieux continus	
I.1 Introduction	10
I.2 Tenseur de contrainte de Cauchy	10
I.2.1 Définition d'un tenseur de contrainte de Cauchy	10
I.2.2 Types de forces sur un corps continu	10
I.2.3 Vecteur de contrainte	11
I.2.4 Contrainte normale et contrainte tangentielle	11
I.2.5 Contraintes principales	12
I.2.6 Les équations d'équilibre pour un corps à l'état statique	13
I.2.6.1 Équation d'équilibre des forces	13
I.2.6.2 Equation d'équilibre des moments.....	14
I.3 Tenseur de déformations	17
I.3.1 Définition	17
I.3.2 Déformations unidimensionnelles.....	17
I.3.3 Déformation bidimensionnelle	18
Chapitre II : La théorie des éléments finis	
II.1 Définition.....	21
II.2 Classement <i>d'éléments fini</i>	22
II.3 Les attributs d'un élément fini.....	24
II.3.2 Les nœuds.....	25
II.3.3 Forces nodales.....	25
II.3.4 Degrés de liberté.....	25
II.3.5 Caractéristiques d'un élément fini.....	25
II.4 Condition d'équilibre.....	25
II.5 Condition de compatibilité.....	25
II.6 Loi de HOOKE	25
II.7 Conditions aux limites.....	26
II.7.1 Conditions essentielles	26

II.7.2	Conditions naturelles.....	27
II.8	Méthode énergétique en élasticité.....	28
II.8.1	Théorème des travaux virtuels.....	28
II.8.1.1	Théorème de puissance virtuelle.....	28
II.8.1.2	formulations P.P.V.....	29
II.9	Energie potentielle	30
II.9.1	Énergie potentielle complémentaire	31
II.10	Principe de discrétisation	32
II.10.1	Objectif de la méthode de GALLERKINE	32
 Chapitre III : Analyse des structures discrètes par la méthode des éléments finis		
III.1	Introduction	35
III.2	Analyse des structures utilisant l'élément barre.....	35
III.2.1	Définition	35
III.2.2	Equation de rigidité pour un élément barre en coordonnées locales	35
III.2.3	Fonction de déplacement.....	35
III.2.4	Équation de rigidité d'un élément barre par la méthode énergétique	36
III.2.5	Equation de rigidité d'un élément barre orienté arbitrairement.....	38
III.2.6	Transformation des coordonnées locales aux coordonnées globales.....	40
III.2.7	Analyse des structures utilisant l'élément poutre.....	41
III.2.7.1	Equation d'un élément poutre en coordonnées locales.....	41
III.2.7.1.1	Déplacement nodal et forces.....	41
III.2.7.1.2	Fonction de déplacement.....	42
III.2.7.2	Equation de rigidité d'un élément poutre en coordonnées globales.....	45
III.2.8	Transformation des coordonnées locales aux coordonnées globales.....	46
III.2.9	Détermination de la force axiale	48
III.2.10	Méthode d'assemblage	48
III.2.11	Elimination directe de la bande de matrice.....	51
 Chapitre IV : Exemples d'application et comparaison des résultats		
IV.1	Introduction.....	55
IV.2	Problème posé.....	55

IV.3	L'identification des charges.....	55
IV.4	Conditions aux limites.....	56
IV.5	définitions des paramètres.....	57
IV.6	Organigramme du programme	57
IV.7	Exemples d'application	59
IV.8	Comparaison des déplacements	63
IV.9	Les déformations des structures	86
IV.10	Les digrammes des forces axiales	90
IV.11	Discussion des résultats	94
Chapitre V : Analyse dynamique des structures discrètes par la méthode des éléments finis		
V.1	Introduction	97
V.2	Vibration élémentaire linéaire de la mécanique.....	97
V.3	Equation du mouvement et régimes vibratoires.....	97
V.4	Vibration libre conservative	98
V.5	Dynamique des poutres	98
V.6	Vibrations longitudinales d'une poutre.....	99
V.6.1	Équations du mouvement.....	99
V.7	Vibration longitudinale d'une barre	101
V.7.1	Equation de mouvement	101
V.7.1.1	Vibration libre	100
V.8	Détermination de la matrice masse.....	103
V.9	Vibration de flexion d'un élément poutre.....	104
V.10	Détermination des modes propres.....	108
Conclusion générale		115
Bibliographie		117

Index des notations

F_i	Système des charges extérieures $[N]$
\mathbf{s}	Système des contraintes $[N/m^2]$
e	Les déformations internes de la structure
\mathbf{s}_{ij}	Tenseur de contrainte
e_{ij}	Tenseur de déformation
∂	Dérivée partielle
E	Module de «Young» $[N/m^2]$
ds	Surface différentielle $[m^2]$
dv	Volume différentiel $[m^3]$
\hat{n}	Normale
u_1 et u_2	Déplacements nodaux $[m]$
$f_i(x)$	Fonctions de forme
$f_i'(x)$	Dérivée première de la fonction de forme
U	Énergie de déformation $[N.m]$
$\frac{EA}{L}$	Rigidité axiale de la barre $[N/m]$
T_i	Vecteur de contrainte
$[F]$	Vecteur de force
$F(m)$	Force de volume
$f(p)$	Force de surface
$[K]$	Matrice de rigidité $[N.m]$
K_{ij}	Coefficients de la matrice de rigidité
W	Le travail des forces volumiques et surfaciques
$\{ \}^T$	Transposé d'un vecteur
Π	Puissance virtuelle
$w_c(\mathbf{s})$	Energie potentielle complémentaire
$tr\{\mathbf{S}\}$	Trace \mathbf{S}
\bar{X}, \bar{Y}	Coordonnées locales
X, Y	Coordonnées globales
$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix}$	Vecteur des déplacements nodaux en coordonnées locales $[m]$
q	Angle d'inclinaison
l	$\cos q$
m	$\sin q$
L, l	Longueur $[m]$
$F_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}$	Forces généralisées $[N]$
q_i	Déplacements généralisés $[m]$

$f_i''(x), f_j''(x)$	Dérivées secondes des fonctions de forme
M	Moment de flexion $[N/m]$
S_n	Forces axiales $[N]$
F_{x_i}, F_{y_j}	Forces aux nœuds pour chaque élément $[N]$
$q = \frac{\partial v}{\partial x}$	Rotation de la section $[rad]$
EA	Rigidité longitudinale $[N]$
EI	Rigidité de flexion (transversale) $[N.m^2]$
$\begin{Bmatrix} v_1 \\ q_1 \\ v_2 \\ q_2 \end{Bmatrix}$	Vecteur déplacement d'un élément poutre
$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$	Vecteur force d'un élément poutre.

LISTES DES FIGURES

Numéro	INTITULE	Pages
Figure I.1	Corps de volume V , facette ds et normale \hat{n}	10
Figure I.2	Forces internes d'un solide	11
Figure I.3	Vecteurs contraintes sur trois facettes orthogonales	12
Figure I.4	Composantes S_{ij}	12
Figure I.5	Equilibre des forces	13
Figure I.6	Equilibre des moments	15
Figure I.7	Déplacement d'un point dans une déformation unidimensionnelle	17
Figure I.8	Variation de u en fonction de x	18
Figure I.9a	Changement de position et forme	18
Figure I.9b	Déformation bidimensionnelle	19
Figure II.1	Élément finis divers	25
Figure II.2	Forces de volume et forces de surface	28
Figure III.1	Élément barre en coordonnées locales	35
Figure III.2	Élément barre orienté arbitrairement	38
Figure III.2	Mesure de l'angle q	38
Figure III.4	Élément poutre en coordonnées locales	41
Figure III.5	Élément poutre orienté arbitrairement	45
Figure III.6	Transformation des coordonnées locales en coordonnées globales	46
Figure III.7	Représentation de les nœuds et les éléments	49
Figure III.8	Forces et déplacements de quatre nœuds	49
Figure IV.1	Structure № 1 (élément barre).....	59
Figure IV.2	Structure № 2 (élément barre).....	60
Figure IV.3	Structure № 1 (élément poutre).....	61

Figure IV.4	Structure № 2 (élément poutre).....	62
Figure IV.5	Déformation de la structure № 1 (élément barre).....	86
Figure IV.6	Déformation de la structure № 2 (élément barre).....	87
Figure IV.7	Déformation de la structure № 1 (élément poutre).....	88
Figure IV.8	Déformation de la structure № 2 (élément poutre).....	89
Figure IV.9	Diagramme des forces axiales pour la structure № 1 (élément barre).....	90
Figure IV.10	Diagramme des forces axiales pour la structure № 2 (élément barre).....	91
Figure IV.11	Diagramme des forces axiales pour la structure № 1 (élément poutre)...	92
Figure IV.12	Diagramme des forces axiales pour la structure № 2 (élément poutre)...	93
Figure V.1	Section droite et ligne moyenne	98
Figure V.2	Élément poutre	99
Figure V.3	Force axial pour un élément barre avec des masses suspendues aux extrémités	102
Figure V.4	Vibration de flexion d'un élément poutre.....	105
Figure V.4	Les modes propres	109

LISTES DES TABLEAUX

Numéro	Intitulé	Page
<i>Tableau 1</i>	<i>: bande d'une matrice a deux dimensions.</i>	53
<i>Tableau 2</i>	<i>: Comparaisons des déplacements de l'élément barre pour la première et deuxième structure (premier cas de conditions aux limites)</i>	64
<i>Tableau 3</i>	<i>: Comparaisons des réactions de l'élément barre pour la première et deuxième structure (premier cas de conditions aux limites)</i>	65
<i>Tableau 4</i>	<i>: Comparaisons des forces axiales de l'élément barre pour la première et deuxième structure (premier cas de conditions aux limites)</i>	66
<i>Tableau 5</i>	<i>: Comparaisons des déplacements de l'élément barre pour la première et deuxième structure (deuxième cas de conditions aux limites)</i>	68
<i>Tableau 6</i>	<i>: Comparaisons des déplacements de l'élément barre pour la première et deuxième structure (deuxième cas de conditions aux limites)</i>	69
<i>Tableau 7</i>	<i>: Comparaisons des réactions de l'élément barre pour la première et deuxième structure (deuxième cas de conditions aux limites)</i>	70
<i>Tableau 8</i>	<i>: Comparaisons des forces axiales de l'élément barre pour la première et deuxième structure (troisième cas de conditions aux limites)</i>	72
<i>Tableau 9</i>	<i>: Comparaisons des déplacements de l'élément barre pour la première et deuxième structure (troisième cas de conditions aux limites)</i>	73
<i>Tableau 10</i>	<i>: Comparaisons des déplacements de l'élément barre pour la première et deuxième structure (troisième cas de conditions aux limites)</i>	74
<i>Tableau 11</i>	<i>: Comparaisons des déplacements de l'élément poutre pour la première et deuxième structure (premier cas de conditions aux limites)</i>	76
<i>Tableau 12</i>	<i>: Comparaisons des réactions de l'élément poutre pour la première et deuxième structure (premier cas de conditions aux limites)</i>	76
<i>Tableau 13</i>	<i>: Comparaisons des forces axiales de l'élément poutre pour la première et deuxième structure (premier cas de conditions aux limites)</i>	77
<i>Tableau 14</i>	<i>: Comparaisons des déplacements de l'élément poutre pour la première et deuxième structure (deuxième cas de conditions aux limites)</i>	79

Tableau 15 : Comparaisons des réactions de l'élément poutre pour la première et deuxième structure (deuxième cas de conditions aux limites)	79
Tableau 16 : Comparaisons des forces axiales de l'élément poutre pour la première et deuxième structure (deuxième cas de conditions aux limites)	80
Tableau 17 : Comparaisons des déplacements de l'élément poutre pour la première et deuxième structure (troisième cas de conditions aux limites)	82
Tableau 18 : Comparaisons des réactions de l'élément poutre pour la première et deuxième structure (troisième cas de conditions aux limites)	83
Tableau 19 : Comparaisons des forces axiales de l'élément poutre pour la première et deuxième structure (troisième cas de conditions aux limites)	84

INTRODUCTION GENERALE

Les structures discrètes sont des structures composées d'éléments barres ou d'éléments poutres assemblées par soudures ou rivetage en des points appelés «nœuds», et soumises à des forces extérieures, sous l'effet de ces forces, la structure peut se déformer et des contraintes internes dans chaque élément peuvent se manifester, ces structures sont caractérisées par un nombre fini de paramètres inconnus tel que les déplacements et les forces aux nœuds.

La méthode des éléments finis est une des nouvelles méthodes appliquées aux analyses de ces structures dans le domaine d'engineering. Notre travail consiste en l'utilisation de cette méthode pour analyse statique et dynamique de ces structures sous l'effet des excitations extérieures, et avec des différentes conditions aux limites.

La méthode des éléments finis est actuellement reconnue comme étant une technique très puissante pour l'analyse des structures discrètes ou continues, dans le domaine d'engineering. Elle est utilisée aujourd'hui dans de nombreux secteurs de l'industrie tel que, la mécanique, le génie civil, l'aérospatial et la robotique.

Notre travail est consacré à l'utilisation de cette méthode pour l'analyse statique et dynamique des structures en treillis ou portiques sous l'effet des excitations extérieures avec des différentes conditions aux limites.

La compréhension de cette méthode donne nécessité à l'élaboration de certaines connaissances scientifiques telles que : la théorie d'élasticité, la mécanique des milieux continus, la résistance des matériaux, la dynamique des structures, de plus les notions de base de mathématique appliquée.

Si la structure présente un comportement trop complexe ou un système continu défini par un nombre infini de paramètres, il devient très difficile d'analyser ou de trouver la solution analytiquement. Cependant, la méthode des éléments finis pousse la possibilité de trouver la solution la plus parfaite possible, en remplaçant le système continu par un système discret, caractérisé par un nombre fini de paramètres.

Les principales étapes de la méthode des éléments finis sont :

- 1- La géométrie est décomposée en domaines de forme géométrique simple. *Les éléments* sont reliés entre eux en des points appelés (*nœuds*). Élémentairement il peut être un élément *barre* ou *poutre*.

- 2- Le champ de déplacements dans chaque élément est défini en fonction des *déplacements* des nœuds de l'élément ainsi que l'énergie de *déformation* et sa *matrice de rigidité*.
- 3- La matrice de *rigidité globale* est construite à partir des matrices de *rigidité élémentaires*.
- 4- Après la mise en place des *conditions aux limites* et des *charges*, on calcul les déplacements inconnus dans chaque nœud, les déformations et les *contraintes* dans chaque élément.

Ce mémoire est constitué de six chapitres, une introduction générale et une conclusion. Le premier chapitre est réservé aux rappels de la mécanique des milieux continus, tel que toutes les structures discrètes composées d'éléments continus. La théorie de la mécanique des milieux continus donc trouve de plus grand application dans ce domaine, et ce en utilisant les tenseurs de déformations et tenseurs de contraintes.

Le deuxième chapitre est consacré à la théorie de la méthode des éléments finis, cette méthode repose sur les différentes formulations énergétiques et les principes de discrétisation.

Dans le troisième chapitre une description générale de cette méthode avec ces différentes étapes pour la détermination des matrices de rigidité d'une structure discrète en treillis. Dans ce chapitre on a cité deux exemples pour déterminer l'assemblage des matrices élémentaires et les principales étapes de construire l'équation de rigidité globale de toute la structure.

Le quatrième chapitre consiste à l'élaboration d'un programme de calcul des déplacements, des réactions dans chaque nœud et des forces axiales dans chaque élément en comparant les résultats de ces calculs avec les résultats du logiciel « **SAP 2000** ».

Le cinquième chapitre comporte l'analyse dynamique de ces structures, cette analyse basée sur la détermination des matrices globales de masse et de rigidité de toute la structure, en basant sur la notion d'éléments finis

I.1 Introduction

Toutes les structures discrètes sont composées d'éléments continus. La théorie de la mécanique des milieux continus donc trouve de plus grand application dans ce domaine, et ce en utilisant les tenseurs de déformations et tenseurs de contraintes.

I.2 Tenseur de contrainte de Cauchy

I.2.1 Définition d'un tenseur de contrainte de Cauchy

Pour définir un tenseur de contrainte appliqué à l'intérieur d'un corps de volume V entouré par une surface S (fig.I.1), on considère un plan de coupe où \vec{n} est le vecteur unitaire perpendiculaire à l'élément de surface.

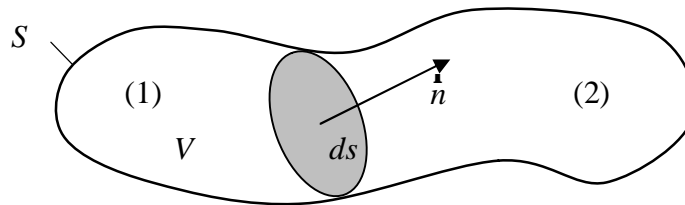


Fig.I.1 Corps de volume V , facette ds et normale \vec{n}

Le principe de Cauchy repose sur le fait qu'il existe sur toute la surface de coupe un champ de vecteurs de contraintes \vec{T} de nature semblable aux tractions de surface, tel que l'ensemble des forces élémentaires $\vec{T}ds$ assure la transmission globale des forces s'exerçant d'un fragment à un autre (fig.I.2). Les composantes de \vec{T} sur \vec{n} et le plan tangentiel à ds sont respectivement les contraintes normales (s) et tangentielles (t).

I.2.2 Types de forces sur un corps continu

Pour un corps continu, tridimensionnel on distingue trois types de forces s'exerçant sur ce corps

I.2.2.1 Forces de volume

Ces forces sont appliquées sur toute la masse du corps, Elles sont dues à des forces extérieures telles que, le pesanteur, les forces magnétiques. Elles sont définies en fonction des forces volumiques que \vec{F} ou forces massiques \vec{X} comme suit :

$$\int_V \vec{F} dv = \int_V \frac{\vec{F}}{r} dm = \int_V \vec{X} dm \quad (1.1)$$

Où dm : L'unité de masse de l'élément

dv : L'unité de volume de l'élément

I.2.2.2 Forces de surface

Ces sont des forces qui s'exerçant sur la surface du milieu continu, on peut les mesurer par densité superficielle $\overset{\mathbf{r}}{f}(p)$, telle que la force exercée sur un élément de surface d'aire ds autour d'un point p , soit :

$$\overset{\mathbf{r}}{f}(p)ds \quad (\text{Forces par unité de surface})$$

I.2.2.3 Forces intérieures

Sont les forces de contact qui expriment la cohésion de la matière, on peut les représenter par des forces de surface, est par le vecteur $\overset{\mathbf{r}}{T}ds$ la surfaces de contact en un point intérieur M , pour un élément de surfaces donné en M , d'aire ds exercé par une partie du solide, limitée par ds .

I.2.3 Vecteur de contrainte

Le vecteur contrainte $\overset{\mathbf{r}}{T}$ est appliqué au point (M), qui aussi le point d'application du vecteur unitaire ($\overset{\mathbf{r}}{n}$), et qui est défini par :

$$\overset{\mathbf{r}}{T}(M, \overset{\mathbf{r}}{n}) = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{d\overset{\mathbf{r}}{F}(M)}{ds} = \overset{\mathbf{r}}{S}(M) \cdot \overset{\mathbf{r}}{n} \quad (1.2)$$

$\overset{\mathbf{r}}{n}$: Normale à la surface ds
 $\overset{\mathbf{r}}{T}$: Vecteur contrainte

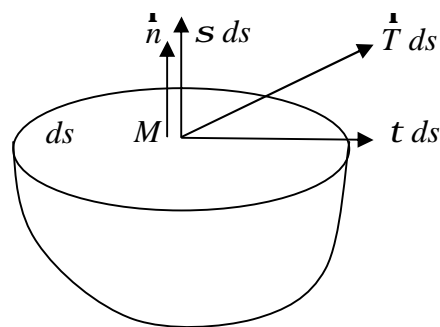


Fig.I.2 forces internes d'un solide

I.2.4 Contrainte normale et contrainte tangentielle

La projection du vecteur contrainte $\overset{\mathbf{r}}{T}$ de la facette S sur le vecteur unitaire $\overset{\mathbf{r}}{n}$, est la contrainte normale ($\overset{\mathbf{r}}{S} = \overset{\mathbf{r}}{T} \cdot \overset{\mathbf{r}}{n}$). Sa projection sur le plan de la facette S est la contrainte tangentielle ou cisaillement ($\overset{\mathbf{r}}{t}$). En conséquence le vecteur de contrainte devient :

$$\overset{\mathbf{r}}{T} = \overset{\mathbf{r}}{S} \cdot \overset{\mathbf{r}}{n} + \overset{\mathbf{r}}{t} \quad (1.3)$$

I.2.5 Contraintes principales

L'état de contrainte d'un corps cubique de dimensions unitaires, est représentée par le tenseur de contrainte (s_{ij}), appliquées d'une façon arbitraire sur chaque face respectivement par les vecteurs unitaire \hat{n} (fig.I.4) , de la même façon, il existe sur trois facettes orthogonales normales aux axes cartésiens des vecteurs contraintes \hat{T}_1, \hat{T}_2 et \hat{T}_3

- une composante normale s_{ii} .
- deux composantes tangentielles s_{ij} ($i \neq j$)

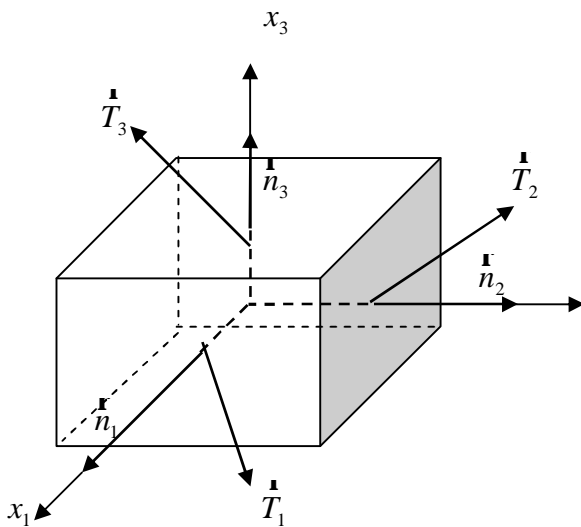


Fig. I.3 Vecteurs contraintes sur trois facettes orthogonales

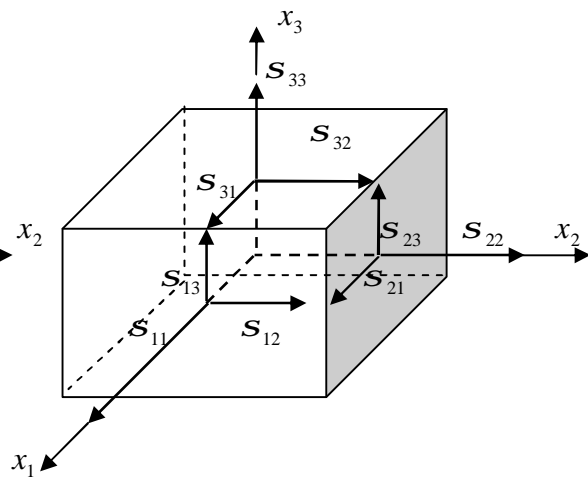


Fig.I.4 Tenseur de contrainte s_{ij}

En conséquence le vecteur contrainte \hat{T} donné par

$$T_i = s_{ij}n_j \tag{1.4}$$

Dans le cas ou les vecteurs de contrainte \hat{T} agissent dans la même direction avec les vecteurs unitaires \hat{n} , ces derniers deviennent :

$$T_j = I n_j \tag{1.5}$$

Où I sont des constantes et qui représentent physiquement les contraintes normales de chaque facette du cube, qui peuvent être déterminé utilisant la relation :

$$s_{ij}n_i - I n_j = 0 \tag{1.6}$$

A l'aide de la règle de substitution d'un indice attachée au symbole de kromecker donc :

$$\begin{aligned} s_{ij}n_i - In_j &= s_{ij}n_i - I \delta_{ij}n_i \\ (s_{ij} - I \delta_{ij})n_i &= 0 \end{aligned}$$

Les solutions non triviales de ce système linéaire homogène en les cosinus directeur n_i s'obtiennent en annulant le déterminant :

$$\text{Det} [s_{ij} - I d_{ij}] = 0$$

Soit explicitement

$$\begin{vmatrix} s_{11} - I & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} - I & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} - I \end{vmatrix} = 0 \tag{1.7}$$

Le développement du déterminant fournit l'équation caractéristique cubique suivante :

$$-I^3 + I_1 I^2 - I_2 I + I_3 = 0 \tag{1.8}$$

Dont les solutions de l'équation (1.8), sont les trois contraintes principales et les coefficients I_1, I_2 et I_3 les invariants de contraintes.

$$\begin{aligned} I_1 &= s_{ii} \\ I_2 &= \frac{1}{2}(s_{ii}s_{jj} - s_{ij}s_{ji}) \\ I_3 &= \det(s_{ij}) \end{aligned}$$

I.2.6 Les équations d'équilibre pour un corps à l'état statique

I.2.6.1 Équation d'équilibre des forces

On dit que un corps de volume V et de masse m entoure par une surface S , soumise à des forces de surface de contrainte ($\overset{\bullet}{T}$), et des forces de volume ($\overset{\bullet}{F}$), est en équilibre lorsque la somme des forces exerçant sur ce corps soient nuls.

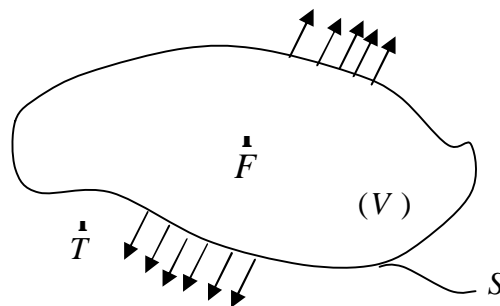


Fig. I.5 Equilibre des forces

Dans l'équilibre à l'état statique on a : $\sum \dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{0}}$ c'est à dire $\sum F/x = 0$
 $\sum F/y = 0$
 $\sum F/z = 0$

Et en intégrant sur tout le volume et sur toute la surface, et vectoriellement ces forces deviennent :

$$\int_V \dot{\mathbf{F}} dv + \int_S \dot{\mathbf{T}} ds = 0 \tag{1.9}$$

En notation indicielle :

$$\int_V F_i dv + \int_S T_i ds = 0$$

Ou bien : $\int_V F_i dv + \int_S s_{ij} n_j ds = 0$

En utilisant le théorème de l'intégral $\int_V F_i dv + \int_V \partial_j s_{ij} dv = 0$

$$\int_V (F_i + \partial_j s_{ij}) dv = 0$$

C'est-à-dire : $F_i + \partial_j s_{ij} = 0 \tag{1.10}$

Donc l'équation fondamentale qui relie les variations spatiales des contraintes dans un corps en état d'équilibre statique est comme suite :

$$\frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \quad i, j = 1,2,3 \tag{1.11}$$

Explicitement :

Pour $i = 1$ $F_1 + \frac{\partial s_{1j}}{\partial x_j} = F_1 + \frac{\partial s_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial s_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial s_{13}}{\partial x_3} = 0$

Pour $i = 2$ $F_2 + \frac{\partial s_{2j}}{\partial x_j} = F_2 + \frac{\partial s_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial s_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial s_{23}}{\partial x_3} = 0$

Pour $i = 3$ $F_3 + \frac{\partial s_{3j}}{\partial x_j} = F_3 + \frac{\partial s_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial s_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial s_{33}}{\partial x_3} = 0$

I.2.6.2 Equation d'équilibre des moments

De la même façon que pour les moments à l'équilibre on a :

Où $\sum \dot{\mathbf{M}} = \dot{\mathbf{0}}$
 $\mathbf{M} = \mathbf{X} \wedge \mathbf{F}$

En notation indicielle :

$$M_i = \epsilon_{ijk} X_j F_k$$

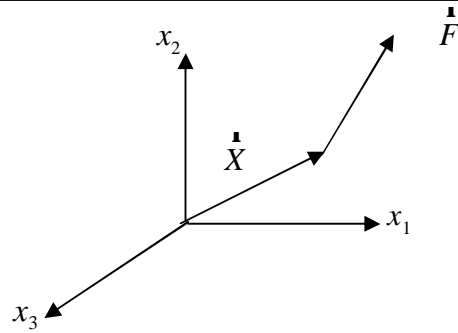


Fig. I.6 Equilibre des moments

Alors

$$\int_v \dot{X} \Lambda \dot{F} dv + \int_s \dot{X} \Lambda \dot{T} ds = 0$$

$$\int_v \epsilon_{ijk} X_j F_k dv + \int_s \epsilon_{ijk} X_j T_k ds = 0 \tag{1.12}$$

Avec ϵ_{ijk} est le symbole de permutation :

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } i, j, k \text{ avec le sens des aiguilles d'une montre} \\ -1 & \text{si } i, j, k \text{ contraire le sens des aiguilles d'une montre} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Et utilisant le théorème de l'intégral on a :

$$\begin{aligned} \int_s \epsilon_{ijk} X_j T_k ds &= \int_s \epsilon_{ijk} X_j \mathbf{s}_{pk} n_p ds = \int_v \epsilon_{ijk} X_j \mathbf{s}_{pk} dv \\ &= \int_v \frac{\partial}{\partial X_p} (\epsilon_{ijk} X_j \mathbf{s}_{pk}) dv \\ &= \int_v \epsilon_{ijk} (\mathbf{s}_{pk} \frac{\partial X_j}{\partial X_p} + X_j \frac{\mathbf{s}_{jk}}{\partial X_p}) dv \end{aligned}$$

On peut écrire l'équation (1.12) comme suite :

$$\begin{aligned} \int_v \epsilon_{ijk} X_j F_k dv + \int_v (\epsilon_{ijk} \frac{\partial X_j}{\partial X_p} \mathbf{s}_{pk} + \epsilon_{ijk} X_j \frac{\mathbf{s}_{jk}}{\partial X_p}) dv &= 0 \\ \int_v \epsilon_{ijk} X_j (F_k + \mathbf{s}_{pk,p}) dv + \int_v \epsilon_{ijk} X_{j,p} \mathbf{s}_{pk} dv &= 0 \end{aligned} \tag{1.13}$$

L'équation fondamentale qui relie les variations spatiales des contraintes dans un corps aux accélérations des éléments de volumes, dans le cas le corps en équilibre statique égale à zéro :

$$F_k + \mathbf{s}_{pk,p} = 0$$

Alors l'équation (1.13) prend la forme :

$$\int_v \epsilon_{ijk} X_{j,p} s_{pk} dv = 0 \quad (1.14)$$

Tel que $X_{j,p} = \frac{\partial X_j}{\partial X_p} = \delta_{jp}$ kroneker $\delta_{jp} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = p \\ 0 & \text{si } j \neq p \end{cases}$

Alors l'équation (1.12) devienne :

$$\int_v (\epsilon_{ijk} \delta_{jp} s_{pk}) dv = 0 \quad (1.15)$$

Explicitement :

$$\begin{aligned} \text{Pour } i = 1 \quad \epsilon_{1jk} s_{jk} &= 0 \\ &= \epsilon_{11k} s_{1k} + \epsilon_{12k} s_{2k} + \epsilon_{13k} s_{3k} \\ &= \epsilon_{111} s_{11} + \epsilon_{112} s_{12} + \epsilon_{113} s_{13} + \epsilon_{121} s_{21} + \epsilon_{122} s_{22} + \epsilon_{123} s_{23} \\ &\quad + \epsilon_{131} s_{31} + \epsilon_{132} s_{32} + \epsilon_{133} s_{33} = 0 \end{aligned}$$

On peut trouver que $s_{32} = s_{23}$

Pour $i = 2$ $s_{13} = s_{31}$

Pour $i = 3$ $s_{12} = s_{21}$

On peut conclure que le tenseur de contrainte est symétrique, c'est-à-dire :

$$s_{ij} = s_{ji} \quad \text{Quand } i \neq j$$

I.3 Tenseur de déformations

I.3.1 Définition

Il existe plusieurs manières pour définir les déformations d'un solide, cette déformation peut être associée à la modification de la forme du corps sous l'action des forces extérieures, ou bien par une variation locale de longueur dite déformation par unité de longueur appelée taux de déformation. En général pour deux points même voisins, peuvent se déplacer de quantités différentes, c'est ce qui génère la déformation. Donc pour étudier le comportement statique ou dynamique d'une structure discrète ou continue est important d'étudier leur champ de déformation.

I.3.2 Déformations unidimensionnelles

Pour le cas des déformations unidimensionnelles, on considère un fil extensible rectiligne dont sa longueur est supérieure à son diamètre, donc on peut considérer ce fil comme un milieu à une dimension dans le sens de la longueur. Prenons une origine O , fixe dans l'espace, et étirons ce fil, du point M quelconque du fil vient au point M' (fig.I.7) tel que:

$$\begin{aligned} OM &= x & \text{et } OM' - OM &= u \\ OM' &= x + u \end{aligned}$$

Après étirement un point Q , voisin de M tel que $MQ = \Delta x$, vient en Q' et $M'Q' = \Delta x + \Delta u$.

Dans l'étude de la déformation nous n'allons pas considérer les déplacements réels des points, mais leurs déplacements relatifs, la déformation du segment MQ est définie par :

$$\text{La variation relative} = \frac{\text{augmentation de longueur}}{\text{longueur initiale}} = \frac{M'Q' - MQ}{MQ}$$

$$\frac{M'Q' - MQ}{MQ} = \frac{\Delta x + \Delta u - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (2.1)$$

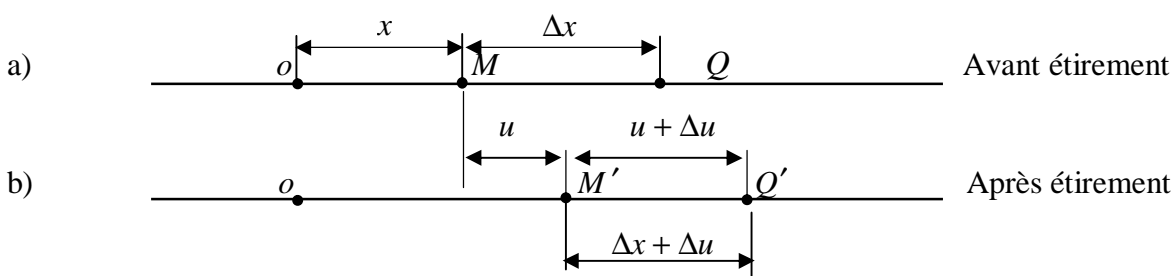


Fig.I.7 Déplacement d'un point dans une déformation unidimensionnelle

La variation de u en fonction de x peut représenter de deux façons :

- homogène : (u) est une fonction linéaire de (x).
- non homogène : (u) est une fonction non linéaire de (x).

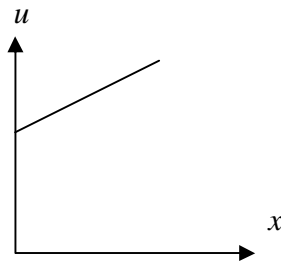


Fig.I.8.a Déformation homogène

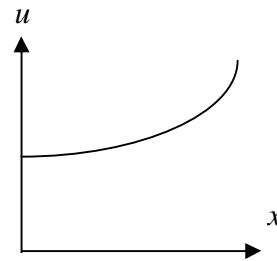


Fig.I.8.b Déformation non homogène

Fig.I.8 Variation de u en fonction

La déformation où point M est la limite quand $\Delta x \rightarrow 0$

$$e = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \tag{2.2}$$

I.3.3 Déformation bidimensionnelle

Pour un élastique AB (fig.I.8a), soumis à des forces extérieures son changement de position se déplace aux extrémités en A' et B' , avec un changement de forme, si sa longueur $A'B'$ est supérieure à AB , pour un tronçon MQ de l'élastique, de longueur initiale Δx et finale $\Delta x + \Delta u$.

Donc on peut concéderai comme un milieu à deux dimensions prenons une origine fixe dans l'espace et étudions comment varient les coordonnées des divers points de la structure.

Un point $M(x_1, x_2)$ avant la déformation qui vient en $M'(x_1 + u_1, x_2 + u_2)$ après la déformation (fig.I.8b)

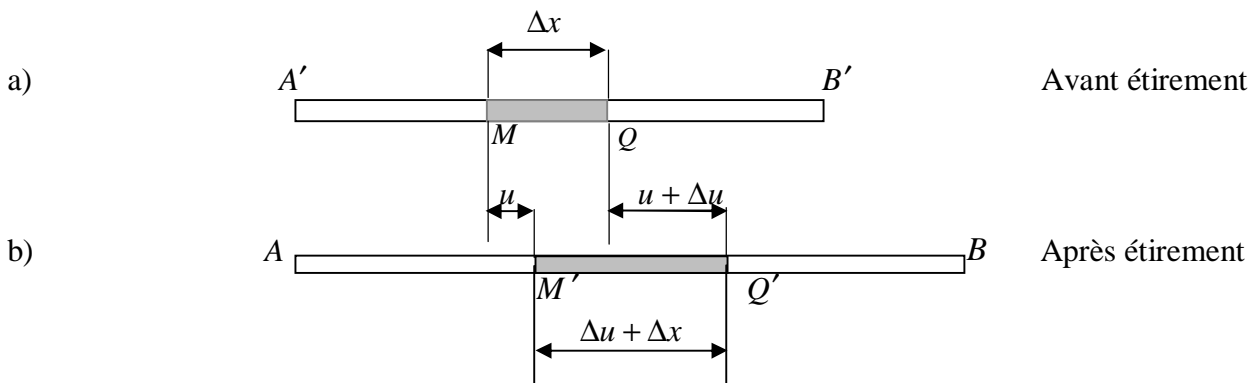


Fig.1.9a changement de position et forme.

Nous allons maintenant donner les caractéristiques de la déformation de ce corps que l'on peut considérer comme un milieu à deux dimensions, prenons une origine fixe à l'espace et étudions comment varient les coordonnées des divers points de ce corps.

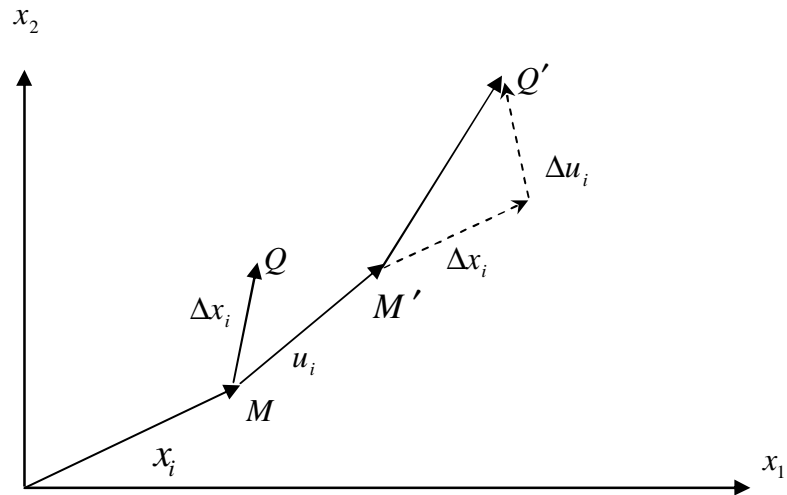


Fig.1.9 b Déformation bidimensionnelle

Le vecteur u_i constitue le déplacement du point M pour préciser la déformation en ce point dans le cas d'une déformation bidimensionnelle on a quatre quantités :

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad e_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad e_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

Ou, sous forme réduite :

$$e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

II. Théories des éléments finis

II.1 Définition.

Aujourd'hui les techniques de calcul des structures demandent une méthode très puissante afin de motiver les besoins de l'industrie et de soutenir les progrès dans le domaine d'application des ordinateurs.

La méthode des éléments finis est actuellement reconnue comme étant une technique numérique très puissante pour la résolution des équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites bien déterminées. Cette est une méthode numérique de résolution approchée des équations différentielles, et utilisée pour l'analyse des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie, mécanique, génie civil, l'électromagnétisme, aérospatial, construction navale, ...etc.

En fait que la méthode des éléments finis est une technique récente à caractère pluridisciplinaire car elle met en œuvre les connaissances de trois disciplines de base scientifique tel que :

- la mécanique des structures (discrète ou continu) utilisant la théorie d'élasticité, plasticité, le R.D.M et les vibrations.
- l'analyse numérique que la résolution des systèmes linéaires utilisant les méthodes d'approximation.
- l'informatique appliquée utilisant des techniques de développement et de la maintenance des grands logiciels d'informatique.

Si une structure à un comportement trop complexe qui est difficilement analyser, la méthode des éléments finis donne la possibilité de résolution à ces types des structures, et ce en considèrent des petits fragments de la structure appelé élément fini, puis obtenir la forme de la structure totale par l'assemblage des ces éléments.

Donc la méthode des éléments finis est une méthode mathématique d'intégration numérique des équations aux dérivées partielles, mises sous forme variationnelle, pour laquelle tous les problèmes de calcul de structures élastiques sont caractérisés par un système d'équations aux dérivées partielles qu'il est souvent impossible de résoudre analytiquement par la théorie des milieux continus. En conséquence, cette méthode remplace les problèmes continus par des problèmes discrétisés.

Les bases théoriques de la *MEF* repose d'une part sur la formulation énergétique, de la mécanique des structures, utilisant des théorèmes énergétiques de l'élasticité, et d'autre part sur les méthodes d'approximation basées sur l'application des conditions d'équilibre et de compatibilité.

En résumé la *MEF* résout un problème d'élasticité c'est :

- déterminer le vecteur déplacement en tout point de la structure (3 inconnues)
- déterminer le tenseur des déformations en tout point de la structure (6 inconnues)
- déterminer le tenseur des contraintes en tout point de la structure (6 inconnues)

Et qui se traduisent par les 15 équations locales :

$$\partial_j \mathbf{s}_{ij} + F_i = 0 \quad \text{Les 3 équations d'équilibre (équilibres statiques)}$$

$$\mathbf{e}_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j) \quad \text{Les 6 équations liant les déplacements aux déformations}$$

(équations cinématiques)

$$\mathbf{s}_{ij} = f(\mathbf{e}_{kl}) \quad \text{Les 6 équations traduisant la loi de comportement du matériau utilisé (loi constitutive de Hooke isotrope)}$$

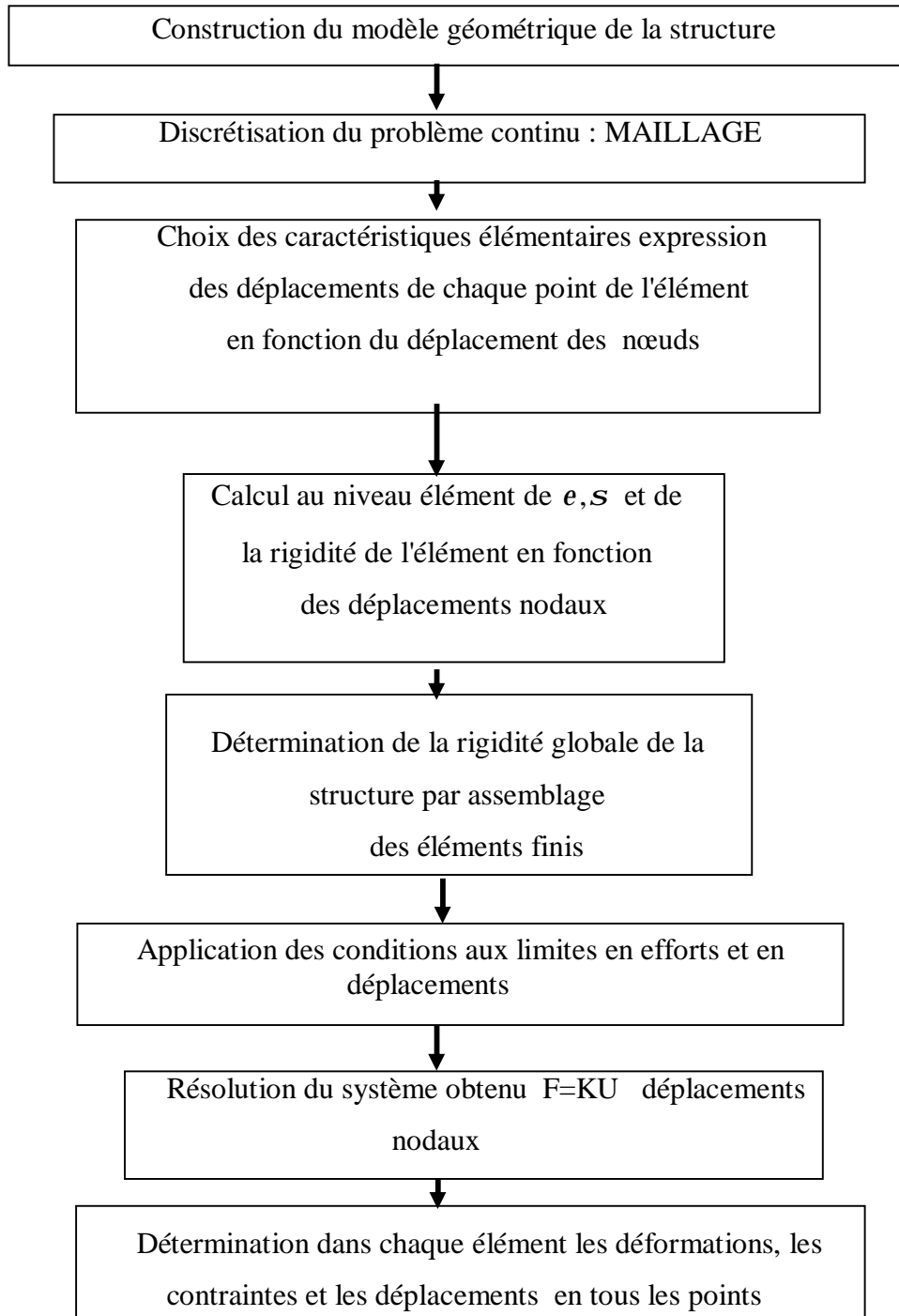
II.2 Classement d'éléments fini

- les éléments unidimensionnels : - barre, poutres
- les éléments bidimensionnels : - élément plan, plaques, coques.
- les éléments tridimensionnels : - tores à sections triangulaire ou rectangulaire

Notre travail consiste principalement, l'application de la méthode des éléments finis au calcul statique et dynamique des structures utilisant l'élément barre et l'élément poutre dans le régime linéaire géométriquement, et des matériaux isotropes homogènes physiquement.

Les démarches à suivre pour la résolution statique des problèmes utilisant la méthode des éléments finis se résument essentiellement utilisant l'organigramme suivant :

Organigramme de résolution statique par la MEF



II.3 les attributs d'un élément fini

Le découpage en *éléments finis* permet d'isoler un élément fini pour l'étudier et en établir les caractéristiques.

II.3.1 Signalement d'un élément fini

Le signalement d'un élément fini comprend les points suivants :

Géométrie :

Un élément fini peut être 1d, 2d ou 3d sa forme est simple (fig. II.1)

- segment d'une droite ou de courbe (plan ou courbe)
- triangle ou quadrilatère
- tétraèdre, prisme ou hexaèdre

Les frontières :

Sont respectivement :

- les points(extrémités du segment)
- des segments de droite ou de courbe.
- des faces planes ou courbes

Matériau:

Le matériau de l'élément est défini par une loi de comportement (loi de Hooke isotrope et ses propriétés mécaniques E et γ etc....

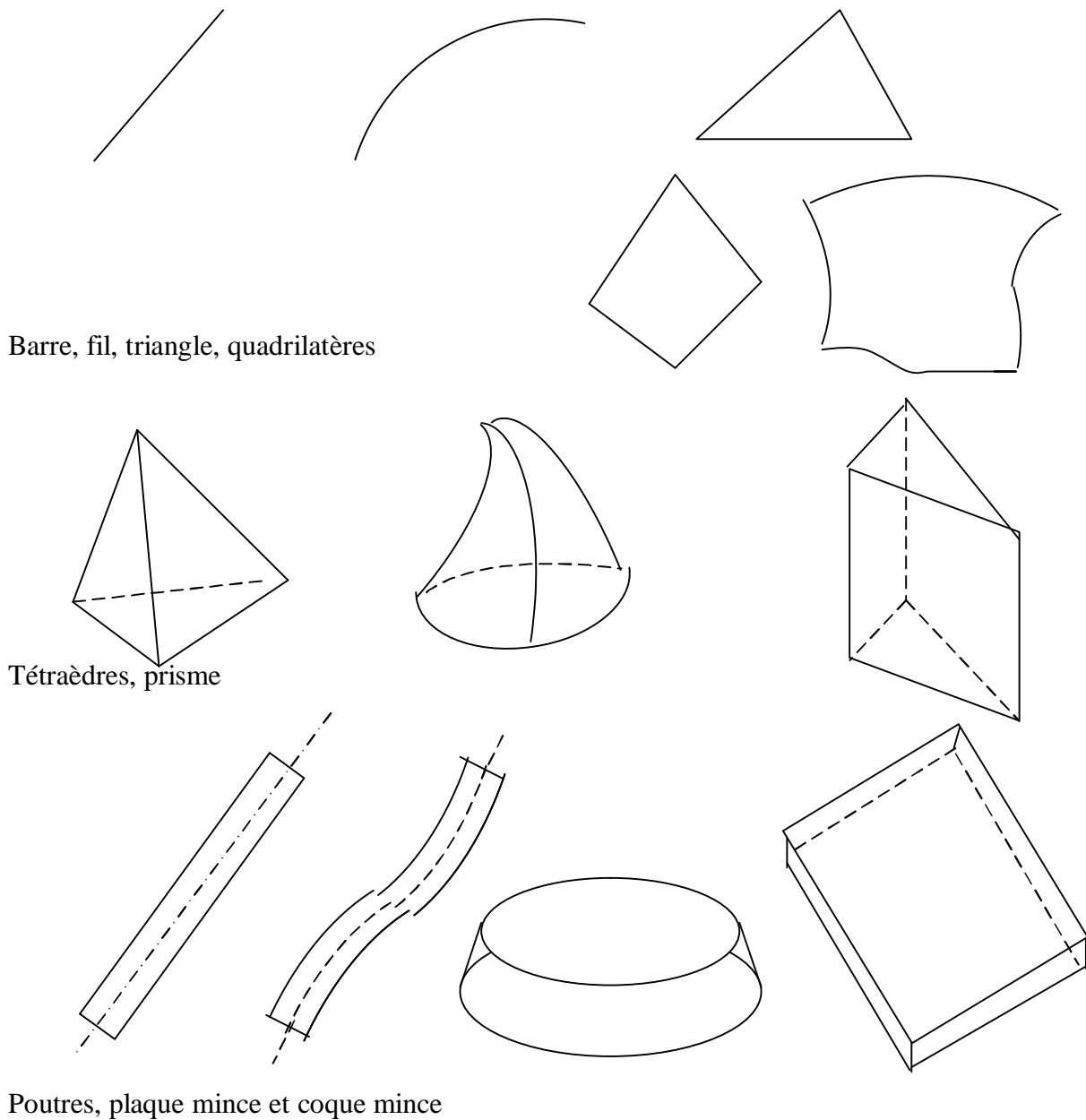


Fig.II.1 Eléments finis divers

II.3.2 les nœuds

Les nœuds définissent la géométrie et assurent la connexion des élément les uns aux autres , ils occupent des positions stratégiques comme les extrémités , les sommets , les milieux des arêtes et faces...etc.

II.3.3 Forces nodales

A travers les nœuds transitent des forces associées aux degrés de liberté, Les unes sont les réactions internes ,les autres les forces F dues aux charges appliquées à l'élément (poids propre , charge uniforme, température ...)

II.3.4 Degrés de liberté

Pour tout *élément fini*, on doit faire le choix d'une ou plusieurs fonctions (en générale le champ des déplacement), elle sont exprimées en fonction des valeurs particulières qu'elles prennent aux nœuds valeurs qui deviennent les inconnues nodaux l'union ; par leurs degrés de liberté nodaux communs d Puis d'un troisième, et ainsi de suite ; permet de reconstituer, pièce par pièce, la solution complète (ASSEMBLAGE) .

II.3.5 Caractéristiques d'un élément fini

Le signalement précédent permet de construire les deux caractéristiques d'un élément fini qui sont :

- sa matrice de rigidité K
- son vecteur force F

Elles interviennent dans l'équation d'équilibre de l'élément fini, en relation forces –déplacement.

$$F = KU \quad (2.1)$$

II.4 Condition d'équilibre

Les forces agissant sur toute la structure ou sur chacun des éléments considérés comme un corps libre, doivent être en équilibre.

