UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département des Mathématiques

MEMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de MASTER

Spécialité: Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Par

SAFA SEGHIOUR

SUJET

Opérateurs multilinéaires Lipchitziens

Soutenu publiquement le : **devant le jury composé de :**

Mr. Abdelmoumen TIAIBA	Prof	Université de M'sila	Président
Mr. Khalil SAADI	Prof	Université de M'sila	Rapporteur
Mr. Maatougui BELAALA	MCB	Université de M'sila	Examinateur
Mr. Abdelaziz BELAADA	MCB	Université de M'sila	Examinateur

Année universitaire: 2020/2021

Remerciements

Je remercie en premier lieu Dieu qui m’a donné ce bien pour que nous venions ce jour et la force et la patience pour terminer ce travail.

Je tiens à exprimer mes remerciements à mon encadreur Saadi Khalil qui a proposé et a dirigé ce travail.

Je remercie les membres de jury de ce mémoire.

Je remercie mes parents et mon mari de m'avoir toujours encouragé et de ne pas me laisser abandonner.

Enfin, je remercie tous les amis et toutes les personnes qui m'ont aidé

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à mon père et à ma mère en premier lieu je le dédie aussi à mes frères et ma sœur à mon mari Mohamed et à tous mes amis

Notation

$\mathbb{K}$	Corps des scalaires ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
e	élément neutre ou distingué, on prend 0 si X est normé.
(X, d)	Espace métrique.
$(X, \|.\|)$	Espace vectoriel normé.
L^p	Espaces de Lebesgue.
$C(K)$	L'espace des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$.
$\ell_p(X)$, (resp. $\ell_p^n(X)$)	Espace des suites (resp. finies) absolument p-sommables.
$\ell_{p,w}(X)$, (resp. $\ell_{p,w}^n(X)$)	L'espace des suites (resp. finies) faiblement p-sommables.
$\langle ., . \rangle$	Produit scalaire.
$L(X, Y)$	L'espace des applications linéaires de X dans Y.
$\mathcal{L}(X, Y)$	L'espace des opérateurs linéaires continues de X dans Y.
X^*	Espace dual (topologique) de X.
p^*	L'exposant conjugué de p, i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.
i_X	Injection canonique.
$\ell_\infty(X)$	Espace des suites bornées de X dans $\mathbb{R}$.
B_X	La boule d'unité fermée de l'espace X : $B_X := \{x \in X, \|x\| \leq 1\}$.
$T : X \hookrightarrow Y$	T est isométrie.
$\sigma(X, X^*)$	Topologie faible définie sur X.
$\sigma(X^*, X)$	Topologie $*$-faible définie sur X^*.
$\Pi_p(X, Y)$	L'espace des opérateurs linéaires p-sommable de X dans Y.

Table of contents

Notations **i**

Introduction **i**

1 Généralité sur les opérateurs multilinéaires et applications lipschitziennes 1

1.1 Introduction 1

1.2 Espace vectoriel 1

1.3 Espace de Banach 4

1.4 Espace des opérateurs linéaires 6

1.5 Opérateur multilinéaire 9

1.6 Espace des applications lipschitziennes 11

2 Opérateurs sommant **14**

2.1 Introduction 14

2.2 Espace de suites 14

2.3 Opérateurs linéaires sommants 16

2.4 Caracterisation des opérateurs linéaires p-sommants 16

2.5 Opérateur linéaire fortement p-sommant 18

2.6 Opérateurs multilinéaires sommants 19

2.6.1 Opérateurs multilinéaires absolument p-sommants 19

2.6.2 Opératurs multilinéaires absolument $(p; p_1, ..., p_m)$-sommants. 20

2.6.3 Opérateurs multilinéaires p-dominés 20

2.6.4 Opérateurs multilinéaires multi p-sommants 22

2.6.5 Opérateurs multilinéaires fortement p-sommants 22
2.6.6 Opérateurs Cohen fortement p-sommants 23

3 Opérateurs multilinéaires Lipschitziens 24

3.1 Introduction 24
3.2 Cône de