II.5 Condition de compatibilité

Les déplacement de l'ensemble de la structure ou de chacun de ses élément doivent être compatible, en d'autres terme les déplacement des extrémités des élément qui son connectés à un même doivent être identiques.

On peut encor dire que si on effectue une section sur un élément, les déplacements de élément à gauche et à droite de set section doivent être égaux.

II.6 Loi de HOOKE

Le comportement de la structure doit satisfaire à la loi de HOOKE qui décrit le rapport entre la charge et la déformation des matériaux.

Dans toute l'étude qui suit, on considérera que la déformation est proportionnelle à la charge, ce qui se traduit par l'équation (2-1).

II.7 Conditions aux limites

Les conditions aux limites exigent que les conditions d'équilibre et de compatibilité en chacun des limites de la structure soient satisfaites.

Exemple : les déplacements d'une extrémité encastrée doivent être nuls.

en formulant des équation régissant le comportement de chaque élément indépendamment par la loi de HOOKE, et en superposant toutes ces équations on aboutit à une équation globale pour toute la structure, qui lie les forces nodales aux déplacements nodaux, sous la forme :

$$\{forces\ généralisées\} = [rigidité\ de\ la\ structure] \{déplacements\ généralisés\}$$

En mécanique des structures, les conditions aux limites usuelles sont de deux natures

- cinématique sur Γ_u
- statiques sur Γ_t

Ou symboliquement

$$\Gamma_u + \Gamma_t = \Gamma \quad (2.2)$$

Tel que :

Γ : Est la frontière du domaine

Γ_t : Agissent des tractions de bord après discrétisation, se traduisent en forces concentrées F

Γ_u : correspond aux appuis [1]

Plus généralement, il y a deux classes de conditions aux limites.

II.7.1 Conditions essentielles

Qui touchent les déplacements (translations et rotations), elles interviennent le plus souvent :

- au niveau des appuis directement liés à la fondations.
- dans les conditions de symétrie et d'antisymétrie.

II.7.2 Conditions naturelles

Qui touchent les forces c'est comme pour les poutres ; les charges agissent :

- soit de façon concentrée sur un nœud
- soit sur la frontière d'un élément fini

II.8 Méthode énergétique en élasticité

Pour effectuer un calcul de structure, il est nécessaire de connaître :

- L'expression des équations d'équilibre et les efforts appliqués.
- Les conditions aux limites.
- La loi de comportement.

Les différentes formulations énergétiques permettent de faire une synthèse de ces trois éléments constitutifs d'un problème de structure, et ainsi d'obtenir une formulation plus compacte et donc facile à discrétiser, ce sont ces formulations qui sont la base de la méthode des éléments finis. [4]

II.8.1 Théorème des travaux virtuels

Considérons un état de contrainte $s(\Omega)$ statiquement admissible avec l'état de sollicitation $f(\Omega)$ de la structure, donnons à la structure un état de déplacement virtuel arbitraire $u()$ auquel correspond un état de déformation cinématiquement admissible $e(\Omega)$.

Le théorème des travaux virtuels s'énonce comme suite :

Le travail virtuel des forces extérieures est égal au travail de contraintes statiquement admissible avec les forces extérieures. [11]

II.8.1.1 Théorème de puissance virtuelle

Soit le domaine Ω à 3-D, tel que f les forces de volume et F les forces de surface on considère un corps élastique soumis à un système de forces externes et internes, donc l'énergie potentielle totale d'un tel corps de volume Ω et de frontière Γ est donnée par :

$$\Pi = U - W \quad (2.3)$$

U : L'énergie de déformation du système.

W : Le travail des forces volumiques et surfaciques.

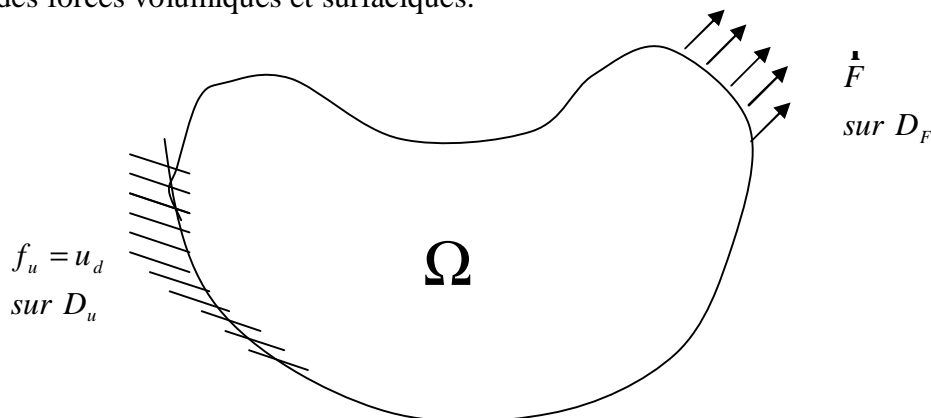


Fig.II.2 forces de volume et forces de surface

Les champs virtuels vérifiant :

$$u(x)=0 \quad \forall x \in D_u$$

Sont dit cinématiquement admissible à zéro, noté $C.A.\{0\}$

Les champs virtuels vérifiant :

$$u(x)=u_d \quad \forall x \in D_u$$

Sont dit cinématiquement admissible, noté $C.A$

Donc le cas d'un matériau linéaire élastique, l'énergie de déformation est défini par l'expression suivante :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{e\}^T \{s\} d\Omega = p_{int}(u(x)) \quad (2.4)$$

Tandis que le travail des forces volumiques et surfaciques est donné par :

$$W = \int_{\Omega} \{u\}^T \{f\} d\Omega + \int_{D_F} \{u\}^T \{F\} ds = p_{ext}(u(x)) \quad (2.5)$$

On substituant les deux équations (2-4) et (2-5) dans l'équation (2-3), on obtient l'équation de l'énergie potentielle totale :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{e\}^T \{s\} d\Omega - \int_{\Omega} \{u\}^T \{f\} d\Omega - \int_{D_F} \{u\}^T \{F\} ds \quad (2.6)$$

Pour que l'équilibre soit réalisé, il faut que la variation de l'énergie potentielle totale doive être minimale par rapport à l'ensemble des variations admissibles des déplacements, par conséquent le principe de minimisation de l'énergie potentielle est :

$$\delta \Pi = \delta(U - W) = \delta U - \delta W = 0 \quad (2.7)$$

II.8.1.2 formulations P.P.V

Nous allons définir les différentes relations permettant d'écrire un problème complet d'élasticité isotherme statique.

Loi de comportement :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{ij} &= M_{ijkl} \mathbf{s}_{kl} & \text{noté} & \quad \mathbf{e} = M\mathbf{s} \\ \mathbf{s}_{ij} &= L_{ijkl} \mathbf{e}_{kl} & \text{noté} & \quad \mathbf{s} = L\mathbf{e} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Les tenseurs L et M, ont des propriétés de symétrie, ainsi que dans le cas statique on a la somme des travaux extérieurs et intérieurs égale à zéro :

$$-\frac{1}{2} \int_{\Omega} tr(\{\mathbf{e}\}^T \{\mathbf{s}\}) d\Omega + \int_{\Omega} \{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{f}\} d\Omega + \int_{D_F} \{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{F}\} ds = 0 \quad (2.9)$$

En introduisant la loi de comportement dans l'écriture de P.P.V, on obtient :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} tr(\{\mathbf{e}\}^T \{\mathbf{s}\}) d\Omega = \int_{\Omega} \{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{f}\} d\Omega + \int_{D_F} \{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{F}\} ds \quad (2.10)$$

Donc il est possible de réécrire la puissance virtuelle des efforts extérieurs, qui dans ce cas est réduite à la puissance des efforts donnés :

$$P_{ext}(u(x)) = P_{domés}(u(x)) = \int_{\Omega} \{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{f}\} d\Omega + \int_{D_F} \{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{F}\} ds \quad (2.11)$$

Alors tout problème d'élasticité isotherme en petite déformation peut s'écrire comme suite

$$\begin{cases} div(\mathbf{s}) + \mathbf{f} = \mathbf{r} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ \mathbf{s} = L\mathbf{e} \\ u(x) = u_d \text{ sur } D_u \\ \mathbf{F}(x) = \mathbf{F}_d \text{ sur } D_F \end{cases} \quad (2.12)$$

Donc la puissance virtuelle des efforts donnés, donnée par la formule suivante :

$$P_{domn}(u(x)) = \int_{\Omega} tr(\{\mathbf{e}\}^T \{L\}\{\mathbf{e}\}) d\Omega \quad (2.13)$$

II.9 Energie potentielle

Energie de déformation par unité de masse, ou densité d'énergie de déformation, notée $w(\mathbf{e})$ est une fonction telle que la loi de comportement s'écrive [8] :

$$\mathbf{s} = L\mathbf{e} = \mathbf{r} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{e}} \quad (2.14)$$

Le tenseur des contraintes \mathbf{s} dérive d'un potentiel $w(\mathbf{e})$:

$$\mathbf{r} \cdot \partial w = \mathbf{s}_{ij} \partial \mathbf{e}_{ij} \quad (2.15)$$

Déterminons maintenant l'énergie de déformation $w(e)$:

$$\begin{aligned} r.\partial w &= L_{ijkl} e_{kl} \partial e_{ij} \\ r.w(e) &= \frac{1}{2} L_{ijkl} e_{kl} e_{ij} \end{aligned} \quad (2.16)$$

on appelle énergie potentielle la fonctionnelle suivante :

$$\Pi(u) = U(u) - W(u) \quad (2.17)$$

Tel que $\delta(\Pi(u)) = 0$, c'est le principe de puissance virtuelle (P.P.V).

Le champ de déplacement qui vérifie cette formulation $\delta(\Pi(u)) = 0$, est une solution pour l'équation (2.11), cette formulation est très adaptée aux méthodes de discrétisation, elle est généralement le support pour la méthode des éléments finis [4].

II.9.1 Énergie potentielle complémentaire $w_c(s)$

L'énergie de déformation par unité de masse ou densité d'énergie de déformation, notée $w_c(s)$, est une fonction tel que la loi de comportement s'écrit dans le cas isotherme.

$$e = M s = r \frac{\partial w_c}{\partial s} \quad (2.18)$$

Le tenseur des contraintes s dérive d'un potentiel $w_c(s)$.

Ou bien

$$\begin{aligned} r.\partial w_c &= M . s . \partial s \\ r.\partial w_c &= M_{ijkl} s_{kl} \partial s_{ij} \\ &= \frac{1}{2} M_{ijkl} s_{ij} s_{kl} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Et d'autre part nous avons la loi de comportement :

$$e_{ij} = r \frac{\partial w_c}{\partial s_{ij}} = M_{ijkl} s_{kl} \quad (2.20)$$

On multiplie la loi de comportement par δs_{ij} qui est un champ statiquement admissible.

$$\int_{\Omega} e_{ij} \delta s_{ij} dw = \int_{\Omega} r \frac{\partial w_c}{\partial s_{ij}} \delta s_{ij} dw = \delta W_c \quad (2.21)$$

II.10 Principe de discrétisation

Les différentes formulations ont abouti à des formulations variationnelles compactes mais continues, le principe des éléments finis étant de résoudre un problème discrétisé.

Nous allons maintenant introduire une méthode de discrétisation dans les différentes formulations qu'on appelle méthode de GALLERKINE.

Cette méthode est adaptée à la formulation variationnelle du le principe de la puissance virtuelle.

II.10.1 Objectif de la méthode de GALLERKINE

On se donne n fonction de base $\{P_i(x)\}$ appartenant au cinématiquement admissible à zéro et on cherche la solution de l'équation (2.4) comme une combinaison linéaire de ces fonctions.

$$U(x) = \sum_{i=1}^n Q_i P_i(x) \quad (2.22)$$

*

Il suffit alors de faire varier i de 1 à n , nous obtenons un système linéaire de n équations à n inconnues, ce système peut s'écrire sous forme matricielle :

$$[F] = [Q][K] \quad (2.23)$$

Où $[K]$ Est la matrice de rigidité K_{ij}

$[Q]$ Est le vecteur des inconnues

$[F]$ Est le vecteur force.

La matrice $[K]$ est symétrique, donc nous sommes passé d'un problème continu à un problème discrétisé.

Peut être exprimé sous une forme intégrale équivalent par dualisation, c'est-à-dire multiplication par champ (2.13) arbitraire et intégration sur Ω , on obtient ainsi la forme faible de l'équation locale d'équilibre :

$$\int_{\Omega} tr\{s\}\{e\}^T d\Omega = \int_{\Omega} \{f\}\{u\}^T d\Omega + \int_{D_f} \{F\}\{u\}^T ds + \int_{D_u} \{s.n\}\{u_d\}^T ds$$

$\{s.n\}$ Sont les réactions inconnues le long de la surface, ou de bord ayant un déplacement imposé, aussi pour éliminer ces inconnues nous allons choisir un champ de déplacement virtuel admissible à zéro, donc il est possible de réécrire la puissance virtuelle de la forme suivante :

$$\int_{\Omega} tr(L\{e\})\{e\}^T d\Omega = \int_{\Omega} \{f\}\{u\}^T d\Omega + \int_{D_F} \{F\}\{u\}^T ds$$

III.1 Introduction

Les structures discrètes sont souvent des structures en treillis constituées des éléments barres ou éléments poutres, assemblées par soudure au rivetage et soumises à des forces extérieures. Sous l'effet de ces forces, la structure peut se déformer et des contraintes internes dans chaque élément peuvent se manifester, et des déformations en chaque nœud peuvent être déterminé. Pour l'élément barre seulement les forces axiales de l'élément sont considères, tandis que pour l'élément poutre, en plus de cette force, la force normale et les moments de flexion en chaque nœud sont pris en compte.

III.2 Analyse des structures utilisant l'élément barre

III.2.1 Définition

C'est l'élément le plus simple, il est composé de deux noeuds avec chacun 1.DDL l'interpolation des déplacements sur l'élément est linéaire, cet élément est utilisé pour traiter les problèmes de traction – compression dans une barre.

III.2.2 Equation de rigidité pour un élément barre en coordonnées locales

Lorsque un élément barre avec une longueur l , et un module d'élasticité E , et une section A , cet élément barre charge axialement et transversalement suivant l'axe locale X , les deux extrémités sont les deux point nodaux notés 1 et 2, et chaque point nodale est possède deux degrés de liberté, et deux forces une axiale et l'autre transversale correspondant respectivement deux déplacements u et v .

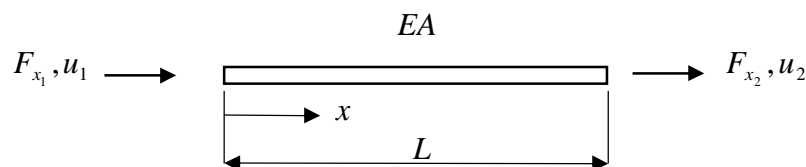


Fig. III.1 élément barre en coordonnées locales

III.2.3 Fonction de déplacement

Pour un élément barre la fonction de déplacement est décrit sous forme polynomiale du 1^{ère} Degré, qui est la fonction de déplacement caractéristique à cet

$$u(x) = a_1 + a_2 x \quad (3.1)$$

Tel que a_1 et a_2 des constantes sont déterminées par les conditions aux limites aux points nodaux 1 et 2.

Pour $x = 0$:

$$u(x) = u(0) = u_1 = a_1$$

Pour $x = l$:

$$u(x) = u(l) = u_2 = a_1 + a_2 l$$

$$a_2 = \frac{u_2 - u_1}{l}$$

Après substitution des coefficients a_i dans l'équation (3-1), et après réarrangement on obtient la forme de fonction de déplacement suivante :

$$u(x) = f_1(x)u_1 + f_2(x)u_2 \quad (3.2)$$

Tel que a_1 et a_2 des constantes sont déterminées par les conditions aux limites aux points nodaux 1 et 2.

Pour $x = 0$:

$$u(x) = u(0) = u_1 = a_1$$

Pour $x = l$:

$$u(x) = u(l) = u_2 = a_1 + a_2 l$$

$$a_2 = \frac{u_2 - u_1}{l}$$

Après substitution des coefficients a_i dans l'équation (3-1), et après réarrangement on obtient la forme de fonction de déplacement suivante :

$$u(x) = f_1(x)u_1 + f_2(x)u_2 \quad (3.2)$$

Avec

$$f_1(x) = 1 - \frac{x}{l} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \frac{x}{l}$$

III.2.4 Équation de rigidité d'un élément barre par la méthode énergétique

Pour un élément barre à section droite uniforme, la déformation est donnée par la relation suivante :

$$e = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.3)$$

Tel que Δx une longueur infinitesimale fournie par la présence de la force axiale de la barre, et la déformation axiale de cet élément barre est obtenue par la substitution de l'équation (3.1) et (3-2) dans l'équation (3-3) :

$$\begin{aligned} e &= a_2 \\ e &= f_1'(x)u_1 + f_2'(x)u_2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Et la force axiale de cet élément barre suivant les coordonnées locales est donnée par la relation suivante :

$$\begin{aligned} S &= sA = EeA = EA \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= EA[f_1'(x)u_1 + f_2'(x)u_2] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Donc l'énergie de déformation d'un élément barre est donnée par la relation suivante [3] :

$$U = \int_0^L \frac{S^2}{2EA} dx = \frac{EA}{2} \int_0^L (f_1'(x)u_1 + f_2'(x)u_2)^2 dx \quad (3.6)$$

On passe maintenant à l'application du théorème de CASTIGLIANO :

$$\begin{aligned} F_{x1} &= \frac{\partial U}{\partial u_1} = \frac{2EA}{2} \int_0^L (f_1'(x)u_1 + f_2'(x)u_2) f_1'(x) dx \\ &= \left(EA \int_0^L f_1' f_1' dx \right) u_1 + \left(EA \int_0^L f_1' f_2' dx \right) u_2 \\ F_{x2} &= \frac{\partial U}{\partial u_2} = \left(EA \int_0^L f_2' f_1' dx \right) u_1 + \left(EA \int_0^L f_2' f_2' dx \right) u_2 \end{aligned}$$

Où sous forme matricielle, l'équation qui exprime la relation entre les charges nodales est les déplacements nodaux :

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

Où symboliquement :

$$\{F_x\} = [k]\{u\} \quad (3.8)$$

Tel que $[k]$ est la matrice de rigidité, et les coefficients de rigidité sont déterminent par la relation suivante :

$$k_{ij} = EA \int_0^L f_i'(x) f_j'(x) dx \quad (3.9)$$

Et pour $i = 1 \text{ à } 2$ et $j = 1 \text{ à } 2$, et la matrice de rigidité k_{ij} est une matrice symétrique, et après substitution de l'équation (3-2) dans l'équation (3-9), l'équation de rigidité pour un élément barre orientée suivant les coordonnées locales prend la forme finale suivante :

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

III.2.5 Equation de rigidité d'un élément barre orienté arbitrairement

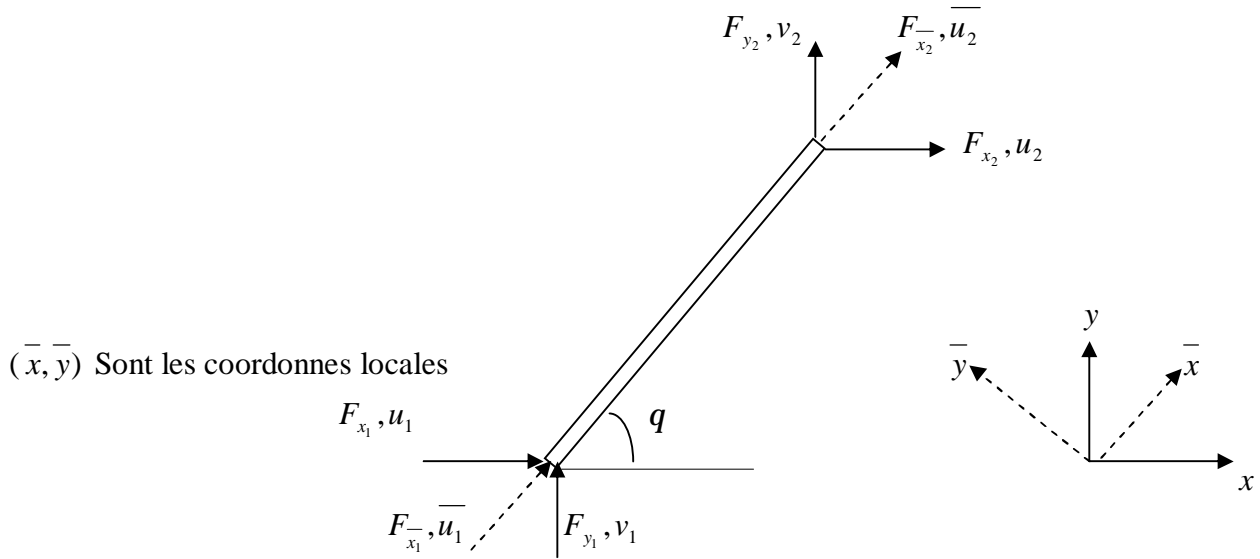


Fig. III.2 élément barre orienté arbitrairement

Au nœud 1 $\bar{u}_1 = u_1 \cos q + v_1 \sin q \quad (3.11)$

Au nœud 2 $\bar{u}_2 = u_2 \cos q + v_2 \sin q \quad (3.12)$

Par définition l et m sont les cosinus directeurs de la barre tel que:

$l = \cos q$ et $m = \sin q$

L'angle q est défini comme étant l'angle mesuré à partir de l'axe des x positifs jusqu'à la barre ij

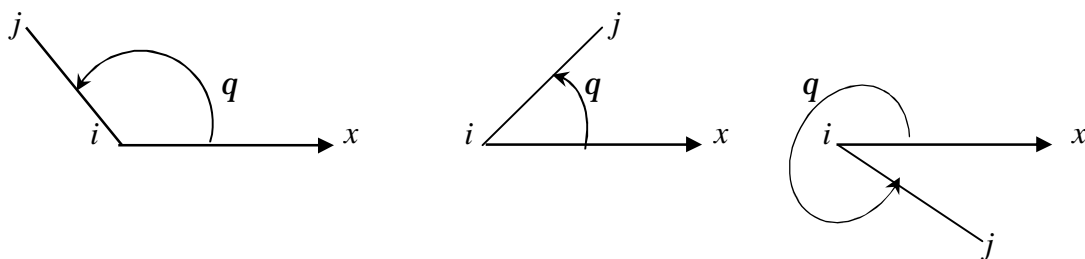


Fig. III.3 mesure de l'angle q

Ecrivons ces deux équations (3-11) et (3-12) sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

La définition de l'énergie c'est un demi la multiplication de la force nodale par le déplacement correspondant :

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} (F_{\bar{x}_1} \bar{u}_1 + F_{\bar{x}_2} \bar{u}_2) \\
 &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} F_{\bar{x}_1} \\ F_{\bar{x}_2} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

On peut écrire l'équation de rigidité (3-10) pour une barre orientée suivant l'axe locale \bar{X} comme suite :

$$\begin{Bmatrix} F_{\bar{x}_1} \\ F_{\bar{x}_2} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix}
 \tag{3.15}$$

Après substitution des deux équations (3. 13) et (3.15) dans l'équation (3. 14) on obtient

$$U = \frac{EA}{2L} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}
 \tag{3.16}$$

Pour obtenir l'équation de rigidité d'une barre orientée arbitrairement on utilisant la théorème de CASTIGLIANO

$$\begin{Bmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ F_{x_2} \\ F_{y_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial u_1} \\ \frac{\partial U}{\partial v_1} \\ \frac{\partial U}{\partial u_2} \\ \frac{\partial U}{\partial v_2} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}
 \tag{3.17}$$

Où symboliquement :

$$\{F\} = [K]\{q\}
 \tag{3.18}$$

[K] Est la matrice de rigidité d'un élément barre, qui on peut écrire sous forme simple :

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} k_0 & -k_0 \\ -k_0 & k_0 \end{bmatrix}$$

Avec

$$[k_0] = \begin{bmatrix} l^2 & lm \\ lm & m^2 \end{bmatrix}$$

III.2.6 Transformation des coordonnées locales aux coordonnées globales

Les quatre déplacements nodaux dans un système de coordonnées locales, sont transformés en ceux de coordonnées globales par l'équation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \overline{u_1} \\ \overline{v_1} \\ \overline{u_2} \\ \overline{v_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

Cette équation peut être sous forme symbolique :

$$\{\overline{q}\} = [T]\{q\} \quad (3.20a)$$

$$\{\overline{F}\} = [T]\{F\} \quad (3.20b)$$

Puisque la matrice de transfert $[T]$ de l'ordre 4x4, donc il faut augmenter l'ordre de la matrice de rigidité d'un élément barre au coordonnées locales de 2x2 à 4x4, pour faciliter l'addition des matrices. Alors l'équation (3-10) devienne comme suite [3] :

$$\begin{Bmatrix} \overline{F_{x_1}} \\ \overline{F_{y_1}} \\ \overline{F_x} \\ \overline{F_{y_2}} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{u_1} \\ \overline{v_1} \\ \overline{u_2} \\ \overline{v_2} \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

Où bien :

$$\{\overline{F}\} = [\overline{K}]\{\overline{q}\} \quad (3.22)$$

En substituant l'équation (3-20a) et (3-20c) dans l'équation (3-22), on obtient :

$$[T]\{F\} = [\overline{K}][T]\{q\}$$

Lorsque la matrice $[T]$ est orthogonale, alors $[T]^T = [T]^{-1}$, donc on peut déduire que :

$$\{F\} = [T]^{-1}[\overline{K}][T]\{q\} = [K]\{q\}$$

On obtient maintenant la forme finale de la matrice de rigidité pour un élément barre dans le système de coordonnées globales :

$$[K] = [T]^T [\overline{K}] [T] \quad (3.23)$$

III.2.7 Analyse des structures utilisant l'élément poutre

III.2.7.1 Equation d'un élément poutre en coordonnées locales

III.2.7.1.1 Déplacement nodal et forces

Le problème que nous sommes proposes d'étudier est les flexion d'une poutre, chaque nœud possède deux degrés de liberté, un déplacement v normal à la poutre et une rotation q autour de l'axe y , et un moment de flexion M et une force de cisaillement y correspondant respectivement aux deux degrés de liberté q et v .

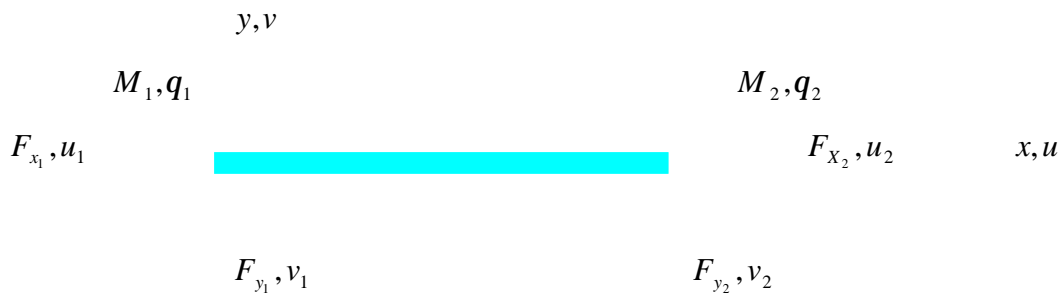


Fig. III.4 élément poutre en coordonnées locales.

Le nombre total de degrés de liberté d'un élément est égal au produit du nombre de nœud par le nombre de degré de liberté.

Donc :

$$N_{t(ddl)} = 2 \times 2 = 4$$

Le nombre de DDL de l'élément étant connu on peut déterminer le vecteur de déplacement nodal $\{u\}$ et le vecteur de charge nodal $\{F\}$ la matrice de rigidité $[K]$ pour cet élément est défini par l'équation:

$$\{F\} = [k]\{u\}$$

Avec :

$$F = \begin{Bmatrix} y_1 \\ M_1 \\ y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad u = \begin{Bmatrix} v_1 \\ q_1 \\ v_2 \\ q_2 \end{Bmatrix} \tag{3.24}$$

Chaque vecteur étant composé de quatre termes, matrice $[K]$ est une matrice carrée d'ordre quatre par quatre.

III.2.7.1.2 Fonction de déplacement

Pour un élément de poutre, l'équation d'équilibre est donnée par la formule suivante [3] :

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0 \quad (3.25)$$

Et le comportement de la poutre est décrit par une fonction polynomiale du 3^e degré, qui est la fonction de déplacement et la solution de cette équation :

$$V(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \quad (3.26)$$

$$q(x) = \frac{\partial v}{\partial x} = a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2 \quad (3.27)$$

Les a_i sont les coefficients de déplacement, le vecteur de coefficient de déplacement $\{a_i\}$ peut être obtenu en utilisant les conditions aux limites aux points nodaux.

Les équations des déplacements aux nœuds peuvent être écrites sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} v(x) \\ q(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$$

Ainsi pour l'élément de poutre de la figure (III.4) où les coordonnées des nœuds sont O et L on aura :

Au nœud (1) $x = 0$:

$$v = v_1 = a_1$$

$$q = \frac{\partial v}{\partial x} = q_1 = a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2 = a_2$$

Au nœud (2) $x = L$:

$$v = v_2 = a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + a_4 L^3$$

$$q = \frac{\partial v}{\partial x} = q_2 = a_2 + 2a_3 L + 3a_4 L^2$$

En exprimant (3.26) et (3.27) sous forme matricielle on aura :

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \mathbf{q}_1 \\ v_2 \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$$

Ou bien :

$$\{q(x)\} = [A]\{a\}$$

La forme inverse de cette équation donne les expressions des constantes a_i et après substitution des coefficients (a_i) dans l'équation et après réarrangement, on obtient la forme finale de la fonction de déplacement

$$\begin{aligned} V(x) = & v_1 + x\mathbf{q}_1 - \frac{3x^2}{L^2}v_1 - \frac{2x^2}{L}\mathbf{q}_1 + \frac{3x^2}{L^2}v_2 - \frac{x^2}{L}\mathbf{q}_2 \\ & + \frac{3x^3}{L^3}v_1 + \frac{x^3}{L^2}\mathbf{q}_1 - \frac{2x^3}{L^3}v_2 + \frac{x^3}{L^2}\mathbf{q}_2 \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$V(x) = f_1(x)v_1 + f_2(x)\mathbf{q}_1 + f_3(x)v_2 + f_4(x)\mathbf{q}_2$$

On peut avoir les fonctions de forme qui sont :

$$\begin{cases} f_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ f_2(x) = x - 2\left(\frac{x^2}{L}\right) + \left(\frac{x^3}{L^2}\right) \\ f_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ f_4(x) = -\left(\frac{x}{L}\right) + \left(\frac{x^3}{L^2}\right) \end{cases} \quad (3.29)$$

On passe maintenant à l'application du théorème de CASTIGLIANO

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (3.30)$$

F_i : Les forces généralisée

q_i : Les déplacements nodales généralisés

Pour un élément poutre à section droite uniforme, l'énergie de déformation est donnée par :

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3.31)$$

On combinant les deux équations (3-30) et (3-31) on aura :

$$F_i = \frac{EI}{2} \int_0^l 2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx$$

On dérive l'équation de déplacement (3-28) :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f_1''(x) v_1 + f_2''(x) q_1 + f_3''(x) v_2 + f_4''(x) q_2$$

On peut calculer maintenant les forces et les moments en fonction des déplacements.

$$\begin{aligned} F_{y1} &= \frac{\partial U}{\partial v_1} & M_1 &= \frac{\partial U}{\partial q_1} \\ F_{y2} &= \frac{\partial U}{\partial v_2} & M_2 &= \frac{\partial U}{\partial q_2} \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$F_i = k_{i1} v_1 + k_{i2} q_1 + k_{i3} v_2 + k_{i4} q_2$$

Avec :

$$k_{ij} = EI \int_0^l f_i''(x) f_j''(x) dx \quad (3.34)$$

$$= EI \int_0^l \left(-\frac{6}{L^2} + 12 \frac{x}{L^3} \right)^2 dx = 12 \frac{EI}{L^3}$$

$$k_{11} = EI \int_0^L f_1''(x) f_1''(x) dx$$

$$k_{12} = EI \int_0^L f_1''(x) f_2''(x) dx$$

$$k_{13} = EI \int_0^L f_1''(x) f_3''(x) dx$$

$$k_{14} = EI \int_0^L f_1''(x) f_4''(x) dx$$

Les $f_i''(x)$ et $f_j''(x)$: sont les dérivées secondes des fonctions de forme exprimées dans les équations (3-29).

Après toutes les procédures de dérivation et de substitution, on aboutit à l'équation de rigidité en coordonnées locales :

$$\begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_1 \\ F_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & -\frac{6}{L} & 2 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 & -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ q_1 \\ v_2 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (3.35a)$$

Ou symboliquement :

$$\{F\} = [K] \{q\} \quad (3.35b)$$

[K] Est la matrice de rigidité d'une poutre en coordonnées locales.

III.2.7.2 Equation de rigidité d'un élément poutre en coordonnées globales

La figure (III.5) représente un élément poutre qui occupe une position n'est pas horizontale un tel élément est soumis à une force axiale, une force de cisaillement et un moment de flexion cet élément doit posséder trois degrés de liberté en chaque nœud, deux composantes de déplacement u et v dans les directions x et y et un angle de rotation q [3] :

- aux degrés de liberté u et v correspondant respectivement deux forces F_x et F_y

- au degré de liberté q correspond un moment M .

Cet élément est orienté arbitrairement d'un angle q avec l'axe x , et pour obtenir la matrice de rigidité(6x6) pour un élément poutre, il faut combiner en premier la matrice de rigidité un élément barre et la matrice de rigidité (4x4) pour un élément poutre toujours dans le cas des coordonnées locales.

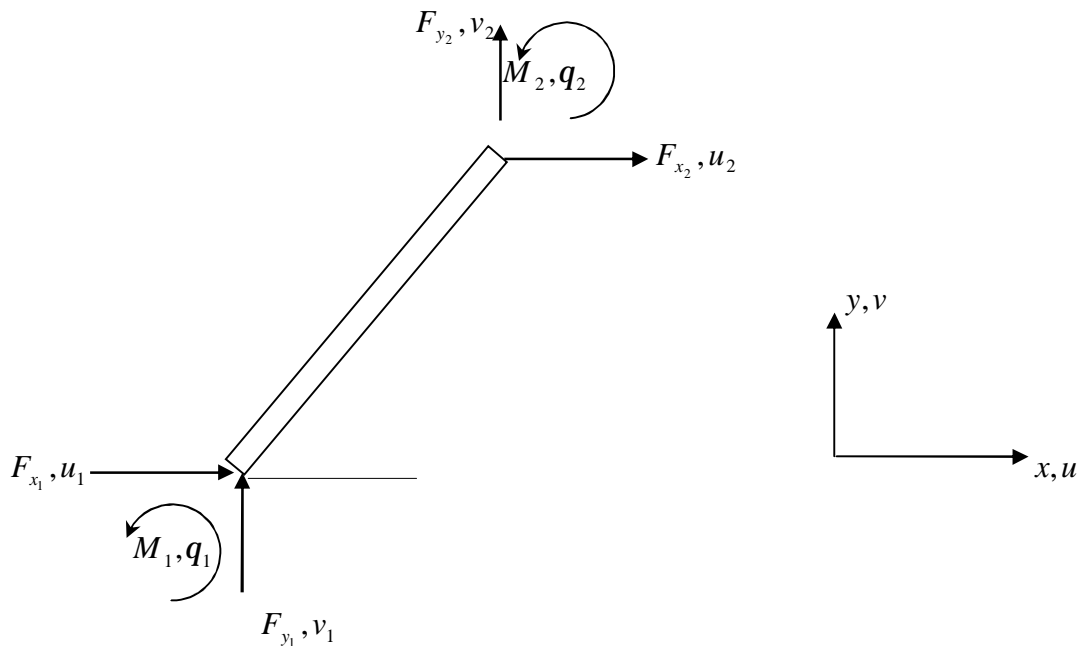


Fig. III.5 élément poutre orienté arbitrairement

En suite on transforme cette matrice (6x6) des coordonnées locales aux coordonnées globales.

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ q_1 \\ v_2 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

Cette matrice de rigidité est composée de quatre sous-matrices, dont deux sont des sous-matrices ZERO, et les deux restes sont des matrices non nulles, qui se trouvent sur la diagonale l'une est associée au comportement axial et l'autre est associée au comportement de flexion.

III.2.8 Transformation des coordonnées locales aux coordonnées globales

Dans le cas des flexions des poutres, un élément poutre est soumis un effort axial, dont l'axe longitudinal est confondu avec l'axe x, l'axe \bar{x} est orienté par un angle q avec l'axe de coordonnées globales, cette angle est mesuré dans le sens anti-horaire, et la barre ($\bar{\quad}$) c'est le symbole qui exprime les grandeurs en coordonnées locales.

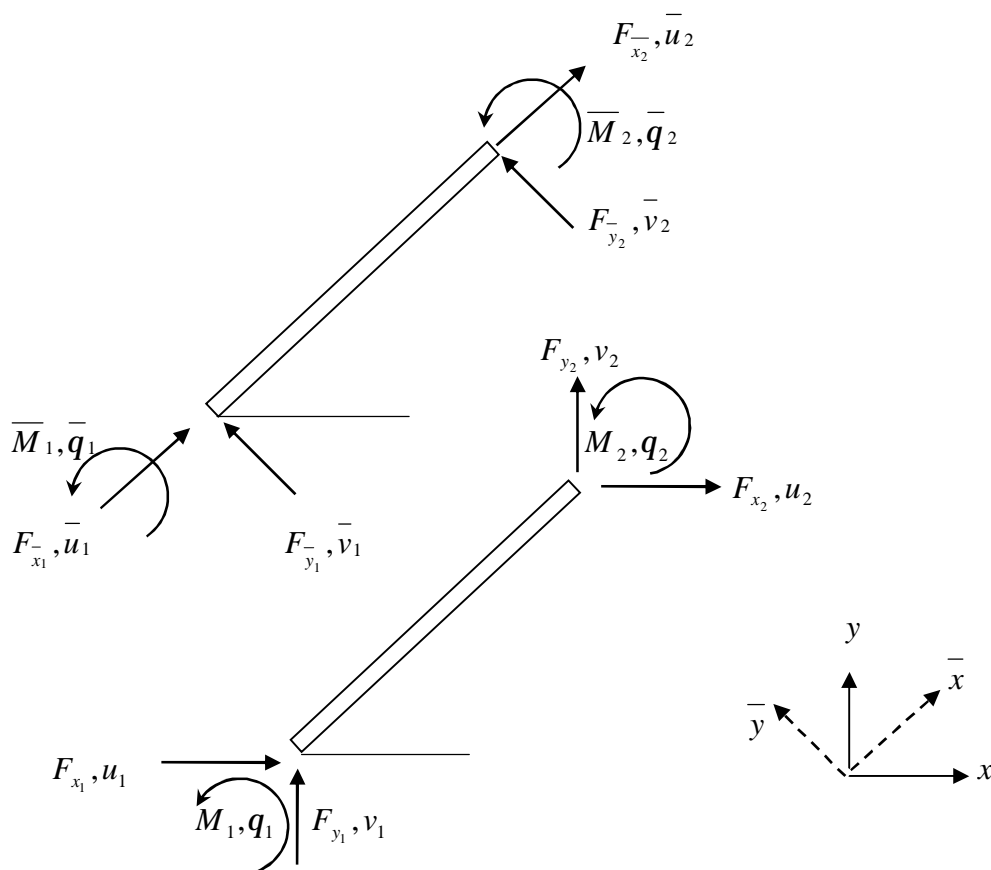


Fig.III.6 transformation des coordonnées locales en coordonnées globales.

Les six forces nodales et moments de flexion dans un système de coordonnées locales sont transformés en coordonnées globales, par l'équation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \overline{F}_{x1} \\ \overline{F}_{y1} \\ \overline{M}_1 \\ \overline{F}_{x2} \\ \overline{F}_{y2} \\ \overline{M}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

Tel que l et m sont les cosinus et sinus directeurs :

$$\begin{aligned} l &= \cos q \\ m &= \sin q \end{aligned}$$

L'équation (3-36) peut être sous forme symbolique :

$$\{\overline{F}\} = [T]\{F\} \quad (3.37)$$

On peut aussi transformer les six degrés de libertés du système de coordonnées locales au système de coordonnées globales :

$$\{\overline{q}\} = [T]\{q\}$$

La transposée de la matrice de transformation $[T]$ est la même avec sa matrice inverse :

$$[T]^{-1} = [T]^T$$

On peut écrire l'équation (3-37) sous la forme inverse :

$$\{F\} = [T]^{-1}\{\overline{F}\} = [T]^T\{\overline{F}\}$$

On substituant cette équation dans équation force-déplacement (3-35b), on obtient :

$$\begin{aligned} \{\overline{F}\} &= [\overline{K}]\{\overline{q}\} \\ [T]\{F\} &= [\overline{K}][T]\{q\} \end{aligned}$$

Comme la matrice $[T]$ est orthogonale, on peut alors déduire que :

$$\{F\} = [T]^T [\overline{K}] [T] \{q\} \quad (3.38)$$

Après toutes les substitutions pour la matrice $[\overline{K}]$ et la matrice de transformation $[T]$ dans l'équation (3-38), on obtient la forme finale de l'équation de rigidité pour un élément poutre dans système de coordonnées globales.

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} RI^2 + \frac{12}{L^2} m^2 & & & & & \\ \left(R - \frac{12}{L^2}\right) Im & Rm^2 + \frac{12}{L^2} I^2 & & & & \\ -\frac{6}{L} m & \frac{6}{L} I & & & & 4 \\ -RI^2 - \frac{12}{L^2} m^2 & \left(-R + \frac{12}{L^2}\right) Im & \frac{6}{L} m & RI^2 + \frac{12}{L^2} m^2 & & \\ \left(-R + \frac{12}{L^2}\right) Im & -Rm^2 - \frac{12}{L^2} I^2 & -\frac{6}{L} I & \left(R - \frac{12}{L^2}\right) Im & Rm^2 + \frac{12}{L^2} I^2 & \\ -\frac{6}{L} m & \frac{6}{L} I & 2 & \frac{6}{L} m & -\frac{6}{L} I & 4 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

III.2.9 Détermination de la force axiale

La force axiale dans un élément poutre ou barre orientée arbitrairement dans le plan d'un angle q avec l'horizontal est donnée par l'équation (3-17)

$$F_{x_2} = \frac{EA}{L} [I^2(u_2 - u_1) + Im(v_2 - v_1)]$$

$$F_{y_2} = \frac{EA}{L} [Im(u_2 - u_1) + m^2(v_2 - v_1)]$$

El la force axiale défini comme suite :

$$\begin{aligned} S &= F_{x_2} I + F_{y_2} m \\ &= \frac{EA}{L} (I^2 + m^2) [I(u_2 - u_1) + m(v_2 - v_1)] \\ &= \frac{EA}{L} [I(u_2 - u_1) + m(v_2 - v_1)] \end{aligned}$$

Ou bien sous forme matricielle :

$$S_n = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} I_n & m_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j - u_i \\ v_j - v_i \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

III.2.10 Méthode d'assemblage

Dans les deux cas de élément poutre ou élément barre, et après la formulation des équations de rigidité de tous les éléments on passe à la formulation de l'équation de rigidité globale de la srtucture.

La procedure consiste à superposer tous les éléments agissnt aux neouds et par conséquent l'assemblage des vecteurs forces généraliseés, des matrices de rigidité et des vectures déplacements

généralisés de tous les éléments de la structure, pour éclaircir la procédure d'assemblage on considère un partie de la structure représenté sur la (figure.3.7)

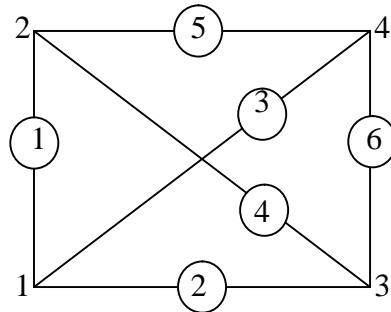


Fig.III.7 représentation de les nœuds et les éléments

La première étape consiste à éliminer les conditions aux limites existantes aux nœuds, et essayer de faire apparaître tous les degrés de liberté et les composantes des forces existantes aussi aux nœuds comme représentés sur la (figure.3.8)

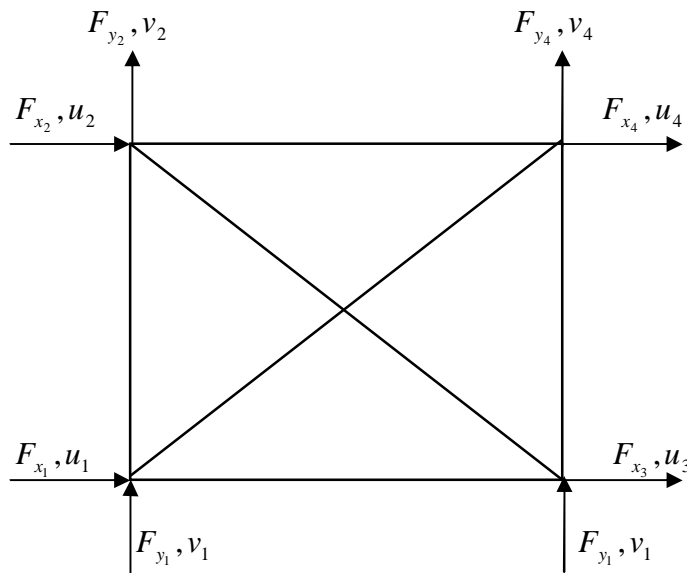
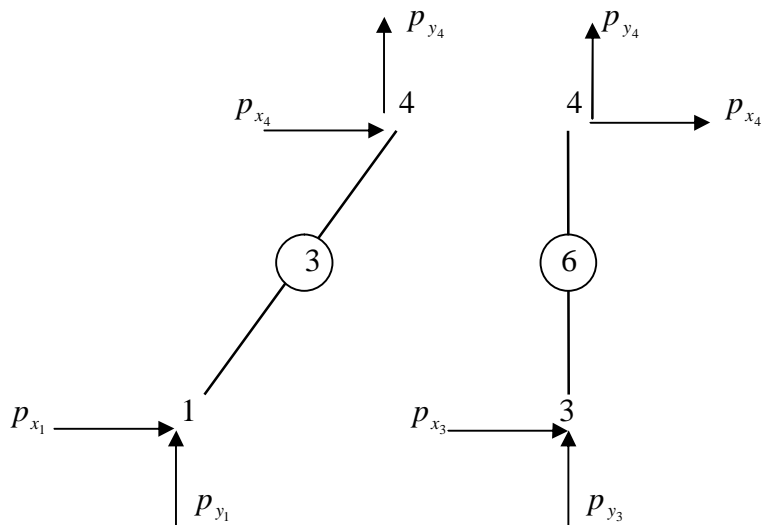
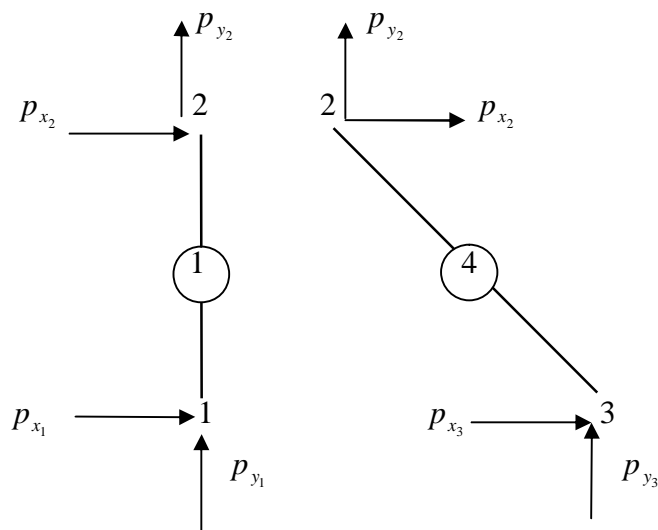
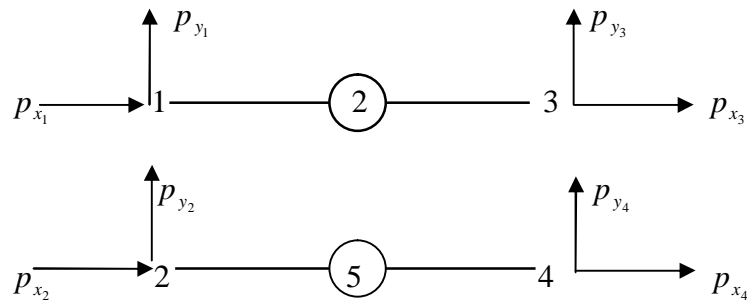


Fig.III.8 Forces et déplacements de quatre nœuds.

Après la formulation de l'équation de rigidité de chaque élément, on effectue l'assemblage tel que les déplacements nodaux pour chaque élément sont les mêmes que les déplacements aux points communs.



Les forces aux nœuds pour chaque élément doivent être en équilibre avec les forces de chaque nœud commun.

Alors la superposition des efforts se traduit par les équations suivantes :

$$F_{x_1} = p_{x_1}(\text{élem } 1) + p_{x_1}(\text{élem } 2) + p_{x_1}(\text{élem } 3)$$

$$F_{y_1} = p_{y_1}(\text{élem } 1) + p_{y_1}(\text{élem } 2) + p_{y_1}(\text{élem } 3)$$

$$F_{x_2} = p_{x_2}(\text{élem } 1) + p_{x_2}(\text{élem } 4) + p_{x_2}(\text{élem } 5)$$

$$F_{y_2} = p_{y_2}(\text{élem } 1) + p_{y_2}(\text{élem } 4) + p_{y_2}(\text{élem } 5)$$

$$F_{x_3} = p_{x_3}(\text{élem } 2) + p_{x_3}(\text{élem } 4) + p_{x_3}(\text{élem } 6)$$

$$F_{y_3} = p_{y_3}(\text{élem } 2) + p_{y_3}(\text{élem } 4) + p_{y_3}(\text{élem } 6)$$

$$F_{x_4} = p_{x_4}(\text{élem } 4) + p_{x_4}(\text{élem } 5) + p_{x_4}(\text{élem } 6)$$

$$F_{y_4} = p_{y_4}(\text{élem } 4) + p_{y_4}(\text{élem } 5) + p_{y_4}(\text{élem } 6)$$

L'assemblage est lié essentiellement à la numérotation de la structure et la manière de la numérotation joue un rôle très important sur la grandeur de largeur de la bande de la structure.

III.2.11 Elimination directe de la bande de matrice.

Pour les structures à deux dimensions, la matrice de rigidité est généralement la forme de la bande matrice si les points nodaux sont bien numérotés, tel que la largeur de la bande de la matrice de rigidité peut être plus étroite. Et donc les problèmes de stockage peuvent être réduits, par le stockage des coefficients dans la bande de l'ordinateur, et les équations peuvent être résolues en utilisant la méthode d'élimination directe au lieu des itérations, la largeur de la bande pour une structure assemblée d'éléments finis peut être trouvée par l'équation générale suivante :

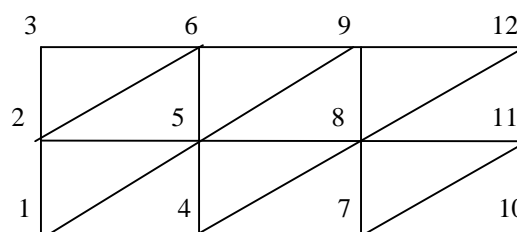
$$L = 2[mn + (n - 1)] + 1 \quad (3.41)$$

m : La différence maximale entre deux nœuds d'un même élément fini.

n : Nombre de degrés de liberté pour chaque nœud.

Exemple de numérotations.

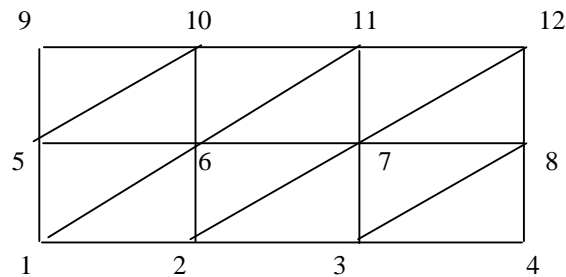
III.2.11.1 Numérotation verticale :



Dans cet exemple tel que la numérotation des points nœdaux est verticale, la largeur de la bande de la matrice pour une structure à deux dimensions, c'est -à- dire chaque nœud possède deux degrés de liberté égale :

$$\text{alors} \quad n = 2 \quad m = 4$$

III.2.11.2 Numérotation horizontale. $L = 2[4 \times 2 + (2 - 1)] + 1 = 19$



Dans cet exemple tel que la numérotation des points nœdaux est horizontale, la largeur de la bande de la matrice pour une structure à deux dimensions, c'est -à- dire chaque nœud possède deux degrés de liberté égale :

$$\text{alors} \quad n = 2 \quad m = 5$$

$$L = 2[5 \times 2 + (2 - 1)] + 1 = 23$$

Donc la largeur de la bande est minimale dans le premier système de numérotation c-à-d la numérotation verticale.

IV.1 Introduction

Tout d'abord, la plupart des problèmes simples ont été résolus, et on se trouve désormais confronté à des problèmes de plus en plus compliqués quand le nombre des éléments important. Le nombre réduit des nœuds implique l'utilisation de la méthode des éléments finis d'une manière simple et direct, par contre, si le nombre devient important l'application présente une certaine difficulté, ce qui nous oblige d'élaborer une méthode de travail, pour numériser le problème posé comme étape intermédiaire vers la solution rapprochée, par un programme en langage «PASCAL ».

Ce langage de programmation est utilisé suite à [16] :

- bien lire et comprendre l'énoncé du problème à résoudre
- bonne précision des résultats
- souplesse d'analyse du problème
- une puissance et une rapidité considérables
- une résolution numérique de plus en plus efficace

IV.2 Problème posé

Notre structure présente un nombre important des éléments (66 éléments pour la structure barre et 41 éléments pour la structure poutre), ce nombre pose la difficulté de trouver la matrice de rigidité globale, et chaque augmentation de nombre des éléments en proche a l'impossibilité de trouver la solution analytiquement, qui ce exige la numérisation du problème vers la solution la plus parfaite possible.

IV.3 L'identification des charges

Les charges appliquées peuvent être concentrées ou réparties, ces derniers se décomposent suivant à une formule mathématique, tel que le travail équivalent effectuée par les charges concentrées aux nœuds égal au travail produit par la charge répartie.

Si on considère un élément poutre, le travail effectuée pour les charges concentrées aux nœuds est de la forme suivante :

$$w = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} F_{y_1} & M_1 & F_{y_2} & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ q_1 \\ v_2 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

Et d'autre part, le travail effectuée par la charge répartie est obtenue comme suite :

$$w = \frac{1}{2} \int_0^l p(x).v(x).dx \quad (4.2)$$

On substituant la fonction de déplacement (3.28) dans l'équation (4.2) on obtient :

$$F_{y_1} = \int_0^l p(x).f_1(x).dx$$

$$M_1 = \int_0^l p(x).f_2(x).dx$$

$$F_{y_2} = \int_0^l p(x).f_3(x).dx$$

$$M_2 = \int_0^l p(x).f_4(x).dx$$

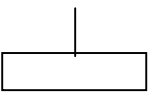
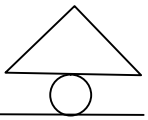
Ou bien sous forme générale :

$$F_i = \int_0^l p(x).f_i(x).dx \quad (4.3)$$

De notre travail les charges sont concentrées aux nœuds, le programme permet le changement d'application de ces chargements, dont le choix a été fait pour élément poutre sous forme symétrique pour avoir des résultats symétriques (pour vérifier la symétrie des déplacements, réactions et les efforts axiaux), et pour l'élément barre comme la forme donnée à fin de valider les résultats obtenus par le programme ceux du logiciel « SAP 2000 ».

IV.4 Conditions aux limites

Notre travail consiste de faire une variation des conditions aux limites pour une même structure pour élément barre ou poutre de but d'établir les meilleurs choix aux conditions qui minimisent les contraintes dans les éléments.

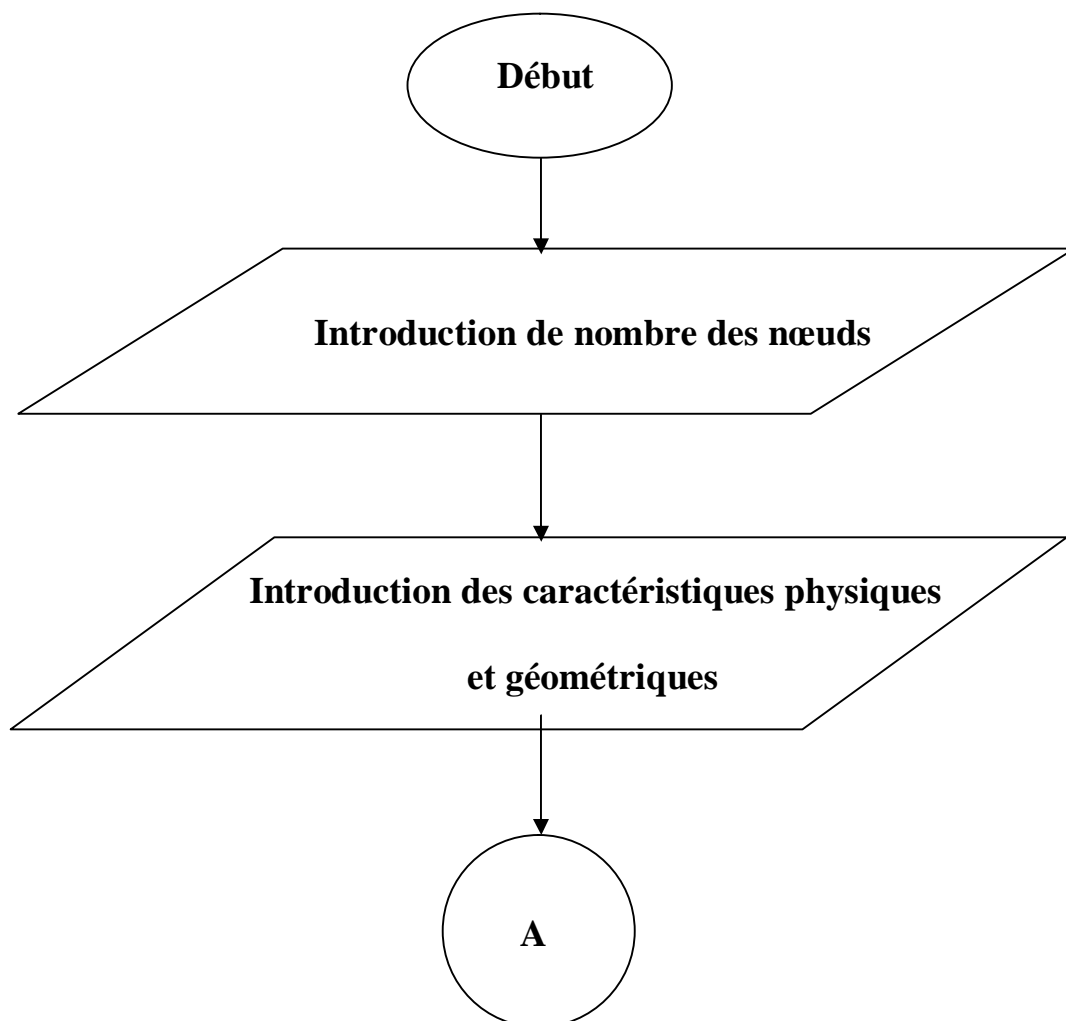
	Translation suivant X	Translation suivant Y	Rotation
	Nul	Nul	Nul
	Existe	Nul	Existe

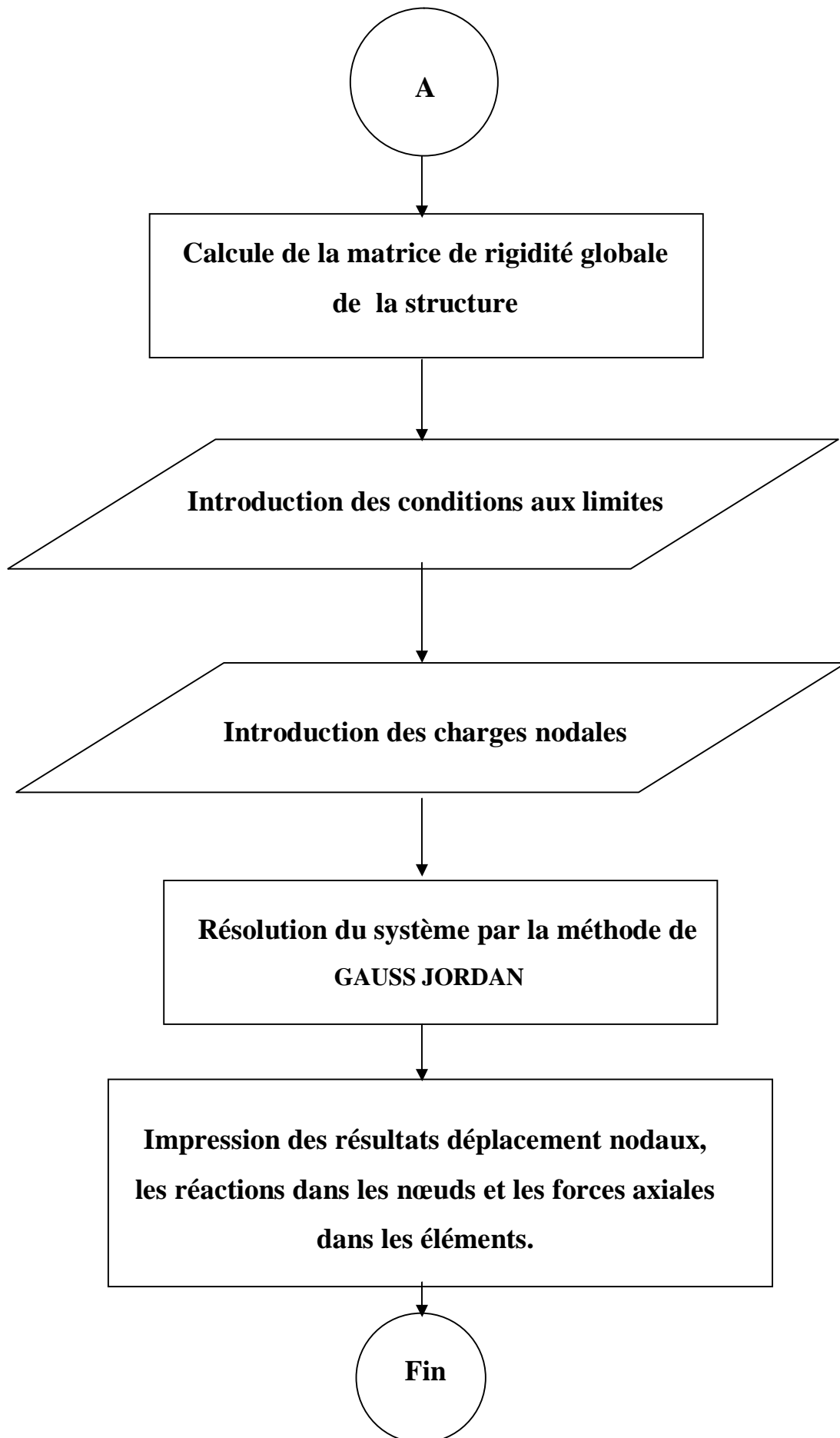
IV.5 définitions des paramètres

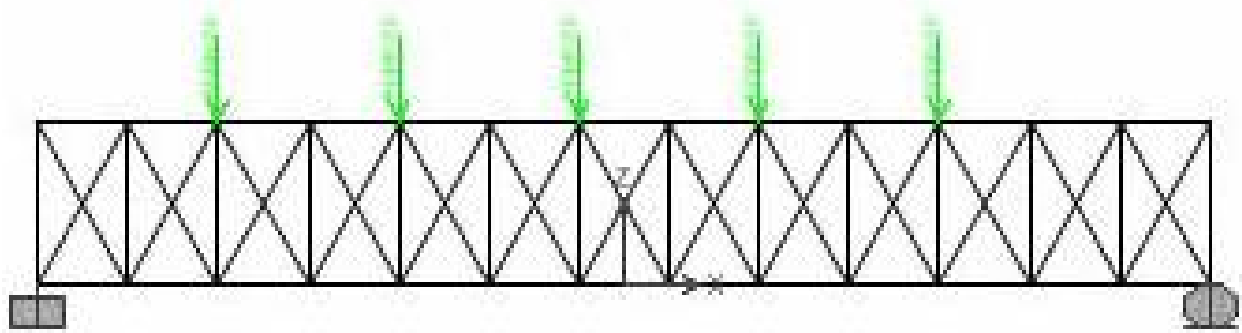
La structure métallique plane simplement supportée à ces extrémités, ces caractéristiques géométriques de section carrée $S = 0.0244m^2$, de longueur treillis $L = 2.85m$ et de hauteur $H = 4.5m$, les propriétés mécaniques du matériau sont données par module de «YOUNG» $E = 200.10^9 N/m^2$ et de densité $r = 7849.04 Kg.m^3$

IV.6 Organigramme du programme

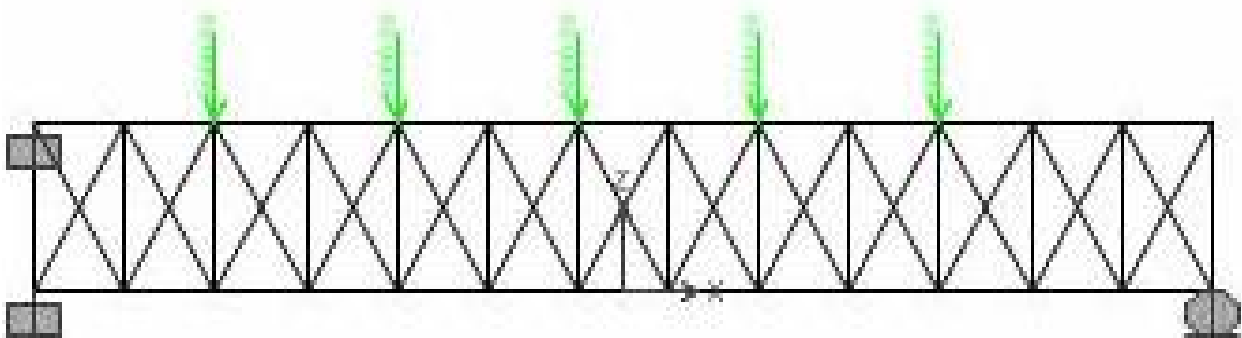
Pour mieux comprendre les différentes étapes de fonctionnement de ce programme, la Figure suivante montre l'organigramme de ce programme.



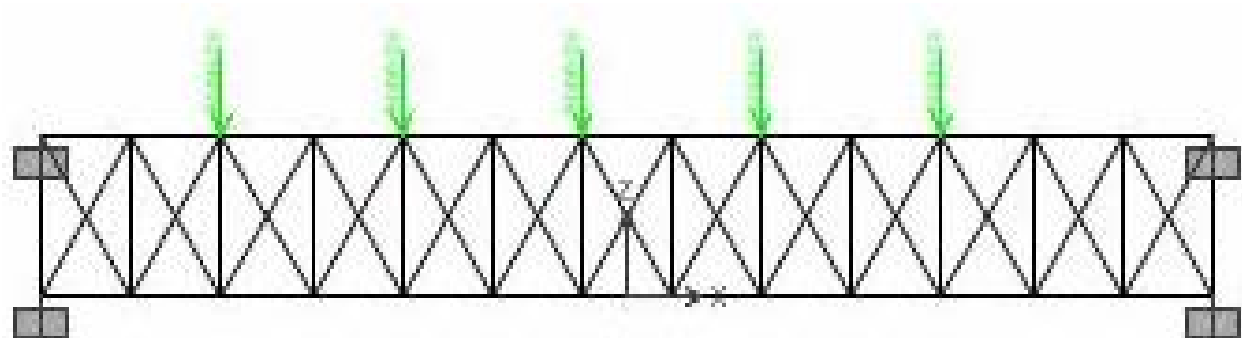




a - Structure 1 élément barre (premier cas de conditions aux limites)

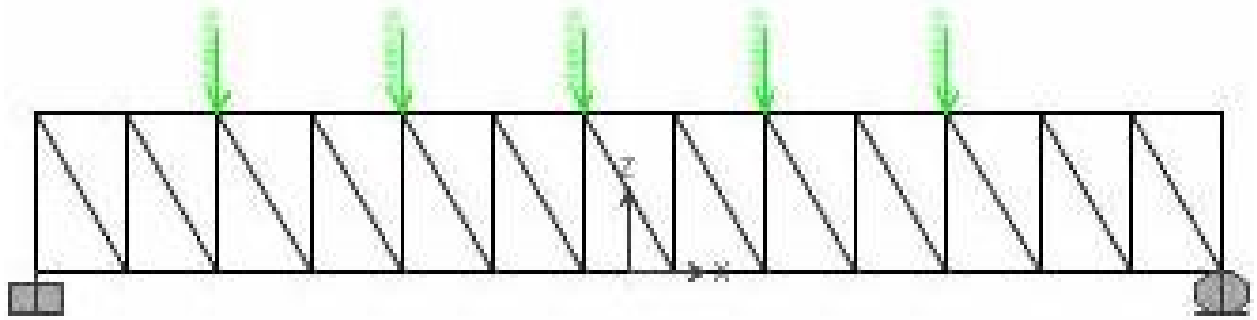


b - Structure 1 élément barre (deuxième cas de conditions aux limites)

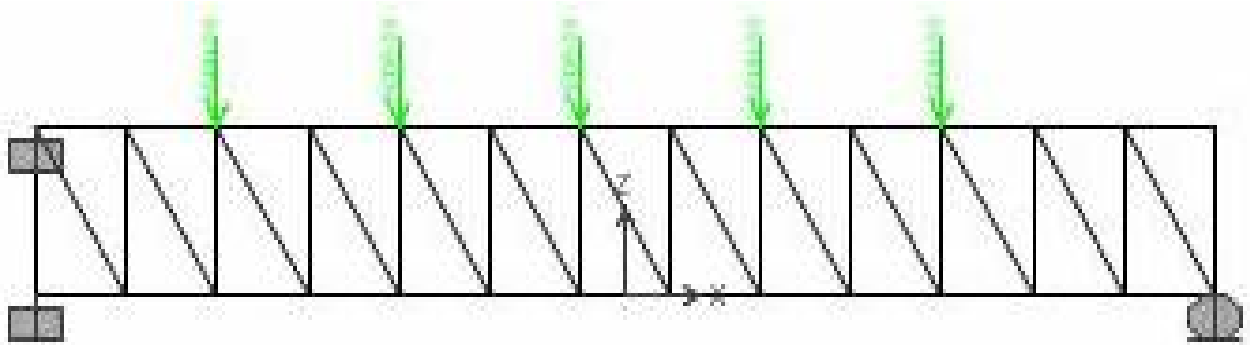


c - Structure 1 élément barre (troisième cas de conditions aux limites)

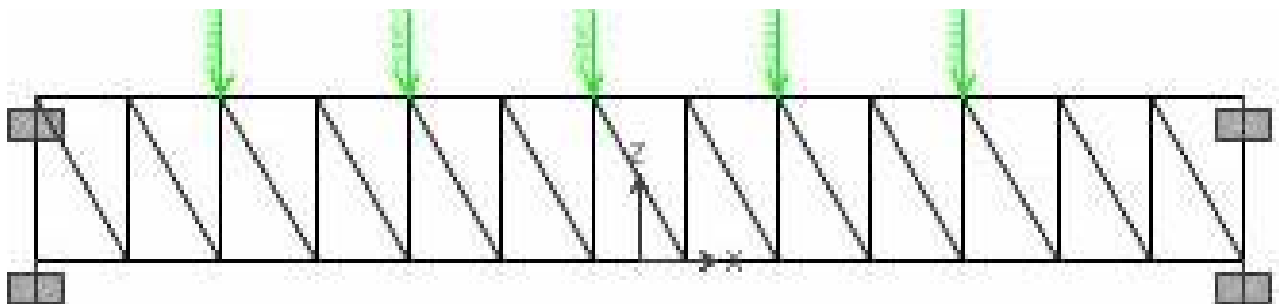
Fig. 4.1 : Structure N°1 (élément barre)



a - Structure 2 élément barre (premier cas de conditions aux limites)

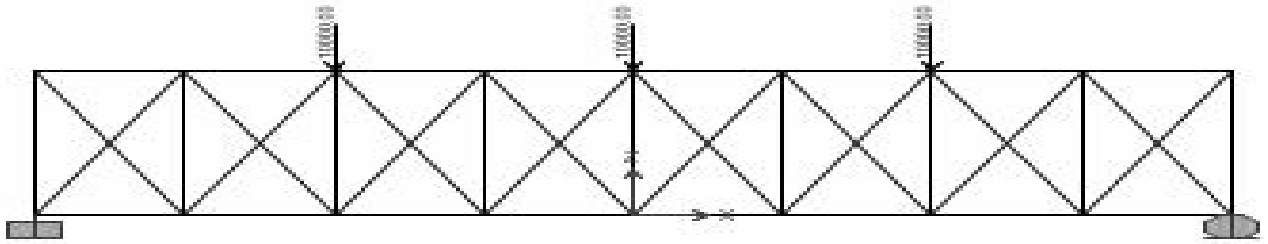


b - Structure 2 élément barre (deuxième cas de conditions aux limites)

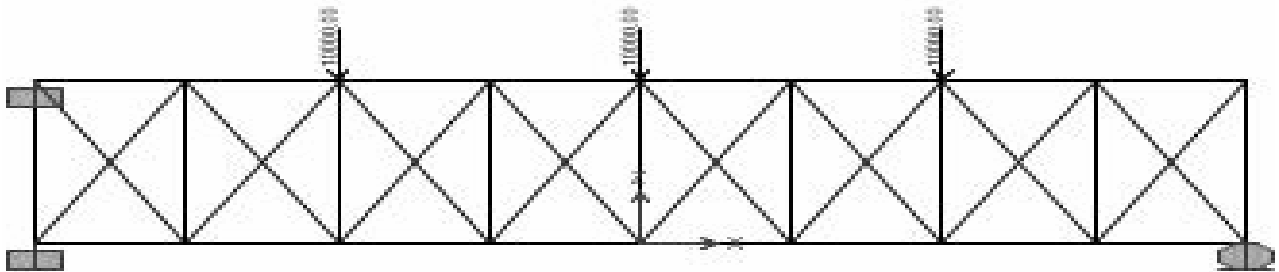


c - Structure 2 élément barre (troisième cas de conditions aux limites)

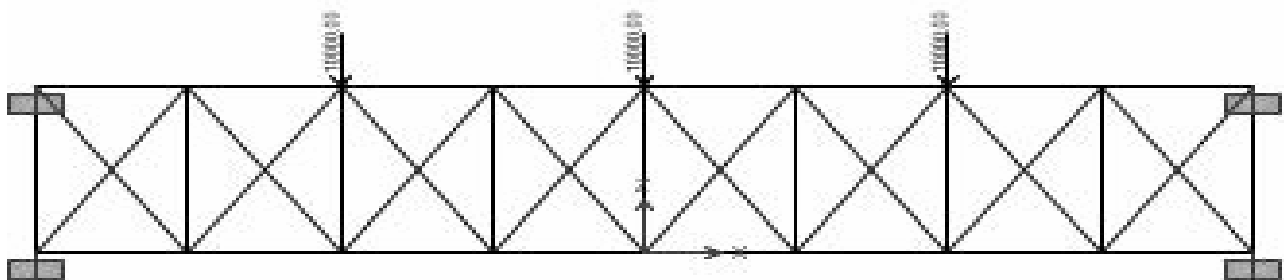
Fig.4.2 : Structure №2 (élément barre)



a - Structure 1 élément poutre (premier cas de conditions aux limites)

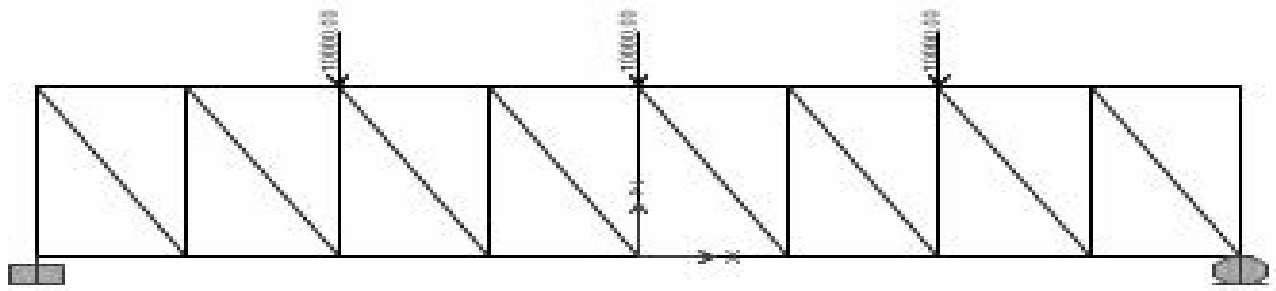


b - Structure 1 élément poutre (deuxième cas de conditions aux limites)

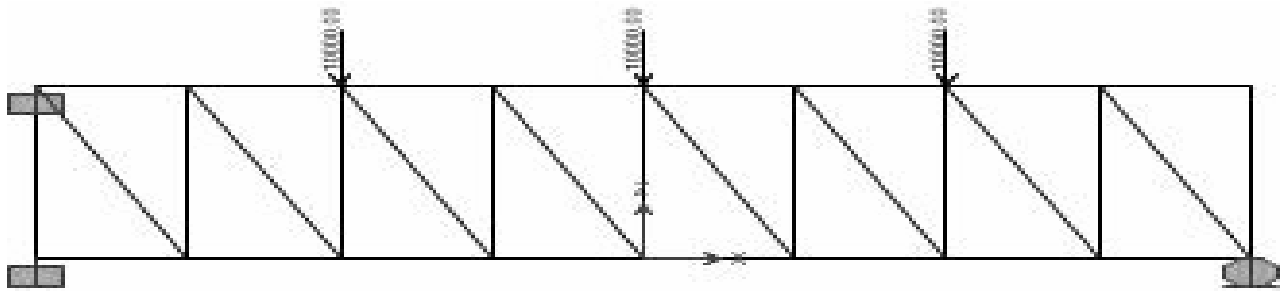


c - Structure 1 élément poutre (troisième cas de conditions aux limites)

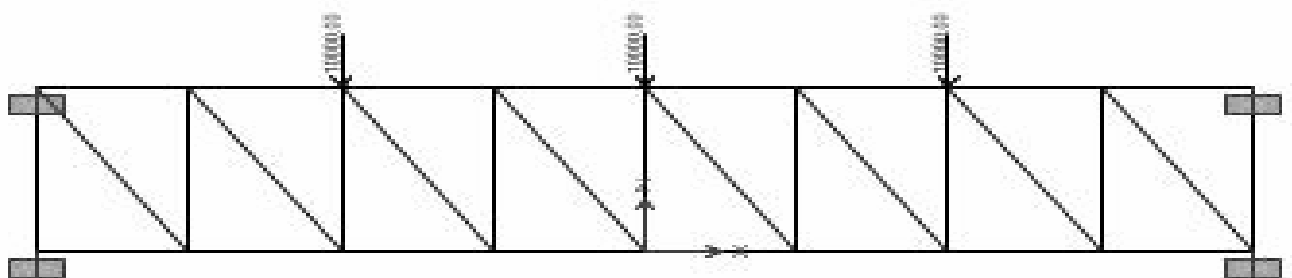
Fig45.3 :Structure N°1 (élément poutre)



a - Structure 2 élément poutre (premier cas de conditions aux limites)



b - Structure 2 élément poutre (deuxième cas de conditions aux limites)



c - Structure 2 élément poutre (troisième cas de conditions aux limites)

Fig.4.4 : Structure №2 (élément poutre)

IV.8 COMPARAISONS DES DEPLACEMENTS.

Noeuds	Déplacements	Pro Sap 2000		Pro Développé		% Erreur	
		Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2
1	u_1	0	0	0	0	0 %	0 %
	v_1	0	0	0	0	0 %	0 %
2	u_2	0,001572	0,001536	0,001592	0,001565	1,25 %	1,85 %
	v_2	-0,000051	-0,00012	-0,000051	-0,000012	0 %	0 %
3	u_3	0,000029	-3,76 E -7	0,000029	1,17E -15	0 %	0 %
	v_3	-0,001113	-0,001292	-0,001127	-0,001321	1,24 %	2,19 %
4	u_4	0,001552	0,001488	0,001572	0,001515	1,27 %	1,78 %
	v_4	-0,001101	-0,001414	-0,001115	-0,001445	1,25 %	2,14 %
5	u_5	0,000103	0,000048	0,000104	0,000049	0,96 %	2,04 %
	v_5	-0,002117	-0,002529	-0,002145	-0,002579	1,3 %	1,93 %
6	u_6	0,001479	0,001391	0,001498	0,001415	1,26 %	1,69 %
	v_6	-0,002135	-0,00265	-0,002163	-0,002703	1,29 %	1,96 %
7	u_7	0,000218	0,000145	0,000220	0,000149	0,90 %	2,68 %
	v_7	-0,002992	-0,003566	-0,003032	-0,003635	1,31 %	1,89 %
8	u_8	0,001366	0,001263	0,001384	0,001285	1,30 %	1,71 %
	v_8	-0,002987	-0,003643	-0,003026	-0,003713	1,28 %	1,88 %
9	u_9	0,000364	0,000274	0,000368	0,000280	1,08 %	2,14 %
	v_9	-0,00368	-0,004396	-0,00372	-0,004479	1,07 %	1,85 %
10	u_{10}	0,001223	0,001103	0,001238	0,001122	1,21 %	1,69 %
	v_{10}	-0,003697	-0,004473	-0,003746	-0,004557	1,30 %	1,84 %
11	u_{11}	0,000531	0,000433	0,000538	0,000442	1,30 %	2,03 %
	v_{11}	-0,004156	-0,00495	-0,004211	-0,005041	1,30 %	1,8 %
12	u_{12}	0,001058	0,000931	0,001071	0,000947	1,21 %	1,68 %
	v_{12}	-0,004151	-0,004981	-0,004205	-0,005073	1,28 %	1,81 %
13	u_{13}	0,000712	0,000605	0,000720	0,000617	1,11 %	1,94 %
	v_{13}	-0,004391	-0,00524	-0,004449	-0,005335	1,30 %	1,78 %
14	u_{14}	0,00088	0,000747	0,000891	0,000760	1,23 %	1,71 %
	v_{14}	-0,004408	-0,005271	-0,004466	-0,005367	1,29 %	1,78 %
15	u_{15}	0,000895	0,00079	0,000907	0,000805	1,32 %	1,86 %
	v_{15}	-0,004381	-0,005221	-0,004439	-0,005315	1,30 %	1,76 %
16	u_{16}	0,000698	0,000567	0,000707	0,000578	1,27 %	1,9 %
	v_{16}	-0,004376	-0,005207	-0,004433	-0,005300	1,28 %	1,75 %

Noeuds	Déplacements	Pro Sap 2000		Pro Développé		% Erreur	
		Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2
17	u_{17}	0,000107	0,000969	0,000108	0,000098	0,92 %	1,12 %
	v_{17}	-0,004122	-0,00493	-0,004176	-0,005018	1,29 %	1,75 %
18	u_{18}	0,000523	0,000394	0,000529	0,000401	1,13 %	1,74 %
	v_{18}	-0,004139	-0,004916	-0,004193	-0,005004	1,28 %	1,75 %
19	u_{19}	0,001237	0,001143	0,001252	0,001163	1,19 %	1,71 %
	v_{19}	-0,003632	-0,004344	-0,003680	-0,004421	1,30 %	1,74 %
20	u_{20}	0,000362	0,000244	0,000366	0,000249	1,09 %	2 %
	v_{20}	-0,003626	-0,004285	-0,003674	-0,004361	1,30 %	1,74 %
21	u_{21}	0,001376	0,001293	0,001394	0,001315	1,29 %	1,67 %
	v_{21}	-0,00293	-0,003523	-0,002968	-0,003585	1,28 %	1,72 %
22	u_{22}	0,000224	0,000117	0,000227	0,000121	1,32 %	3,3 %
	v_{22}	-0,002946	-0,003464	-0,002985	-0,003525	1,30 %	1,73 %
23	u_{23}	0,001483	0,001419	0,001502	0,001443	1,26 %	1,66 %
	v_{23}	-0,002056	-0,002468	-0,002082	-0,002511	1,24 %	1,71 %
24	u_{24}	0,00012	0,000033	0,000122	0,000036	1,63 %	8,33 %
	v_{24}	-0,002054	-0,002364	-0,002081	-0,002404	1,29 %	1,66 %
25	u_{25}	0,001545	0,001503	0,001565	0,001529	1,27 %	1,7 %
	v_{25}	-0,001068	-0,00126	-0,001082	-0,001282	1,29 %	1,71 %
26	u_{26}	0,000056	0,000008	0,000057	0,000006	1,75 %	0 %
	v_{26}	-0,001061	-0,001157	-0,001075	-0,001176	1,30 %	1,61 %
27	u_{27}	0,00157	0,001545	0,00159	0,001571	1,25 %	1,65 %
	v_{27}	0	0	0	0	0 %	0 %
28	u_{28}	0,000039	0,000009	0,000039	0,000006	0 %	0 %
	v_{28}	-0,000043	0	-0,000043	0	0 %	0 %

Tableau 2 : Comparaisons des déplacements de l'élément barre pour la première et deuxième structure (premier cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES REACTIONS.

Noeuds	Réactions (N)	Progr Sap 2000		Progr Développé		% d'erreur	
		Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2
1	R_{x_1}	6,395E -10	4,26 E-10	4,887E -6	2,007E-6	0 %	0 %
	R_{y_1}	13462	13483,54	13461	13461	0,007 %	0,16 %
27	$R_{y_{27}}$	11538	11516,46	11538	11538	0 %	0,18 %

Tableau 3 : Comparaisons des réactions de l'élément barre pour la première et deuxième structure (premier cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES FORCES AXIALES.

Elément	Progr Sap 2000		Progr Développé		% d'erreur	
	La force axiale E barre S1	La force axiale E barre S2	La force axiale E barre S1	La force axiale E barre S2	Erreur S1	Erreur S2
1	5457,78	-13190,04	5605,63	-13461,53	2,63 %	2,01 %
2	-4975,4	-65,35	-4975,4	-2 E-6	0 %	0 %
3	9167,55	15587,56	9298,91	15934,22	1,41 %	2,17 %
4	-6506,31	-8307,74	-6635,31	-8525,64	1,94 %	2,55 %
5	3416,98	-13418,75	3550,02	-13461,53	3,74 %	0,31 %
6	-1187,28	8366,42	-1301,97	8525,64	8,80 %	1,86 %
7	-12702,10	15858,02	-12900,4	15934,22	1,53 %	0,47 %
8	8215,83	-16864,59	8176,44	-17051,28	0,48 %	1,09 %
9	-7749,72	-13368,59	-7757,78	-13461,53	0,10 %	0,69 %
10	12447,59	16898,99	12676,45	17051,28	1,80 %	0,89 %
11	1942,43	9969,61	1978,41	10015,79	1,81 %	0,46 %
12	-19755,50	-22247,75	-19949,1	-22410,25	0,97 %	0,72 %
13	5410,81	-8422,06	5415,96	-8461,53	0,09 %	0,45 %
14	-4607,02	22276,29	-4599,83	22410,25	0,15 %	0,59 %
15	19326,44	9950,80	19512,43	10015,79	0,95 %	0,64 %
16	-644,13	-27610,08	-659,75	-27769,23	2,36 %	0,57 %
17	-25111,77	-8418,98	-25289,25	-8461,53	0,70 %	0,50 %
18	5381,74	27630,45	5380,77	27769,23	0,01 %	0,49 %
19	-4633,59	4099,99	-4635,02	4097,37	0,03 %	0,06 %
20	24711,91	-29831,62	24890,23	-29961,53	0,71 %	0,43 %
21	1852,77	-3461,54	1864,70	-3461,53	0,63 %	0,00 %
22	-28905,22	29844,07	-29068,23	29961,5	0,56 %	0,39 %
23	2441,18	4076,46	2427,80	4097,37	0,55 %	0,51 %
24	-1683,58	-32028,41	-1669 ,57	-32153,84	0,83 %	0,39 %
25	28500,36	-3460,64	28662,53	-3461,53	0,56 %	0,02 %
26	-628,89	32032,91	-639,61	32153,84	1,67 %	0,37 %
27	-31112,82	-1773,84	-31259 ,93	-1821,05	0,47 %	2,59 %
28	2433,55	-31084,79	2426 ,67	-31179,48	0,28 %	0,30 %

Elément	Progr Sap 2000		Progr Développé		% d'erreur	
	La force axiale E barre S1	La force axiale E barre S2	La force axiale E barre S1	La force axiale E barre S2	Erreur S1	Erreur S2
29	-1677,61	1479,19	-1670,69	1538,46	0,41 %	3,85 %
30	30708,84	31081,35	30855,44	31179,48	0,47 %	0,31 %
31	1850,08	-1797,40	1861,05	-1821,05	0,58 %	1,29 %
32	-31738,67	-30116,41	-31869,08	-30205,12	0,40 %	0,29 %
33	-510,40	1498,00	-532,20	1538,46	4,09 %	2,62 %
34	1266,87	30105,02	1288,84	30205,12	1,70 %	0,33 %
35	31334,42	-7646,77	31464,24	-7739,48	0,41 %	1,19 %
36	-628,03	-26007,58	-638,53	-26064,10	1,64 %	0,21 %
37	-30781,56	6455,95	-30894,29	6538,46	0,36 %	1,26 %
38	-518,15	25988,22	-533,02	26064,10	2,78 %	0,29 %
39	1273,13	-7670,82	1288,03	-7739,48	1,15 %	0,88 %
40	30378,09	-21874,20	30490,32	-21923,07	0,36 %	0,22 %
41	1847,68	6456,43	1858,42	6538,46	0,57 %	1,25 %
42	-28244,62	21847,11	-28338,95	21923,07	0,33 %	0,34 %
43	-3458,18	-13524,71	-3487,82	-13657,90	0,84 %	0,97 %
44	4221,48	-14598,81	4251,65	-14615,38	0,70 %	0,11 %
45	27836,74	11414,52	27930,27	11538,46	0,33 %	1,07 %
46	-614,60	14562,28	-624,29	14615,38	1,55 %	0,36 %
47	-24110,37	-13524,42	-24184,63	-13657,90	0,30 %	0,97 %
48	-3489,05	-7309,76	-3512,68	-7307,69	0,67 %	0,02 %
49	4204,42	11407,30	4226,79	11538,46	0,52 %	1,13 %
50	23727,94	7275,17	23802,54	7307,69	0,31 %	0,44 %
51	1770,32	-13536,73	1778,11	-13657,90	0,43 %	0,88 %
52	-18479,46	-22,22	-18553,79	-2,8 E-8	0,40 %	0 %
53	-6295,93	-29,18	-6331,52	0	0,56 %	0 %
54	7287,00		7326,37		0,53 %	
55	17950,48		18003,08		0,29 %	
56	-169,54		-170,70		0,67 %	
57	-10773,77		-10803,50		0,27 %	
58	-7088,44		-7124,31		0,50 %	
59	6502,74		6533,59		0,47 %	
60	11085,47		11119,57		0,30 %	
61	-776,11		-783,73		0,97 %	
62	-4297,19		-4308,24		0,25 %	
63	-5571,38		-5605,90		0,61 %	
64	8012,11		8052		0,49 %	
65	2991,04		2999,44		0,28 %	
66	4719,76		4735,97		0,34 %	

Tableau 4 : Comparaisons des forces axiales de l'élément barre pour la première et deuxième structure (premier cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES DEPLACEMENTS.

Noeuds	Déplacements	Pro Sap 2000		Pro Développé		% Erreur	
		Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2
1	u_1	0	0	0	0	0 %	0 %
	v_1	0	0	0	0	0 %	0 %
2	u_2	0	0	0	0	0 %	0 %
	v_2	0	0	0	0	0 %	0 %
3	u_3	-0,000146	-0,000164	-0,000147	-0,000166	0,68 %	1,20 %
	v_3	-0,000223	-0,000357	-0,000226	-0,000364	1,32 %	1,92 %
4	u_4	0,000145	0,000103	0,000146	0,000104	0,68 %	0,96 %
	v_4	-0,00022	-0,000509	-0,000223	-0,000520	1,34 %	2,11 %
5	u_5	-0,000227	-0,000267	-0,000229	-0,000271	0,87 %	1,47 %
	v_5	-0,000579	-0,000998	-0,000587	-0,001017	1,36 %	1,86 %
6	u_6	0,000229	0,000144	0,000232	0,000145	1,29 %	0,68 %
	v_6	-0,000595	-0,001151	-0,000604	-0,001173	1,49 %	1,87 %
7	u_7	-0,000255	-0,000308	-0,000258	-0,000312	1,16 %	1,28 %
	v_7	-0,000989	-0,001616	-0,001000	-0,001646	1,10 %	1,82 %
8	u_8	0,000259	0,000142	0,000262	0,000143	1,14 %	0,69 %
	v_8	-0,000984	-0,001724	-0,000997	-0,001756	1,30 %	1,82 %
9	u_9	-0,000238	-0,000306	-0,000241	-0,000310	1,24 %	1,29 %
	v_9	-0,001386	-0,002186	-0,001405	-0,002225	1,35 %	1,75 %
10	u_{10}	0,000245	0,000096	0,000248	0,000096	1,20 %	0 %
	v_{10}	-0,001402	-0,002294	-0,001422	-0,002335	1,40 %	1,75 %
11	u_{11}	-0,000186	-0,00026	-0,000188	-0,000263	1,06 %	1,14 %
	v_{11}	-0,001725	-0,002624	-0,001749	-0,002669	1,37 %	1,68 %
12	u_{12}	0,000196	0,000025	0,000198	0,000024	1,01 %	4,16 %
	v_{12}	-0,001719	-0,002686	-0,001743	-0,002733	1,37 %	1,71 %
13	u_{13}	-0,000108	-0,000188	-0,000109	-0,000190	0,91 %	1,05 %
	v_{13}	-0,001961	-0,002925	-0,001988	-0,002975	1,35 %	1,68 %
14	u_{14}	0,00012	-0,000071	0,000121	0,000073	0,82 %	2,73 %
	v_{14}	-0,001978	-0,002988	-0,002005	-0,003039	1,34 %	1,67 %
15	u_{15}	-0,000013	-0,000092	-0,000013	-0,000093	0 %	1,07 %
	v_{15}	-0,002074	-0,00303	-0,002102	-0,003081	1,33 %	1,65 %
16	u_{16}	0,000027	-0,000175	0,000027	-0,000178	0 %	1,68 %
	v_{16}	-0,002068	-0,003047	-0,002096	-0,003099	1,33 %	1,67 %

Noeuds	Déplacements	Pro Sap 2000		Pro Développé		% Erreur	
		Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2
17	u_{17}	0,00009	0,000012	0,000091	0,000012	1,09 %	0 %
	v_{17}	-0,002039	-0,002958	-0,002067	-0,003007	1,35 %	1,62 %
18	u_{18}	-0,000074	-0,000286	-0,000075	-0,000291	1,33 %	1,71 %
	v_{18}	-0,002056	-0,002975	-0,002084	-0,003025	1,34 %	1,65 %
19	u_{19}	0,000192	0,000123	0,000195	0,000124	1,53 %	0,80 %
	v_{19}	-0,001861	-0,002671	-0,001887	-0,002715	1,37 %	1,62 %
20	u_{20}	-0,000174	-0,000385	-0,000176	-0,000392	1,13 %	1,78 %
	v_{20}	-0,001856	-0,002643	-0,001881	-0,002687	1,32 %	1,63 %
21	u_{21}	0,000284	0,000222	0,000288	0,000225	1,38 %	1,33 %
	v_{21}	-0,00154	-0,002212	-0,00156	-0,002249	1,28 %	1,64 %
22	u_{22}	-0,000264	-0,000474	-0,000267	-0,000481	1,12 %	1,45 %
	v_{22}	-0,001556	-0,002185	-0,001577	-0,002221	1,33 %	1,62 %
23	u_{23}	0,000357	0,00031	0,000361	0,000314	1,10 %	1,27 %
	v_{23}	-0,001098	-0,001567	-0,001113	-0,001593	1,34 %	1,63 %
24	u_{24}	-0,000333	-0,000533	-0,000337	-0,000541	1,18 %	1,47 %
	v_{24}	-0,001096	-0,001494	-0,001111	-0,001518	1,35 %	1,58 %
25	u_{25}	0,000399	0,000369	0,000404	0,000374	1,23 %	1,33 %
	v_{25}	-0,000576	-0,000802	-0,000584	-0,000815	1,36 %	1,59 %
26	u_{26}	-0,000377	-0,000562	-0,000381	-0,000571	1,04 %	1,57 %
	v_{26}	-0,000571	-0,000729	-0,000579	-0,000741	1,38 %	1,61 %
27	u_{27}	0,000416	0,000399	0,000421	0,000404	1,18 %	1,23 %
	v_{27}	0	0	0	0	0 %	0 %
28	u_{28}	-0,000388	-0,000562	-0,000393	-0,000571	1,27 %	1,57 %
	v_{28}	-0,000029	0	-0,000029	0	0 %	0 %

Tableau 5 : Comparaisons des déplacements de l'élément barre pour la première et deuxième structure (deuxième cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES REACTIONS.

Noeuds	Réactions (N)	Progr Sap 2000		Progr Développé		% d'erreur	
		Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2
1	R_{x_1}	30628	28500	30671,147	28563,171	0,14 %	0,22 %
	R_{y_1}	8515	66,7	8512,501	0	0,02 %	0 %
2	R_{x_2}	-30628	-28500	-30671,147	-28563,17	0,14 %	0,22 %
	R_{y_2}	8672	16866,9	8674,316	16930,74	0,02 %	0,37 %
27	$R_{y_{27}}$	7813	8066,41	7813,181	8069,25	0,002 %	0,03 %

Tableau 6 : Comparaisons des réactions de l'élément barre pour la première et deuxième structure (deuxième cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES FORCES AXIALES.

Eléments	Progr Sap 2000		Progr Développé		% d'erreur	
	La force axiale E barre S1	La force axiale E barre S2	La force axiale E barre S1	La force axiale E barre S2	Erreur S1	Erreur S2
1	0	0	0	0	0 %	0 %
2	-25259,88	-28500,00	-25280,21	-28563,17	0,08 %	0,22 %
3	-10031,41	19824,30	-10076,12	20040,68	0,44 %	1,07 %
4	10220,03	17888,23	10267,66	17840,36	0,46 %	0,26 %
5	25159,42	-16731,81	25177,73	-16930,74	0,07 %	1,17 %
6	304,56	-17829,96	309,47	-17840,36	1,58 %	0,05 %
7	-14094,25	19886,12	-14096,75	20040,68	0,01 %	0,77 %
8	-10606,26	7166,17	-10633,97	7117,55	0,26 %	0,68 %
9	9684,33	-16809,99	9709,80	-16930,74	0,26 %	0,71 %
10	14586,51	-7119,81	14591,23	-7117,55	0,03 %	0,03 %
11	-1793,75	14024,62	-1802,68	14122,25	0,49 %	0,69 %
12	-4847,63	-402,04	-4847,94	-438,58	0,006%	8,33 %
13	-7559,65	-11840,19	-7575,99	-11930,74	0,21 %	0,75 %
14	6832,27	441,52	6849,36	438,58	0,24 %	0,67 %
15	5236,43	14003,85	5236,73	14122,25	0,005%	0,83 %
16	618,66	-7948,54	628,64	-7994,72	1,58 %	0,57 %
17	2875,06	-11841,08	2879,72	-11930,74	0,16 %	0,75 %
18	-7570,56	7979,85	-7593,48	7994,72	0,30 %	0,18 %
19	6809,34	8152,97	6831,87	8203,82	0,32 %	0,61 %
20	-2468,28	-12354,02	-2472,22	-12384,20	0,15 %	0,24 %
21	-1848,38	-6883,00	-1859,19	-6930,74	0,58 %	0,68 %
22	9005,21	12377,43	9013,05	12384,20	0,08 %	0,05 %
23	-4623,26	8129,52	-4631,17	8203,82	0,17 %	0,90 %
24	3867,91	-16734,84	3875,75	-16773,67	0,20 %	0,23 %
25	-8601,55	-6882,20	-8608,86	-6930,74	0,08 %	0,70 %
26	628,13	16750,30	638,63	16773,67	1,64 %	0,13 %
27	13554,68	2279,19	13564,98	2285,40	0,07 %	0,27 %
28	-4616,77	-17975,23	-4631,70	-17996,48	0,32 %	0,11 %
29	3860,44	-1924,35	3875,22	-1930,74	0,38 %	0,05 %

Eléments	Progr Sap 2000		Progr Développé		% d'erreur	
	La force axiale E barre S1	La force axiale E barre S2	La force axiale E barre S1	La force axiale E barre S2	Erreur S1	Erreur S2
30	-13150,50	17982,75	-13160,23	17996,48	0,07 %	0,07 %
31	-1849,96	2255,64	-1860,89	2285,40	0,58 %	1,30 %
32	16521,49	-19190,86	16533,32	-19219,29	0,07 %	0,14 %
33	-1672,62	-1923,00	-1672,51	-1930,74	0,006%	0,40 %
34	916,24	19190,43	915,98	19219,29	0,02 %	0,15 %
35	-16117,29	-3594,73	-16128,54	-3633,02	0,06 %	1,05 %
36	628,05	-17266,04	638,55	-17275,43	1,64 %	0,10 %
37	17905,54	3034,38	17917,94	3069,25	0,06 %	1,13 %
38	-1664,98	17257,65	-1671,83	17275,43	0,40 %	0,10 %
39	909,86	-3617,78	916,67	-3633,02	0,74 %	0,41 %
40	-17502,00	-15316,68	-17513,89	-15331,57	0,06 %	0,09 %
41	-1847,92	3035,04	-1858,69	3069,25	0,57 %	1,11 %
42	17709,47	15300,55	17772,17	15331,57	0,35 %	0,20 %
43	1275,48	-9471,55	1283,43	-9551,45	0,61 %	0,83 %
44	-2038,06	-10225,32	-2046,48	-10221,05	0,41 %	0,04 %
45	-17301,98	7992,11	-17313,43	8069,25	0,06 %	0,95 %
46	616,00	10199,81	625,80	10221,05	1,56 %	0,20 %
47	15917,62	-9472,70	15928,09	-9551,45	0,06 %	0,82 %
48	1303,92	-5119,90	1305,73	-5110,52	0,13 %	0,18 %
49	-2023,43	7990,42	-2024,18	8069,25	0,03 %	0,97 %
50	-15532,99	5095,68	-15543,68	5110,52	0,06 %	0,29 %
51	-1778,39	-9481,43	-1786,62	-9551,45	0,46 %	0,73 %
52	12620,37	-15,57	12630,47	0	0,07 %	0 %
53	4124,81	-20,50	4138,98	0	0,34 %	0 %
54	-5092,07		-5109,36		0,33 %	
55	-12104,05		-12111,27		0,05 %	
56	216,05		218,76		1,23 %	
57	7298,53		7301,47		0,04 %	
58	4836,93		4850,41		0,27 %	
59	-4387,81		-4397,93		0,23 %	
60	-7537,53		-7543,57		0,08 %	
61	509,09		512,33		0,63 %	
62	2918,81		2919,70		0,03 %	
63	3776,93		3791,48		0,38 %	
64	-5442,16		-5456,86		0,26 %	
65	-2027,71		-2028,64		0,04 %	
66	-3199,70		-3203,12		0,10 %	

Tableau 7 : Comparaisons des forces axiales de l'élément barre pour la première et deuxième structure (deuxième cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES DEPLACEMENTS.

Noeuds	Déplacements	Pro Sap 2000		Pro Développé		% Erreur	
		Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2
1	u_1	0	0	0	0	0 %	0 %
	v_1	0	0	0	0	0 %	0 %
2	u_2	0	0	0	0	0 %	0 %
	v_2	0	0	0	0	0 %	0 %
3	u_3	-0,0001	-0,00012	-0,000101	-0,000122	0,99 %	1,63 %
	v_3	-0,000167	-0,000278	-0,000169	-0,000284	1,18 %	2,11 %
4	u_4	0,000098	0,000072	0,000098	0,000072	0 %	0 %
	v_4	-0,000164	-0,0004	-0,000166	-0,000408	1,20 %	1,96 %
5	u_5	-0,000148	-0,000192	-0,000150	-0,000194	1,33 %	1,03 %
	v_5	-0,000416	-0,000769	-0,000422	-0,000784	1,42 %	1,91 %
6	u_6	0,000147	0,000094	0,000149	0,000094	1,34 %	0 %
	v_6	-0,000432	-0,000891	-0,000438	-0,000909	1,36 %	1,98 %
7	u_7	-0,000157	-0,000213	-0,000158	-0,000216	0,63 %	1,38 %
	v_7	-0,000685	-0,001214	-0,000694	-0,001237	1,29 %	1,85 %
8	u_8	0,000156	0,000085	0,000157	0,000085	0,63 %	0 %
	v_8	-0,000679	-0,001291	-0,000688	-0,001315	1,30 %	1,82 %
9	u_9	-0,000133	-0,000204	-0,000134	-0,000207	0,74 %	1,44 %
	v_9	-0,000921	-0,001602	-0,000934	-0,001631	1,39 %	1,77 %
10	u_{10}	0,000133	0,000045	0,000134	0,000045	0,74 %	0 %
	v_{10}	-0,000938	-0,001679	-0,000951	-0,001710	1,36 %	1,81 %
11	u_{11}	-0,000087	-0,000164	-0,000088	-0,000166	1,13 %	1,20 %
	v_{11}	-0,0011	-0,001864	-0,001115	-0,001898	1,34 %	1,79 %
12	u_{12}	0,000087	-	0,000088	-0,000008	1,13 %	3,75 %
	v_{12}	-0,001094	0,0000077 -0,001896	-0,001109	-0,001930	1,35 %	1,76 %
13	u_{13}	-0,000028	-0,000111	-0,000028	-0,000112	0 %	1,78 %
	v_{13}	-0,001189	-0,002014	-0,001205	-0,002050	1,32 %	1,75 %
14	u_{14}	0,000029	-0,000073	0,0000289	-0,000007	0,34 %	4,28 %
	v_{14}	-0,001205	-0,002046	-0,001222	-0,002083	1,39 %	1,77 %
15	u_{15}	0,000036	-0,000045	0,000036	-0,000045	0 %	0 %
	v_{15}	-0,001186	-0,002005	-0,001202	-0,002042	1,33 %	1,81 %
16	u_{16}	-0,000034	-0,000134	-0,000034	-0,000136	0 %	1,47 %
	v_{16}	-0,00118	-0,001992	-0,001196	-0,002028	1,33 %	1,77 %
17	u_{17}	0,000094	0,000016	0,000095	0,0000155	1,05 %	3,25 %
	v_{17}	-0,001083	-0,001875	-0,001098	-0,001909	1,36 %	1,78 %

Noeuds	Déplacements	Pro Sap 2000		Pro Développé		% Erreur	
		Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2
18	u_{18}	-0,000092	-0,000189	-0,000093	-0,000191	1,07 %	1,04 %
	v_{18}	-0,001099	-0,001862	-0,001115	-0,001896	1,43 %	1,79 %
19	u_{19}	0,000139	0,000071	0,000140	0,000071	0,7 %	0 %
	v_{19}	-0,0009	-0,0016	-0,000913	-0,001630	1,42 %	1,84 %
20	u_{20}	-0,000136	-0,00022	-0,000137	-0,000223	0,7 %	1,34 %
	v_{20}	-0,000894	-0,001542	-0,000907	-0,001570	1,43 %	1,78 %
21	u_{21}	0,00016	0,000102	0,000161	0,000103	0,62 %	0,97 %
	v_{21}	-0,000654	-0,00124	-0,000663	-0,001264	1,35 %	1,89 %
22	u_{22}	-0,000157	-0,000228	-0,000159	-0,000231	1,25 %	1,29 %
	v_{22}	-0,00067	-0,001182	-0,000679	-0,001204	1,32 %	1,82 %
23	u_{23}	0,000149	0,00011	0,000150	0,000111	0,66 %	0,90 %
	v_{23}	-0,000385	-0,000796	-0,000390	-0,000811	1,28 %	1,84 %
24	u_{24}	-0,000145	-0,000194	-0,000146	-0,000196	0,68 %	1,02 %
	v_{24}	-0,000382	-0,000692	-0,000387	-0,000706	1,29 %	1,98 %
25	u_{25}	0,000095	0,000076	0,000096	0,000076	1,04 %	0 %
	v_{25}	-0,000145	-0,000349	-0,000147	-0,000357	1,36 %	2,24 %
26	u_{26}	-0,000093	-0,000118	-0,000094	-0,000119	1,06 %	0,84 %
	v_{26}	-0,000145	-0,000246	-0,000147	-0,000251	1,36 %	1,99 %
27	u_{27}	0	0	0	0	0 %	0 %
	v_{27}	0	0	0	0	0 %	0 %
28	u_{28}	0	0	0	0	0 %	0 %
	v_{28}	0	0	0	0	0 %	0 %

Tableau 8 : Comparaisons des déplacements de l'élément barre pour la première et deuxième structure (troisième cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES REACTIONS.

Noeuds	Réactions (N)	Progr Sap 2000		Progr Développé		% d'erreur	
		Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2
1	R_{x_1}	21597	20868,08	21631	20931,697	0,15 %	0,3 %
	R_{y_1}	6769	52,99	6766,50	0	0,03 %	0 %
2	R_{x_2}	-21265	-20904,76	-21298	-20969,458	0,15 %	0,3 %
	R_{y_2}	6877	13469,11	6879,56	13521,161	0,03 %	0,38 %
27	$R_{x_{27}}$	-20081	-20377,88	-20111	-20440,797	0,14 %	0,3 %
	$R_{y_{27}}$	5715	11431,92	5715,66	11478,838	0,01 %	0,4 %
28	$R_{x_{28}}$	19749	20414,57	19779,25	20478,559	0,15 %	0,31 %
	$R_{y_{28}}$	5639	45,98	5638,26	0	0,01 %	0 %

Tableau 9 : Comparaisons des réactions de l'élément barre pour la première et deuxième structure (troisième cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES FORCES AXIALES.

Elément	Progr Sap 2000		Progr Développé		% d'erreur	
	La force axiale E barre S1	La force axiale E barre S2	La force axiale E barre S1	La force axiale E barre S2	Erreur S1	Erreur S2
1	0	0	0	0	0 %	0 %
2	-17328,98	-20868,08	-17345,54	-20931,69	0,09 %	0,30 %
3	-7974,25	15831,13	-8009,40	16004,80	0,43 %	1,08 %
4	8105,16	12430,43	8143,24	12406,05	0,46 %	0,19 %
5	16927,34	-13360,57	16941,50	-13521,16	0,08 %	1,18 %
6	344,52	-12347,02	349,58	-12368,29	1,44 %	0,17 %
7	-8408,39	15876,49	-8410,02	16004,80	0,01 %	0,80 %
8	-8534,11	3870,22	-8557,04	3842,65	0,26 %	0,71 %
9	7574,88	-13424,90	7595,60	-13521,16	0,27 %	0,71 %
10	8588,57	-3797,84	8592,00	-3804,89	0,03 %	0,18 %
11	-1760,98	10017,36	-1769,67	10086,37	0,49 %	0,68 %
12	-1402,49	-1538,89	-1402,72	-1554,08	0,01 %	0,97 %
13	-5490,21	-8457,16	-5500,87	-8521,16	0,19 %	0,75 %
14	4721,97	1604,17	4733,35	1591,84	0,24 %	0,77 %
15	1481,11	9996,04	1480,95	10086,37	0,01 %	0,89 %
16	652,85	-6925,69	662,91	-6950,81	1,51 %	0,36 %
17	4078,77	-8457,76	4082,30	-8521,16	0,08 %	0,74 %
18	-5500,63	6982,84	-5518,03	6988,57	0,31 %	0,08 %
19	4699,16	4145,27	4716,18	4167,94	0,36 %	0,54 %
20	-3982,50	-9171,59	-3985,70	-9180,88	0,08 %	0,10 %
21	-1814,40	-3499,72	-1825,14	-3521,16	0,58 %	0,60 %
22	7967,61	9220,83	7973,18	9218,64	0,06 %	0,02 %

23	-2553,42	4121,79	-2555,78	4167,94	0,09 %	1,10 %
24	1757,72	-11392,81	1760,01	-11410,95	0,13 %	0,15 %
25	-7874,40	-3498,91	-7879,84	-3521,16	0,06 %	0,63 %
26	662,14	11434,10	672,72	11448,71	1,57 %	0,12 %
27	10275,75	-1728,52	10282,64	-1750,47	0,06 %	1,25 %
28	-2546,92	-10473,59	-25563,10	-10474,35	0,36 %	0,007%
29	1750,25	1458,94	1759,48	1478,83	0,52 %	1,34 %
30	-10182,02	10506,95	-10188,74	10512,12	0,06 %	0,04 %
31	-1815,95	-1752,08	-1826,83	-1750,47	0,59 %	0,09 %
32	11001,22	-9529,61	11008,49	-9537,76	0,06 %	0,08 %
33	397,25	1459,75	402,90	1478,83	1,40 %	1,29 %
34	-1193,93	9555,02	-1199,72	9575,52	0,48 %	0,21 %
35	-10907,50	-7602,40	-10914,58	-7668,90	0,06 %	0,86 %
36	662,14	-5445,22	672,73	-5434,49	1,57 %	0,19 %
37	10144,02	6417,72	10150,72	6478,83	0,06 %	0,94 %
38	404,75	5462,68	403,42	5472,25	0,32 %	0,17 %
39	-1200,46	-7625,82	-1199,20	-7668,90	0,10 %	0,56 %
40	-10050,80	-1336,09	-10057,37	-1331,23	0,06 %	0,36 %
41	-1814,42	6417,83	-1825,16	6478,83	0,58 %	0,94 %
42	7706,16	1345,67	7711,51	1368,99	0,06 %	1,70 %
43	3346,06	-13477,47	3359,62	-13587,33	0,40 %	0,80 %
44	-4147,49	5913,89	-4161,43	5938,69	0,33 %	0,41 %
45	-7609,92	11379,38	-7614,93	11478,83	0,06 %	0,86 %
46	652,92	-5912,85	662,99	-5900,93	1,51 %	0,20 %
47	3675,63	-13489,89	3678,24	-13587,33	0,07 %	0,71 %
48	3369,55	13184,40	3376,65	13208,62	0,21 %	0,18 %
49	-4138,00	11344,46	-4144,40	11478,83	0,15 %	1,17 %
50	-3596,89	-13186,48	-3599,89	-13170,86	0,08 %	0,11 %
51	-1761,20	-13434,93	-1770,13	-13587,33	0,50 %	1,12 %
52	-1878,22	20414,57	-1877,77	20478,55	0,02 %	0,31 %
53	6219,03	0	6239,68	0	0,33 %	0 %
54	-7177,05		-7199,79		0,31 %	
55	2057,75		2059,05		0,06 %	
56	346,89		352,18		1,50 %	
57	-9353,45		-9359,26		0,06 %	
58	6766,71		6782,92		0,23 %	
59	-6642,36		-6656,56		0,21 %	
60	8955,40		8959,21		0,04 %	
61	-13,01		-14,67		11,3 %	
62	-16477,61		-16491,77		0,08 %	
63	6643,24		6673,93		0,45 %	
64	-6733,75		-6765,54		0,46 %	
65	16193,87		16208,35		0,08 %	
66	0		0		0%	

Tableau 10 : Comparaisons des forces axiales de l'élément barre pour la première et deuxième structure (troisième cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES DEPLACEMENTS (ELEMENT POUTRE).

Noeuds	Déplacements	Pro Sap 2000		Pro Développé		% Erreur	
		Elément Poutre S1	Elément Poutre S2	Elément Poutre S1	Elément Poutre S2	Elément Poutre S1	Elément Poutre S2
1	u_1	0	0	0	0	0 %	0 %
	v_1	0	0	0	0	0 %	0 %
	q_1	0	0	0	0	0 %	0 %
2	u_2	0,000727	0,000673	0,000735	0,000681	1,08 %	1,17 %
	v_2	-0,000057	-0,000135	-0,000057	-0,000136	0 %	0,73 %
	q_2	0,000191	0,000235	0,000192	0,000235	0,52 %	0 %
3	u_3	0,000031	-0,103 E-6	0,000031	-1,11 E-7	0 %	0 %
	v_3	-0,000591	-0,000785	-0,000598	-0,000794	1,17 %	1,13 %
	q_3	0,000199	0,000264	0,000202	0,000268	1,48 %	0,74 %
4	u_4	0,000704	0,000619	0,000712	0,000626	1,12 %	1,11 %
	v_4	-0,000576	-0,00092	-0,000583	-0,000931	1,2 %	1,18 %
	q_4	0,000184	0,000226	0,000185	0,000229	0,54 %	1,31 %
5	u_5	0,000115	0,000054	0,000116	0,000054	0,86 %	0 %
	v_5	-0,001054	-0,001503	-0,001067	0,001521	1,21 %	1,18 %
	q_5	0,000124	0,000168	0,000125	0,00017	0,8 %	1,17 %
6	u_6	0,000624	0,00051	0,000632	0,000516	1,26 %	1,16 %
	v_6	-0,001089	-0,001639	-0,001102	-0,001658	1,17 %	1,14 %
	q_6	0,000126	0,000155	0,000127	0,000157	0,78 %	1,27 %
7	u_7	0,000235	0,000163	0,000238	0,000165	1,26 %	1,21 %
	v_7	-0,001363	-0,001934	-0,001380	-0,001957	1,23 %	1,17 %
	q_7	0,000069	0,000089	0,000070	0,00009	1,42 %	1,11 %
8	u_8	0,000509	0,000383	0,000514	0,000387	0,97 %	1,03 %
	v_8	-0,001352	-0,00198	-0,001368	-0,002	1,16 %	0,1 %
	q_8	0,000069	0,000077	0,000069	0,000077	0 %	0 %
9	u_9	0,000374	0,000291	0,000378	0,000294	1,05 %	1,02 %
	v_9	-0,001465	-0,002113	-0,001483	-0,002138	1,21 %	1,16 %
	q_9	-5,89 E-9	2,77 E-6	4,04 E-10	2,82 E-6	0 %	1,77 %
10	u_{10}	0,000374	0,000237	0,000379	0,00024	1,31 %	1,25 %
	v_{10}	-0,001499	-0,002158	-0,001517	-0,002184	1,18 %	1,19 %
	q_{10}	-5,34 E-9	-0,000016	3,06 E-10	-0,000016	0 %	0 %
11	u_{11}	0,000513	0,000436	0,000519	0,000441	1,15 %	1,13 %
	v_{11}	-0,001364	-0,001958	-0,001380	-0,001981	1,15 %	1,16 %
	q_{11}	-0,000068	-0,000091	-0,000069	-0,000091	1,44 %	0 %

12	u_{12}	0,00024	0,00011	0,000243	0,000111	1,23 %	0,9 %
	v_{12}	-0,001352	-0,001913	-0,001369	-0,001936	1,24 %	1,18 %
	q_{12}	-0,000068	-0,000102	-0,000069	-0,000103	1,44 %	0,97 %
13	u_{13}	0,000634	0,000564	0,000641	0,00057	1,09 %	1,05 %
	v_{13}	-0,001056	-0,00155	-0,001068	-0,00156	1,12 %	0,64 %
	q_{13}	-0,000128	-0,000168	-0,000129	-0,000169	0,77 %	0,59 %
14	u_{14}	0,000124	4,34 E-7	0,000125	4,08 E-7	0,8 %	0 %
	v_{14}	-0,00109	-0,001505	-0,001103	-0,001523	1,17 %	1,18 %
	q_{14}	-0,000128	-0,000187	-0,000128	-0,00019	0 %	1,57 %
15	u_{15}	0,000718	0,000673	0,000726	0,000681	1,1 %	1,17 %
	v_{15}	-0,000593	-0,000855	-0,0006	-0,000865	1,16 %	1,15 %
	q_{15}	-0,000176	-0,000245	-0,000178	-0,000248	1,12 %	1,2 %
16	u_{16}	0,000044	-0,000054	0,000044	-0,000055	0 %	1,81 %
	v_{16}	-0,000578	-0,00072	-0,000584	-0,000728	1,02 %	1,09 %
	q_{16}	-0,000174	-0,00024	-0,000176	-0,000243	1,13 %	1,23 %
17	u_{17}	0,00075	0,000728	0,000758	0,000736	1,05 %	1,08 %
	v_{17}	0	0	0	0	0 %	0 %
	q_{17}	-0,000191	-0,000239	-0,000193	-0,000241	1,03 %	0,82 %
18	u_{18}	0,000021	-0,000055	0,000021	-0,000055	0 %	0 %
	v_{18}	-0,000057	-3,22 E-7	-0,000057	-3,53 E-7	0 %	0 %
	q_{18}	-0,000168	-0,000213	0,00017	-0,000215	1,17 %	0,93 %

Tableau 11 : Comparaisons des déplacements de l'élément poutre pour la première et deuxième structure (premier cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES REACTIONS.

Noeuds	Réactions (N)	Progr Sap 2000		Progr Développé		% d'erreur	
		Elément Poutre S1	Elément Poutre S2	Elément Poutre S1	Elément Poutre S2	Elément Poutre S1	Elément Poutre S2
1	R_{x_1}	2,07 E-12	-7,44 E-11	2,07 E-7	1,00 E-6	0 %	0 %
	R_{y_1}	15022,41	15019,89	15024,19	15021,5	0,01 %	0,01 %
	M_{r_1}	-511,01	-453,44	551,75	-490,36	7,38 %	7,52 %
27	$R_{y_{27}}$	14977,59	14980,11	14975,80	14978,84	0,01 %	0,008 %

Tableau 12 : Comparaisons des réactions de l'élément poutre pour la première et deuxième structure (premier cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES FORCES AXIALES.

Eléments	Progr Sap 2000		Progr Développé		% d'erreur	
	La force axiale E Poutre S1	La force axiale E Poutre S2	La force axiale E Poutre S1	La force axiale E Poutre S2	Erreur S1	Erreur S2
1	-6226,60	-14825,46	-6219,52	-14810,09	0,11 %	0,10 %
2	5404,85	-17,85	5396,65	-19,14	0,15 %	6,73 %
3	-10218,35	17495,01	-10211,96	17472,55	0,06 %	0,12 %
4	7385,69	-9368,68	7378,81	-9357,63	0,06 %	0,11 %
5	-3925,42	-14909,34	-3919,80	-14902,45	0,14 %	0,04 %
6	1664,31	9427,92	1657,57	9422,06	0,40 %	0,06 %
7	14492,09	17634,17	14484,28	17624,50	0,05 %	0,05 %
8	-9524,71	-18879,40	-9525,55	-18869,68	0,008 %	0,05 %
9	8222,71	-14905,75	8221,53	-14897,55	0,01 %	0,05 %
10	-13793,53	18912,70	-13784,35	18905,71	0,06 %	0,03 %
11	-3768,76	5909,52	-3765,39	5908,99	0,08 %	0,008%
12	20906,04	-22087,16	20898,75	-22080,93	0,03 %	0,02 %
13	-3742,45	-4992,44	-3742,86	-4992,05	0,01 %	0,007%
14	2195,00	22106,02	2196,06	22101,39	0,04 %	0,02 %
15	-20079,36	5865,86	-20072,53	5861,08	0,03 %	0,08 %
16	1269,02	-25248,47	1266,75	-25241,61	0,17 %	0,02 %
17	24073,41	-4989,99	24067,23	-4988,88	0,02 %	0,02 %
18	-3711,76	25251,27	-3711,59	25244,65	0,004 %	0,02 %
19	2204,11	-5835,34	2203,83	-5828,11	0,01 %	0,12 %
20	-23267,71	-22128,47	-23261,53	-22125,66	0,02 %	0,01 %
21	-3704,57	4924,78	-3702,46	4918,34	0,05 %	0,13 %
22	24087,46	22115,35	24082,39	22111,45	0,02 %	0,01 %
23	2177,92	-5881,95	2175,55	-5879,38	0,10 %	0,02 %
24	-3684,30	-18959,40	-3681,90	-18956,15	0,06 %	0,01 %
25	-23282,43	4931,36	-23277,46	4926,07	0,02 %	0,10 %
26	1271,06	18930,54	1269,03	18924,90	0,15 %	0,02 %
27	20949,31	-17582,67	20945,50	-17568,23	0,01 %	0,08 %
28	2168,07	-9508,15	2167,01	-9508,98	0,04 %	0,008%
29	-3721,12	14817,01	-3720,01	14801,56	0,02 %	0,10 %
30	-20119,49	9463,63	-20115,79	9460,68	0,01 %	0,03 %
31	-3779,91	-17606,98	-3777,78	-17594,74	0,05 %	0,06 %
32	14560,04	-28,70	14557,53	-31,06	0,01 %	7,59 %
33	8195,64	-35,43	8192,15	-38,31	0,04 %	7,51 %
34	-9474,67		-9471,08		0,03 %	
35	-13876,21		-13873,81		0,01 %	
36	1713,55		1711,61		0,11 %	
37	5499,57		5499,07		0,009 %	
38	7423,37		7420,04		0,04 %	
39	-10252,38		-10249,17		0,03 %	
40	-3984,19		-3983,45		0,01 %	
41	-6285,15		-6283,47		0,02 %	

Tableau 13 : Comparaisons des forces axiales de l'élément poutre pour la première et deuxième structure (premier cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES DEPLACEMENTS (ELEMENT POUTRE).

Noeuds	Déplacements	Pro Sap 2000		Pro Développé		% Erreur	
		Elément Poutre S1	Elément Poutre S2	Elément Poutre S1	Elément Poutre S2	Elément Poutre S1	Elément Poutre S2
1	u_1	0	0	0	0	0 %	0 %
	v_1	0	0	0	0	0 %	0 %
	q_1	0	0	0	0	0 %	0 %
2	u_2	0	0	0	0	0 %	0 %
	v_2	0	0	0	0	0 %	0 %
	q_2	0	0	0	0	0 %	0 %
3	u_3	-0,000093	-0,000106	-0,000094	-0,000107	1,06 %	0,93 %
	v_3	-0,000207	-0,000346	-0,000209	-0,000349	0,95 %	0,85 %
	q_3	0,000076	0,000136	0,000077	0,000138	1,29 %	1,44 %
4	u_4	0,000092	0,000039	0,000093	0,000039	1,07 %	0 %
	v_4	-0,000202	-0,000513	-0,000204	-0,000519	0,98 %	1,15 %
	q_4	0,00008	0,000164	0,00008	0,000166	0 %	1,2 %
5	u_5	-0,000113	-0,000144	-0,000114	-0,000145	0,87 %	0,68 %
	v_5	-0,000466	-0,000908	-0,000471	-0,000919	1,06 %	1,19 %
	q_5	0,000072	0,000125	0,000073	0,000127	1,36 %	1,57 %
6	u_6	0,000117	9,11 E-6	0,000118	9,3 E-6	0,84 %	0 %
	v_6	-0,000499	-0,001077	-0,000504	-0,001089	0,99 %	1,1 %
	q_6	0,000071	0,000106	0,000072	0,000107	1,38 %	0,93 %
7	u_7	-0,00008	-0,000114	-0,000081	-0,000115	1,23 %	0,86 %
	v_7	-0,000685	-0,001285	-0,000693	-0,0013	1,15 %	1,15 %
	q_7	0,000052	0,000074	0,000052	0,000074	0 %	0 %
8	u_8	0,000089	-0,000052	0,00009	-0,000052	1,11 %	0 %
	v_8	-0,000674	-0,001363	-0,000682	-0,001379	1,17 %	1,16 %
	q_8	0,000052	0,000064	0,000053	0,000065	1,88 %	1,53 %
9	u_9	-0,000013	-0,000053	-0,000013	-0,000053	0 %	0 %
	v_9	-0,0008	-0,001493	-0,000809	-0,00151	1,11 %	1,12 %
	q_9	0,000016	0,000014	0,000015	0,000014	3,25 %	0 %
10	u_{10}	0,000027	-0,000145	0,000027	-0,000146	0 %	0,68 %
	v_{10}	-0,000834	-0,001571	-0,000844	-0,00159	1,18 %	1,19 %
	q_{10}	0,000016	3,22 E-6	0,000015	3,11 E-6	0 %	0 %
11	u_{11}	0,00007	0,00004	0,00007	0,00004	0 %	0 %
	v_{11}	-0,000792	-0,001434	-0,000802	-0,001451	1,24 %	1,17 %
	q_{11}	-0,000028	-0,000058	-0,000028	-0,000058	0 %	0 %

12	u_{12}	-0,000052	-0,000233	-0,000052	-0,000235	0 %	0,85 %
	v_{12}	-0,000781	-0,001422	-0,000790	-0,001439	1,13 %	1,18 %
	q_{12}	-0,000028	-0,000069	-0,000028	-0,000069	0 %	0 %
13	u_{13}	0,000151	0,000128	0,000152	0,000129	0,65 %	0,77 %
	v_{13}	-0,000638	-0,001173	-0,000646	-0,001187	1,23 %	1,17 %
	q_{13}	-0,00007	-0,000121	-0,00007	-0,000122	0 %	0,81 %
14	u_{14}	-0,000128	-0,000315	-0,000129	-0,000319	0,77 %	1,25 %
	v_{14}	-0,000672	-0,001161	-0,000680	-0,001175	1,17 %	1,19 %
	q_{14}	-0,00007	-0,000139	-0,00007	-0,00014	0 %	0,71 %
15	u_{15}	0,000211	0,00021	0,000213	0,000212	0,93 %	0,94 %
	v_{15}	-0,000369	-0,000658	-0,000373	-0,000666	1,07 %	1,2 %
	q_{15}	-0,000106	-0,000187	-0,000107	-0,00019	0,93 %	1,57 %
16	u_{16}	-0,000184	-0,000357	-0,000185	-0,000361	0,54 %	1,1 %
	v_{16}	-0,000356	-0,000556	-0,000360	-0,000562	1,11 %	1,06 %
	q_{16}	-0,000106	-0,000186	-0,000107	-0,000189	1,07 %	1,58 %
17	u_{17}	0,000233	0,000252	0,000236	0,000254	1,27 %	0,78 %
	v_{17}	0	0	0	0	0 %	0 %
	q_{17}	-0,000117	-0,000185	-0,000118	-0,000187	0,84 %	1,06 %
18	u_{18}	-0,0002	-0,000357	-0,000202	-0,000361	0,99 %	1,1 %
	v_{18}	-0,000041	-2,39 E-7	-0,000041	-2,62 E-7	0 %	0 %
	q_{18}	-0,0001	-0,000165	-0,000101	-0,000166	0,99 %	0,6 %

Tableau 14 : Comparaisons des déplacements de l'élément poutre pour la première et deuxième structure (deuxième cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES REACTIONS.

Noeuds	Réactions (N)	Progr Sap 2000		Progr Développé		% d'erreur	
		Elément Poutre S1	Elément Poutre S2	Elément Poutre S1	Elément Poutre S2	Elément Poutre S1	Elément Poutre S2
1	R_{x_1}	22225,85	18374,98	22222,74	18371,12	0,01 %	0,02 %
	R_{y_1}	9540,74	71,97	9541,25	78,08	0,005 %	7,82 %
	M_{r_1}	-101,07	-147,61	109,23	-159,63	7,47 %	7,52 %
2	R_{x_2}	-22225,85	-18374,98	-22222,74	-18371,12	0,01 %	0,02 %
	R_{y_2}	9854,63	18572,14	9854,18	18566,68	0,004 %	0,02 %
	M_{r_2}	-96,93	-250,68	104,61	-271,16	7,34 %	7,55 %
27	$R_{y_{27}}$	10604,64	11355,89	10604,55	11355,22	0 %	0,005 %

Tableau 15 : Comparaisons des réactions de l'élément poutre pour la première et deuxième structure (deuxième cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES FORCES AXIALES.

Eléments	Progr Sap 2000		Progr Développé		% d'erreur	
	La force axiale E Poutre S1	La force axiale E Poutre S2	La force axiale E Poutre S1	La force axiale E Poutre S2	Erreur S1	Erreur S2
1	0	0	0	0	0 %	0 %
2	-16210,86	-18374,98	-16209,78	-18371,12	0,006 %	0,02 %
3	-11238,67	21829,78	-11234,51	21810,11	0,03 %	0,09 %
4	11615,91	6689,33	11611,19	6695,43	0,04 %	0,09 %
5	16009,95	-18420,36	16009,24	-18402,01	0,004 %	0,09 %
6	609,13	-6624,23	608,21	-6624,71	0,15 %	0,007 %
7	-3353,42	21880,05	-3354,12	21865,42	0,02 %	0,06 %
8	-12368,14	-5108,03	-12365,31	-5100,19	0,02 %	0,15 %
9	10524,26	-18514,62	10521,83	-18504,77	0,02 %	0,05 %
10	4337,95	5153,17	4338,25	5150,76	0,006 %	0,04 %
11	-3587,52	10167,61	-3585,87	10163,36	0,04 %	0,04 %
12	5657,22	-10609,89	5656,64	-10606,55	0,01 %	0,03 %
13	-6278,81	-8584,28	-6278,22	-8580,11	0,009 %	0,04 %
14	4824,13	10640,32	4823,40	10639,54	0,01 %	0,007 %
15	-4879,65	10123,65	-4879,05	10115,11	0,01 %	0,08 %
16	1237,45	-16065,71	1235,59	-16061,06	0,15 %	0,02 %
17	11621,83	-8584,67	11620,95	-8580,21	0,007 %	0,05 %
18	-6300,10	16080,00	-6298,20	16076,58	0,03 %	0,02 %
19	4777,28	-1577,77	4775,45	-1574,33	0,03 %	0,21 %
20	-10808,08	-15239,91	-10807,32	-15238,65	0,007 %	0,008 %
21	-3697,51	1330,74	-3695,50	1327,75	0,05 %	0,22 %
22	14400,21	15238,31	14399,30	15236,92	0,006 %	0,009 %
23	-404,29	-1624,17	-405,08	-1625,37	0,19 %	0,07 %
24	-1104,21	-14365,13	-1103,40	-14362,76	0,07 %	0,01 %
25	-13594,07	1336,17	-13593,24	1334,19	0,006 %	0,14 %
26	1260,58	14347,85	1258,62	14344,05	0,15 %	0,02 %
27	14022,11	-13326,42	14021,28	-13315,87	0,005 %	0,07 %
28	-399,12	-7207,74	-398,61	-7208,75	0,12 %	0,01 %
29	-1126,26	11227,65	-1126,77	11216,07	0,04 %	0,10 %
30	-13206,98	7174,11	-13206,23	7172,25	0,005 %	0,02 %
31	-3724,76	-13346,96	-3722,79	-13338,35	0,05 %	0,06 %
32	10451,16	-21,72	10450,39	-23,50	0,007 %	7,57 %
33	5533,66	-26,31	5531,81	-28,43	0,03 %	7,45 %
34	-6974,09		-6972,00		0,02 %	
35	-9681,41		-9680,85		0,005 %	
36	1397,81		1396,25		0,11 %	
37	3869,88		3870,02		0,003 %	
38	5301,74		5299,94		0,03 %	
39	-7213,88		-7212,51		0,01 %	
40	-2845,21		-2844,96		0,008 %	
41	-4487,94		-4487,14		0,01 %	

Tableau 16 : Comparaisons des forces axiales de l'élément poutre pour la première et deuxième structure (deuxième cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES DEPLACEMENTS (ELEMENT POUTRE).

Noeuds	Déplacements	Pro Sap 2000		Pro Développé		% Erreur	
		Elément Poutre S1	Elément Poutre S2	Elément Poutre S1	Elément Poutre S2	Elément Poutre S1	Elément Poutre S2
1	u_1	0	0	0	0	0 %	0 %
	v_1	0	0	0	0	0 %	0 %
	q_1	0	0	0	0	0 %	0 %
2	u_2	0	0	0	0	0 %	0 %
	v_2	0	0	0	0	0 %	0 %
	q_2	0	0	0	0	0 %	0 %
3	u_3	-0,000066	-0,000086	0,000066	-0,000087	0 %	1,48 %
	v_3	-0,000156	-0,000273	-0,000158	-0,000276	1,26 %	1,08 %
	q_3	0,000055	0,000109	0,000056	0,00011	1,78 %	0,9 %
4	u_4	0,000062	0,000032	0,000062	0,000032	0 %	0 %
	v_4	-0,00015	-0,000405	-0,000151	-0,000409	0,66 %	0,97 %
	q_4	0,000059	0,000131	0,00006	0,000133	1,66 %	1,5 %
5	u_5	-0,000074	-0,000119	-0,000075	-0,00012	1,33 %	0,83 %
	v_5	-0,000337	-0,00072	-0,000340	-0,000728	0,88 %	1,09 %
	q_5	0,000047	0,000097	0,000047	0,0000987	0 %	1,72 %
6	u_6	0,000072	0,000011	0,000072	0,0000109	0 %	0,91 %
	v_6	-0,000369	-0,000853	-0,000373	-0,000862	1,07 %	1,04 %
	q_6	0,000046	0,000079	0,000046	0,0000801	0 %	1,37 %
7	u_7	-0,000046	-0,000099	-0,000046	-0,0001	0 %	1 %
	v_7	-0,000472	-0,000992	-0,000477	-0,001	1,04 %	0,8 %
	q_7	0,000028	0,000052	0,000028	0,000053	0 %	1,88 %
8	u_8	0,000045	-0,000028	0,000045	-0,000028	0 %	0 %
	v_8	-0,00046	-0,001034	-0,000465	0,001046	1,07 %	1,14 %
	q_8	0,000028	0,000044	0,000028	0,000044	0 %	0 %
9	u_9	2,19 E-20	-0,000062	8,05 E-17	-0,000062	0 %	0 %
	v_9	-0,000516	-0,001125	-0,000522	-0,001138	1,014%	1,14 %
	q_9	-4,92 E-20	6,43 E-6	5,23 E-17	6,54 E-6	0 %	0 %
10	u_{10}	-4,68 E-20	-0,000083	-5,92 E-17	-0,000083	0 %	0 %
	v_{10}	-0,000549	-0,001167	-0,000555	-0,00118	1,08 %	1,1 %
	q_{10}	-2,92 E-20	9,71 E-6	3,87 E-17	9,82 E-6	0 %	0 %
11	u_{11}	0,000046	8 E-06	0,000046	8,07 E-06	0 %	0 %
	v_{11}	-0,000472	-0,001039	-0,000477	-0,001051	1,04 %	1,14 %
	q_{11}	-0,000028	-0,000046	-0,000028	-0,000047	0 %	2,12 %

12	u_{12}	-0,000045	-0,000119	-0,000045	-0,00012	0 %	0,83 %
	v_{12}	-0,00046	-0,000991	-0,000465	-0,001	1,07 %	0,9 %
	q_{12}	-0,000028	-0,000055	0,000028	-0,000056	0 %	1,78 %
13	u_{13}	0,000074	0,000027	0,000075	0,0000268	1,33 %	0,74 %
	v_{13}	-0,000337	-0,000818	-0,000340	-0,000827	0,88 %	1,08 %
	q_{13}	-0,000047	-0,000081	-0,000047	-0,000081	0 %	0 %
14	u_{14}	-0,000072	-0,000135	-0,000072	-0,000136	0 %	0,73 %
	v_{14}	-0,000369	-0,00077	-0,000373	-0,000778	1,07 %	1,02 %
	q_{14}	-0,000046	-0,000096	-0,000046	-0,000097	0 %	1,62 %
15	u_{15}	0,000066	0,000041	0,000066	0,000041	0 %	0 %
	v_{15}	-0,000156	-0,000428	-0,000158	-0,000432	1,26 %	0,92 %
	q_{15}	-0,000055	-0,000127	-0,000056	-0,000129	1,78 %	1,55 %
16	u_{16}	-0,000062	-0,000095	-0,000062	-0,000096	0 %	1,65 %
	v_{16}	-0,00015	-0,00029	-0,000151	-0,000293	0,66 %	1,02 %
	q_{16}	-0,000059	-0,000119	-0,000060	-0,000121	1,66 %	1,65 %
17	u_{17}	0	0	0	0	0 %	0 %
	v_{17}	0	0	0	0	0 %	0 %
	q_{17}	0	0	0	0	0 %	0 %
18	u_{18}	0	0	0	0	0 %	0 %
	v_{18}	0	0	0	0	0 %	0 %
	q_{18}	0	0	0	0	0 %	0 %

Tableau 17 : Comparaisons des déplacements de l'élément poutre pour la première et deuxième structure (troisième cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES REACTIONS.

Noeuds	Réactions (N)	Progr Sap 2000		Progr Développé		% d'erreur	
		Elément Poutre S1	Elément Poutre S2	Elément Poutre S1	Elément Poutre S2	Elément Poutre S1	Elément Poutre S2
1	R_{x_1}	16119,77	14967,7	16117,11	14962,28	0,01 %	0,03 %
	R_{y_1}	7390,04	56,4	7390,53	61,17	0,006 %	7,79 %
	M_{r_1}	-76,42	-116,26	-82,23	-125,7	7,06 %	7,5 %
2	R_{x_2}	-15480,73	-14739,6	-15478,08	-14734,2	0,01 %	0,03 %
	R_{y_2}	7609,96	14584,27	7609,46	14579,58	0,006 %	0,03 %
	M_{r_2}	-72,45	-196,73	-78,18	-212,75	7,32 %	7,52 %

17	$R_{x_{27}}$	-16119,77	-16783,48	-16117,11	-16777,16	0,01 %	0,03 %
	$R_{y_{27}}$	7390,04	15302,39	7390,53	15297,54	0,006 %	0,03 %
	$M_{r_{17}}$	76,42	214,23	82,61	231,9	7,49 %	7,61 %
18	$R_{x_{28}}$	15480,73	16555,37	15478,08	16549,075	0,01 %	0,003%
	$R_{y_{28}}$	7609,96	56,95	7609,46	61,69	0,006 %	7,68 %
	$M_{r_{18}}$	72,45	120,58	78,18	130,26	7,32 %	7,43 %

Tableau 18 : Comparaisons des réactions de l'élément poutre pour la première et deuxième structure (troisième cas de conditions aux limites)

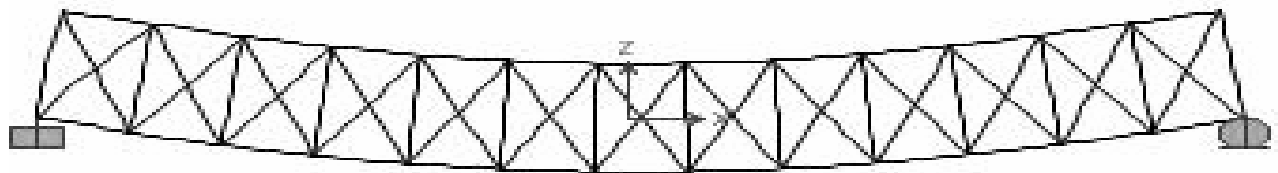
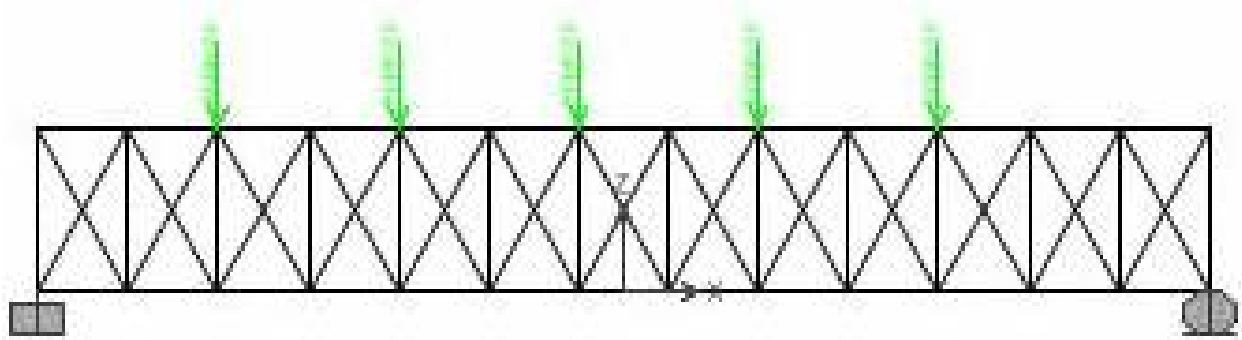
COMPARAISONS DES FORCES AXIALES.

Eléments	Progr Sap 2000		Progr Développé		% d'erreur	
	La force axiale E Poutre S1	La force axiale E Poutre S2	La force axiale E Poutre S1	La force axiale E Poutre S2	Erreur S1	Erreur S2
1	0	0	0	0	0 %	0 %
2	-11460,65	-14967,70	-11459,50	-14962,28	0,01 %	0,03 %
3	-8704,85	17143,39	-8701,69	17127,59	0,03 %	0,09 %
4	8971,05	5562,58	8967,34	5565,19	0,04 %	0,04 %
5	10680,29	-14463,65	10679,54	-14448,74	0,00 %	0,10 %
6	685,99	-5739,03	685,04	-5737,14	0,13 %	0,03 %
7	-1393,68	17174,64	-1394,07	17161,99	0,02 %	0,07 %
8	-9808,71	-3697,91	-9806,31	-3694,69	0,02 %	0,08 %
9	7893,15	-14542,13	7891,14	-14534,20	0,02 %	0,05 %
10	1777,77	3502,49	1777,80	3501,97	0,001 %	0,01 %
11	-3523,96	5464,88	-3522,32	5462,96	0,04 %	0,03 %
12	4836,36	-6666,01	4836,10	-6665,36	0,005 %	0,009 %
13	-3724,18	-4614,14	-3724,15	-4612,18	0,0008%	0,04 %
14	2190,54	6455,63	2190,34	6456,49	0,009 %	0,01 %
15	-4655,35	5420,38	-4655,04	5414,10	0,006 %	0,11 %
16	1302,52	-9587,42	1300,65	-9585,22	0,14 %	0,02 %
17	8017,97	-4614,13	8017,47	-4611,81	0,006 %	0,05 %
18	-3743,45	9360,99	-3742,09	9358,94	0,03 %	0,02 %
19	2145,28	-6281,41	2143,98	-6275,77	0,06 %	0,08 %
20	-7802,71	-6227,10	-7802,30	-6227,94	0,005 %	0,01 %
21	-3628,07	5300,52	-3626,10	5295,27	0,05 %	0,09 %
22	8017,97	5984,57	8017,47	5984,20	0,006 %	0,006 %
23	2145,28	-6324,99	2143,98	-6323,60	0,06 %	0,02 %
24	-3743,45	-2919,30	-3742,09	-2818,92	0,03 %	1,91 %
25	-7802,71	5311,82	-7802,30	5308,29	0,005 %	0,06 %
26	1302,52	2562,22	1300,65	2559,49	0,14 %	0,10 %
27	4836,36	-18042,45	4836,10	-18031,09	0,005 %	0,06 %
28	2190,51	6879,79	2190,34	6877,87	0,007 %	0,02 %
29	-3724,18	15159,60	-3724,15	15142,32	0,0008%	0,11 %
30	-4655,35	-7159,16	-4655,04	-7161,68	0,006 %	0,03 %
31	-3523,96	-17977,96	-3522,32	-17960,48	0,04 %	0,09 %

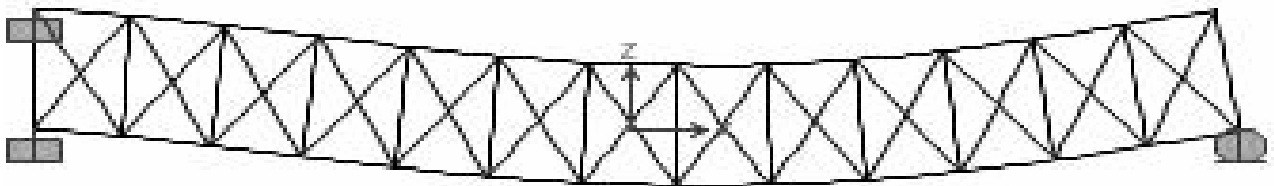
Eléments	Progr Sap 2000		Progr Développé		% d'erreur	
	La force axiale E Poutre S1	La force axiale E Poutre S2	La force axiale E Poutre S1	La force axiale E Poutre S2	Erreur S1	Erreur S2
32	-1393,68	16555,37	-1394,07	16549,07	0,02 %	0,03 %
33	7893,15	0	7891,14	0	0,02 %	0 %
34	-9808,71		-9806,31		0,02 %	
35	1777,77		1777,80		0,001 %	
36	685,99		685,04		0,13 %	
37	-11460,65		-11459,50		0,01 %	
38	8971,05		8967,34		0,04 %	
39	8704,85		-8701,69		0,03 %	
40	10680,29		10679,54		0,007 %	
41	0		0		0 %	

Tableau 19 : Comparaisons des forces axiales de l'élément poutre pour la première et deuxième structure (troisième cas de conditions aux limites)

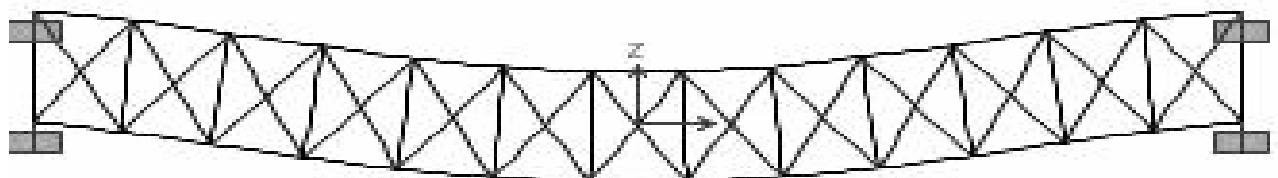
IV.10 Les déformations des structures



a - structure N°1 exemple 1

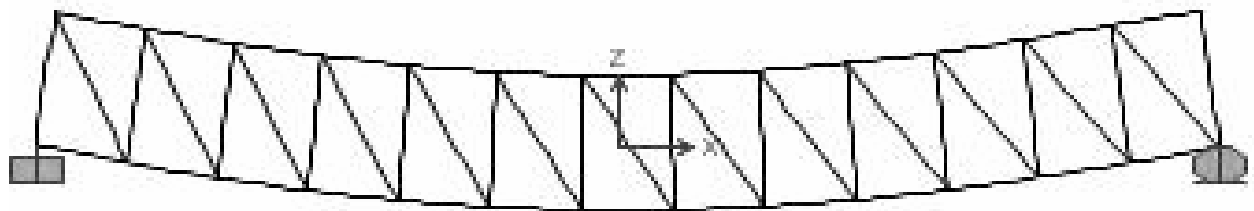
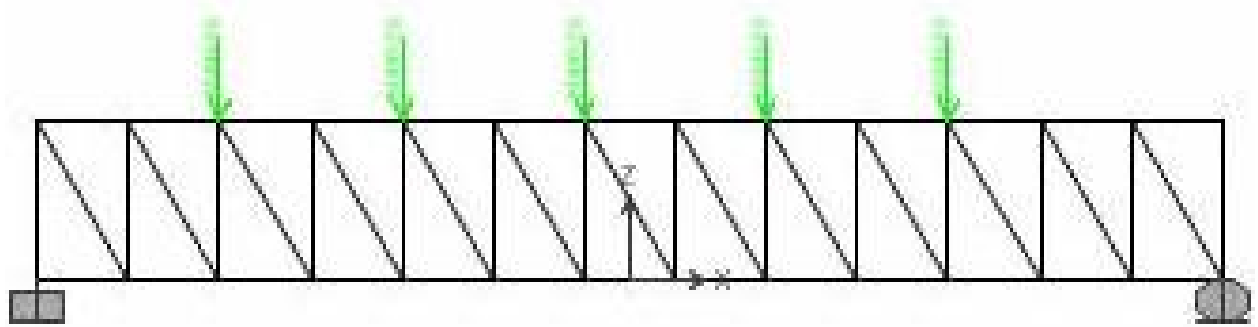


b - structure N°1 exemple 2

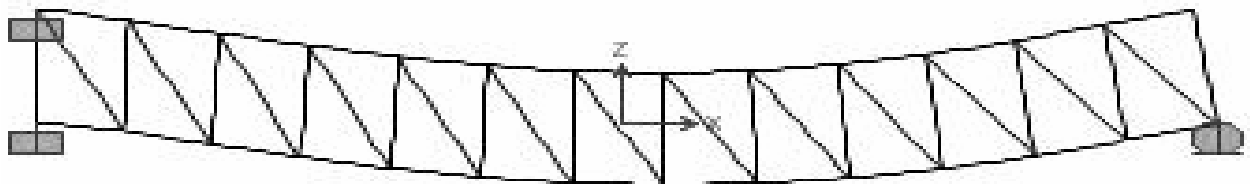


c - structure N°1 exemple 3

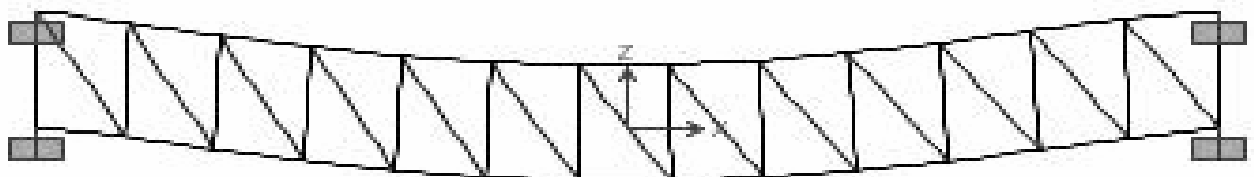
Fig.4.5 : Déformation de la structure N°1 (élément barre)



a- structure №2 exemple 1

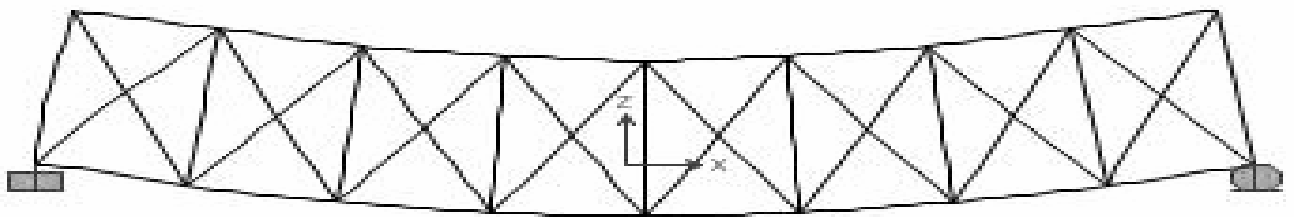
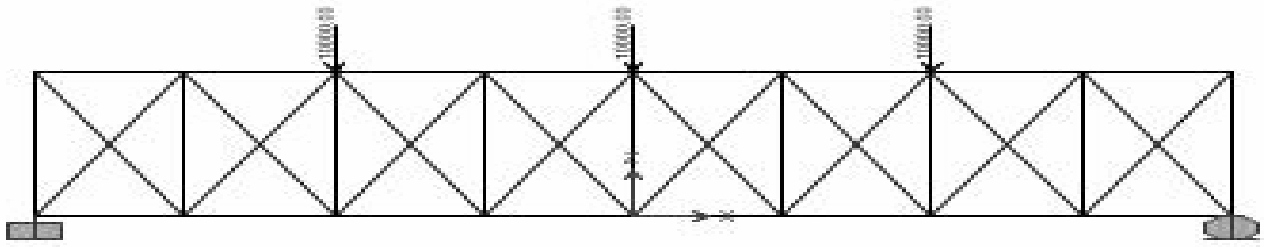


b- structure №2 exemple 2

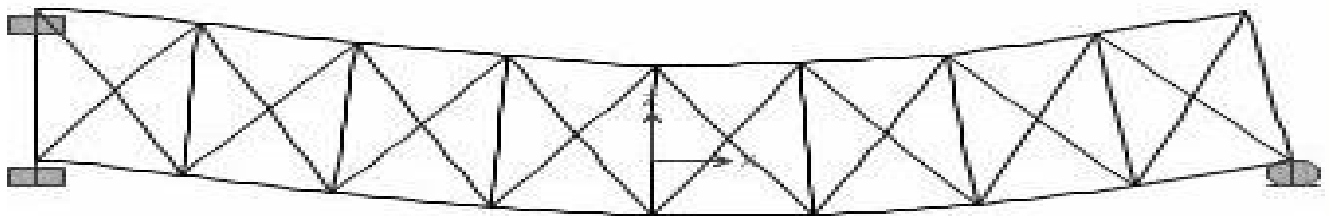


C - structure №2 exemple 3

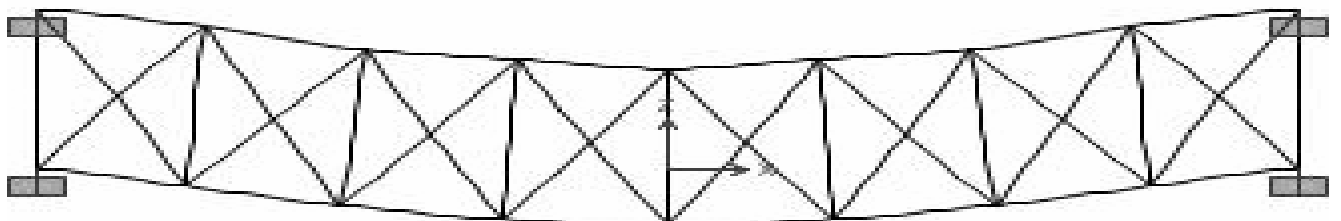
Fig.4.6. : Déformation de la structure №2 (élément barre)



a - structure N°1 exemple 1

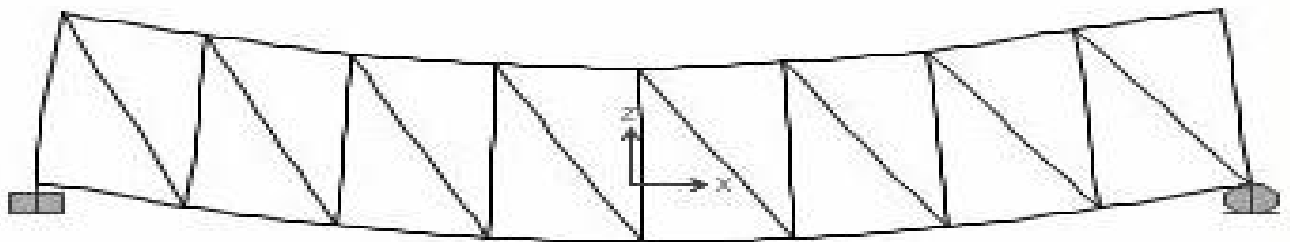
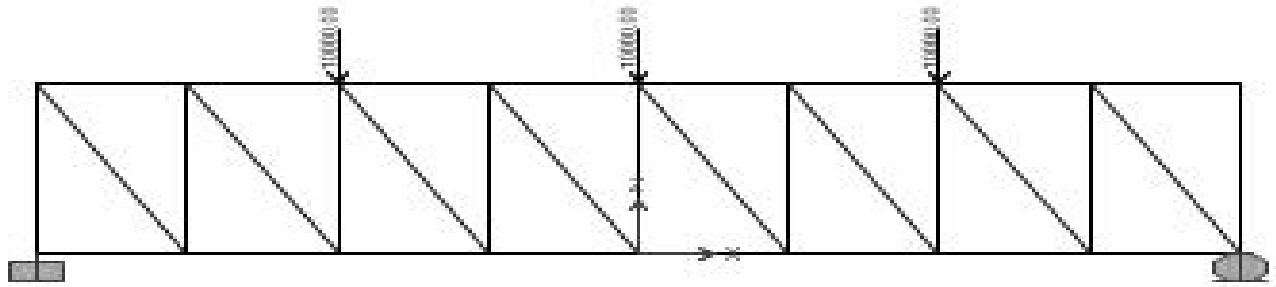


b - structure N°1 exemple 2

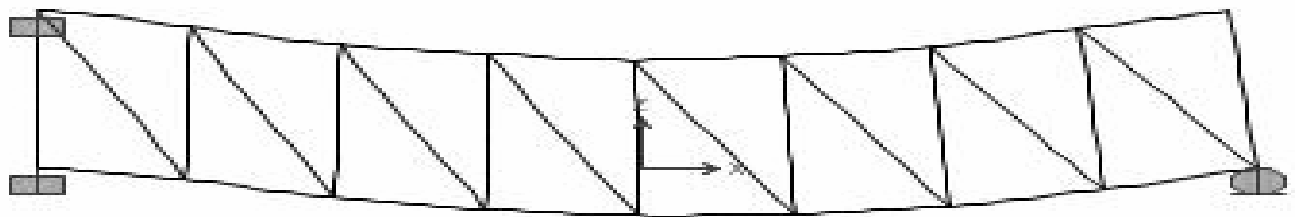


c - structure N°1 exemple 3

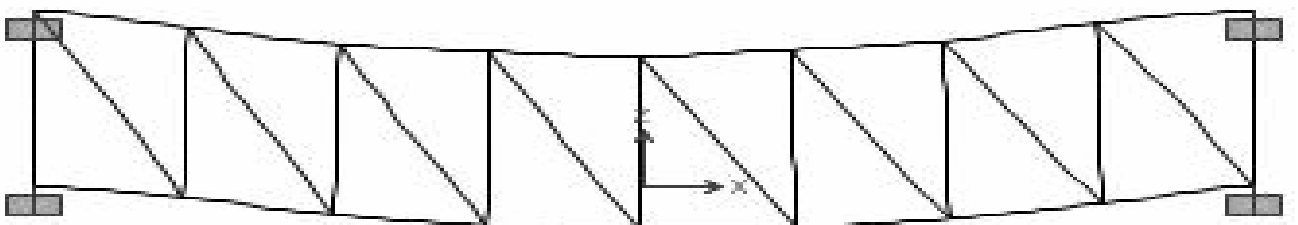
Fig.4.7 : Déformation de la structure N°1 (élément poutre)



a - structure №2 exemple 1



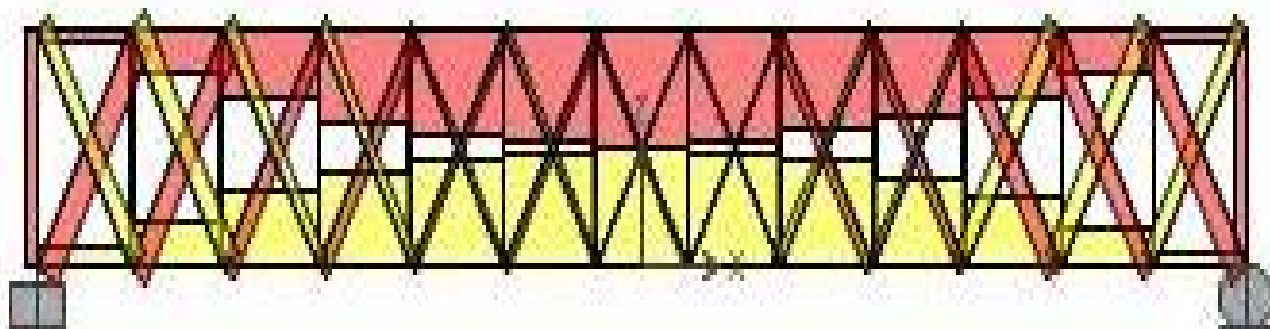
b - structure №2 exemple 2



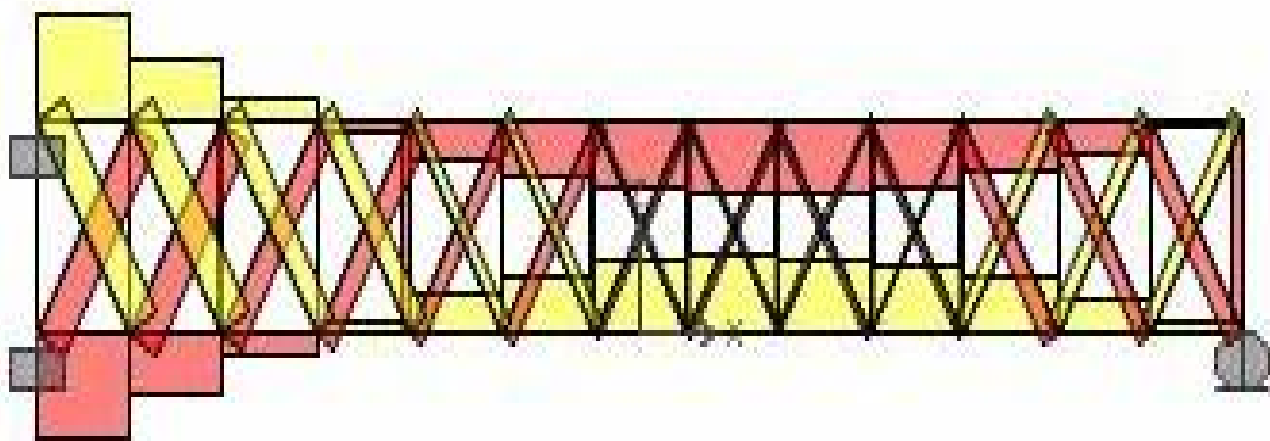
c - structure №2 exemple 3

Fig.4.8: Déformation de la structure №2 (élément poutre)

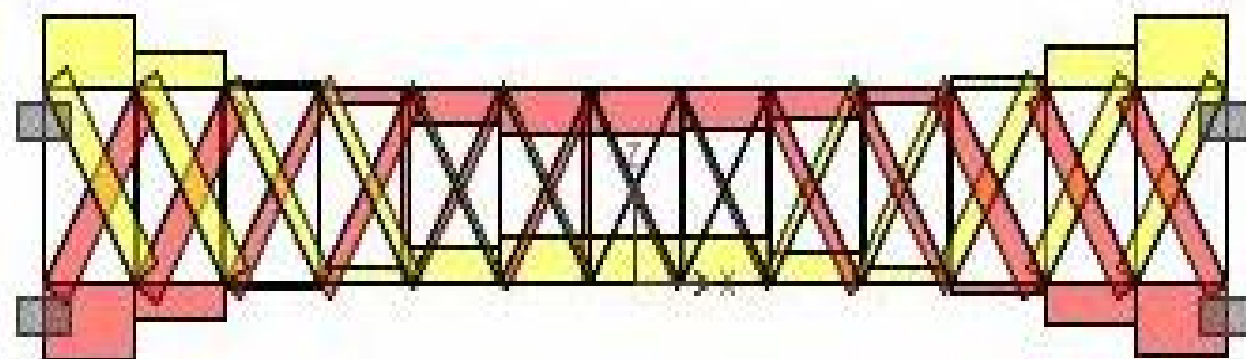
IV.11 Les digrammes des forces axiales



a- structure N°1 exemple 1



b - structure N°1 exemple 2



C - structure N°1 exemple 3

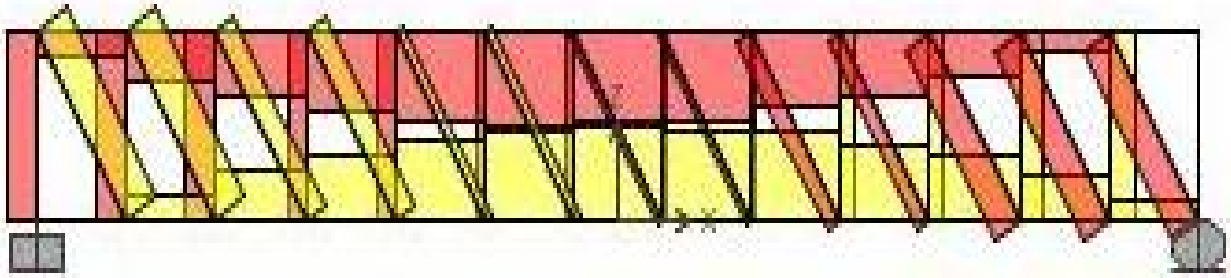
Valeur positive



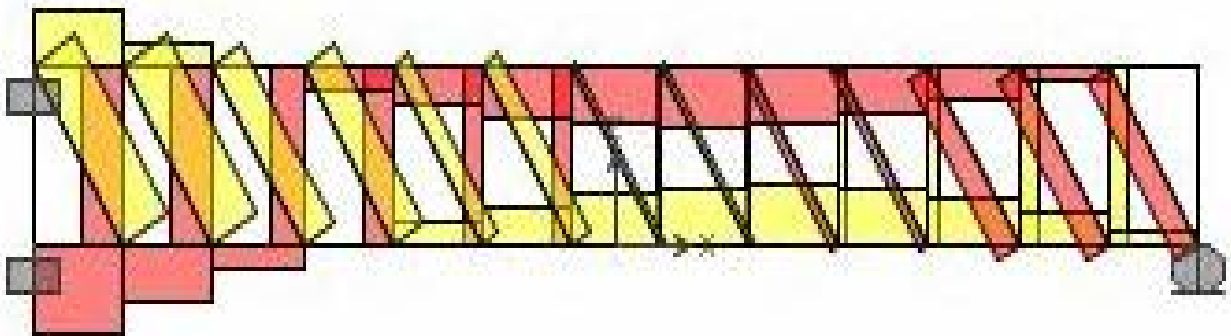
Valeur négative



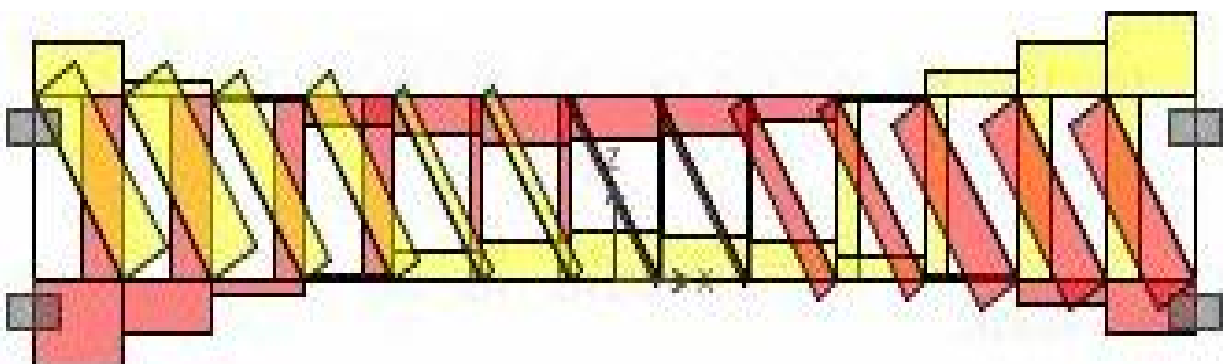
Fig.IV.9 : les forces axiales pour la structure N°1 (élément barre)



a - structure №2 exemple 1

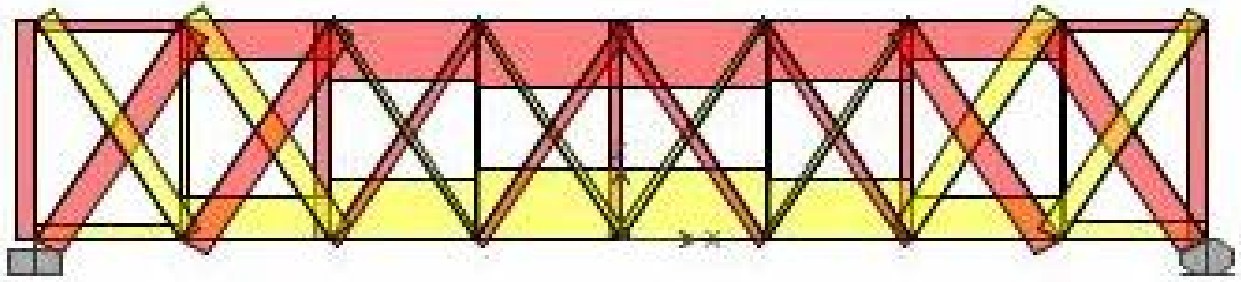


b - structure №2 exemple 2

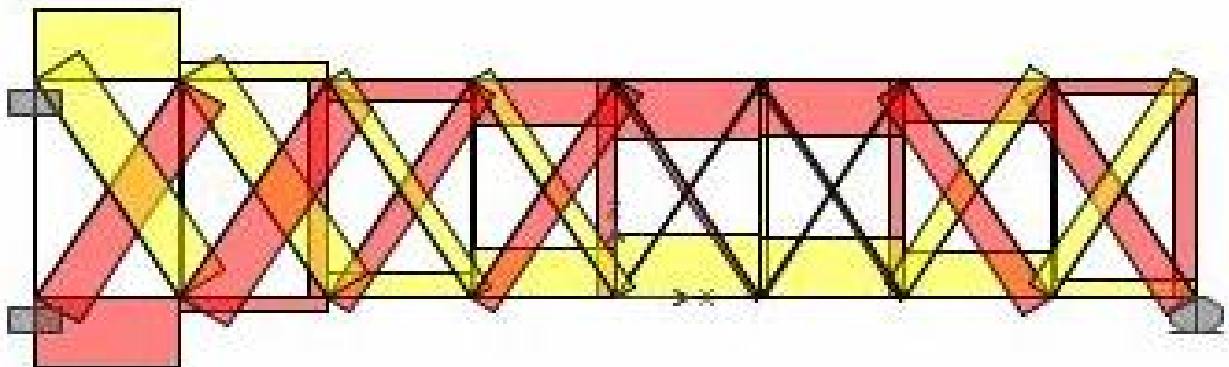


c - structure №2 exemple 3

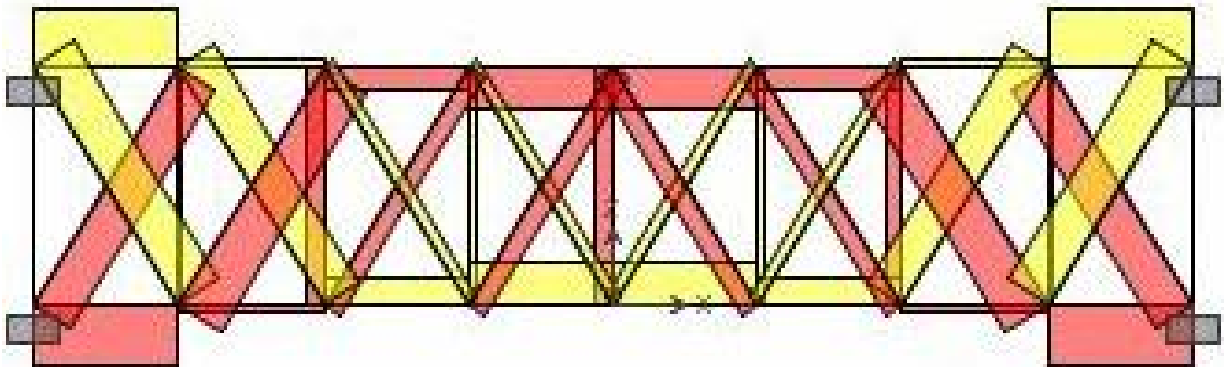
Fig.IV.10 : les forces axiales pour la structure №2 (élément barre)



a- structure N°1 exemple 1

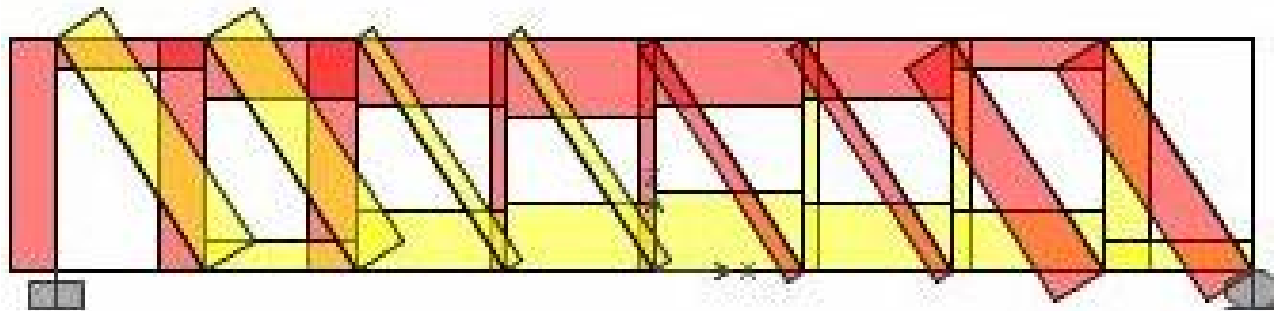


b - structure N°1 exemple 2

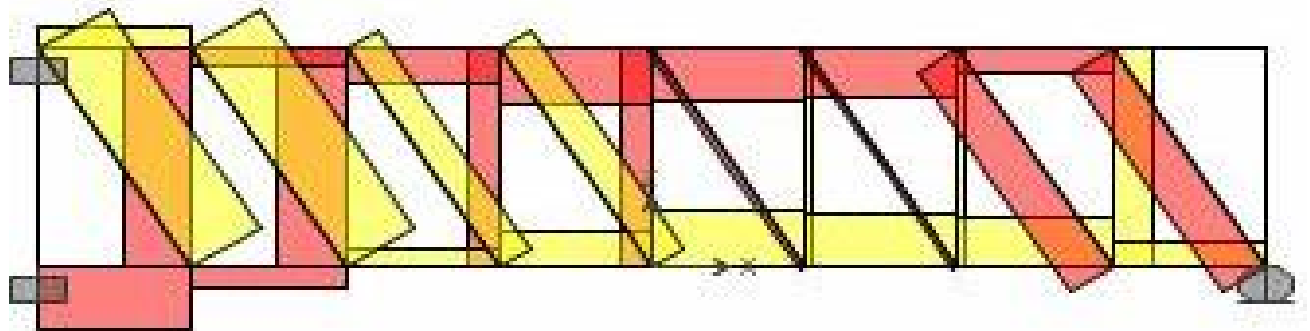


C - structure N°1 exemple 3

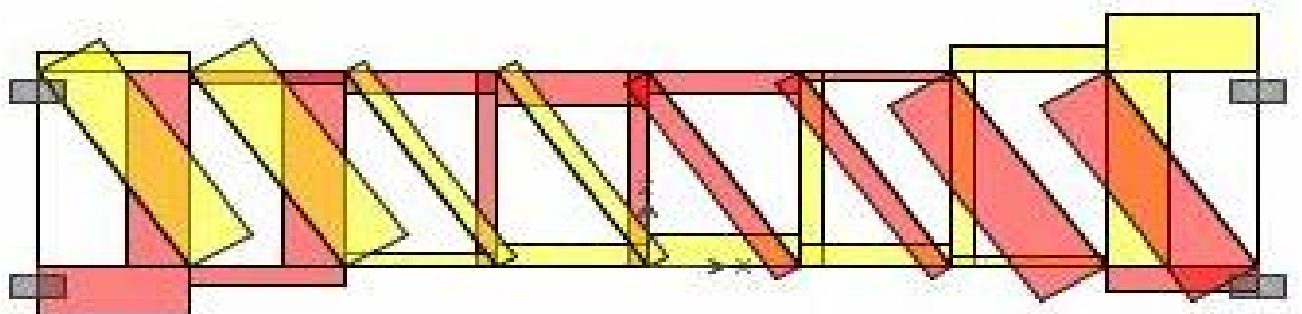
Fig.IV.11 : les forces axiales pour la structure N°1 (élément poutre)



a - structure №2 exemple 1



b - structure №2 exemple 2



c - structure №2 exemple 3



Fig.IV.12 : les forces axiales pour la structure №2 (élément poutre)

IV.9 Discussion des résultats

La méthode des éléments finis est une technique très puissante pour l'analyse des structures discrètes, puisqu'elle repose essentiellement sur les calculs numériques. Elle permet la détermination des déplacements à n'importe quel nœud de la structure. L'objet essentiel du calcul de ces déplacements est de déterminer les forces axiales, ainsi que les contraintes dans n'importe quel élément de la structure.

Suite aux résultats obtenus par le programme développé, on arrive à tirer les constatations suivantes :

- 1- En premier lieu, on peut dire que ce programme développé donne des résultats identiques lorsqu'on utilise l'élément barre ou l'élément poutre.
- 2- Ce programme développé permet de calculer les déplacements dans chaque nœud, et de voir ainsi la déformation de la structure.
- 3- Ce programme développé donne les forces axiales dans chaque élément, ce qui permet de déterminer les contraintes maximales et minimales dans chaque structure suivant les conditions aux limites définies dans chaque cas comme illustré dans le tableau suivant :

Structures	Valeur de la contrainte maximale	Numéro d'élément
1 ^{ère} structure élément barre (Exemple 1)	31869,08	32
1 ^{ère} structure élément barre (Exemple 2)	25280,21	02
1 ^{ère} structure élément barre (Exemple 3)	17345,54	02
2 ^{ème} structure élément barre (Exemple 1)	31179,48	30
2 ^{ème} structure élément barre (Exemple 2)	28563,17	02
2 ^{ème} structure élément barre (Exemple 3)	20931,69	02
1 ^{ère} structure élément poutre (Exemple 1)	24082,39	22
1 ^{ère} structure élément poutre (Exemple 2)	16209,78	02
1 ^{ère} structure élément poutre (Exemple 3)	11459,50	02
2 ^{ème} structure élément poutre (Exemple 1)	25244,65	18
2 ^{ème} structure élément poutre (Exemple 2)	21865,42	07
2 ^{ème} structure élément poutre (Exemple 3)	17960,48	31

- 4- Ce programme permet le choix des meilleures conditions aux limites pour une structure dont les contraintes sont minimales, en prenant cette structure sous les mêmes excitations extérieurs (i.e : structure N°1, structure N°2) et en variant ces conditions (1^{er}, 2^{ème} et 3^{ème} cas).

Enfin, on peut dire que le programme développé à prouver son efficacité dans les calculs des structures discrètes en utilisant la méthode des éléments finis.

V. Vibration des structures

V.1 Introduction :

Les phénomènes vibratoires jouent un rôle important dans la plupart des domaines de la mécanique. Malgré leur grande diversité, ils sont régis, en tout cas dans le domaine linéaire, par les mêmes lois de comportement et peuvent être étudiés au moyen du même outil mathématique. [30]

V.2 Vibration élémentaire linéaire de la mécanique

On désigne sous le nom vibration élémentaire un système mécanique à un degré de liberté dont le comportement en fonction du temps est traduit par une équation différentielle du second ordre, linéaire et à coefficient constants. Un système mécanique possède un seul degré de liberté quand sa configuration peut être, à chaque instant, caractérisée par une seule variable. Plus généralement, un système possède n degrés de liberté si le nombre minimum de variables permettant de définir sa configuration est égale à n . Le système est linéaire quand il peut être décrit au moyen d'équations différentielles linéaires. [30]

La vibration mécanique élémentaire comprend les éléments représentés par la figure (V.1)

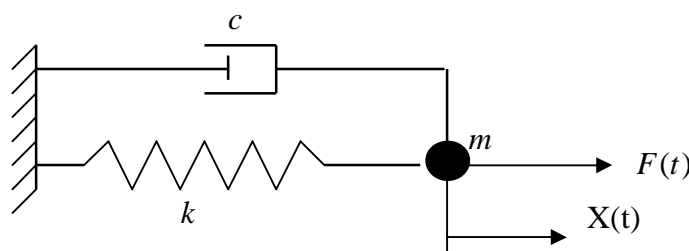


Fig. V.1 Vibration élémentaire linéaire de la mécanique

- une masse m indéformable,
- un ressort sans masse qui fournit une force élastique proportionnelle et opposée au déplacement $X(t)$, le coefficient de proportionnalité k est appelé rigidité du ressort ;
- un amortisseur qui fournit une force de freinage, proportionnelle et opposée à la vitesse $\dot{X}(t)$, le coefficient de proportionnalité c est appelé constante d'amortissement ou, plus simplement, résistance du système.

V.3 Equation du mouvement et régimes vibratoires

Si une force extérieure $F(t)$ agit sur la masse, la loi de Newton s'

$$M\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + KX(t) = F(t) \quad (5.1)$$

Dans laquelle :

M : matrice masse

C : matrice d'amortissement

K : matrice de rigidité

$X(t)$: vecteur déplacement généralisé

$F(t)$: la force d'excitation généralisée de la structure

- Le régime libre correspond à la solution générale de l'équation différentielle sans second membre, soit pour $F(t) = 0$.
- Le régime forcé correspond à la solution complète avec second membre. Il dépend donc essentiellement de la nature de $F(t)$: force harmonique, périodique, aléatoire, etc.

V.4 Vibration libre conservative

Pour une vibration libre on suppose que le système n'est soumis à aucune force extérieure et que l'amortissement est nul ($F(t) = 0$, $[C] = 0$). Dans notre analyse dynamique des structures discrètes, les fréquences propres, en particulier, ne sont que peu influencées par les amortissements. Il en va autrement dans l'analyse de ces structures dans le régime forcé, les amortissements jouent un rôle essentiel.

Dans la vibration libre, l'équation de mouvement devient

$$[M]\ddot{X} + [K]X = 0$$

V.5 Dynamique des poutres

Le mouvement d'une section droite A de poutre peut toujours être considéré comme la composition de trois mouvements simple :

- Le mouvement axial : (ou longitudinal) qui consiste en une translations de A parallèlement à l'axe principal OX tangent en O à la ligne moyenne de la poutre.
- Le mouvement de flexion : (ou transversal) qui consiste en une translation de A perpendiculaire à OX (flèche).
- Le mouvement de torsion : qui consiste en une rotation de A autour de son axe de torsion.

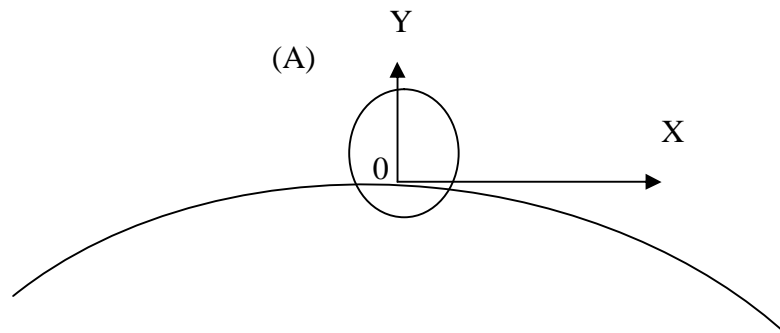


Fig.V.1 Section droite et ligne moyenne

V.6 Vibrations longitudinales d'une poutre

V.6.1 Équations du mouvement

Concédons une poutre d'axe OX dont la section A peut être fonction de l'abscisse X proposons –nous d'établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le déplacement longitudinal $U(x, t)$ de la section d'abscisse X pendant la vibration longitudinale de la poutre.

Le mouvement est défini par :

- u : Déplacement axial
- N : Force axiale agissant sur le plan de section droite
- A : Aire de la section droite
- E : Module de Young
- r : La masse volumique.

La dilatation étant égale à $\partial u / \partial x$, la force et le déplacement sont reliés par :

$$N = -EA \frac{\partial u}{\partial x} \tag{5.2}$$

Ecrivons l'équation fondamentale de la dynamique pour l'élément de poutre de masse $\rho A dx$ (masse volumique) compris entre les sections d'abscisses x et $x+ dx$

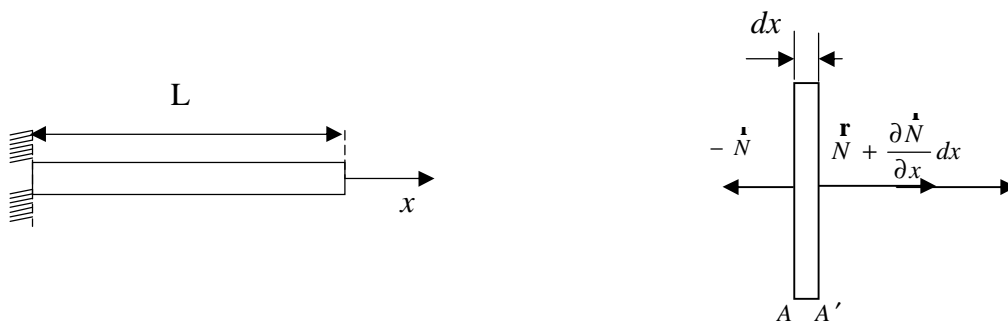


Fig.V.2 élément poutre

L'équation et loi de HOOKE s'écrivent pour une tranche élémentaire (A- A') d'épaisseur dx :

$$\begin{cases} -N + N + \frac{\partial N}{\partial x} dx = r A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ N = A \sigma_x = E A e_x = EA \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

Éliminant N entre les deux, on obtient l'équation du mouvement :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad C^2 = \frac{E}{r}$$

on utilisant les conditions aux limites, comme montre la figure (5.2)

Extrémité $x = 0$ encastrée

Extrémité $x = l$ libre

Tel que $C = \sqrt{\frac{E}{r}}$ l'accélération de propagation longitudinale

Donc l'équation devienne comme suite :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{C} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (5.3)$$

C'est une équation différentielle de second degré et la solution de cette équation de la forme suivante :

$$U(x, t) = U(x).T(t) \quad (5.4)$$

Après substitution de l'équation (5.4) dans l'équation (5.3) on obtient :

$$\begin{aligned} T(t).U(x) - \frac{1}{C^2} T(t).U''(x) &= 0 \quad \text{valable } \forall \text{ le temps } t \\ \frac{T(t)}{T(t)} = \frac{1}{C^2} \frac{U''(x)}{U(x)} &= -w^2 = cste \end{aligned} \quad (5.5)$$

Alors nous avons deux équations différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} U''(x) = -C^2 w^2 U(x) \\ T(t) = -w^2 T(t) \end{cases}$$

A partir de la 2^{ième} équation la solution de la forme suivante :

$$U(x) = a \sin cw.x + b \cos cw.x \quad (5.6)$$

On utilisons les conditions initiales :

$$\begin{aligned} U_0 &= U(0) = b \\ N_0 &= N(0) = EA \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{x=0} = EACw.a \end{aligned}$$

On substituant les valeurs de a et b dans l'équation (5.6) on obtient :

$$\begin{aligned} U(x) &= U_0 \cos.cw.x + \frac{1}{cw} \frac{1}{EA} N_0 \sin.cw.x \\ N(x) &= EA \frac{\partial U}{\partial x} = -U_0 cwEA. \sin.cw.x + N_0 \cos.cw.x \end{aligned}$$

L'équation générale devienne sous forme matricielle comme suite :

$$\begin{bmatrix} U(x) \\ N(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos.cw.x & \frac{1}{cw} \frac{1}{EA} \sin.cw.x \\ -cwEA \sin.cw.x & \cos.cw.x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ N_0 \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

V.7 Vibration longitudinale d'une barre

V.7.1 Equation de mouvement

V.7.1.1 Vibration libre

D'après la loi de Hooke, la force et le déplacement sont reliés par l'équation de l'équilibre suivante :

$$\begin{aligned} \text{soit} \quad \frac{dN}{dx} &= rA \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial U}{\partial x} \right) &= \frac{rA}{E} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \end{aligned}$$

L'énergie potentielle :

$$g = \frac{1}{2} \int_{\Omega} se . d\Omega = \frac{1}{2} \int_0^l EA \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dx \quad (5.8)$$

L'énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} r \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)^2 d\Omega = \frac{1}{2} \int_0^l rA \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)^2 dx \quad (5.9)$$

Les conditions aux limites sont :

- déplacement imposé nul aux extrémités :

$$U(0, t) = 0 \quad U(l, t) = 0$$

- effort imposé nul aux extrémités :

$$\frac{\partial U}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial x}(l, t) = 0$$

On effectue une séparation des variables :

$$U(x) = M(x).T(x)$$

L'équilibre devient :

On a égalité de deux fonctions de variables indépendantes, les deux fonctions sont donc égales à une constante, cette constante est choisie négative pour assurer la stabilité de la solution en temps [12].

$$\frac{1}{M} \frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{1}{C^2} \frac{d^2 T}{dt^2} = -\frac{w^2}{C^2}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \frac{d^2 M}{dx^2} + \left(\frac{w}{C}\right)^2 M = 0 \\ \frac{d^2 T}{dt^2} + w^2 T = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} M(x) = A \sin \frac{wx}{c} + B \cos \frac{wx}{c} \\ T(t) = C \sin wt + D \cos wt \end{cases}$$

Les constantes A, B, C et D sont calculées à partir des conditions initiales et des conditions aux limites.

La vibration linéaire de l'élément barre décrite par un système d'équation différentielle ordinaire de la forme suivante :

$$MX'' + KX = F(t)$$

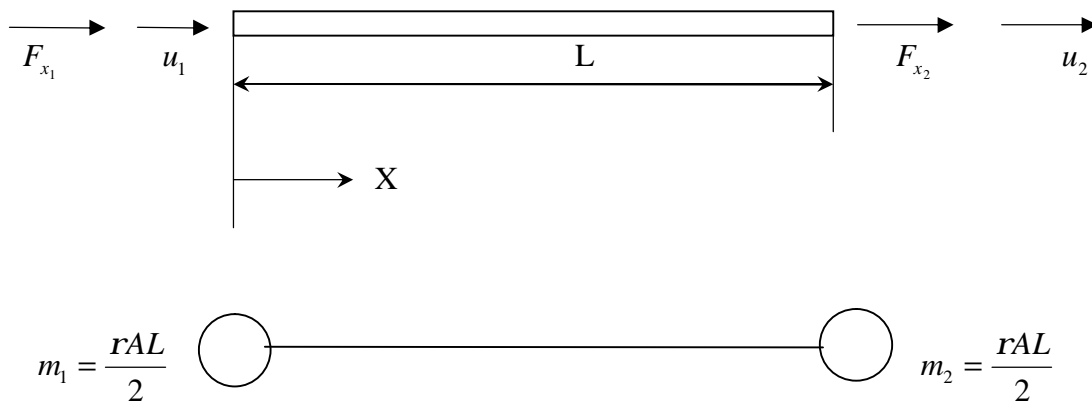


Fig.V.3 : Force axial pour un élément barre avec des masses suspendues aux extrémités

La figure (5.3) montre un élément barre de longueur \$L\$, de module d'élasticité \$E\$, de section \$A\$ et de masse volumique \$r\$.

La plus simple façon de prendre en considération l'effet de la force d'inertie est de diviser la masse totale \$rAL\$ (un demi de cette masse aux deux extrémités) [3].

Donc l'équation forces – déplacements d'un élément barre devienne comme suite

$$\begin{Bmatrix} F_{x_1} - \frac{rAL}{2} \\ F_{x_2} - \frac{rAL}{2} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{5.10}$$

Le signe (-) montre que les forces d'inerties réagissent dans un sens opposé à la direction des forces d'élasticité F_{x_1} et F_{x_2} [3]

Ou bien sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} F_{x_1} \\ F_{x_2} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \frac{rAL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

Le déplacement est sinusoïdal de la forme :

$$u = a \sin \omega t \quad (5.12)$$

On substituant l'équation (5.12) dans l'équation (5.11) on obtient :

$$\begin{Bmatrix} F_{x_1} \\ F_{x_2} \end{Bmatrix} = \left[\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{rAL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

V.8 Détermination de la matrice masse :

L'équation de mouvement peut être obtenue par l'utilisation de l'équation de LAGRANGE

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial g}{\partial q_i} = F_i \quad (5.14)$$

tel que :

$$T = \frac{m_i \dot{q}_i^2}{2} \quad (5.15)$$

En remplaçant T dans l'équation (5.14) et en supposant l'absence de l'énergie potentielle U on obtient :

$$m_i \ddot{q}_i = F_i \quad (5.16)$$

Se qui traduit exactement la première loi de NEWTON [3]. On substituant l'équation de déplacement (3.2) pour un élément barre dans l'équation de l'énergie potentielle (5.8) et dans l'équation de l'énergie cinétique (5.9), et en calculant les forces à partir de l'équation (5.14) on obtient :

$$\begin{aligned}
 F_{x_1} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_1} \right) + \frac{\partial g}{\partial u_1} \\
 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{rA}{2} \int_0^l 2 \{u(x)\} \frac{\partial}{\partial \dot{u}_1} \{u(x)\} dx + \frac{EA}{2} \int_0^l \{u'(x)\} \frac{\partial}{\partial \dot{u}_1} \{u'(x)\} dx \right) \\
 &= \frac{d}{dt} (rA) \int_0^l \{f_1(x)u_1 + f_2(x)u_2\} \{f_1(x)\} dx + EA \int_0^l \{f_1'(x)u_1 + f_2'(x)u_2\} \{f_1'(x)\} dx \\
 &= \begin{bmatrix} rA \int_0^l f_1(x) f_1(x) dx & rA \int_0^l f_1(x) f_2(x) dx \\ rA \int_0^l f_1(x) f_2(x) dx & rA \int_0^l f_2(x) f_2(x) dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} EA \int_0^l f_1'(x) f_1'(x) dx & EA \int_0^l f_1'(x) f_2'(x) dx \\ EA \int_0^l f_1'(x) f_2'(x) dx & EA \int_0^l f_2'(x) f_2'(x) dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \\
 &= [m_{11} \quad m_{12}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + [k_{11} \quad k_{12}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

De la même manière on calcul $F_{x_2} = [m_{21} \quad m_{22}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + [k_{21} \quad k_{22}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$ (5.17)

Ou sous forme générale : $m_{ij} = rA \int_0^l f_i(x) f_j(x) dx$ (5.18)

$$k_{ij} = EA \int_0^l f_i'(x) f_j'(x) dx$$
 (5.19)

La matrice de rigidité et la matrice masse pour un élément barre peuvent directement être obtenues par la substitution des équations de formes dans les équations (5.18) et (5.19) respectivement puis on procède à l'intégration.

Les équations de mouvement résultantes sont de la forme :

V.9 Vibration de flexion d'un élément poutre

Nous étudions les vibrations planes, parallèlement au plan (xoy) avec ox suivant la ligne moyenne de la poutre.

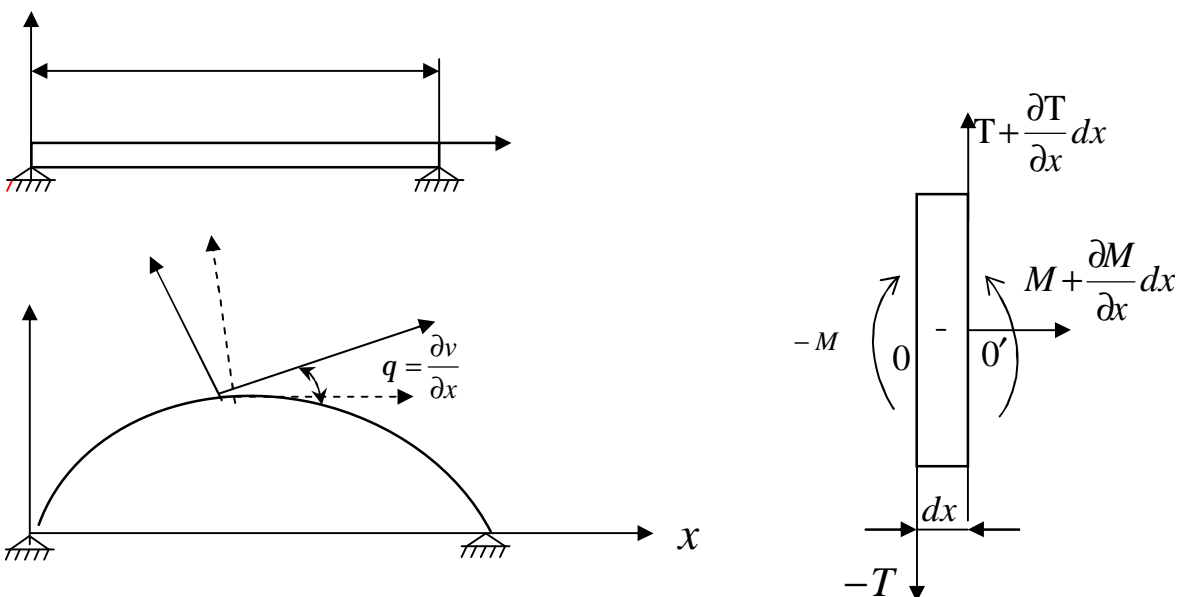


Fig.V.4 Vibration de flexion d'un élément poutre

Tel que les notations suivantes :

$v(x,t)$: Flèche de la section A d'abscisse x à l'instant t

$q = \frac{\partial v}{\partial x}$: Angle de A par rapport à oy

EI : Rigidité de flexion dans le plan (xoy)

$T = T_y(x,t)$: Effort tranchant

$M = M_z(x,t)$: Moment fléchissant

r : Masse volumique du matériau

$I = Ai_x^2$: Moment quadratique de flexion de A et i_x (rayon d'inertie)

Les équations d'équilibre d'une tranche A – A', d'épaisseur dx , s'écrivent comme suite :

- pour les forces parallèles à oy :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = rA \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (5.20)$$

- pour les moments autour de oz :

$$T + \frac{\partial M}{\partial x} = r.I \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$$

La loi de comportement en flexion

$$M = EI \cdot \frac{dq}{dx} = EI \cdot \frac{d^2 V}{dx^2} \quad \text{Avec} \quad q = \frac{dV}{dx}$$

$$\frac{M}{EI} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

On peut écrire l'équation de mouvement (4.8) sous la forme suivante :

$$rA \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} = r.I \frac{\partial^4 V}{\partial x^2 \partial t^2} \quad (5.21)$$

On peut résoudre cette équation analytiquement, tel que le couple inertiel $\left(- rI \cdot dx \cdot \frac{\partial^4 V}{\partial x^2 \partial t^2} \right)$ est

négligeable devant le couple $\left(T + \frac{\partial M}{\partial x} \right) dx$, l'équation s'écrit alors :

$$rA \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} = 0 \quad (5.22)$$

La forme de flexion comme suite :

$$V(x,t) = f(x).g(t) \tag{5.23}$$

En posant l'équation (5.11) dans l'équation (5.10) on obtient :

$$\frac{\cancel{g}}{g} = -\frac{EI}{rA} \frac{f^{(4)}}{f} = -w^2 \tag{5.24}$$

On peut écrire aussi :

$$V^{(4)} - \left(\frac{l}{l}\right)^4 V = 0 \quad \text{Avec} \quad I^4 = rA \cdot \frac{w^2 l^4}{EI}$$

Alors

$$\begin{cases} g(t) = a \cos wt + b \sin wt \\ V(x) = a \cdot \cosh \frac{l}{l} x + b \cdot \sinh \frac{l}{l} x + c \cdot \cos \frac{l}{l} x + d \cdot \sin \frac{l}{l} x \end{cases}$$

Les constantes a, b, c et d se déterminent au moyen des conditions aux limites.

$$\forall \text{ Le temps } t \begin{cases} - \text{pour } x = 0 & V(0) = V_0 = 0 \text{ et } M(0) = M_0 = 0 \\ - \text{pour } x = l & V(l) = 0 \text{ et } q(0) = q_0 \text{ et } M(l) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = V'(x) \\ M(x) = -EI.V''(x) \\ T(x) = -EI.V'''(x) \end{cases}$$

$$V(x) = a \cdot \cosh \frac{l}{l} x + b \cdot \sinh \frac{l}{l} x + c \cdot \cos \frac{l}{l} x + d \cdot \sin \frac{l}{l} x$$

$$q(x) = -a \frac{l}{l} \sinh \frac{l}{l} x + b \frac{l}{l} \cosh \frac{l}{l} x - c \frac{l}{l} \sin \frac{l}{l} x + d \frac{l}{l} \cos \frac{l}{l} x$$

$$M(x) = EI \frac{l^2}{l^2} \left(a \cdot \cosh \frac{l}{l} x + b \cdot \sinh \frac{l}{l} x + c \cdot \cos \frac{l}{l} x + d \sin \frac{l}{l} x \right)$$

$$T(x) = -EI \frac{l^3}{l^3} \left(a \cdot \sinh \frac{l}{l} x - b \cdot \cosh \frac{l}{l} x + c \cdot \sin \frac{l}{l} x - d \cdot \cos \frac{l}{l} x \right)$$

Ou sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} V(0) \\ q(0) \\ M(0) \\ T(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{l}{l} & 0 & \frac{l}{l} \\ EI \frac{l^2}{l^2} & 0 & EI \frac{l^2}{l^2} & 0 \\ 0 & EI \frac{l^3}{l^3} & 0 & EI \frac{l^3}{l^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} \tag{5.25}$$

On peut tirer les constantes a, b, c et d tel que :

$$a = b = c = 0$$

$$\sin\left(\sqrt[4]{\frac{r.s.w^2}{EI}}.l\right) = 0$$

Donc

$$\sqrt[4]{\frac{r.s.w^2}{EI}}.l = p.n$$

La pulsation w est l'un des nombres de la suite :

$$w_n = n^2 \frac{p^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{r.s}}$$

On peut alors prendre $d = 1$ et écrire la solution harmonique de rang n

$$V_n(x, t) = \sin np \frac{x}{l} (a_n \cos wt + b \sin wt)$$

Et la solution générale s'écrit comme suite :

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x, t)$$

Les constantes a_n et b_n se déterminent au moyen des conditions initiales (de Cauchy) c'est-à-dire à partir des fonctions $j(x)$ et $y(x)$.

$$\begin{cases} j(x) = V(x, 0) \\ y(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{t=0} \end{cases}$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l j(x) \cdot \sin \frac{np}{l} x \cdot dx$$

On a alors

$$b_n = \frac{2}{w_n l} \int_0^l y(x) \cdot \sin \frac{np}{l} x \cdot dx$$

L'énergie cinétique d'un élément poutre en vibration de flexion est :

$$T = \frac{rA}{2} \int_0^l \dot{v}(x)^2 dx \quad (5.26)$$

et l'expression de l'énergie potentielle d'un élément poutre est :

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^l v''(x)^2 dx \quad (5.27)$$

Où $v''(x)$ indique la dérivée seconde par rapport à x

En remplaçant la fonction de déplacement (3.28) dans l'expression (5.26) et dans l'expression (5.27), et on dérivant par la méthode de LAGRANGE (5.14), on obtient :

$$[m]\{\ddot{q}\} + [k]\{q\} = \{F(t)\} \tag{5.28}$$

Où les masses et les termes de rigidité sont obtenus de même manière que celles des équations (5.18) et (5.19) respectivement :

$$m_{ij} = rA \int_0^L f_i(x) f_j(x) dx$$

$$k_{ij} = EI \int_0^L f_i''(x) f_j''(x) dx \tag{5.29}$$

Les équations de mouvement résultantes sont de la forme explicite suivante :

$$\begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_1 \\ F_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & -\frac{6}{L} & 2 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 & -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ q_1 \\ v_2 \\ q_2 \end{Bmatrix} + \frac{rAL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \tag{5.30}$$

V.10 Détermination des modes propres

L'équation de mouvement pour une vibration libre d'une poutre est

$$[m]\{\ddot{q}\} + [k]\{q\} = 0 \tag{5.31}$$

Le déplacement est sinusoïdal de la forme :

$$q(x) = a \sin wt \tag{5.32}$$

On substituant l'équation (5.32) dans l'équation (5.31) on obtient :

$$[[k] - w^2[m]]q(x) = \{0\} \tag{5.33}$$

Pré multiplions cette équation (5.33) par $[m]^{-1}$

$$[[k][m]^{-1} - w^2][m][m]^{-1}q(x) = 0 \tag{5.34}$$

On appelle noyau du système le produit

$$[A] = [k][m]^{-1}$$

On recherche donc, pour le vecteur de déplacement, une solution du type

$$q(t) = Q \cos(\omega t - j)$$

Il vient, par introduction dans (5.34)

$$[[A] - \omega^2 [I]]Q \cos(\omega t - j) = 0$$

En adoptant la convention d'écriture

$$I = \omega^2$$

On obtient, après simplification par $\cos(\omega t - j)$

$$[[A] - I [I]]Q = 0$$

Il s'agit d'un système d'équations homogènes qui n'admet de solutions non toutes nulles si son déterminant est nul

$$|[A] - I [I]| = 0 \tag{5.35}$$

Après développement

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - I) & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - I) & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & (a_{nn} - I) \end{vmatrix} = 0 \tag{5.36}$$

Les scalaires $I = \omega^2$ sont ainsi les valeurs propres de la matrice noyau $[A]$. Et cette équation appelée équation aux pulsations propres du système oscillant, ou l'équation caractéristique, est de la forme

$$I^n + a_1 I^{n-1} + a_2 I^{n-2} + \dots + a_{n-1} I + a_n = 0 \tag{5.37}$$

En classant ces solutions par ordre croissant on peut écrire

$$I_1 < I_2 < \dots < I_p < \dots < I_n$$

Soit, en revenant aux pulsations propres

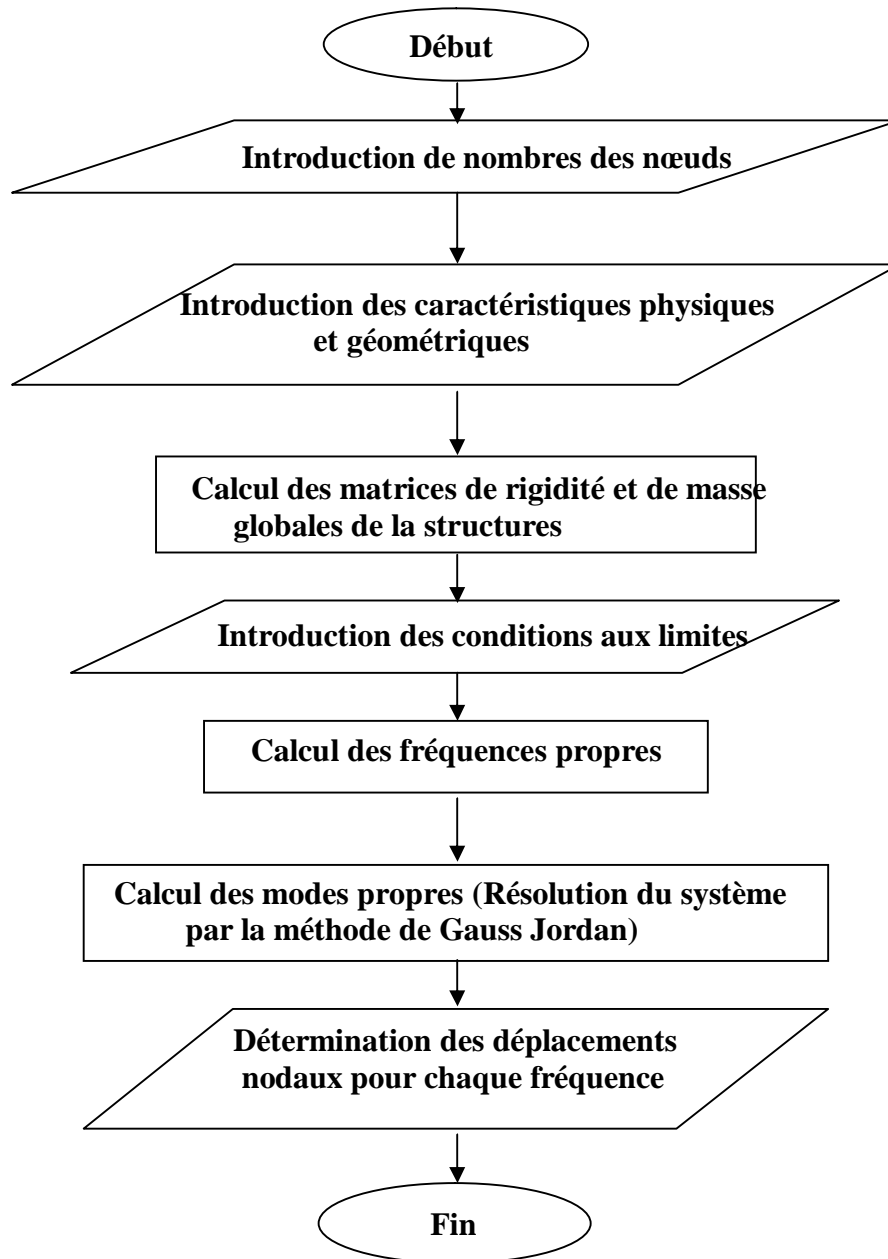
$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_p < \dots < \omega_n$$

A chaque des pulsations propres ω_p correspond une solution particulière du système différentiel

$$q_p = Q_p \cos(\omega_p t - j) \tag{5.38}$$

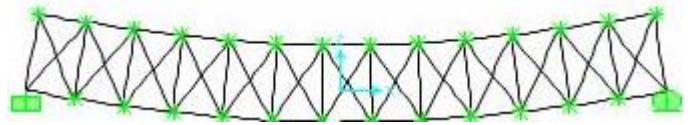
Le vecteur $q_p(t)$ représente le mouvement du système lié à la pulsation propre ω_p , on l'appelle mode propre de rang p . Le vecteur $Q_p(t)$ donne les amplitudes de $q_p(t)$, on l'appelle forme de rang p . [30]

Organigramme du programme

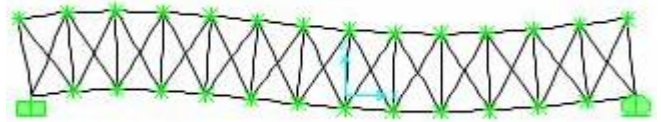


V.10 Les modes de vibration

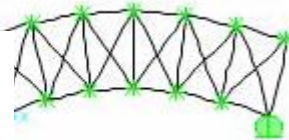
$1,706905 \text{ E}+03 \omega_1^2 = \text{Fréquence}$
 $= 0,152081 T_1 \text{ Période}$



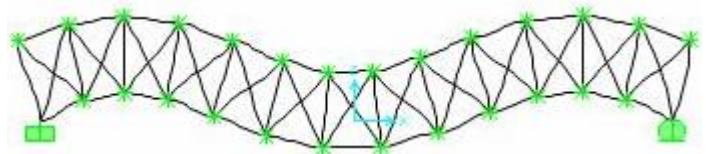
$9,775739 \text{ E}+03 \omega_2^2 = \text{Fréquence}$
 $= 0,063548 T_2 \text{ Période}$



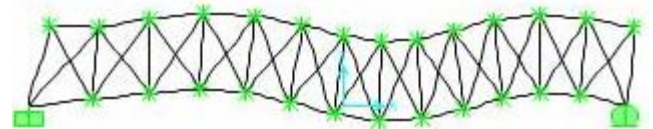
$2,217738 \text{ E}+04 \omega_3^2 = \text{Fréquence}$
 $= 0,042191 T_3 \text{ Période}$



$6,903070 \text{ E}+04 \omega_4^2 = \text{Fréquence}$
 $= 0,023914 T_4 \text{ Période}$



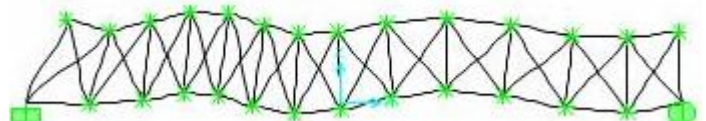
$9,995410 \text{ E}+04 \omega_5^2 = \text{Fréquence}$
 $= 0,019874 T_5 \text{ Période}$



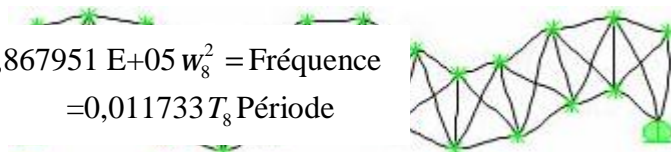
$1,631277 \text{ E}+05 \omega_6^2 = \text{Fréquence}$
 $= 0,015557 T_6 \text{ Période}$



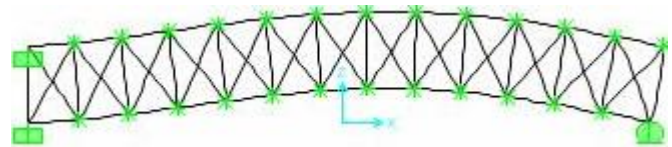
$2,529596 \text{ E}+05 \omega_7^2 = \text{Fréquence}$
 $= 0,012493 T_7 \text{ Période}$



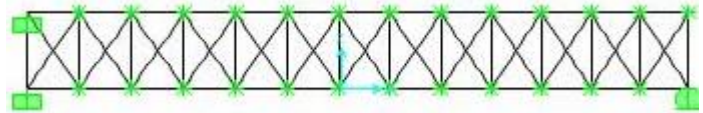
$2,867951 \text{ E}+05 \omega_8^2 = \text{Fréquence}$
 $= 0,011733 T_8 \text{ Période}$



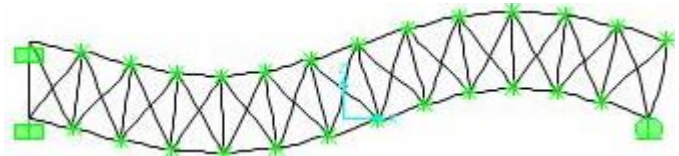
$3,658419 \text{ E}+03 \omega_1^2 = \text{Fréquence}$
 $= 0,103880 T_1 \text{ Période}$



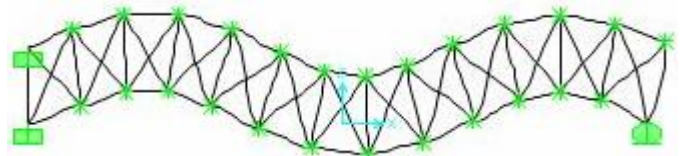
$1,320250 \text{ E}+04 \omega_2^2 = \text{Fréquence}$
 $= 0,054683 T_2 \text{ Période}$



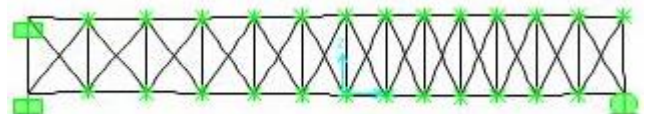
$2,672817 \text{ E}+04 \omega_3^2 = \text{Fréquence}$
 $= 0,038432 T_3 \text{ Période}$



$8,223311 \text{ E}+04 \omega_4^2 = \text{Fréquence}$
 $= 0,021911 T_4 \text{ Période}$



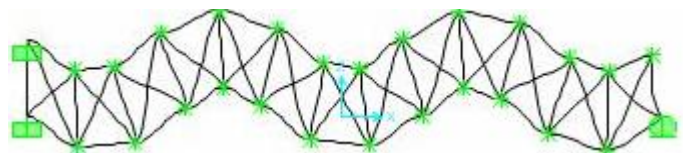
$1,173742 \text{ E}+05 \omega_5^2 = \text{Fréquence}$
 $= 0,018340 T_5 \text{ Période}$



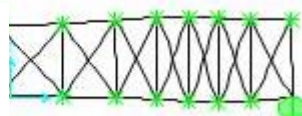
$1,735477 \text{ E}+05 \omega_6^2 = \text{Fréquence}$
 $= 0,015082 T_6 \text{ Période}$



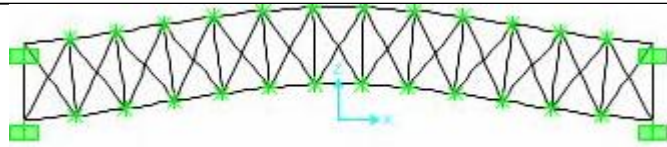
$2,972118 \text{ E}+05 \omega_7^2 = \text{Fréquence}$
 $= 0,011552 T_7 \text{ Période}$



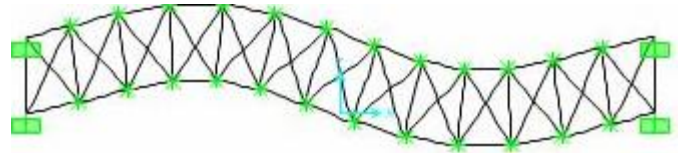
$3,178641 \text{ E}+05 \omega_8^2 = \text{Fréquence}$
 $= 0,011144 T_8 \text{ Période}$



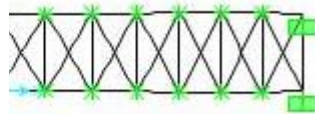
6,508523 E+03 w_1^2 = Fréquence
 = 0,077882 T_1 Période



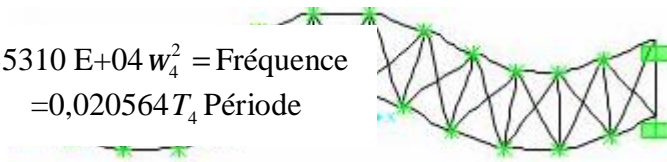
3,402269 E+04 w_2^2 = Fréquence
 = 0,034064 T_2 Période



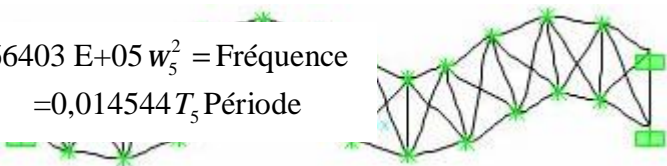
5,365914 E+04 w_3^2 = Fréquence
 = 0,027124 T_3 Période



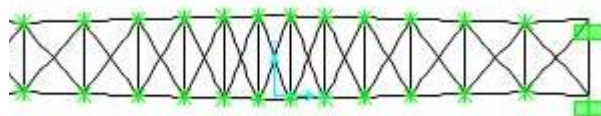
9,335310 E+04 w_4^2 = Fréquence
 = 0,020564 T_4 Période



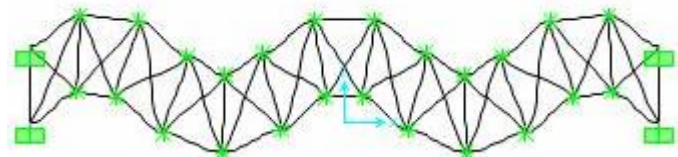
1,866403 E+05 w_5^2 = Fréquence
 = 0,014544 T_5 Période



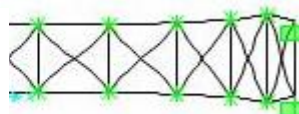
2,106835 E+05 w_6^2 = Fréquence
 = 0,013689 T_6 Période



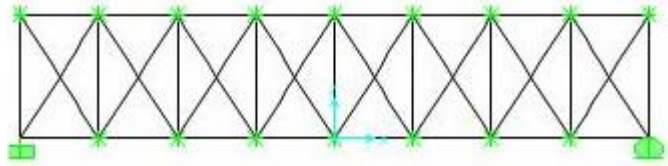
3,120120 E+05 w_7^2 = Fréquence
 = 0,011248 T_7 Période



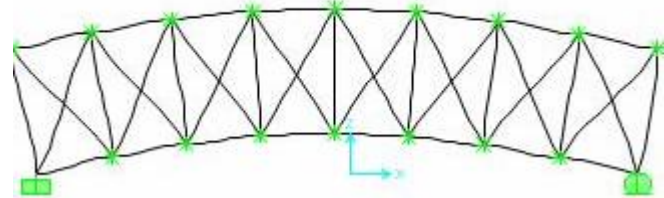
4,587392 E+05 w_8^2 = Fréquence
 = 0,009277 T_8 Période



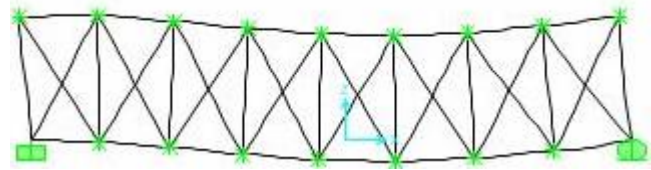
5,67764 E+02 w_1^2 = Fréquence
 $T_1 = 0,263691$ Période



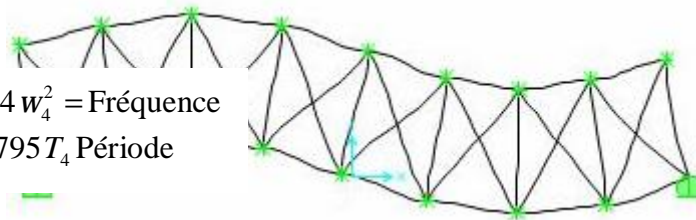
8,372982 E+03 w_2^2 = Fréquence
 $=0,068666T_2$ Période



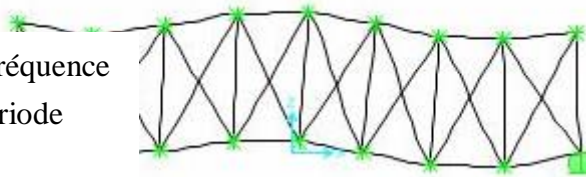
2,733959 E+04 w_3^2 = Fréquence
 $=0,038T_3$ Période



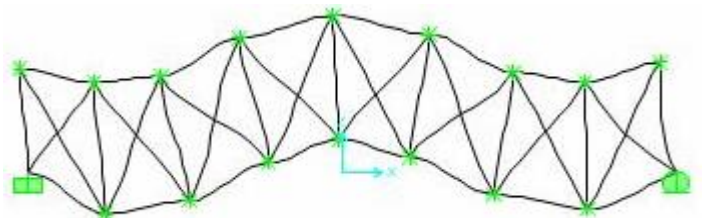
9,129707 E+04 w_4^2 = Fréquence
 $=0,020795T_4$ Période



2,119931 E+05 w_5^2 = Fréquence
 $=0,013646T_5$ Période

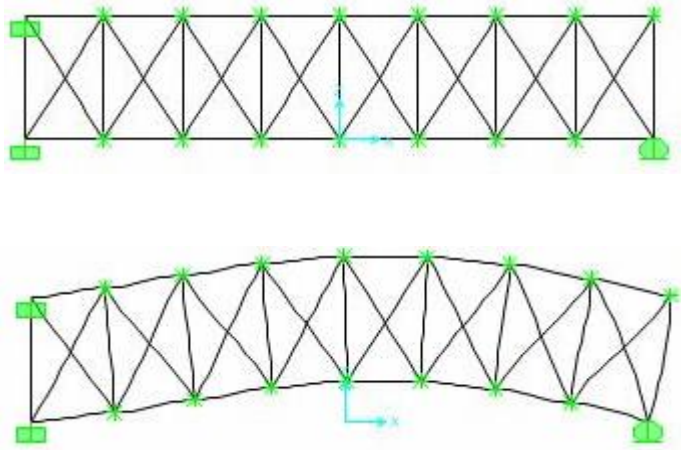


2,657338 E+05 w_6^2 = Fréquence
 $=0,012189T_6$ Période

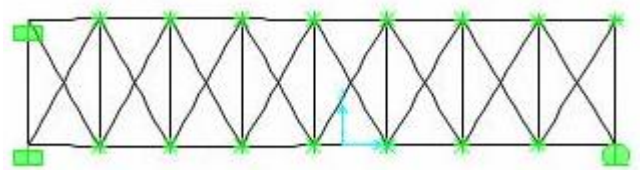


5,67764 E+02 w_1^2 = Fréquence
 $T_1 = 0,263691$ Période

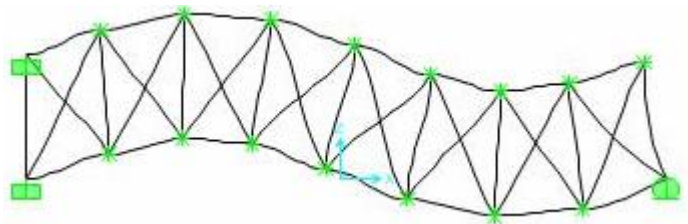
1,790634 E+04 w_2^2 = Fréquence
 =0,046954 T_2 Période



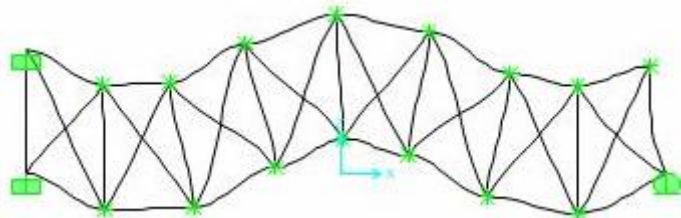
3,450430 E+04 w_3^2 = Fréquence
 =0,033825 T_3 Période



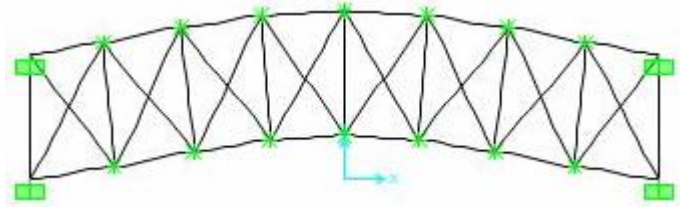
1,065857 E+05 w_4^2 = Fréquence
 =0,019246 T_4 Période



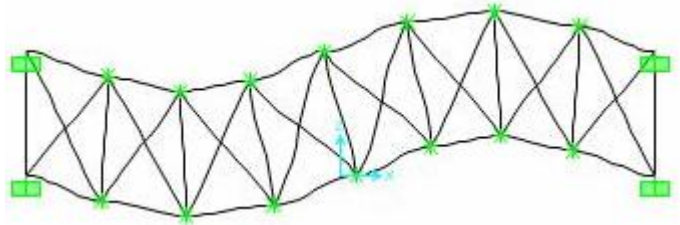
2,813679 E+05 w_5^2 = Fréquence
 =0,011845 T_5 Période



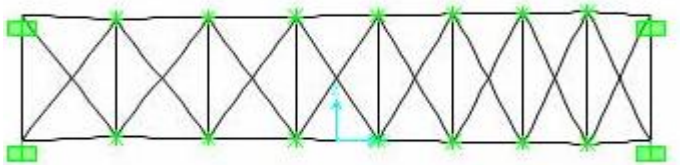
$2,905398 \text{ E}+04 \omega_1^2 = \text{Fréquence}$
 $T_1 = 0,036862 \text{ Période}$



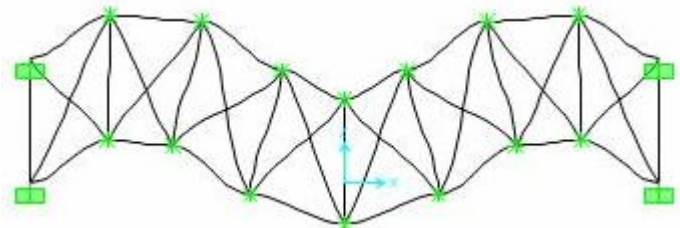
$1,242561 \text{ E}+05 \omega_2^2 = \text{Fréquence}$
 $= 0,17825 T_2 \text{ Période}$



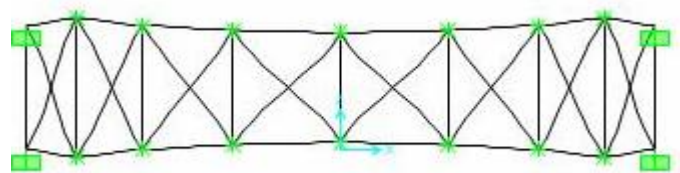
$1,409813 \text{ E}+05 \omega_3^2 = \text{Fréquence}$
 $= 0,016734 T_3 \text{ Période}$



$3,051221 \text{ E}+05 \omega_4^2 = \text{Fréquence}$
 $= 0,011375 T_4 \text{ Période}$



$5,354137 \text{ E}+05 \omega_5^2 = \text{Fréquence}$
 $= 0,008587 T_5 \text{ Période}$



$5,385230 \text{ E}+05 \omega_6^2 = \text{Fréquence}$
 $= 0,008562 T_6 \text{ Période}$

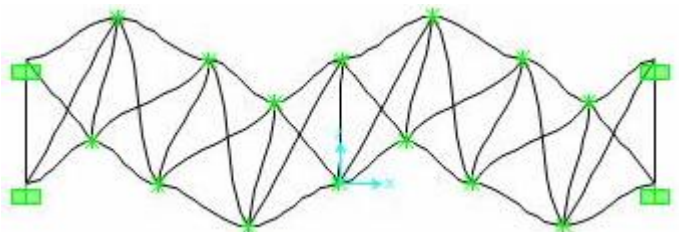


Tableau .5.1 les quatre premières fréquences de la première structure (élément poutre)

Structures	Fréquence de 1er mode (HZ)	Fréquence de 2ème mode (HZ)	Fréquence de 3ème mode (HZ)	Fréquence de 4ème mode (HZ)
(a)	23,83	91,51	165,36	302,19
(b)	170,47	352,54	375,52	552,45
(c)	23,83	133,83	185,77	326,51

Tableau 5.2
les quatre premières

fréquences de la première structure (élément barre)

Structures	Fréquence de 1er mode (HZ)	Fréquence de 2ème mode (HZ)	Fréquence de 3ème mode (HZ)	Fréquence de 4ème mode (HZ)
(a)	41,31	98,87	148,92	262,73
(b)	80,67	184,45	231,64	305,53
(c)	60,48	114,90	163,48	286,76

Discussion des résultats

Le programme de calcul à l'état dynamique donne les fréquences propres et les modes propres.

Pour les modes propres nous signalons que les basse fréquences du premier mode sont : pour l'exemple (a) est de 23.83HZ, l'exemple (b) est de 170.47HZ, et l'exemple (c) est de 23.83HZ. Il est à noter que la plus importante fréquence de vibration est celle de l'exemple (b) (encastrement des deux cotés). Ce qui veut dire que cette structure subit plus de vibration.

L'analyse d'une vibration libre par la méthode des éléments finis pour une structure en élément poutre a été effectuée par l'obtention des modes propres de la structure. Les résultats obtenus sous l'effet de changement des conditions aux limites par notre programme de calcul permettent de choisir la meilleure structure possible.

IV.1 Introduction

Tout d'abord, la plupart des problèmes simples ont été résolus, et on se trouve désormais confronté à des problèmes de plus en plus compliqués quand le nombre des éléments important. Le nombre réduit des nœuds implique l'utilisation de la méthode des éléments finis d'une manière simple et direct, par contre, si le nombre devient important l'application présente une certaine difficulté, ce qui nous oblige d'élaborer une méthode de travail, pour numériser le problème posé comme étape intermédiaire vers la solution rapprochée, par un programme en langage «PASCAL ».

Ce langage de programmation est utilisé suite à [16] :

- bien lire et comprendre l'énoncé du problème à résoudre
- bonne précision des résultats
- souplesse d'analyse du problème
- une puissance et une rapidité considérables
- une résolution numérique de plus en plus efficace

IV.2 Problème posé

Notre structure présente un nombre important des éléments (66 éléments pour la structure barre et 41 éléments pour la structure poutre), ce nombre pose la difficulté de trouver la matrice de rigidité globale, et chaque augmentation de nombre des éléments en proche a l'impossibilité de trouver la solution analytiquement, qui ce exige la numérisation du problème vers la solution la plus parfaite possible.

IV.3 L'identification des charges

Les charges appliquées peuvent être concentrées ou réparties, ces derniers se décomposent suivant à une formule mathématique, tel que le travail équivalent effectuée par les charges concentrées aux nœuds égal au travail produit par la charge répartie.

Si on considère un élément poutre, le travail effectuée pour les charges concentrées aux nœuds est de la forme suivante :

$$w = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} F_{y_1} & M_1 & F_{y_2} & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ q_1 \\ v_2 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

Et d'autre part, le travail effectuée par la charge répartie est obtenue comme suite :

$$w = \frac{1}{2} \int_0^l p(x).v(x).dx \quad (4.2)$$

On substituant la fonction de déplacement (3.28) dans l'équation (4.2) on obtient :

$$F_{y_1} = \int_0^l p(x).f_1(x).dx$$

$$M_1 = \int_0^l p(x).f_2(x).dx$$

$$F_{y_2} = \int_0^l p(x).f_3(x).dx$$

$$M_2 = \int_0^l p(x).f_4(x).dx$$

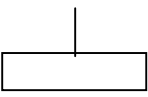
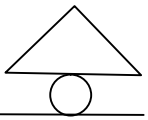
Ou bien sous forme générale :

$$F_i = \int_0^l p(x).f_i(x).dx \quad (4.3)$$

De notre travail les charges sont concentrées aux nœuds, le programme permet le changement d'application de ces chargements, dont le choix a été fait pour élément poutre sous forme symétrique pour avoir des résultats symétriques (pour vérifier la symétrie des déplacements, réactions et les efforts axiaux), et pour l'élément barre comme la forme donnée à fin de valider les résultats obtenus par le programme ceux du logiciel « SAP 2000 ».

IV.4 Conditions aux limites

Notre travail consiste de faire une variation des conditions aux limites pour une même structure pour élément barre ou poutre de but d'établir les meilleurs choix aux conditions qui minimisent les contraintes dans les éléments.

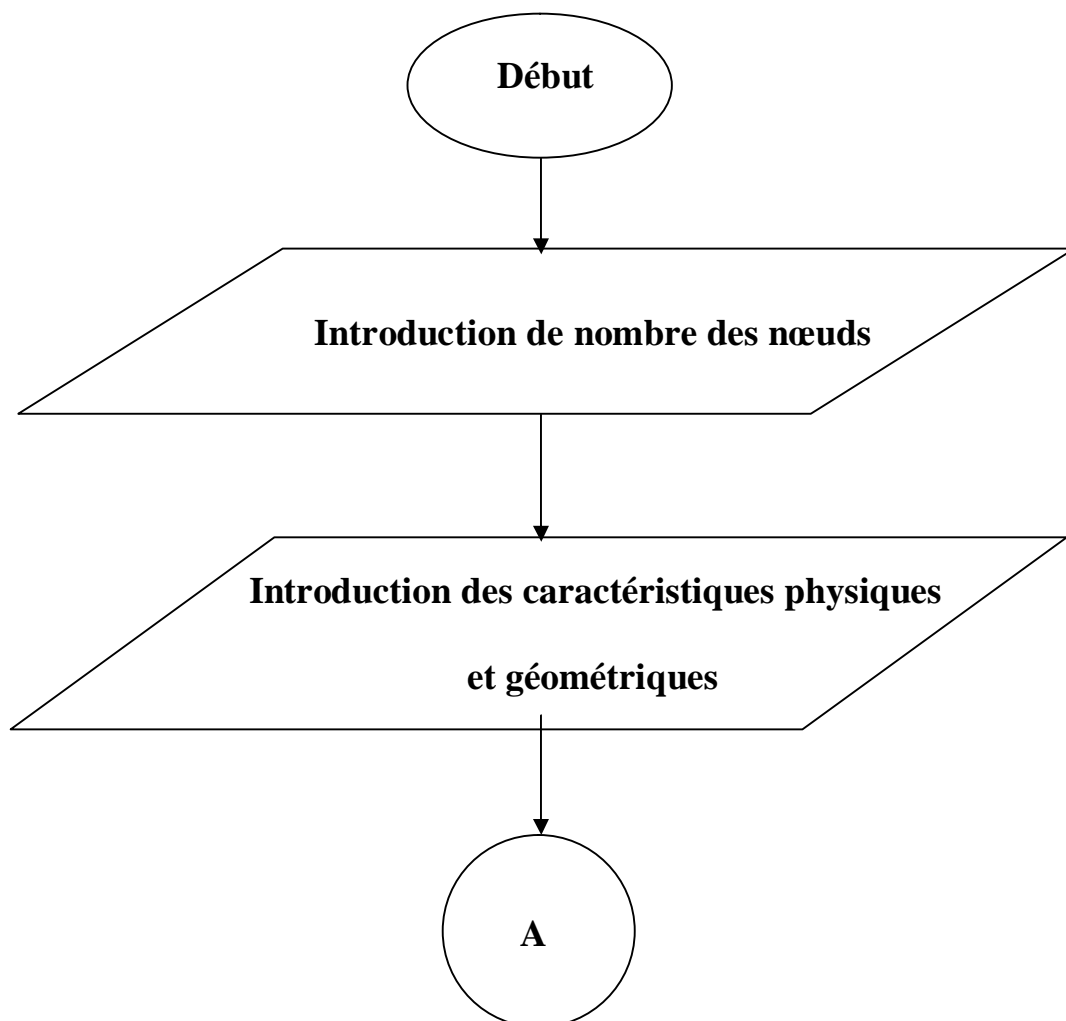
	Translation suivant X	Translation suivant Y	Rotation
	Nul	Nul	Nul
	Existe	Nul	Existe

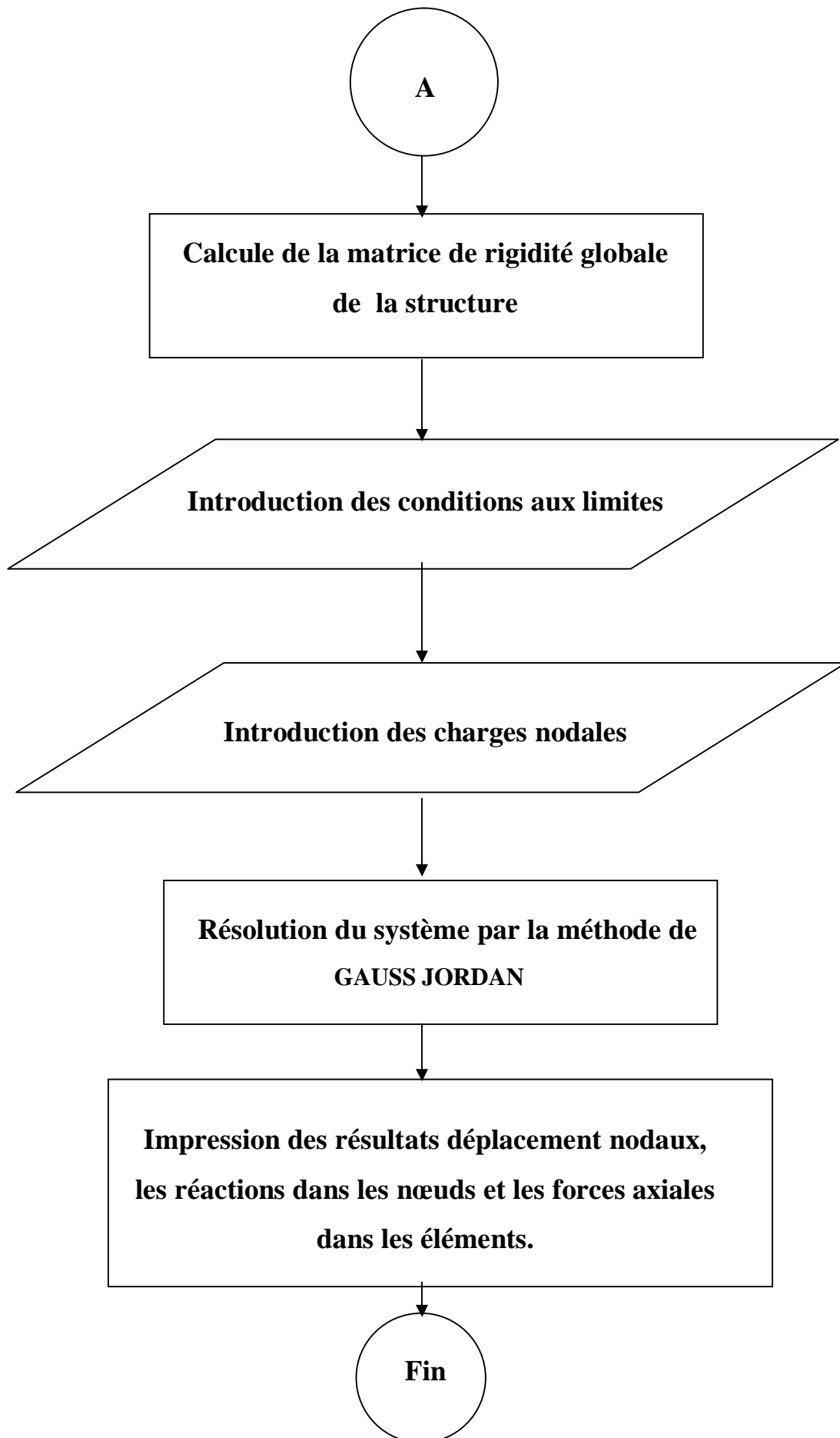
IV.5 définitions des paramètres

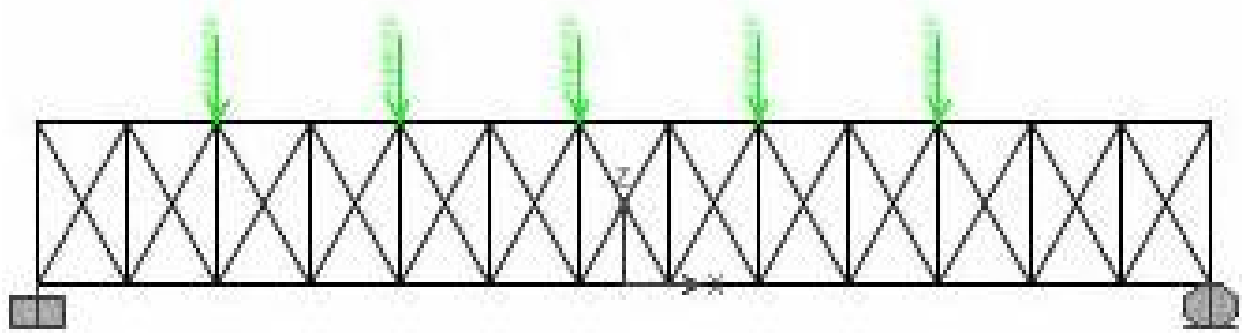
La structure métallique plane simplement supportée à ces extrémités, ces caractéristiques géométriques de section carrée $S = 0.0244m^2$, de longueur treillis $L = 2.85m$ et de hauteur $H = 4.5m$, les propriétés mécaniques du matériau sont données par module de «YOUNG» $E = 200.10^9 N/m^2$ et de densité $r = 7849.04 Kg.m^3$

IV.6 Organigramme du programme

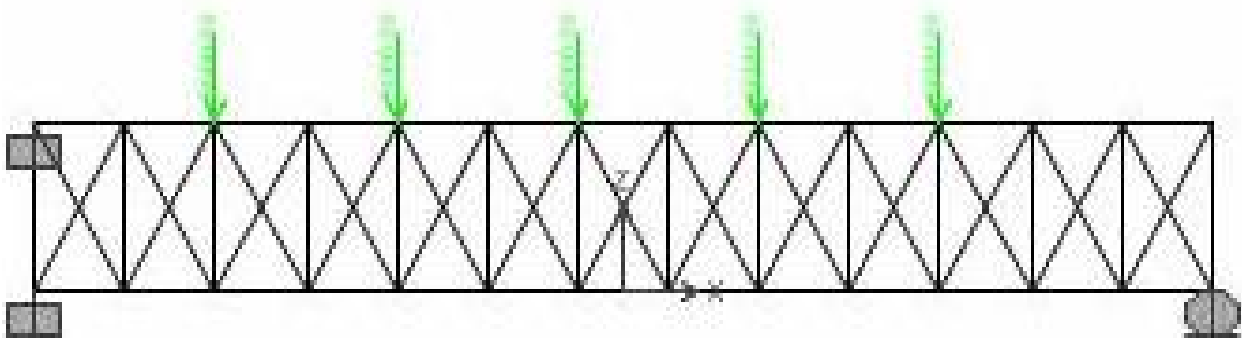
Pour mieux comprendre les différentes étapes de fonctionnement de ce programme, la Figure suivante montre l'organigramme de ce programme.



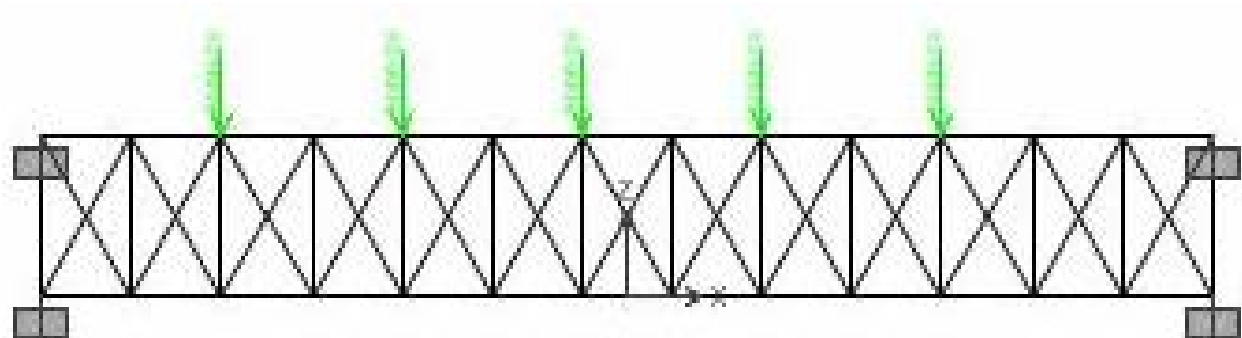




a - Structure 1 élément barre (premier cas de conditions aux limites)

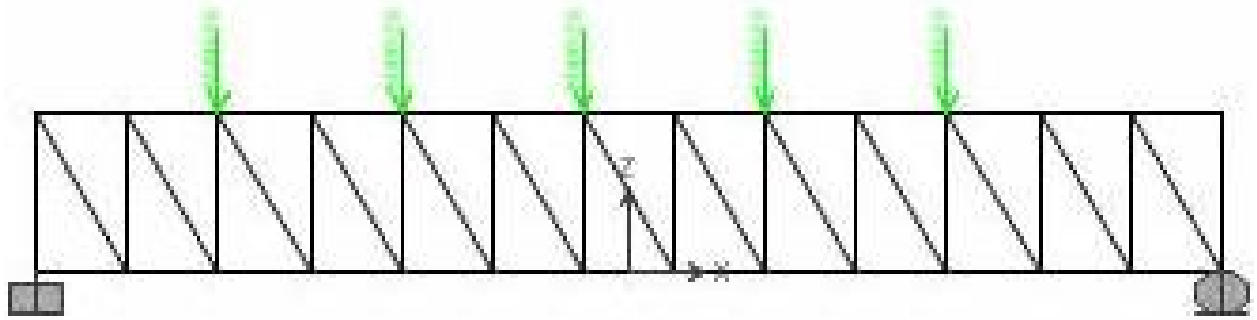


b - Structure 1 élément barre (deuxième cas de conditions aux limites)

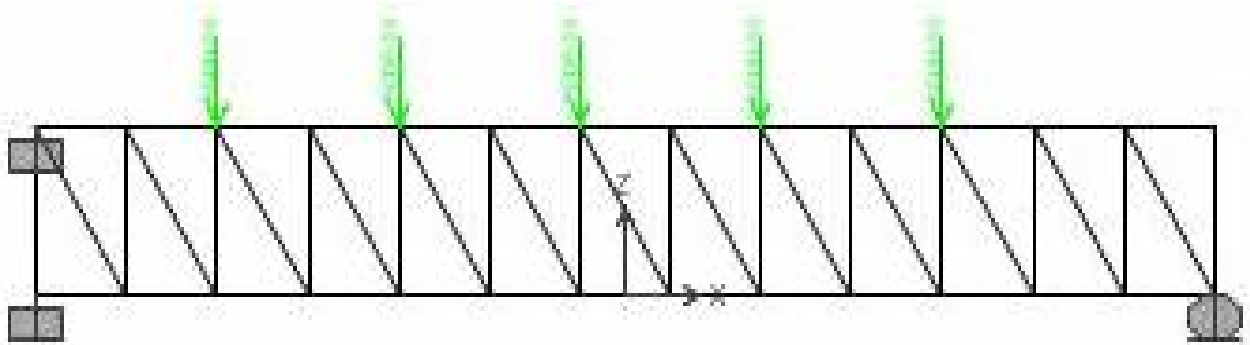


c - Structure 1 élément barre (troisième cas de conditions aux limites)

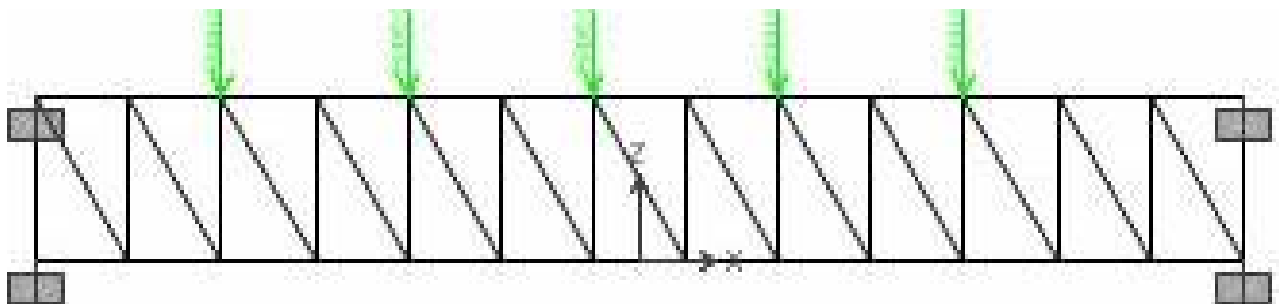
Fig. 4.1 : Structure N°1 (élément barre)



a - Structure 2 élément barre (premier cas de conditions aux limites)

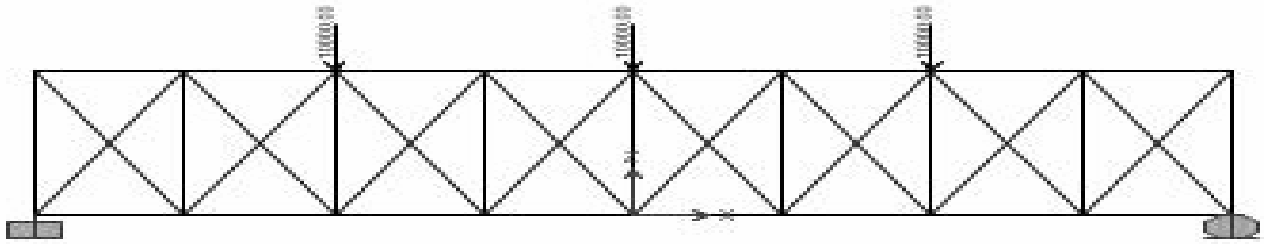


b - Structure 2 élément barre (deuxième cas de conditions aux limites)

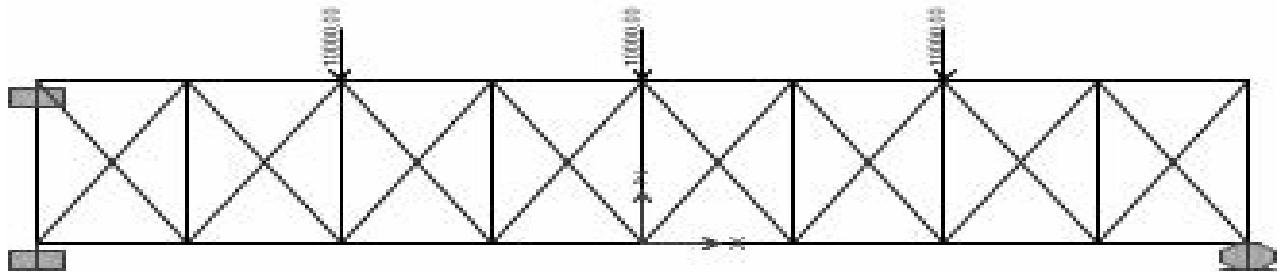


c - Structure 2 élément barre (troisième cas de conditions aux limites)

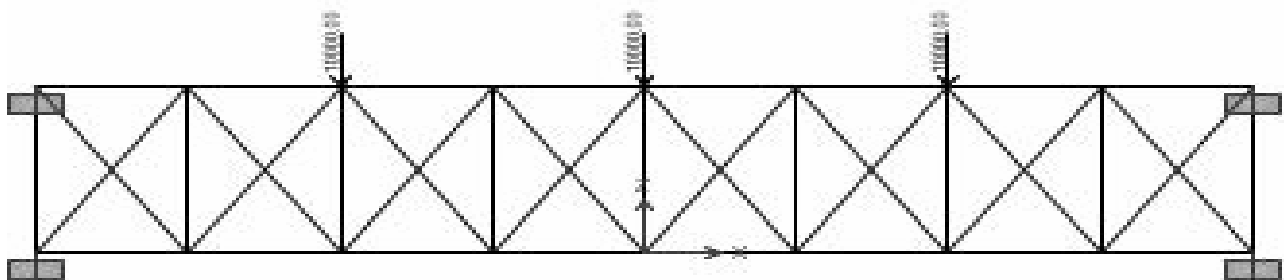
Fig.4.2 : Structure №2 (élément barre)



a - Structure 1 élément poutre (premier cas de conditions aux limites)

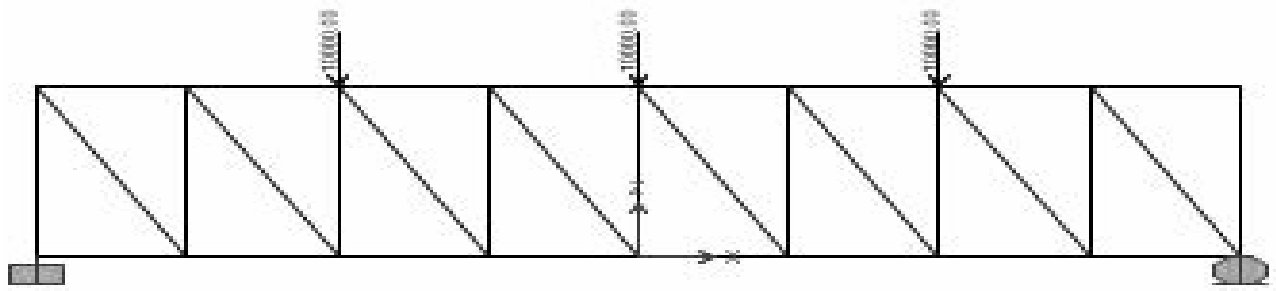


b - Structure 1 élément poutre (deuxième cas de conditions aux limites)

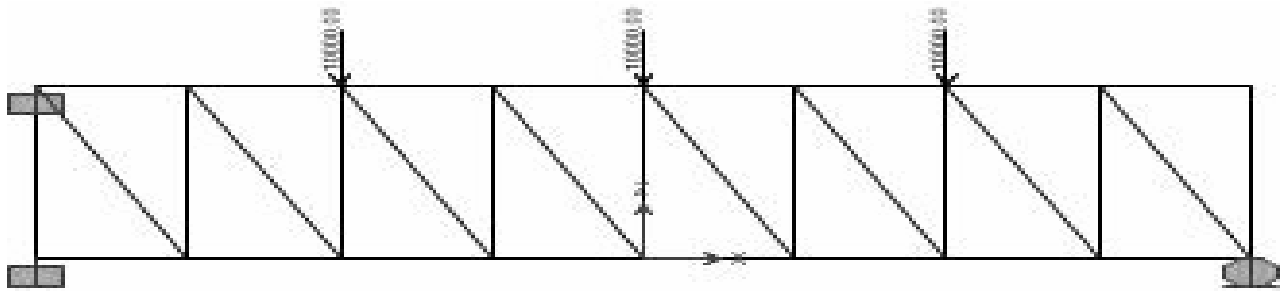


c - Structure 1 élément poutre (troisième cas de conditions aux limites)

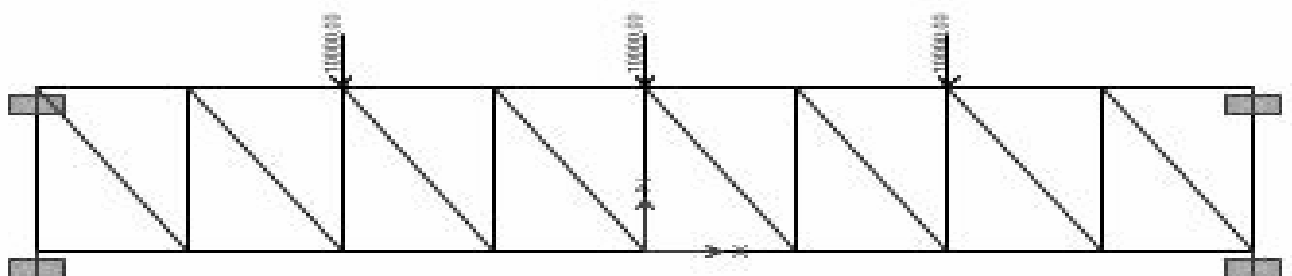
Fig45.3 :Structure N°1 (élément poutre)



a - Structure 2 élément poutre (premier cas de conditions aux limites)



b - Structure 2 élément poutre (deuxième cas de conditions aux limites)



c - Structure 2 élément poutre (troisième cas de conditions aux limites)

Fig.4.4 : Structure №2 (élément poutre)

IV.8 COMPARAISONS DES DEPLACEMENTS.

Noeuds	Déplacements	Pro Sap 2000		Pro Développé		% Erreur	
		Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2
1	u_1	0	0	0	0	0 %	0 %
	v_1	0	0	0	0	0 %	0 %
2	u_2	0,001572	0,001536	0,001592	0,001565	1,25 %	1,85 %
	v_2	-0,000051	-0,00012	-0,000051	-0,000012	0 %	0 %
3	u_3	0,000029	-3,76 E -7	0,000029	1,17E -15	0 %	0 %
	v_3	-0,001113	-0,001292	-0,001127	-0,001321	1,24 %	2,19 %
4	u_4	0,001552	0,001488	0,001572	0,001515	1,27 %	1,78 %
	v_4	-0,001101	-0,001414	-0,001115	-0,001445	1,25 %	2,14 %
5	u_5	0,000103	0,000048	0,000104	0,000049	0,96 %	2,04 %
	v_5	-0,002117	-0,002529	-0,002145	-0,002579	1,3 %	1,93 %
6	u_6	0,001479	0,001391	0,001498	0,001415	1,26 %	1,69 %
	v_6	-0,002135	-0,00265	-0,002163	-0,002703	1,29 %	1,96 %
7	u_7	0,000218	0,000145	0,000220	0,000149	0,90 %	2,68 %
	v_7	-0,002992	-0,003566	-0,003032	-0,003635	1,31 %	1,89 %
8	u_8	0,001366	0,001263	0,001384	0,001285	1,30 %	1,71 %
	v_8	-0,002987	-0,003643	-0,003026	-0,003713	1,28 %	1,88 %
9	u_9	0,000364	0,000274	0,000368	0,000280	1,08 %	2,14 %
	v_9	-0,00368	-0,004396	-0,00372	-0,004479	1,07 %	1,85 %
10	u_{10}	0,001223	0,001103	0,001238	0,001122	1,21 %	1,69 %
	v_{10}	-0,003697	-0,004473	-0,003746	-0,004557	1,30 %	1,84 %
11	u_{11}	0,000531	0,000433	0,000538	0,000442	1,30 %	2,03 %
	v_{11}	-0,004156	-0,00495	-0,004211	-0,005041	1,30 %	1,8 %
12	u_{12}	0,001058	0,000931	0,001071	0,000947	1,21 %	1,68 %
	v_{12}	-0,004151	-0,004981	-0,004205	-0,005073	1,28 %	1,81 %
13	u_{13}	0,000712	0,000605	0,000720	0,000617	1,11 %	1,94 %
	v_{13}	-0,004391	-0,00524	-0,004449	-0,005335	1,30 %	1,78 %
14	u_{14}	0,00088	0,000747	0,000891	0,000760	1,23 %	1,71 %
	v_{14}	-0,004408	-0,005271	-0,004466	-0,005367	1,29 %	1,78 %
15	u_{15}	0,000895	0,00079	0,000907	0,000805	1,32 %	1,86 %
	v_{15}	-0,004381	-0,005221	-0,004439	-0,005315	1,30 %	1,76 %
16	u_{16}	0,000698	0,000567	0,000707	0,000578	1,27 %	1,9 %
	v_{16}	-0,004376	-0,005207	-0,004433	-0,005300	1,28 %	1,75 %

Noeuds	Déplacements	Pro Sap 2000		Pro Développé		% Erreur	
		Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2
17	u_{17}	0,000107	0,000969	0,000108	0,000098	0,92 %	1,12 %
	v_{17}	-0,004122	-0,00493	-0,004176	-0,005018	1,29 %	1,75 %
18	u_{18}	0,000523	0,000394	0,000529	0,000401	1,13 %	1,74 %
	v_{18}	-0,004139	-0,004916	-0,004193	-0,005004	1,28 %	1,75 %
19	u_{19}	0,001237	0,001143	0,001252	0,001163	1,19 %	1,71 %
	v_{19}	-0,003632	-0,004344	-0,003680	-0,004421	1,30 %	1,74 %
20	u_{20}	0,000362	0,000244	0,000366	0,000249	1,09 %	2 %
	v_{20}	-0,003626	-0,004285	-0,003674	-0,004361	1,30 %	1,74 %
21	u_{21}	0,001376	0,001293	0,001394	0,001315	1,29 %	1,67 %
	v_{21}	-0,00293	-0,003523	-0,002968	-0,003585	1,28 %	1,72 %
22	u_{22}	0,000224	0,000117	0,000227	0,000121	1,32 %	3,3 %
	v_{22}	-0,002946	-0,003464	-0,002985	-0,003525	1,30 %	1,73 %
23	u_{23}	0,001483	0,001419	0,001502	0,001443	1,26 %	1,66 %
	v_{23}	-0,002056	-0,002468	-0,002082	-0,002511	1,24 %	1,71 %
24	u_{24}	0,00012	0,000033	0,000122	0,000036	1,63 %	8,33 %
	v_{24}	-0,002054	-0,002364	-0,002081	-0,002404	1,29 %	1,66 %
25	u_{25}	0,001545	0,001503	0,001565	0,001529	1,27 %	1,7 %
	v_{25}	-0,001068	-0,00126	-0,001082	-0,001282	1,29 %	1,71 %
26	u_{26}	0,000056	0,000008	0,000057	0,000006	1,75 %	0 %
	v_{26}	-0,001061	-0,001157	-0,001075	-0,001176	1,30 %	1,61 %
27	u_{27}	0,00157	0,001545	0,00159	0,001571	1,25 %	1,65 %
	v_{27}	0	0	0	0	0 %	0 %
28	u_{28}	0,000039	0,000009	0,000039	0,000006	0 %	0 %
	v_{28}	-0,000043	0	-0,000043	0	0 %	0 %

Tableau 2 : Comparaisons des déplacements de l'élément barre pour la première et deuxième structure (premier cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES REACTIONS.

Noeuds	Réactions (N)	Progr Sap 2000		Progr Développé		% d'erreur	
		Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2
1	R_{x_1}	6,395E -10	4,26 E-10	4,887E -6	2,007E-6	0 %	0 %
	R_{y_1}	13462	13483,54	13461	13461	0,007 %	0,16 %
27	$R_{y_{27}}$	11538	11516,46	11538	11538	0 %	0,18 %

Tableau 3 : Comparaisons des réactions de l'élément barre pour la première et deuxième structure (premier cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES FORCES AXIALES.

Elément	Progr Sap 2000		Progr Développé		% d'erreur	
	La force axiale E barre S1	La force axiale E barre S2	La force axiale E barre S1	La force axiale E barre S2	Erreur S1	Erreur S2
1	5457,78	-13190,04	5605,63	-13461,53	2,63 %	2,01 %
2	-4975,4	-65,35	-4975,4	-2 E-6	0 %	0 %
3	9167,55	15587,56	9298,91	15934,22	1,41 %	2,17 %
4	-6506,31	-8307,74	-6635,31	-8525,64	1,94 %	2,55 %
5	3416,98	-13418,75	3550,02	-13461,53	3,74 %	0,31 %
6	-1187,28	8366,42	-1301,97	8525,64	8,80 %	1,86 %
7	-12702,10	15858,02	-12900,4	15934,22	1,53 %	0,47 %
8	8215,83	-16864,59	8176,44	-17051,28	0,48 %	1,09 %
9	-7749,72	-13368,59	-7757,78	-13461,53	0,10 %	0,69 %
10	12447,59	16898,99	12676,45	17051,28	1,80 %	0,89 %
11	1942,43	9969,61	1978,41	10015,79	1,81 %	0,46 %
12	-19755,50	-22247,75	-19949,1	-22410,25	0,97 %	0,72 %
13	5410,81	-8422,06	5415,96	-8461,53	0,09 %	0,45 %
14	-4607,02	22276,29	-4599,83	22410,25	0,15 %	0,59 %
15	19326,44	9950,80	19512,43	10015,79	0,95 %	0,64 %
16	-644,13	-27610,08	-659,75	-27769,23	2,36 %	0,57 %
17	-25111,77	-8418,98	-25289,25	-8461,53	0,70 %	0,50 %
18	5381,74	27630,45	5380,77	27769,23	0,01 %	0,49 %
19	-4633,59	4099,99	-4635,02	4097,37	0,03 %	0,06 %
20	24711,91	-29831,62	24890,23	-29961,53	0,71 %	0,43 %
21	1852,77	-3461,54	1864,70	-3461,53	0,63 %	0,00 %
22	-28905,22	29844,07	-29068,23	29961,5	0,56 %	0,39 %
23	2441,18	4076,46	2427,80	4097,37	0,55 %	0,51 %
24	-1683,58	-32028,41	-1669 ,57	-32153,84	0,83 %	0,39 %
25	28500,36	-3460,64	28662,53	-3461,53	0,56 %	0,02 %
26	-628,89	32032,91	-639,61	32153,84	1,67 %	0,37 %
27	-31112,82	-1773,84	-31259 ,93	-1821,05	0,47 %	2,59 %
28	2433,55	-31084,79	2426 ,67	-31179,48	0,28 %	0,30 %

Elément	Progr Sap 2000		Progr Développé		% d'erreur	
	La force axiale E barre S1	La force axiale E barre S2	La force axiale E barre S1	La force axiale E barre S2	Erreur S1	Erreur S2
29	-1677,61	1479,19	-1670,69	1538,46	0,41 %	3,85 %
30	30708,84	31081,35	30855,44	31179,48	0,47 %	0,31 %
31	1850,08	-1797,40	1861,05	-1821,05	0,58 %	1,29 %
32	-31738,67	-30116,41	-31869,08	-30205,12	0,40 %	0,29 %
33	-510,40	1498,00	-532,20	1538,46	4,09 %	2,62 %
34	1266,87	30105,02	1288,84	30205,12	1,70 %	0,33 %
35	31334,42	-7646,77	31464,24	-7739,48	0,41 %	1,19 %
36	-628,03	-26007,58	-638,53	-26064,10	1,64 %	0,21 %
37	-30781,56	6455,95	-30894,29	6538,46	0,36 %	1,26 %
38	-518,15	25988,22	-533,02	26064,10	2,78 %	0,29 %
39	1273,13	-7670,82	1288,03	-7739,48	1,15 %	0,88 %
40	30378,09	-21874,20	30490,32	-21923,07	0,36 %	0,22 %
41	1847,68	6456,43	1858,42	6538,46	0,57 %	1,25 %
42	-28244,62	21847,11	-28338,95	21923,07	0,33 %	0,34 %
43	-3458,18	-13524,71	-3487,82	-13657,90	0,84 %	0,97 %
44	4221,48	-14598,81	4251,65	-14615,38	0,70 %	0,11 %
45	27836,74	11414,52	27930,27	11538,46	0,33 %	1,07 %
46	-614,60	14562,28	-624,29	14615,38	1,55 %	0,36 %
47	-24110,37	-13524,42	-24184,63	-13657,90	0,30 %	0,97 %
48	-3489,05	-7309,76	-3512,68	-7307,69	0,67 %	0,02 %
49	4204,42	11407,30	4226,79	11538,46	0,52 %	1,13 %
50	23727,94	7275,17	23802,54	7307,69	0,31 %	0,44 %
51	1770,32	-13536,73	1778,11	-13657,90	0,43 %	0,88 %
52	-18479,46	-22,22	-18553,79	-2,8 E-8	0,40 %	0 %
53	-6295,93	-29,18	-6331,52	0	0,56 %	0 %
54	7287,00		7326,37		0,53 %	
55	17950,48		18003,08		0,29 %	
56	-169,54		-170,70		0,67 %	
57	-10773,77		-10803,50		0,27 %	
58	-7088,44		-7124,31		0,50 %	
59	6502,74		6533,59		0,47 %	
60	11085,47		11119,57		0,30 %	
61	-776,11		-783,73		0,97 %	
62	-4297,19		-4308,24		0,25 %	
63	-5571,38		-5605,90		0,61 %	
64	8012,11		8052		0,49 %	
65	2991,04		2999,44		0,28 %	
66	4719,76		4735,97		0,34 %	

Tableau 4 : Comparaisons des forces axiales de l'élément barre pour la première et deuxième structure (premier cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES DEPLACEMENTS.

Noeuds	Déplacements	Pro Sap 2000		Pro Développé		% Erreur	
		Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2
1	u_1	0	0	0	0	0 %	0 %
	v_1	0	0	0	0	0 %	0 %
2	u_2	0	0	0	0	0 %	0 %
	v_2	0	0	0	0	0 %	0 %
3	u_3	-0,000146	-0,000164	-0,000147	-0,000166	0,68 %	1,20 %
	v_3	-0,000223	-0,000357	-0,000226	-0,000364	1,32 %	1,92 %
4	u_4	0,000145	0,000103	0,000146	0,000104	0,68 %	0,96 %
	v_4	-0,00022	-0,000509	-0,000223	-0,000520	1,34 %	2,11 %
5	u_5	-0,000227	-0,000267	-0,000229	-0,000271	0,87 %	1,47 %
	v_5	-0,000579	-0,000998	-0,000587	-0,001017	1,36 %	1,86 %
6	u_6	0,000229	0,000144	0,000232	0,000145	1,29 %	0,68 %
	v_6	-0,000595	-0,001151	-0,000604	-0,001173	1,49 %	1,87 %
7	u_7	-0,000255	-0,000308	-0,000258	-0,000312	1,16 %	1,28 %
	v_7	-0,000989	-0,001616	-0,001000	-0,001646	1,10 %	1,82 %
8	u_8	0,000259	0,000142	0,000262	0,000143	1,14 %	0,69 %
	v_8	-0,000984	-0,001724	-0,000997	-0,001756	1,30 %	1,82 %
9	u_9	-0,000238	-0,000306	-0,000241	-0,000310	1,24 %	1,29 %
	v_9	-0,001386	-0,002186	-0,001405	-0,002225	1,35 %	1,75 %
10	u_{10}	0,000245	0,000096	0,000248	0,000096	1,20 %	0 %
	v_{10}	-0,001402	-0,002294	-0,001422	-0,002335	1,40 %	1,75 %
11	u_{11}	-0,000186	-0,00026	-0,000188	-0,000263	1,06 %	1,14 %
	v_{11}	-0,001725	-0,002624	-0,001749	-0,002669	1,37 %	1,68 %
12	u_{12}	0,000196	0,000025	0,000198	0,000024	1,01 %	4,16 %
	v_{12}	-0,001719	-0,002686	-0,001743	-0,002733	1,37 %	1,71 %
13	u_{13}	-0,000108	-0,000188	-0,000109	-0,000190	0,91 %	1,05 %
	v_{13}	-0,001961	-0,002925	-0,001988	-0,002975	1,35 %	1,68 %
14	u_{14}	0,00012	-0,000071	0,000121	0,000073	0,82 %	2,73 %
	v_{14}	-0,001978	-0,002988	-0,002005	-0,003039	1,34 %	1,67 %
15	u_{15}	-0,000013	-0,000092	-0,000013	-0,000093	0 %	1,07 %
	v_{15}	-0,002074	-0,00303	-0,002102	-0,003081	1,33 %	1,65 %
16	u_{16}	0,000027	-0,000175	0,000027	-0,000178	0 %	1,68 %
	v_{16}	-0,002068	-0,003047	-0,002096	-0,003099	1,33 %	1,67 %

Noeuds	Déplacements	Pro Sap 2000		Pro Développé		% Erreur	
		Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2
17	u_{17}	0,00009	0,000012	0,000091	0,000012	1,09 %	0 %
	v_{17}	-0,002039	-0,002958	-0,002067	-0,003007	1,35 %	1,62 %
18	u_{18}	-0,000074	-0,000286	-0,000075	-0,000291	1,33 %	1,71 %
	v_{18}	-0,002056	-0,002975	-0,002084	-0,003025	1,34 %	1,65 %
19	u_{19}	0,000192	0,000123	0,000195	0,000124	1,53 %	0,80 %
	v_{19}	-0,001861	-0,002671	-0,001887	-0,002715	1,37 %	1,62 %
20	u_{20}	-0,000174	-0,000385	-0,000176	-0,000392	1,13 %	1,78 %
	v_{20}	-0,001856	-0,002643	-0,001881	-0,002687	1,32 %	1,63 %
21	u_{21}	0,000284	0,000222	0,000288	0,000225	1,38 %	1,33 %
	v_{21}	-0,00154	-0,002212	-0,00156	-0,002249	1,28 %	1,64 %
22	u_{22}	-0,000264	-0,000474	-0,000267	-0,000481	1,12 %	1,45 %
	v_{22}	-0,001556	-0,002185	-0,001577	-0,002221	1,33 %	1,62 %
23	u_{23}	0,000357	0,00031	0,000361	0,000314	1,10 %	1,27 %
	v_{23}	-0,001098	-0,001567	-0,001113	-0,001593	1,34 %	1,63 %
24	u_{24}	-0,000333	-0,000533	-0,000337	-0,000541	1,18 %	1,47 %
	v_{24}	-0,001096	-0,001494	-0,001111	-0,001518	1,35 %	1,58 %
25	u_{25}	0,000399	0,000369	0,000404	0,000374	1,23 %	1,33 %
	v_{25}	-0,000576	-0,000802	-0,000584	-0,000815	1,36 %	1,59 %
26	u_{26}	-0,000377	-0,000562	-0,000381	-0,000571	1,04 %	1,57 %
	v_{26}	-0,000571	-0,000729	-0,000579	-0,000741	1,38 %	1,61 %
27	u_{27}	0,000416	0,000399	0,000421	0,000404	1,18 %	1,23 %
	v_{27}	0	0	0	0	0 %	0 %
28	u_{28}	-0,000388	-0,000562	-0,000393	-0,000571	1,27 %	1,57 %
	v_{28}	-0,000029	0	-0,000029	0	0 %	0 %

Tableau 5 : Comparaisons des déplacements de l'élément barre pour la première et deuxième structure (deuxième cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES REACTIONS.

Noeuds	Réactions (N)	Progr Sap 2000		Progr Développé		% d'erreur	
		Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2
1	R_{x_1}	30628	28500	30671,147	28563,171	0,14 %	0,22 %
	R_{y_1}	8515	66,7	8512,501	0	0,02 %	0 %
2	R_{x_2}	-30628	-28500	-30671,147	-28563,17	0,14 %	0,22 %
	R_{y_2}	8672	16866,9	8674,316	16930,74	0,02 %	0,37 %
27	$R_{y_{27}}$	7813	8066,41	7813,181	8069,25	0,002 %	0,03 %

Tableau 6 : Comparaisons des réactions de l'élément barre pour la première et deuxième structure (deuxième cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES FORCES AXIALES.

Eléments	Progr Sap 2000		Progr Développé		% d'erreur	
	La force axiale E barre S1	La force axiale E barre S2	La force axiale E barre S1	La force axiale E barre S2	Erreur S1	Erreur S2
1	0	0	0	0	0 %	0 %
2	-25259,88	-28500,00	-25280,21	-28563,17	0,08 %	0,22 %
3	-10031,41	19824,30	-10076,12	20040,68	0,44 %	1,07 %
4	10220,03	17888,23	10267,66	17840,36	0,46 %	0,26 %
5	25159,42	-16731,81	25177,73	-16930,74	0,07 %	1,17 %
6	304,56	-17829,96	309,47	-17840,36	1,58 %	0,05 %
7	-14094,25	19886,12	-14096,75	20040,68	0,01 %	0,77 %
8	-10606,26	7166,17	-10633,97	7117,55	0,26 %	0,68 %
9	9684,33	-16809,99	9709,80	-16930,74	0,26 %	0,71 %
10	14586,51	-7119,81	14591,23	-7117,55	0,03 %	0,03 %
11	-1793,75	14024,62	-1802,68	14122,25	0,49 %	0,69 %
12	-4847,63	-402,04	-4847,94	-438,58	0,006%	8,33 %
13	-7559,65	-11840,19	-7575,99	-11930,74	0,21 %	0,75 %
14	6832,27	441,52	6849,36	438,58	0,24 %	0,67 %
15	5236,43	14003,85	5236,73	14122,25	0,005%	0,83 %
16	618,66	-7948,54	628,64	-7994,72	1,58 %	0,57 %
17	2875,06	-11841,08	2879,72	-11930,74	0,16 %	0,75 %
18	-7570,56	7979,85	-7593,48	7994,72	0,30 %	0,18 %
19	6809,34	8152,97	6831,87	8203,82	0,32 %	0,61 %
20	-2468,28	-12354,02	-2472,22	-12384,20	0,15 %	0,24 %
21	-1848,38	-6883,00	-1859,19	-6930,74	0,58 %	0,68 %
22	9005,21	12377,43	9013,05	12384,20	0,08 %	0,05 %
23	-4623,26	8129,52	-4631,17	8203,82	0,17 %	0,90 %
24	3867,91	-16734,84	3875,75	-16773,67	0,20 %	0,23 %
25	-8601,55	-6882,20	-8608,86	-6930,74	0,08 %	0,70 %
26	628,13	16750,30	638,63	16773,67	1,64 %	0,13 %
27	13554,68	2279,19	13564,98	2285,40	0,07 %	0,27 %
28	-4616,77	-17975,23	-4631,70	-17996,48	0,32 %	0,11 %
29	3860,44	-1924,35	3875,22	-1930,74	0,38 %	0,05 %

Eléments	Progr Sap 2000		Progr Développé		% d'erreur	
	La force axiale E barre S1	La force axiale E barre S2	La force axiale E barre S1	La force axiale E barre S2	Erreur S1	Erreur S2
30	-13150,50	17982,75	-13160,23	17996,48	0,07 %	0,07 %
31	-1849,96	2255,64	-1860,89	2285,40	0,58 %	1,30 %
32	16521,49	-19190,86	16533,32	-19219,29	0,07 %	0,14 %
33	-1672,62	-1923,00	-1672,51	-1930,74	0,006%	0,40 %
34	916,24	19190,43	915,98	19219,29	0,02 %	0,15 %
35	-16117,29	-3594,73	-16128,54	-3633,02	0,06 %	1,05 %
36	628,05	-17266,04	638,55	-17275,43	1,64 %	0,10 %
37	17905,54	3034,38	17917,94	3069,25	0,06 %	1,13 %
38	-1664,98	17257,65	-1671,83	17275,43	0,40 %	0,10 %
39	909,86	-3617,78	916,67	-3633,02	0,74 %	0,41 %
40	-17502,00	-15316,68	-17513,89	-15331,57	0,06 %	0,09 %
41	-1847,92	3035,04	-1858,69	3069,25	0,57 %	1,11 %
42	17709,47	15300,55	17772,17	15331,57	0,35 %	0,20 %
43	1275,48	-9471,55	1283,43	-9551,45	0,61 %	0,83 %
44	-2038,06	-10225,32	-2046,48	-10221,05	0,41 %	0,04 %
45	-17301,98	7992,11	-17313,43	8069,25	0,06 %	0,95 %
46	616,00	10199,81	625,80	10221,05	1,56 %	0,20 %
47	15917,62	-9472,70	15928,09	-9551,45	0,06 %	0,82 %
48	1303,92	-5119,90	1305,73	-5110,52	0,13 %	0,18 %
49	-2023,43	7990,42	-2024,18	8069,25	0,03 %	0,97 %
50	-15532,99	5095,68	-15543,68	5110,52	0,06 %	0,29 %
51	-1778,39	-9481,43	-1786,62	-9551,45	0,46 %	0,73 %
52	12620,37	-15,57	12630,47	0	0,07 %	0 %
53	4124,81	-20,50	4138,98	0	0,34 %	0 %
54	-5092,07		-5109,36		0,33 %	
55	-12104,05		-12111,27		0,05 %	
56	216,05		218,76		1,23 %	
57	7298,53		7301,47		0,04 %	
58	4836,93		4850,41		0,27 %	
59	-4387,81		-4397,93		0,23 %	
60	-7537,53		-7543,57		0,08 %	
61	509,09		512,33		0,63 %	
62	2918,81		2919,70		0,03 %	
63	3776,93		3791,48		0,38 %	
64	-5442,16		-5456,86		0,26 %	
65	-2027,71		-2028,64		0,04 %	
66	-3199,70		-3203,12		0,10 %	

Tableau 7 : Comparaisons des forces axiales de l'élément barre pour la première et deuxième structure (deuxième cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES DEPLACEMENTS.

Noeuds	Déplacements	Pro Sap 2000		Pro Développé		% Erreur	
		Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2
1	u_1	0	0	0	0	0 %	0 %
	v_1	0	0	0	0	0 %	0 %
2	u_2	0	0	0	0	0 %	0 %
	v_2	0	0	0	0	0 %	0 %
3	u_3	-0,0001	-0,00012	-0,000101	-0,000122	0,99 %	1,63 %
	v_3	-0,000167	-0,000278	-0,000169	-0,000284	1,18 %	2,11 %
4	u_4	0,000098	0,000072	0,000098	0,000072	0 %	0 %
	v_4	-0,000164	-0,0004	-0,000166	-0,000408	1,20 %	1,96 %
5	u_5	-0,000148	-0,000192	-0,000150	-0,000194	1,33 %	1,03 %
	v_5	-0,000416	-0,000769	-0,000422	-0,000784	1,42 %	1,91 %
6	u_6	0,000147	0,000094	0,000149	0,000094	1,34 %	0 %
	v_6	-0,000432	-0,000891	-0,000438	-0,000909	1,36 %	1,98 %
7	u_7	-0,000157	-0,000213	-0,000158	-0,000216	0,63 %	1,38 %
	v_7	-0,000685	-0,001214	-0,000694	-0,001237	1,29 %	1,85 %
8	u_8	0,000156	0,000085	0,000157	0,000085	0,63 %	0 %
	v_8	-0,000679	-0,001291	-0,000688	-0,001315	1,30 %	1,82 %
9	u_9	-0,000133	-0,000204	-0,000134	-0,000207	0,74 %	1,44 %
	v_9	-0,000921	-0,001602	-0,000934	-0,001631	1,39 %	1,77 %
10	u_{10}	0,000133	0,000045	0,000134	0,000045	0,74 %	0 %
	v_{10}	-0,000938	-0,001679	-0,000951	-0,001710	1,36 %	1,81 %
11	u_{11}	-0,000087	-0,000164	-0,000088	-0,000166	1,13 %	1,20 %
	v_{11}	-0,0011	-0,001864	-0,001115	-0,001898	1,34 %	1,79 %
12	u_{12}	0,000087	-	0,000088	-0,000008	1,13 %	3,75 %
	v_{12}	-0,001094	0,0000077 -0,001896	-0,001109	-0,001930	1,35 %	1,76 %
13	u_{13}	-0,000028	-0,000111	-0,000028	-0,000112	0 %	1,78 %
	v_{13}	-0,001189	-0,002014	-0,001205	-0,002050	1,32 %	1,75 %
14	u_{14}	0,000029	-0,000073	0,0000289	-0,000007	0,34 %	4,28 %
	v_{14}	-0,001205	-0,002046	-0,001222	-0,002083	1,39 %	1,77 %
15	u_{15}	0,000036	-0,000045	0,000036	-0,000045	0 %	0 %
	v_{15}	-0,001186	-0,002005	-0,001202	-0,002042	1,33 %	1,81 %
16	u_{16}	-0,000034	-0,000134	-0,000034	-0,000136	0 %	1,47 %
	v_{16}	-0,00118	-0,001992	-0,001196	-0,002028	1,33 %	1,77 %
17	u_{17}	0,000094	0,000016	0,000095	0,0000155	1,05 %	3,25 %
	v_{17}	-0,001083	-0,001875	-0,001098	-0,001909	1,36 %	1,78 %

Noeuds	Déplacements	Pro Sap 2000		Pro Développé		% Erreur	
		Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2
18	u_{18}	-0,000092	-0,000189	-0,000093	-0,000191	1,07 %	1,04 %
	v_{18}	-0,001099	-0,001862	-0,001115	-0,001896	1,43 %	1,79 %
19	u_{19}	0,000139	0,000071	0,000140	0,000071	0,7 %	0 %
	v_{19}	-0,0009	-0,0016	-0,000913	-0,001630	1,42 %	1,84 %
20	u_{20}	-0,000136	-0,00022	-0,000137	-0,000223	0,7 %	1,34 %
	v_{20}	-0,000894	-0,001542	-0,000907	-0,001570	1,43 %	1,78 %
21	u_{21}	0,00016	0,000102	0,000161	0,000103	0,62 %	0,97 %
	v_{21}	-0,000654	-0,00124	-0,000663	-0,001264	1,35 %	1,89 %
22	u_{22}	-0,000157	-0,000228	-0,000159	-0,000231	1,25 %	1,29 %
	v_{22}	-0,00067	-0,001182	-0,000679	-0,001204	1,32 %	1,82 %
23	u_{23}	0,000149	0,00011	0,000150	0,000111	0,66 %	0,90 %
	v_{23}	-0,000385	-0,000796	-0,000390	-0,000811	1,28 %	1,84 %
24	u_{24}	-0,000145	-0,000194	-0,000146	-0,000196	0,68 %	1,02 %
	v_{24}	-0,000382	-0,000692	-0,000387	-0,000706	1,29 %	1,98 %
25	u_{25}	0,000095	0,000076	0,000096	0,000076	1,04 %	0 %
	v_{25}	-0,000145	-0,000349	-0,000147	-0,000357	1,36 %	2,24 %
26	u_{26}	-0,000093	-0,000118	-0,000094	-0,000119	1,06 %	0,84 %
	v_{26}	-0,000145	-0,000246	-0,000147	-0,000251	1,36 %	1,99 %
27	u_{27}	0	0	0	0	0 %	0 %
	v_{27}	0	0	0	0	0 %	0 %
28	u_{28}	0	0	0	0	0 %	0 %
	v_{28}	0	0	0	0	0 %	0 %

Tableau 8 : Comparaisons des déplacements de l'élément barre pour la première et deuxième structure (troisième cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES REACTIONS.

Noeuds	Réactions (N)	Progr Sap 2000		Progr Développé		% d'erreur	
		Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2	Elément Barre S1	Elément Barre S2
1	R_{x_1}	21597	20868,08	21631	20931,697	0,15 %	0,3 %
	R_{y_1}	6769	52,99	6766,50	0	0,03 %	0 %
2	R_{x_2}	-21265	-20904,76	-21298	-20969,458	0,15 %	0,3 %
	R_{y_2}	6877	13469,11	6879,56	13521,161	0,03 %	0,38 %
27	$R_{x_{27}}$	-20081	-20377,88	-20111	-20440,797	0,14 %	0,3 %
	$R_{y_{27}}$	5715	11431,92	5715,66	11478,838	0,01 %	0,4 %
28	$R_{x_{28}}$	19749	20414,57	19779,25	20478,559	0,15 %	0,31 %
	$R_{y_{28}}$	5639	45,98	5638,26	0	0,01 %	0 %

Tableau 9 : Comparaisons des réactions de l'élément barre pour la première et deuxième structure (troisième cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES FORCES AXIALES.

Elément	Progr Sap 2000		Progr Développé		% d'erreur	
	La force axiale E barre S1	La force axiale E barre S2	La force axiale E barre S1	La force axiale E barre S2	Erreur S1	Erreur S2
1	0	0	0	0	0 %	0 %
2	-17328,98	-20868,08	-17345,54	-20931,69	0,09 %	0,30 %
3	-7974,25	15831,13	-8009,40	16004,80	0,43 %	1,08 %
4	8105,16	12430,43	8143,24	12406,05	0,46 %	0,19 %
5	16927,34	-13360,57	16941,50	-13521,16	0,08 %	1,18 %
6	344,52	-12347,02	349,58	-12368,29	1,44 %	0,17 %
7	-8408,39	15876,49	-8410,02	16004,80	0,01 %	0,80 %
8	-8534,11	3870,22	-8557,04	3842,65	0,26 %	0,71 %
9	7574,88	-13424,90	7595,60	-13521,16	0,27 %	0,71 %
10	8588,57	-3797,84	8592,00	-3804,89	0,03 %	0,18 %
11	-1760,98	10017,36	-1769,67	10086,37	0,49 %	0,68 %
12	-1402,49	-1538,89	-1402,72	-1554,08	0,01 %	0,97 %
13	-5490,21	-8457,16	-5500,87	-8521,16	0,19 %	0,75 %
14	4721,97	1604,17	4733,35	1591,84	0,24 %	0,77 %
15	1481,11	9996,04	1480,95	10086,37	0,01 %	0,89 %
16	652,85	-6925,69	662,91	-6950,81	1,51 %	0,36 %
17	4078,77	-8457,76	4082,30	-8521,16	0,08 %	0,74 %
18	-5500,63	6982,84	-5518,03	6988,57	0,31 %	0,08 %
19	4699,16	4145,27	4716,18	4167,94	0,36 %	0,54 %
20	-3982,50	-9171,59	-3985,70	-9180,88	0,08 %	0,10 %
21	-1814,40	-3499,72	-1825,14	-3521,16	0,58 %	0,60 %
22	7967,61	9220,83	7973,18	9218,64	0,06 %	0,02 %

23	-2553,42	4121,79	-2555,78	4167,94	0,09 %	1,10 %
24	1757,72	-11392,81	1760,01	-11410,95	0,13 %	0,15 %
25	-7874,40	-3498,91	-7879,84	-3521,16	0,06 %	0,63 %
26	662,14	11434,10	672,72	11448,71	1,57 %	0,12 %
27	10275,75	-1728,52	10282,64	-1750,47	0,06 %	1,25 %
28	-2546,92	-10473,59	-25563,10	-10474,35	0,36 %	0,007%
29	1750,25	1458,94	1759,48	1478,83	0,52 %	1,34 %
30	-10182,02	10506,95	-10188,74	10512,12	0,06 %	0,04 %
31	-1815,95	-1752,08	-1826,83	-1750,47	0,59 %	0,09 %
32	11001,22	-9529,61	11008,49	-9537,76	0,06 %	0,08 %
33	397,25	1459,75	402,90	1478,83	1,40 %	1,29 %
34	-1193,93	9555,02	-1199,72	9575,52	0,48 %	0,21 %
35	-10907,50	-7602,40	-10914,58	-7668,90	0,06 %	0,86 %
36	662,14	-5445,22	672,73	-5434,49	1,57 %	0,19 %
37	10144,02	6417,72	10150,72	6478,83	0,06 %	0,94 %
38	404,75	5462,68	403,42	5472,25	0,32 %	0,17 %
39	-1200,46	-7625,82	-1199,20	-7668,90	0,10 %	0,56 %
40	-10050,80	-1336,09	-10057,37	-1331,23	0,06 %	0,36 %
41	-1814,42	6417,83	-1825,16	6478,83	0,58 %	0,94 %
42	7706,16	1345,67	7711,51	1368,99	0,06 %	1,70 %
43	3346,06	-13477,47	3359,62	-13587,33	0,40 %	0,80 %
44	-4147,49	5913,89	-4161,43	5938,69	0,33 %	0,41 %
45	-7609,92	11379,38	-7614,93	11478,83	0,06 %	0,86 %
46	652,92	-5912,85	662,99	-5900,93	1,51 %	0,20 %
47	3675,63	-13489,89	3678,24	-13587,33	0,07 %	0,71 %
48	3369,55	13184,40	3376,65	13208,62	0,21 %	0,18 %
49	-4138,00	11344,46	-4144,40	11478,83	0,15 %	1,17 %
50	-3596,89	-13186,48	-3599,89	-13170,86	0,08 %	0,11 %
51	-1761,20	-13434,93	-1770,13	-13587,33	0,50 %	1,12 %
52	-1878,22	20414,57	-1877,77	20478,55	0,02 %	0,31 %
53	6219,03	0	6239,68	0	0,33 %	0 %
54	-7177,05		-7199,79		0,31 %	
55	2057,75		2059,05		0,06 %	
56	346,89		352,18		1,50 %	
57	-9353,45		-9359,26		0,06 %	
58	6766,71		6782,92		0,23 %	
59	-6642,36		-6656,56		0,21 %	
60	8955,40		8959,21		0,04 %	
61	-13,01		-14,67		11,3 %	
62	-16477,61		-16491,77		0,08 %	
63	6643,24		6673,93		0,45 %	
64	-6733,75		-6765,54		0,46 %	
65	16193,87		16208,35		0,08 %	
66	0		0		0%	

Tableau 10 : Comparaisons des forces axiales de l'élément barre pour la première et deuxième structure (troisième cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES DEPLACEMENTS (ELEMENT POUTRE).

Noeuds	Déplacements	Pro Sap 2000		Pro Développé		% Erreur	
		Elément Poutre S1	Elément Poutre S2	Elément Poutre S1	Elément Poutre S2	Elément Poutre S1	Elément Poutre S2
1	u_1	0	0	0	0	0 %	0 %
	v_1	0	0	0	0	0 %	0 %
	q_1	0	0	0	0	0 %	0 %
2	u_2	0,000727	0,000673	0,000735	0,000681	1,08 %	1,17 %
	v_2	-0,000057	-0,000135	-0,000057	-0,000136	0 %	0,73 %
	q_2	0,000191	0,000235	0,000192	0,000235	0,52 %	0 %
3	u_3	0,000031	-0,103 E-6	0,000031	-1,11 E-7	0 %	0 %
	v_3	-0,000591	-0,000785	-0,000598	-0,000794	1,17 %	1,13 %
	q_3	0,000199	0,000264	0,000202	0,000268	1,48 %	0,74 %
4	u_4	0,000704	0,000619	0,000712	0,000626	1,12 %	1,11 %
	v_4	-0,000576	-0,00092	-0,000583	-0,000931	1,2 %	1,18 %
	q_4	0,000184	0,000226	0,000185	0,000229	0,54 %	1,31 %
5	u_5	0,000115	0,000054	0,000116	0,000054	0,86 %	0 %
	v_5	-0,001054	-0,001503	-0,001067	0,001521	1,21 %	1,18 %
	q_5	0,000124	0,000168	0,000125	0,00017	0,8 %	1,17 %
6	u_6	0,000624	0,00051	0,000632	0,000516	1,26 %	1,16 %
	v_6	-0,001089	-0,001639	-0,001102	-0,001658	1,17 %	1,14 %
	q_6	0,000126	0,000155	0,000127	0,000157	0,78 %	1,27 %
7	u_7	0,000235	0,000163	0,000238	0,000165	1,26 %	1,21 %
	v_7	-0,001363	-0,001934	-0,001380	-0,001957	1,23 %	1,17 %
	q_7	0,000069	0,000089	0,000070	0,00009	1,42 %	1,11 %
8	u_8	0,000509	0,000383	0,000514	0,000387	0,97 %	1,03 %
	v_8	-0,001352	-0,00198	-0,001368	-0,002	1,16 %	0,1 %
	q_8	0,000069	0,000077	0,000069	0,000077	0 %	0 %
9	u_9	0,000374	0,000291	0,000378	0,000294	1,05 %	1,02 %
	v_9	-0,001465	-0,002113	-0,001483	-0,002138	1,21 %	1,16 %
	q_9	-5,89 E-9	2,77 E-6	4,04 E-10	2,82 E-6	0 %	1,77 %
10	u_{10}	0,000374	0,000237	0,000379	0,00024	1,31 %	1,25 %
	v_{10}	-0,001499	-0,002158	-0,001517	-0,002184	1,18 %	1,19 %
	q_{10}	-5,34 E-9	-0,000016	3,06 E-10	-0,000016	0 %	0 %
11	u_{11}	0,000513	0,000436	0,000519	0,000441	1,15 %	1,13 %
	v_{11}	-0,001364	-0,001958	-0,001380	-0,001981	1,15 %	1,16 %
	q_{11}	-0,000068	-0,000091	-0,000069	-0,000091	1,44 %	0 %

12	u_{12}	0,00024	0,00011	0,000243	0,000111	1,23 %	0,9 %
	v_{12}	-0,001352	-0,001913	-0,001369	-0,001936	1,24 %	1,18 %
	q_{12}	-0,000068	-0,000102	-0,000069	-0,000103	1,44 %	0,97 %
13	u_{13}	0,000634	0,000564	0,000641	0,00057	1,09 %	1,05 %
	v_{13}	-0,001056	-0,00155	-0,001068	-0,00156	1,12 %	0,64 %
	q_{13}	-0,000128	-0,000168	-0,000129	-0,000169	0,77 %	0,59 %
14	u_{14}	0,000124	4,34 E-7	0,000125	4,08 E-7	0,8 %	0 %
	v_{14}	-0,00109	-0,001505	-0,001103	-0,001523	1,17 %	1,18 %
	q_{14}	-0,000128	-0,000187	-0,000128	-0,00019	0 %	1,57 %
15	u_{15}	0,000718	0,000673	0,000726	0,000681	1,1 %	1,17 %
	v_{15}	-0,000593	-0,000855	-0,0006	-0,000865	1,16 %	1,15 %
	q_{15}	-0,000176	-0,000245	-0,000178	-0,000248	1,12 %	1,2 %
16	u_{16}	0,000044	-0,000054	0,000044	-0,000055	0 %	1,81 %
	v_{16}	-0,000578	-0,00072	-0,000584	-0,000728	1,02 %	1,09 %
	q_{16}	-0,000174	-0,00024	-0,000176	-0,000243	1,13 %	1,23 %
17	u_{17}	0,00075	0,000728	0,000758	0,000736	1,05 %	1,08 %
	v_{17}	0	0	0	0	0 %	0 %
	q_{17}	-0,000191	-0,000239	-0,000193	-0,000241	1,03 %	0,82 %
18	u_{18}	0,000021	-0,000055	0,000021	-0,000055	0 %	0 %
	v_{18}	-0,000057	-3,22 E-7	-0,000057	-3,53 E-7	0 %	0 %
	q_{18}	-0,000168	-0,000213	0,00017	-0,000215	1,17 %	0,93 %

Tableau 11 : Comparaisons des déplacements de l'élément poutre pour la première et deuxième structure (premier cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES REACTIONS.

Noeuds	Réactions (N)	Progr Sap 2000		Progr Développé		% d'erreur	
		Elément Poutre S1	Elément Poutre S2	Elément Poutre S1	Elément Poutre S2	Elément Poutre S1	Elément Poutre S2
1	R_{x_1}	2,07 E-12	-7,44 E-11	2,07 E-7	1,00 E-6	0 %	0 %
	R_{y_1}	15022,41	15019,89	15024,19	15021,5	0,01 %	0,01 %
	M_{r_1}	-511,01	-453,44	551,75	-490,36	7,38 %	7,52 %
27	$R_{y_{27}}$	14977,59	14980,11	14975,80	14978,84	0,01 %	0,008 %

Tableau 12 : Comparaisons des réactions de l'élément poutre pour la première et deuxième structure (premier cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES FORCES AXIALES.

Eléments	Progr Sap 2000		Progr Développé		% d'erreur	
	La force axiale E Poutre S1	La force axiale E Poutre S2	La force axiale E Poutre S1	La force axiale E Poutre S2	Erreur S1	Erreur S2
1	-6226,60	-14825,46	-6219,52	-14810,09	0,11 %	0,10 %
2	5404,85	-17,85	5396,65	-19,14	0,15 %	6,73 %
3	-10218,35	17495,01	-10211,96	17472,55	0,06 %	0,12 %
4	7385,69	-9368,68	7378,81	-9357,63	0,06 %	0,11 %
5	-3925,42	-14909,34	-3919,80	-14902,45	0,14 %	0,04 %
6	1664,31	9427,92	1657,57	9422,06	0,40 %	0,06 %
7	14492,09	17634,17	14484,28	17624,50	0,05 %	0,05 %
8	-9524,71	-18879,40	-9525,55	-18869,68	0,008 %	0,05 %
9	8222,71	-14905,75	8221,53	-14897,55	0,01 %	0,05 %
10	-13793,53	18912,70	-13784,35	18905,71	0,06 %	0,03 %
11	-3768,76	5909,52	-3765,39	5908,99	0,08 %	0,008%
12	20906,04	-22087,16	20898,75	-22080,93	0,03 %	0,02 %
13	-3742,45	-4992,44	-3742,86	-4992,05	0,01 %	0,007%
14	2195,00	22106,02	2196,06	22101,39	0,04 %	0,02 %
15	-20079,36	5865,86	-20072,53	5861,08	0,03 %	0,08 %
16	1269,02	-25248,47	1266,75	-25241,61	0,17 %	0,02 %
17	24073,41	-4989,99	24067,23	-4988,88	0,02 %	0,02 %
18	-3711,76	25251,27	-3711,59	25244,65	0,004 %	0,02 %
19	2204,11	-5835,34	2203,83	-5828,11	0,01 %	0,12 %
20	-23267,71	-22128,47	-23261,53	-22125,66	0,02 %	0,01 %
21	-3704,57	4924,78	-3702,46	4918,34	0,05 %	0,13 %
22	24087,46	22115,35	24082,39	22111,45	0,02 %	0,01 %
23	2177,92	-5881,95	2175,55	-5879,38	0,10 %	0,02 %
24	-3684,30	-18959,40	-3681,90	-18956,15	0,06 %	0,01 %
25	-23282,43	4931,36	-23277,46	4926,07	0,02 %	0,10 %
26	1271,06	18930,54	1269,03	18924,90	0,15 %	0,02 %
27	20949,31	-17582,67	20945,50	-17568,23	0,01 %	0,08 %
28	2168,07	-9508,15	2167,01	-9508,98	0,04 %	0,008%
29	-3721,12	14817,01	-3720,01	14801,56	0,02 %	0,10 %
30	-20119,49	9463,63	-20115,79	9460,68	0,01 %	0,03 %
31	-3779,91	-17606,98	-3777,78	-17594,74	0,05 %	0,06 %
32	14560,04	-28,70	14557,53	-31,06	0,01 %	7,59 %
33	8195,64	-35,43	8192,15	-38,31	0,04 %	7,51 %
34	-9474,67		-9471,08		0,03 %	
35	-13876,21		-13873,81		0,01 %	
36	1713,55		1711,61		0,11 %	
37	5499,57		5499,07		0,009 %	
38	7423,37		7420,04		0,04 %	
39	-10252,38		-10249,17		0,03 %	
40	-3984,19		-3983,45		0,01 %	
41	-6285,15		-6283,47		0,02 %	

Tableau 13 : Comparaisons des forces axiales de l'élément poutre pour la première et deuxième structure (premier cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES DEPLACEMENTS (ELEMENT POUTRE).

Noeuds	Déplacements	Pro Sap 2000		Pro Développé		% Erreur	
		Elément Poutre S1	Elément Poutre S2	Elément Poutre S1	Elément Poutre S2	Elément Poutre S1	Elément Poutre S2
1	u_1	0	0	0	0	0 %	0 %
	v_1	0	0	0	0	0 %	0 %
	q_1	0	0	0	0	0 %	0 %
2	u_2	0	0	0	0	0 %	0 %
	v_2	0	0	0	0	0 %	0 %
	q_2	0	0	0	0	0 %	0 %
3	u_3	-0,000093	-0,000106	-0,000094	-0,000107	1,06 %	0,93 %
	v_3	-0,000207	-0,000346	-0,000209	-0,000349	0,95 %	0,85 %
	q_3	0,000076	0,000136	0,000077	0,000138	1,29 %	1,44 %
4	u_4	0,000092	0,000039	0,000093	0,000039	1,07 %	0 %
	v_4	-0,000202	-0,000513	-0,000204	-0,000519	0,98 %	1,15 %
	q_4	0,00008	0,000164	0,00008	0,000166	0 %	1,2 %
5	u_5	-0,000113	-0,000144	-0,000114	-0,000145	0,87 %	0,68 %
	v_5	-0,000466	-0,000908	-0,000471	-0,000919	1,06 %	1,19 %
	q_5	0,000072	0,000125	0,000073	0,000127	1,36 %	1,57 %
6	u_6	0,000117	9,11 E-6	0,000118	9,3 E-6	0,84 %	0 %
	v_6	-0,000499	-0,001077	-0,000504	-0,001089	0,99 %	1,1 %
	q_6	0,000071	0,000106	0,000072	0,000107	1,38 %	0,93 %
7	u_7	-0,00008	-0,000114	-0,000081	-0,000115	1,23 %	0,86 %
	v_7	-0,000685	-0,001285	-0,000693	-0,0013	1,15 %	1,15 %
	q_7	0,000052	0,000074	0,000052	0,000074	0 %	0 %
8	u_8	0,000089	-0,000052	0,00009	-0,000052	1,11 %	0 %
	v_8	-0,000674	-0,001363	-0,000682	-0,001379	1,17 %	1,16 %
	q_8	0,000052	0,000064	0,000053	0,000065	1,88 %	1,53 %
9	u_9	-0,000013	-0,000053	-0,000013	-0,000053	0 %	0 %
	v_9	-0,0008	-0,001493	-0,000809	-0,00151	1,11 %	1,12 %
	q_9	0,000016	0,000014	0,000015	0,000014	3,25 %	0 %
10	u_{10}	0,000027	-0,000145	0,000027	-0,000146	0 %	0,68 %
	v_{10}	-0,000834	-0,001571	-0,000844	-0,00159	1,18 %	1,19 %
	q_{10}	0,000016	3,22 E-6	0,000015	3,11 E-6	0 %	0 %
11	u_{11}	0,00007	0,00004	0,00007	0,00004	0 %	0 %
	v_{11}	-0,000792	-0,001434	-0,000802	-0,001451	1,24 %	1,17 %
	q_{11}	-0,000028	-0,000058	-0,000028	-0,000058	0 %	0 %

12	u_{12}	-0,000052	-0,000233	-0,000052	-0,000235	0 %	0,85 %
	v_{12}	-0,000781	-0,001422	-0,000790	-0,001439	1,13 %	1,18 %
	q_{12}	-0,000028	-0,000069	-0,000028	-0,000069	0 %	0 %
13	u_{13}	0,000151	0,000128	0,000152	0,000129	0,65 %	0,77 %
	v_{13}	-0,000638	-0,001173	-0,000646	-0,001187	1,23 %	1,17 %
	q_{13}	-0,00007	-0,000121	-0,00007	-0,000122	0 %	0,81 %
14	u_{14}	-0,000128	-0,000315	-0,000129	-0,000319	0,77 %	1,25 %
	v_{14}	-0,000672	-0,001161	-0,000680	-0,001175	1,17 %	1,19 %
	q_{14}	-0,00007	-0,000139	-0,00007	-0,00014	0 %	0,71 %
15	u_{15}	0,000211	0,00021	0,000213	0,000212	0,93 %	0,94 %
	v_{15}	-0,000369	-0,000658	-0,000373	-0,000666	1,07 %	1,2 %
	q_{15}	-0,000106	-0,000187	-0,000107	-0,00019	0,93 %	1,57 %
16	u_{16}	-0,000184	-0,000357	-0,000185	-0,000361	0,54 %	1,1 %
	v_{16}	-0,000356	-0,000556	-0,000360	-0,000562	1,11 %	1,06 %
	q_{16}	-0,000106	-0,000186	-0,000107	-0,000189	1,07 %	1,58 %
17	u_{17}	0,000233	0,000252	0,000236	0,000254	1,27 %	0,78 %
	v_{17}	0	0	0	0	0 %	0 %
	q_{17}	-0,000117	-0,000185	-0,000118	-0,000187	0,84 %	1,06 %
18	u_{18}	-0,0002	-0,000357	-0,000202	-0,000361	0,99 %	1,1 %
	v_{18}	-0,000041	-2,39 E-7	-0,000041	-2,62 E-7	0 %	0 %
	q_{18}	-0,0001	-0,000165	-0,000101	-0,000166	0,99 %	0,6 %

Tableau 14 : Comparaisons des déplacements de l'élément poutre pour la première et deuxième structure (deuxième cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES REACTIONS.

Noeuds	Réactions (N)	Progr Sap 2000		Progr Développé		% d'erreur	
		Elément Poutre S1	Elément Poutre S2	Elément Poutre S1	Elément Poutre S2	Elément Poutre S1	Elément Poutre S2
1	R_{x_1}	22225,85	18374,98	22222,74	18371,12	0,01 %	0,02 %
	R_{y_1}	9540,74	71,97	9541,25	78,08	0,005 %	7,82 %
	M_{r_1}	-101,07	-147,61	109,23	-159,63	7,47 %	7,52 %
2	R_{x_2}	-22225,85	-18374,98	-22222,74	-18371,12	0,01 %	0,02 %
	R_{y_2}	9854,63	18572,14	9854,18	18566,68	0,004 %	0,02 %
	M_{r_2}	-96,93	-250,68	104,61	-271,16	7,34 %	7,55 %
27	$R_{y_{27}}$	10604,64	11355,89	10604,55	11355,22	0 %	0,005 %

Tableau 15 : Comparaisons des réactions de l'élément poutre pour la première et deuxième structure (deuxième cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES FORCES AXIALES.

Eléments	Progr Sap 2000		Progr Développé		% d'erreur	
	La force axiale E Poutre S1	La force axiale E Poutre S2	La force axiale E Poutre S1	La force axiale E Poutre S2	Erreur S1	Erreur S2
1	0	0	0	0	0 %	0 %
2	-16210,86	-18374,98	-16209,78	-18371,12	0,006 %	0,02 %
3	-11238,67	21829,78	-11234,51	21810,11	0,03 %	0,09 %
4	11615,91	6689,33	11611,19	6695,43	0,04 %	0,09 %
5	16009,95	-18420,36	16009,24	-18402,01	0,004 %	0,09 %
6	609,13	-6624,23	608,21	-6624,71	0,15 %	0,007 %
7	-3353,42	21880,05	-3354,12	21865,42	0,02 %	0,06 %
8	-12368,14	-5108,03	-12365,31	-5100,19	0,02 %	0,15 %
9	10524,26	-18514,62	10521,83	-18504,77	0,02 %	0,05 %
10	4337,95	5153,17	4338,25	5150,76	0,006 %	0,04 %
11	-3587,52	10167,61	-3585,87	10163,36	0,04 %	0,04 %
12	5657,22	-10609,89	5656,64	-10606,55	0,01 %	0,03 %
13	-6278,81	-8584,28	-6278,22	-8580,11	0,009 %	0,04 %
14	4824,13	10640,32	4823,40	10639,54	0,01 %	0,007 %
15	-4879,65	10123,65	-4879,05	10115,11	0,01 %	0,08 %
16	1237,45	-16065,71	1235,59	-16061,06	0,15 %	0,02 %
17	11621,83	-8584,67	11620,95	-8580,21	0,007 %	0,05 %
18	-6300,10	16080,00	-6298,20	16076,58	0,03 %	0,02 %
19	4777,28	-1577,77	4775,45	-1574,33	0,03 %	0,21 %
20	-10808,08	-15239,91	-10807,32	-15238,65	0,007 %	0,008 %
21	-3697,51	1330,74	-3695,50	1327,75	0,05 %	0,22 %
22	14400,21	15238,31	14399,30	15236,92	0,006 %	0,009 %
23	-404,29	-1624,17	-405,08	-1625,37	0,19 %	0,07 %
24	-1104,21	-14365,13	-1103,40	-14362,76	0,07 %	0,01 %
25	-13594,07	1336,17	-13593,24	1334,19	0,006 %	0,14 %
26	1260,58	14347,85	1258,62	14344,05	0,15 %	0,02 %
27	14022,11	-13326,42	14021,28	-13315,87	0,005 %	0,07 %
28	-399,12	-7207,74	-398,61	-7208,75	0,12 %	0,01 %
29	-1126,26	11227,65	-1126,77	11216,07	0,04 %	0,10 %
30	-13206,98	7174,11	-13206,23	7172,25	0,005 %	0,02 %
31	-3724,76	-13346,96	-3722,79	-13338,35	0,05 %	0,06 %
32	10451,16	-21,72	10450,39	-23,50	0,007 %	7,57 %
33	5533,66	-26,31	5531,81	-28,43	0,03 %	7,45 %
34	-6974,09		-6972,00		0,02 %	
35	-9681,41		-9680,85		0,005 %	
36	1397,81		1396,25		0,11 %	
37	3869,88		3870,02		0,003 %	
38	5301,74		5299,94		0,03 %	
39	-7213,88		-7212,51		0,01 %	
40	-2845,21		-2844,96		0,008 %	
41	-4487,94		-4487,14		0,01 %	

Tableau 16 : Comparaisons des forces axiales de l'élément poutre pour la première et deuxième structure (deuxième cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES DEPLACEMENTS (ELEMENT POUTRE).

Noeuds	Déplacements	Pro Sap 2000		Pro Développé		% Erreur	
		Elément Poutre S1	Elément Poutre S2	Elément Poutre S1	Elément Poutre S2	Elément Poutre S1	Elément Poutre S2
1	u_1	0	0	0	0	0 %	0 %
	v_1	0	0	0	0	0 %	0 %
	q_1	0	0	0	0	0 %	0 %
2	u_2	0	0	0	0	0 %	0 %
	v_2	0	0	0	0	0 %	0 %
	q_2	0	0	0	0	0 %	0 %
3	u_3	-0,000066	-0,000086	0,000066	-0,000087	0 %	1,48 %
	v_3	-0,000156	-0,000273	-0,000158	-0,000276	1,26 %	1,08 %
	q_3	0,000055	0,000109	0,000056	0,00011	1,78 %	0,9 %
4	u_4	0,000062	0,000032	0,000062	0,000032	0 %	0 %
	v_4	-0,00015	-0,000405	-0,000151	-0,000409	0,66 %	0,97 %
	q_4	0,000059	0,000131	0,00006	0,000133	1,66 %	1,5 %
5	u_5	-0,000074	-0,000119	-0,000075	-0,00012	1,33 %	0,83 %
	v_5	-0,000337	-0,00072	-0,000340	-0,000728	0,88 %	1,09 %
	q_5	0,000047	0,000097	0,000047	0,0000987	0 %	1,72 %
6	u_6	0,000072	0,000011	0,000072	0,0000109	0 %	0,91 %
	v_6	-0,000369	-0,000853	-0,000373	-0,000862	1,07 %	1,04 %
	q_6	0,000046	0,000079	0,000046	0,0000801	0 %	1,37 %
7	u_7	-0,000046	-0,000099	-0,000046	-0,0001	0 %	1 %
	v_7	-0,000472	-0,000992	-0,000477	-0,001	1,04 %	0,8 %
	q_7	0,000028	0,000052	0,000028	0,000053	0 %	1,88 %
8	u_8	0,000045	-0,000028	0,000045	-0,000028	0 %	0 %
	v_8	-0,00046	-0,001034	-0,000465	0,001046	1,07 %	1,14 %
	q_8	0,000028	0,000044	0,000028	0,000044	0 %	0 %
9	u_9	2,19 E-20	-0,000062	8,05 E-17	-0,000062	0 %	0 %
	v_9	-0,000516	-0,001125	-0,000522	-0,001138	1,014%	1,14 %
	q_9	-4,92 E-20	6,43 E-6	5,23 E-17	6,54 E-6	0 %	0 %
10	u_{10}	-4,68 E-20	-0,000083	-5,92 E-17	-0,000083	0 %	0 %
	v_{10}	-0,000549	-0,001167	-0,000555	-0,00118	1,08 %	1,1 %
	q_{10}	-2,92 E-20	9,71 E-6	3,87 E-17	9,82 E-6	0 %	0 %
11	u_{11}	0,000046	8 E-06	0,000046	8,07 E-06	0 %	0 %
	v_{11}	-0,000472	-0,001039	-0,000477	-0,001051	1,04 %	1,14 %
	q_{11}	-0,000028	-0,000046	-0,000028	-0,000047	0 %	2,12 %

12	u_{12}	-0,000045	-0,000119	-0,000045	-0,00012	0 %	0,83 %
	v_{12}	-0,00046	-0,000991	-0,000465	-0,001	1,07 %	0,9 %
	q_{12}	-0,000028	-0,000055	0,000028	-0,000056	0 %	1,78 %
13	u_{13}	0,000074	0,000027	0,000075	0,0000268	1,33 %	0,74 %
	v_{13}	-0,000337	-0,000818	-0,000340	-0,000827	0,88 %	1,08 %
	q_{13}	-0,000047	-0,000081	-0,000047	-0,000081	0 %	0 %
14	u_{14}	-0,000072	-0,000135	-0,000072	-0,000136	0 %	0,73 %
	v_{14}	-0,000369	-0,00077	-0,000373	-0,000778	1,07 %	1,02 %
	q_{14}	-0,000046	-0,000096	-0,000046	-0,000097	0 %	1,62 %
15	u_{15}	0,000066	0,000041	0,000066	0,000041	0 %	0 %
	v_{15}	-0,000156	-0,000428	-0,000158	-0,000432	1,26 %	0,92 %
	q_{15}	-0,000055	-0,000127	-0,000056	-0,000129	1,78 %	1,55 %
16	u_{16}	-0,000062	-0,000095	-0,000062	-0,000096	0 %	1,65 %
	v_{16}	-0,00015	-0,00029	-0,000151	-0,000293	0,66 %	1,02 %
	q_{16}	-0,000059	-0,000119	-0,000060	-0,000121	1,66 %	1,65 %
17	u_{17}	0	0	0	0	0 %	0 %
	v_{17}	0	0	0	0	0 %	0 %
	q_{17}	0	0	0	0	0 %	0 %
18	u_{18}	0	0	0	0	0 %	0 %
	v_{18}	0	0	0	0	0 %	0 %
	q_{18}	0	0	0	0	0 %	0 %

Tableau 17 : Comparaisons des déplacements de l'élément poutre pour la première et deuxième structure (troisième cas de conditions aux limites)

COMPARAISONS DES REACTIONS.

Noeuds	Réactions (N)	Progr Sap 2000		Progr Développé		% d'erreur	
		Elément Poutre S1	Elément Poutre S2	Elément Poutre S1	Elément Poutre S2	Elément Poutre S1	Elément Poutre S2
1	R_{x_1}	16119,77	14967,7	16117,11	14962,28	0,01 %	0,03 %
	R_{y_1}	7390,04	56,4	7390,53	61,17	0,006 %	7,79 %
	M_{r_1}	-76,42	-116,26	-82,23	-125,7	7,06 %	7,5 %
2	R_{x_2}	-15480,73	-14739,6	-15478,08	-14734,2	0,01 %	0,03 %
	R_{y_2}	7609,96	14584,27	7609,46	14579,58	0,006 %	0,03 %
	M_{r_2}	-72,45	-196,73	-78,18	-212,75	7,32 %	7,52 %

17	$R_{x_{27}}$	-16119,77	-16783,48	-16117,11	-16777,16	0,01 %	0,03 %
	$R_{y_{27}}$	7390,04	15302,39	7390,53	15297,54	0,006 %	0,03 %
	$M_{r_{17}}$	76,42	214,23	82,61	231,9	7,49 %	7,61 %
18	$R_{x_{28}}$	15480,73	16555,37	15478,08	16549,075	0,01 %	0,003%
	$R_{y_{28}}$	7609,96	56,95	7609,46	61,69	0,006 %	7,68 %
	$M_{r_{18}}$	72,45	120,58	78,18	130,26	7,32 %	7,43 %

Tableau 18 : Comparaisons des réactions de l'élément poutre pour la première et deuxième structure (troisième cas de conditions aux limites)

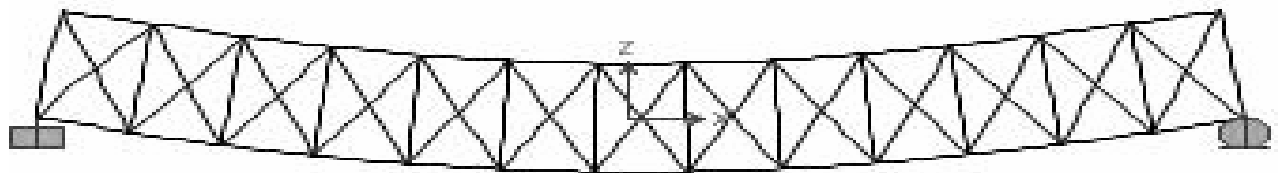
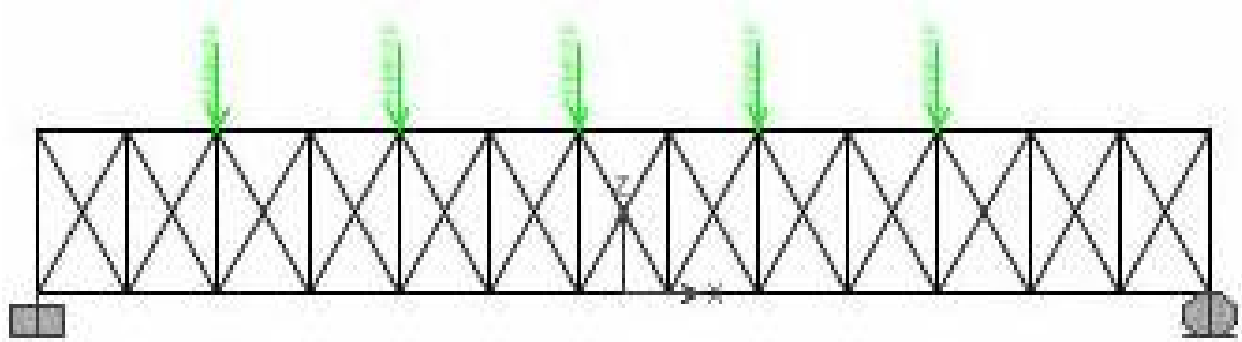
COMPARAISONS DES FORCES AXIALES.

Eléments	Progr Sap 2000		Progr Développé		% d'erreur	
	La force axiale E Poutre S1	La force axiale E Poutre S2	La force axiale E Poutre S1	La force axiale E Poutre S2	Erreur S1	Erreur S2
1	0	0	0	0	0 %	0 %
2	-11460,65	-14967,70	-11459,50	-14962,28	0,01 %	0,03 %
3	-8704,85	17143,39	-8701,69	17127,59	0,03 %	0,09 %
4	8971,05	5562,58	8967,34	5565,19	0,04 %	0,04 %
5	10680,29	-14463,65	10679,54	-14448,74	0,00 %	0,10 %
6	685,99	-5739,03	685,04	-5737,14	0,13 %	0,03 %
7	-1393,68	17174,64	-1394,07	17161,99	0,02 %	0,07 %
8	-9808,71	-3697,91	-9806,31	-3694,69	0,02 %	0,08 %
9	7893,15	-14542,13	7891,14	-14534,20	0,02 %	0,05 %
10	1777,77	3502,49	1777,80	3501,97	0,001 %	0,01 %
11	-3523,96	5464,88	-3522,32	5462,96	0,04 %	0,03 %
12	4836,36	-6666,01	4836,10	-6665,36	0,005 %	0,009 %
13	-3724,18	-4614,14	-3724,15	-4612,18	0,0008%	0,04 %
14	2190,54	6455,63	2190,34	6456,49	0,009 %	0,01 %
15	-4655,35	5420,38	-4655,04	5414,10	0,006 %	0,11 %
16	1302,52	-9587,42	1300,65	-9585,22	0,14 %	0,02 %
17	8017,97	-4614,13	8017,47	-4611,81	0,006 %	0,05 %
18	-3743,45	9360,99	-3742,09	9358,94	0,03 %	0,02 %
19	2145,28	-6281,41	2143,98	-6275,77	0,06 %	0,08 %
20	-7802,71	-6227,10	-7802,30	-6227,94	0,005 %	0,01 %
21	-3628,07	5300,52	-3626,10	5295,27	0,05 %	0,09 %
22	8017,97	5984,57	8017,47	5984,20	0,006 %	0,006 %
23	2145,28	-6324,99	2143,98	-6323,60	0,06 %	0,02 %
24	-3743,45	-2919,30	-3742,09	-2818,92	0,03 %	1,91 %
25	-7802,71	5311,82	-7802,30	5308,29	0,005 %	0,06 %
26	1302,52	2562,22	1300,65	2559,49	0,14 %	0,10 %
27	4836,36	-18042,45	4836,10	-18031,09	0,005 %	0,06 %
28	2190,51	6879,79	2190,34	6877,87	0,007 %	0,02 %
29	-3724,18	15159,60	-3724,15	15142,32	0,0008%	0,11 %
30	-4655,35	-7159,16	-4655,04	-7161,68	0,006 %	0,03 %
31	-3523,96	-17977,96	-3522,32	-17960,48	0,04 %	0,09 %

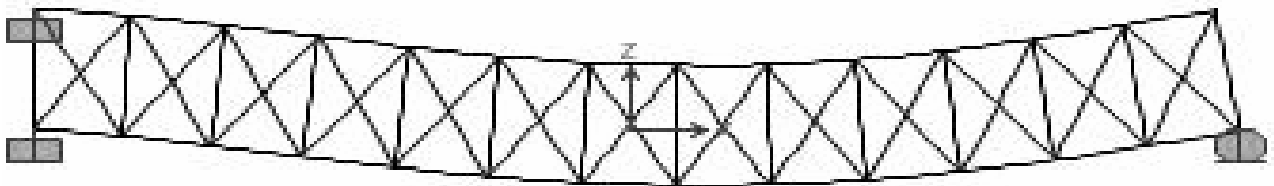
Eléments	Progr Sap 2000		Progr Développé		% d'erreur	
	La force axiale E Poutre S1	La force axiale E Poutre S2	La force axiale E Poutre S1	La force axiale E Poutre S2	Erreur S1	Erreur S2
32	-1393,68	16555,37	-1394,07	16549,07	0,02 %	0,03 %
33	7893,15	0	7891,14	0	0,02 %	0 %
34	-9808,71		-9806,31		0,02 %	
35	1777,77		1777,80		0,001 %	
36	685,99		685,04		0,13 %	
37	-11460,65		-11459,50		0,01 %	
38	8971,05		8967,34		0,04 %	
39	8704,85		-8701,69		0,03 %	
40	10680,29		10679,54		0,007 %	
41	0		0		0 %	

Tableau 19 : Comparaisons des forces axiales de l'élément poutre pour la première et deuxième structure (troisième cas de conditions aux limites)

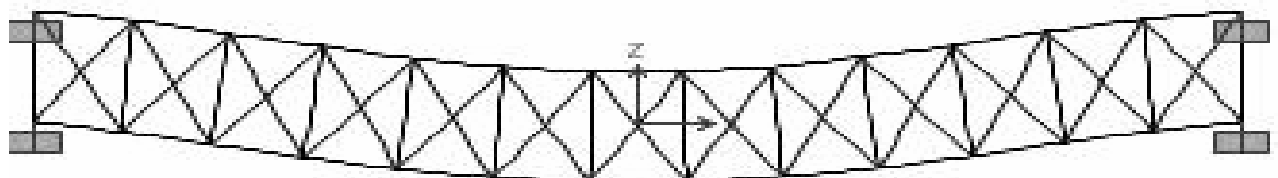
IV.10 Les déformations des structures



a - structure N°1 exemple 1

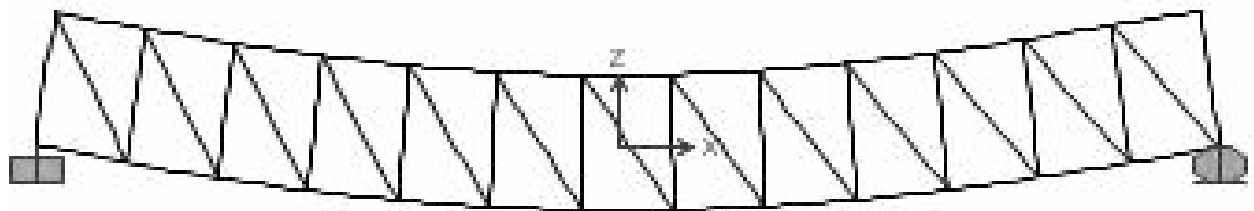
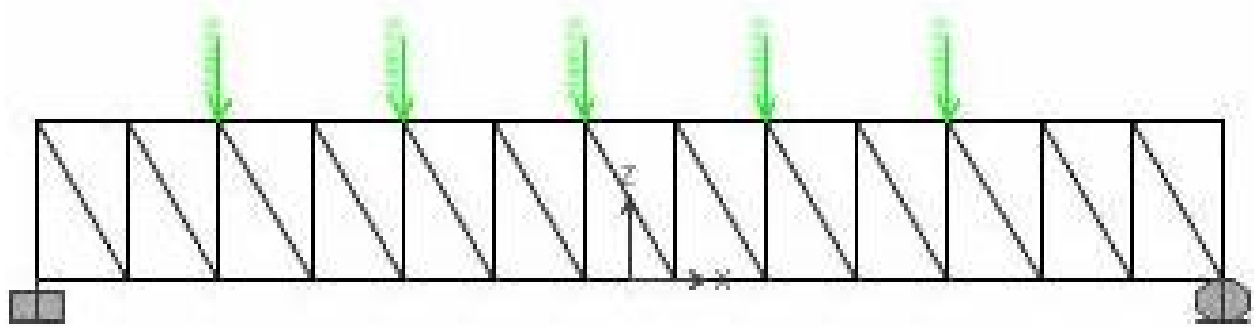


b - structure N°1 exemple 2

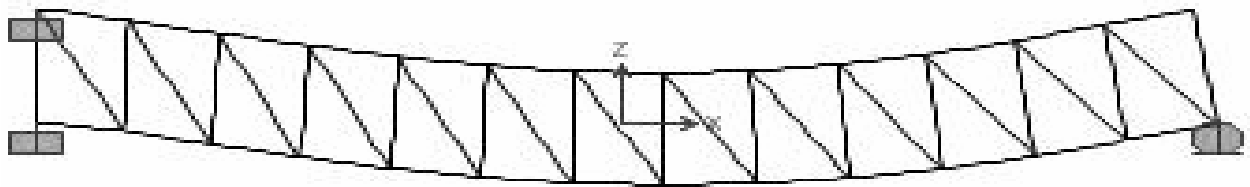


c - structure N°1 exemple 3

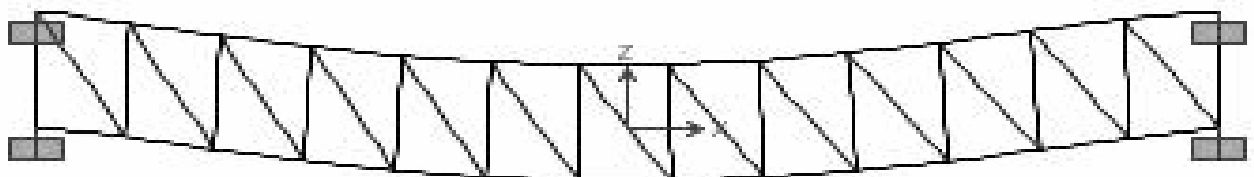
Fig.4.5 : Déformation de la structure N°1 (élément barre)



a- structure №2 exemple 1

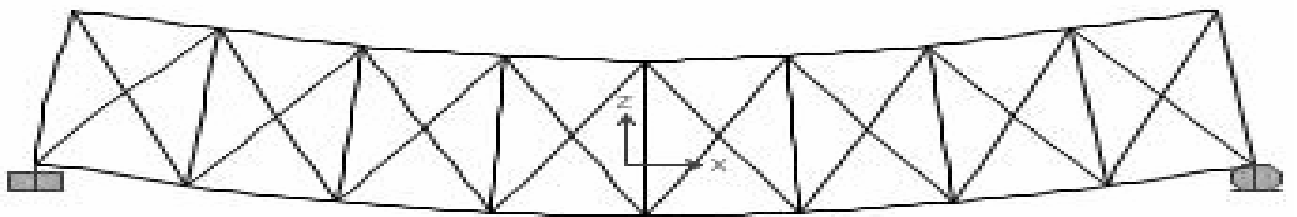
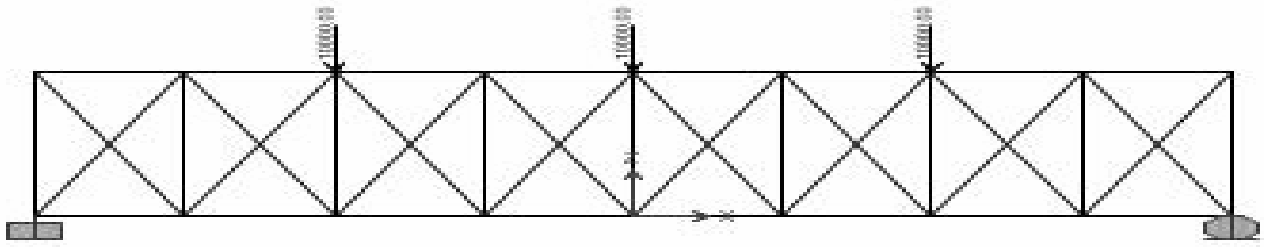


b- structure №2 exemple 2

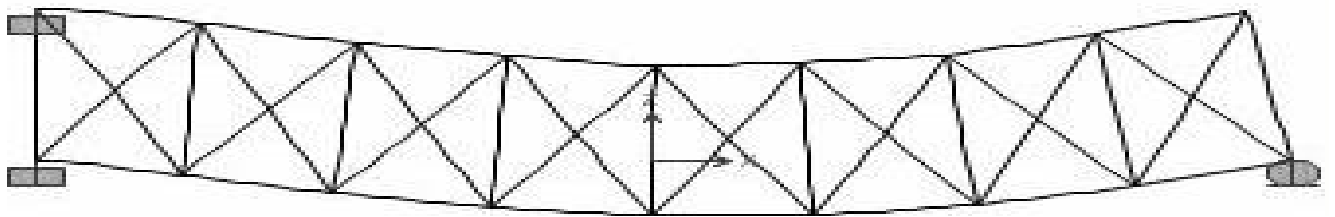


C - structure №2 exemple 3

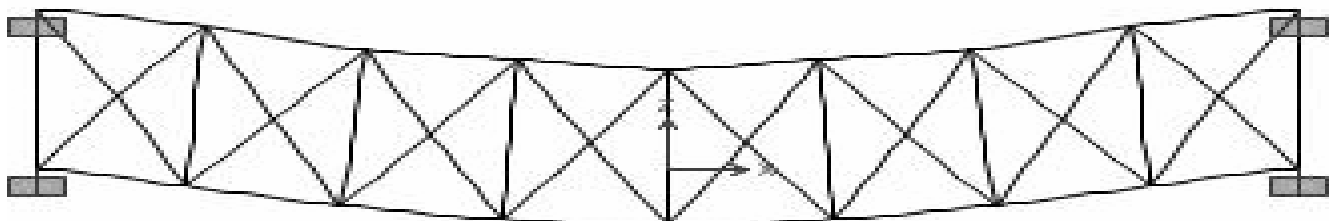
Fig.4.6. : Déformation de la structure №2 (élément barre)



a - structure N°1 exemple 1

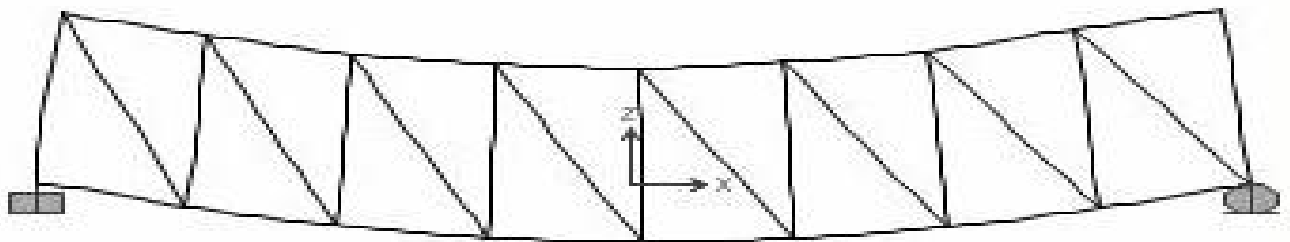
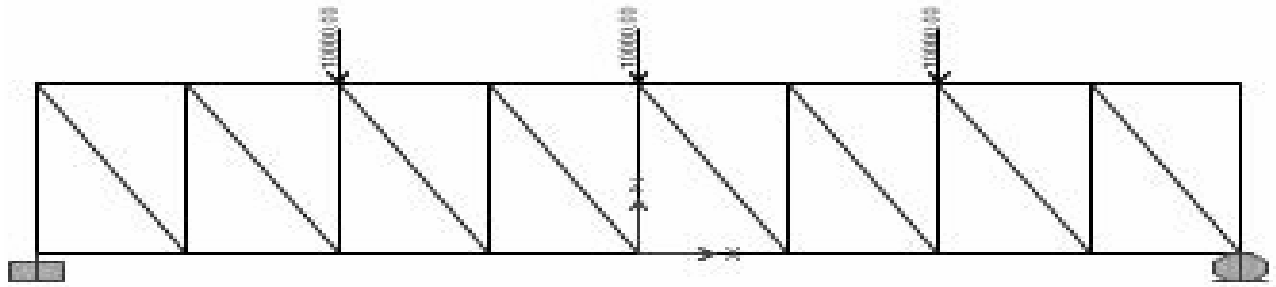


b - structure N°1 exemple 2

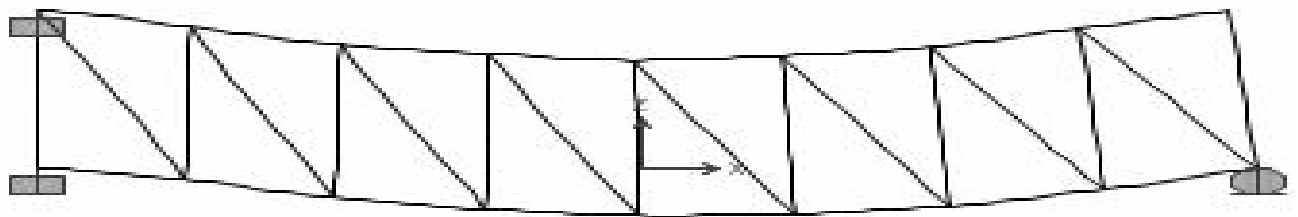


c - structure N°1 exemple 3

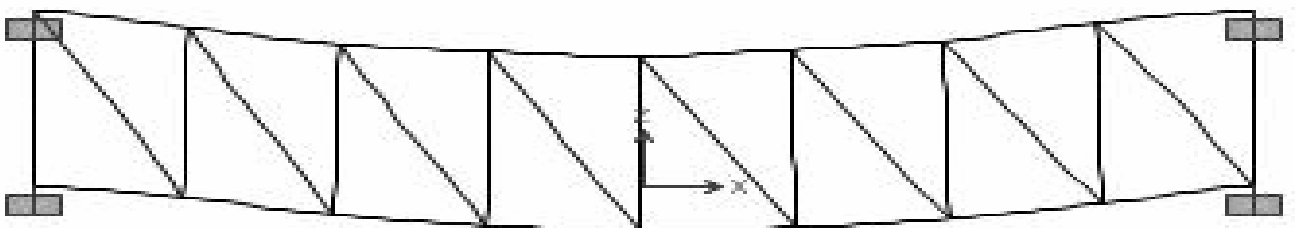
Fig.4.7 : Déformation de la structure N°1 (élément poutre)



a - structure №2 exemple 1



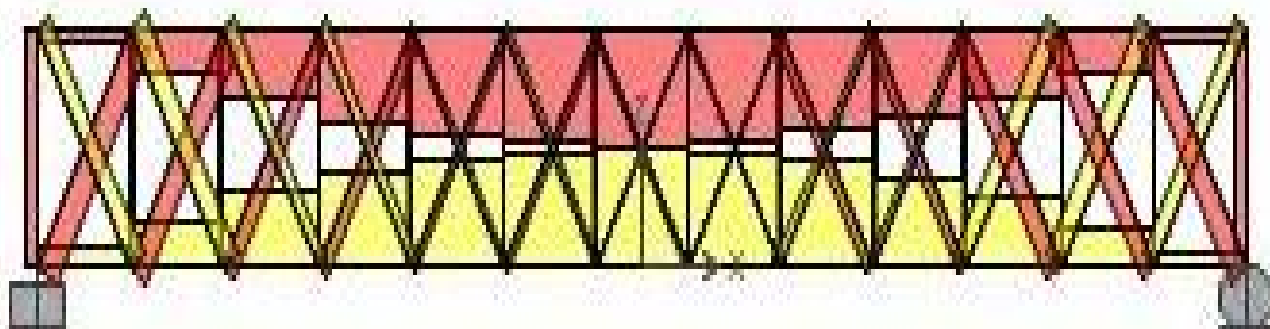
b - structure №2 exemple 2



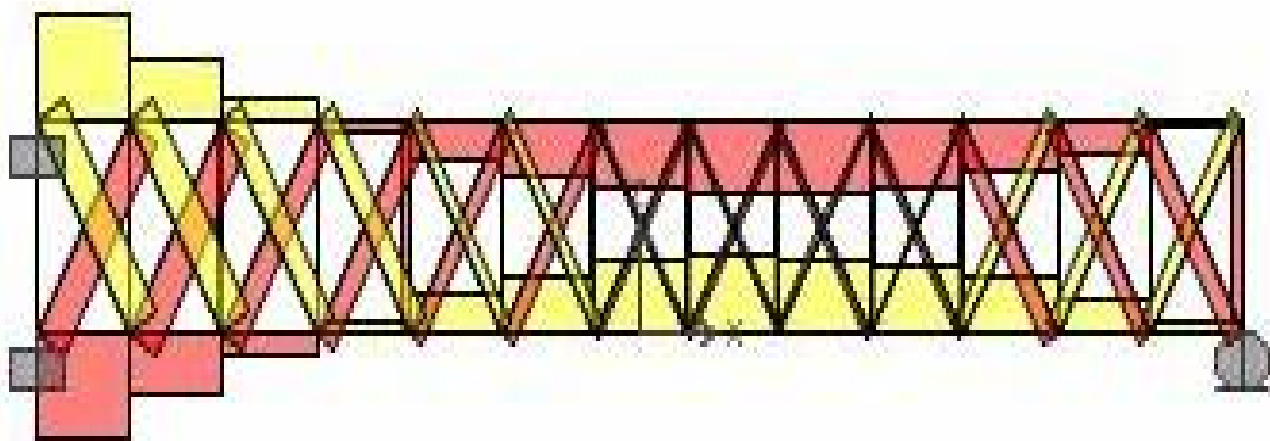
c - structure №2 exemple 3

Fig.4.8: Déformation de la structure №2 (élément poutre)

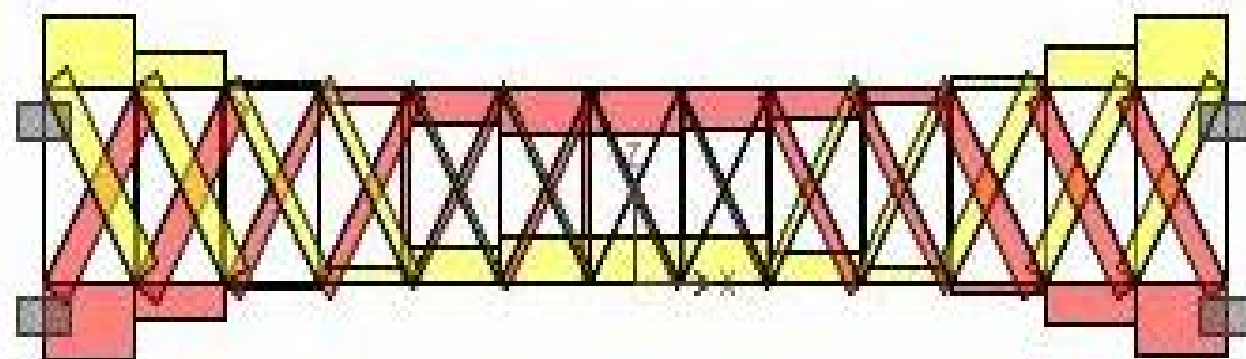
IV.11 Les digrammes des forces axiales



a- structure N°1 exemple 1



b - structure N°1 exemple 2



C - structure N°1 exemple 3

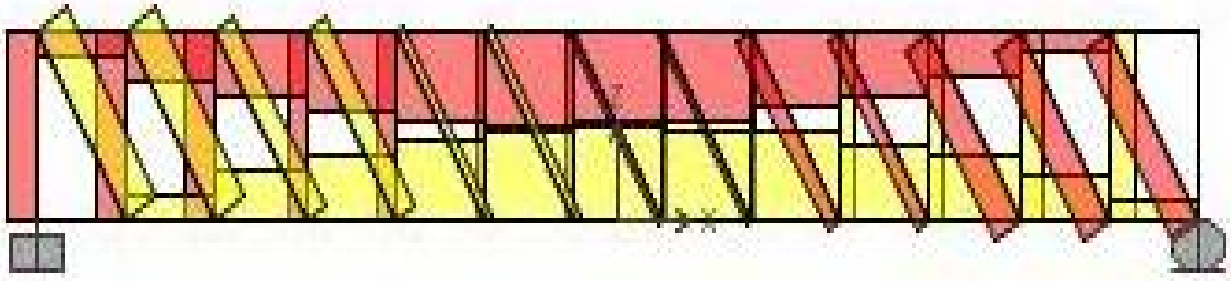
Valeur positive



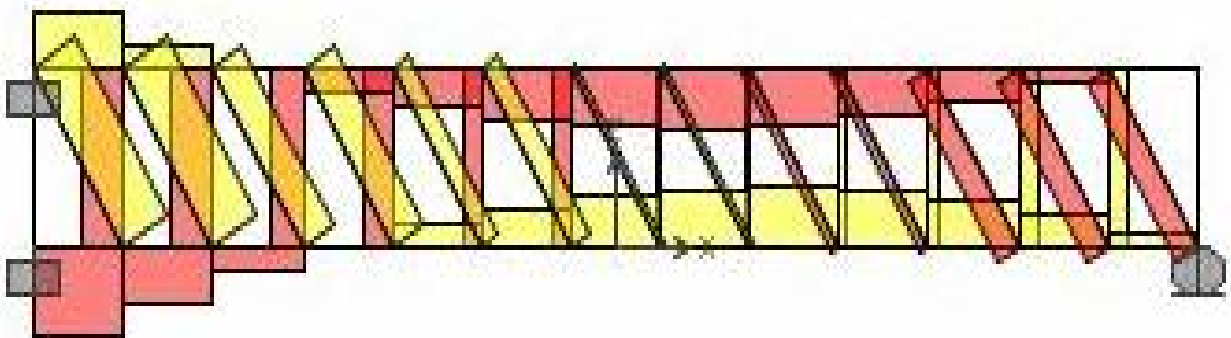
Valeur négative



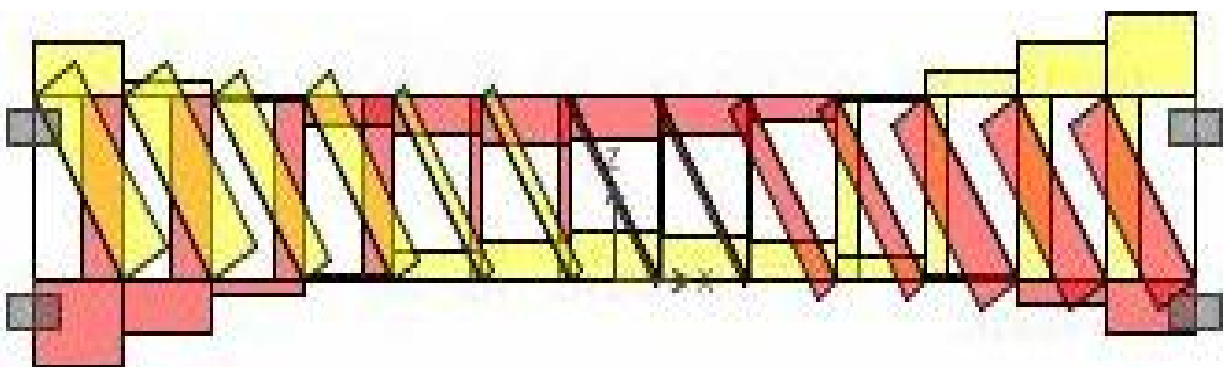
Fig.IV.9 : les forces axiales pour la structure N°1 (élément barre)



a - structure №2 exemple 1

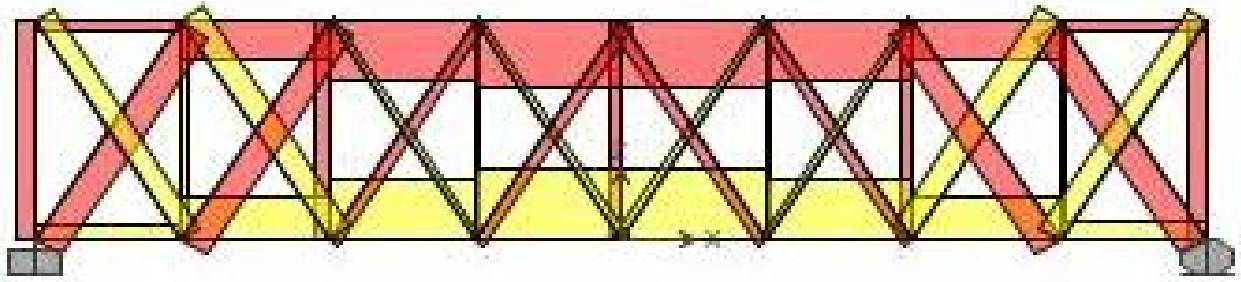


b - structure №2 exemple 2

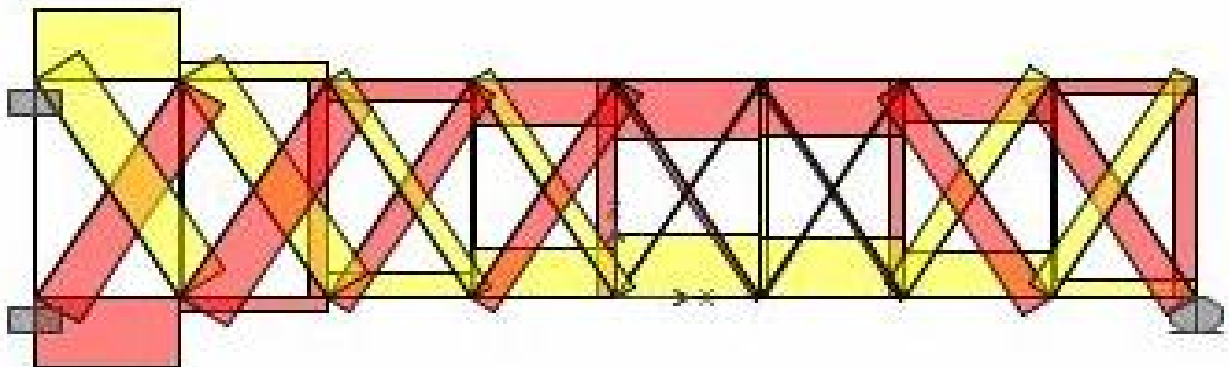


c - structure №2 exemple 3

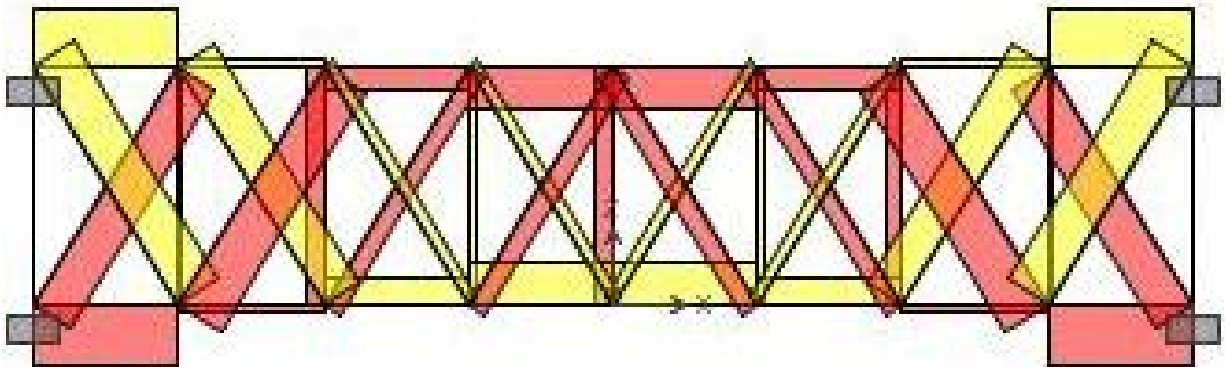
Fig.IV.10 : les forces axiales pour la structure №2 (élément barre)



a- structure N°1 exemple 1

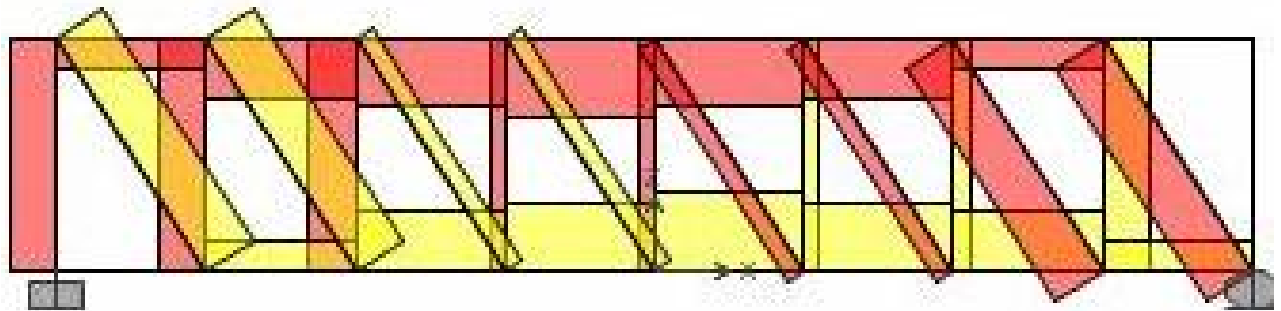


b - structure N°1 exemple 2

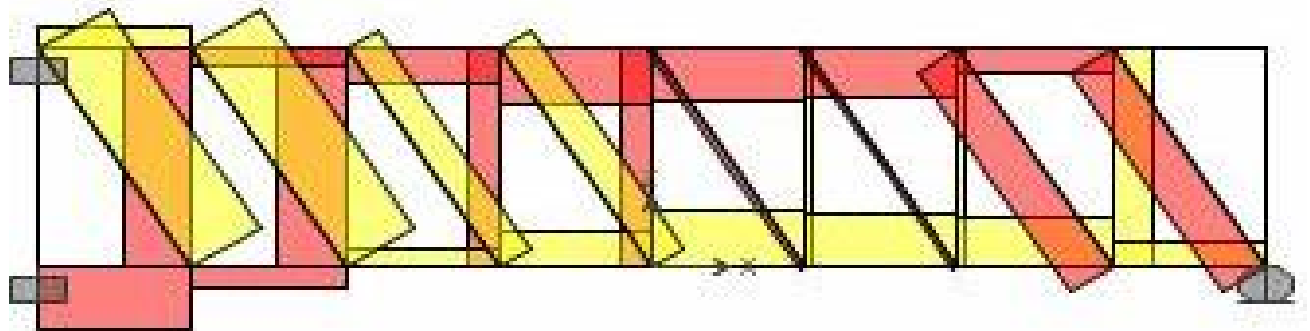


C - structure N°1 exemple 3

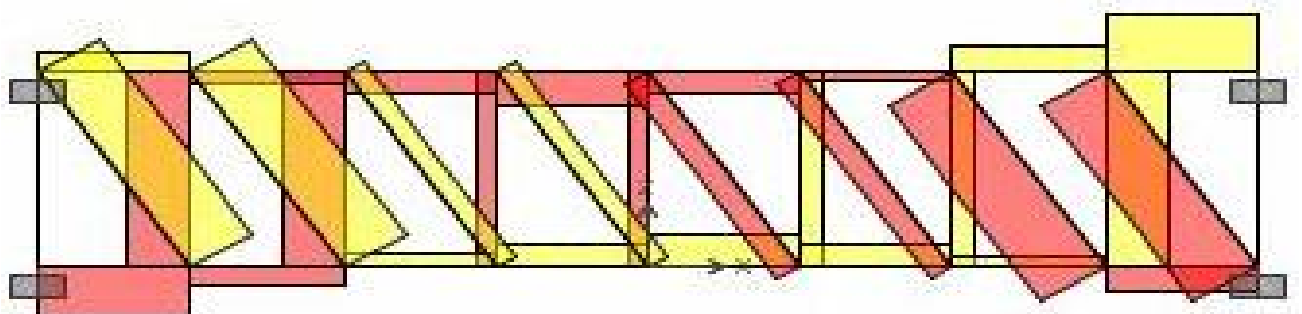
Fig.IV.11 : les forces axiales pour la structure N°1 (élément poutre)



a - structure N°2 exemple 1



b - structure N°2 exemple 2



C - structure N°2 exemple 3

Valeur positive



Valeur négative



Fig.IV.12 : les forces axiales pour la structure N°2 (élément poutre)

IV.9 Discussion des résultats

La méthode des éléments finis est une technique très puissante pour l'analyse des structures discrètes, puisqu'elle repose essentiellement sur les calculs numériques. Elle permet la détermination des déplacements à n'importe quel nœud de la structure. L'objet essentiel du calcul de ces déplacements est de déterminer les forces axiales, ainsi que les contraintes dans n'importe quel élément de la structure.

Suite aux résultats obtenus par le programme développé, on arrive à tirer les constatations suivantes :

- 1- En premier lieu, on peut dire que ce programme développé donne des résultats identiques lorsqu'on utilise l'élément barre ou l'élément poutre.
- 2- Ce programme développé permet de calculer les déplacements dans chaque nœud, et de voir ainsi la déformation de la structure.
- 3- Ce programme développé donne les forces axiales dans chaque élément, ce qui permet de déterminer les contraintes maximales et minimales dans chaque structure suivant les conditions aux limites définies dans chaque cas comme illustré dans le tableau suivant :

Structures	Valeur de la contrainte maximale	Numéro d'élément
1 ^{ère} structure élément barre (Exemple 1)	31869,08	32
1 ^{ère} structure élément barre (Exemple 2)	25280,21	02
1 ^{ère} structure élément barre (Exemple 3)	17345,54	02
2 ^{ème} structure élément barre (Exemple 1)	31179,48	30
2 ^{ème} structure élément barre (Exemple 2)	28563,17	02
2 ^{ème} structure élément barre (Exemple 3)	20931,69	02
1 ^{ère} structure élément poutre (Exemple 1)	24082,39	22
1 ^{ère} structure élément poutre (Exemple 2)	16209,78	02
1 ^{ère} structure élément poutre (Exemple 3)	11459,50	02
2 ^{ème} structure élément poutre (Exemple 1)	25244,65	18
2 ^{ème} structure élément poutre (Exemple 2)	21865,42	07
2 ^{ème} structure élément poutre (Exemple 3)	17960,48	31

- 4- Ce programme permet le choix des meilleures conditions aux limites pour une structure dont les contraintes sont minimales, en prenant cette structure sous les mêmes excitations extérieurs (i.e : structure N°1, structure N°2) et en variant ces conditions (1^{er}, 2^{ème} et 3^{ème} cas).

Enfin, on peut dire que le programme développé à prouver son efficacité dans les calculs des structures discrètes en utilisant la méthode des éléments finis.

BIBLIOGRAPHIE

- [01] **Fançois. Frey, et Jarostove. Jirousek**, “ Analyse des structures et milieu continu par la méthode des éléments finis ” , volume 6, Presses polytechniques, édition (2001)
- [02] **O.Rahmani, et S.Kabdani**, “ Introduction à la méthode des éléments finis pour les ingénieurs”, office des publications universitaires, édition (1994)
- [03] **Yang.T.Y** “Finite element structural analysis”, Prentice-Hall (1986).
- [04] **J.Pierre.Demailly** “ Analyse numérique et équations différentielles ”, Office des publications universitaires, édition (1994).
- [05] **Fançois. Frey**, “ Analyse des structures et milieu continu (Statique appliquée)”, Presses polytechniques, volume 1, édition (1990).
- [06] **S.Laroze**, “ Mécanique des structures”, Tome 3, édition (1992).
- [07] **Fançois. Frey**, “ Analyse des structures et milieu continu (Mécanique des solides)”, édition (1998).
- [08] **Marc.Bonnet**, “ Analyse des structures mécaniques par la méthode des éléments finis”, Article (2005).
- [09] **R.Lalaonina**, “ Dynamique des solides et structures par la méthode des éléments finis”, Université de Rennes 1, 14 / 02 / 2005.
- [10] **Philippe.Fichou**, “ La méthode des éléments finis ”, Article, (2000-2001).
- [11] **Jean.Courbon**, “ Structures élastiques composées des poutres ”, Article, (C2030-8), technique de l'ingénieur.
- [12] **L. Champagney**, “ Vibration des systèmes continus ”, Article, (2003).
- [13] **B. Necib**, “ Analyse dynamique des structures discrètes par éléments finis ”, cours, université de Constantine (1997).
- [14] **Ph.Trompette**, “ Mécanique des structures par la méthode des éléments finis

- (Statique et dynamique), Masson, édition, (1992).
- [15] **M.Lalanne, P.Berthier, J.Der Hagobian**, “ Mécanique des vibrations linéaires ”, Masson, édition, (1995)
- [16] **M.C.BELAID**, “ Technique de programmation ”, édition (2001).
- [17] **A.Picard**, “ Analyse des structures ”, édition Bauchemin (1992).
- [18] **G.Thomas**, “ Dynamique des structures ”, édition, Presses polytechniques, CH-1015, Lausanne (1997).
- [19] **R.Gallagher**, “ Introduction aux éléments finis ”, édition PLURALIS (1976).
- [20] **S.Laroze**, “ Mécanique des structures ”, Tome 3, édition (1992).
- [21] **M.Albiges, A.Coin**, “ Résistance des matériaux appliquée ”, Tome 1, Eyrolles, édition (1986).
- [22] **F. Frey**, “ Analyse des structures et milieux continus (mécanique des solides) ”, Volume 3, Presses polytechniques, édition (1999).
- [23] **B.Tie**, “ Eléments finis en élasticité linéaire ”, édition septembre (2000).
- [24] **J. Coirier**, “ Mécanique des milieux continus ”, Dunod, édition (1997).
- [25] **D.Euvrard**, “ Résolution numérique des équations aux dérivées partielles ”, 3^{eme} édition (1994).
- [26] **J.Carrigues**, “ Statiques des solides élastiques en petites déformations ”, Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille, édition novembre (2001).
- [27] **M.Bonnet**, “ Analyse des structures mécaniques par la méthode des éléments finis ”, Ecole polytechnique, édition (2005).
- [28] **M.Bausset**, “ Dynamiques ”, Hermann, édition (1982).
- [29] **C.Lalanne**, “ Vibrations sinusoïdales ”, Hermes science publication, Paris, édition (1999).
- [30] **M.Pedro et P.Pahud**, “ Mécanique vibratoire (systèmes discrets linéaires) ”, Presses Polytechniques, Lausanne, (1997)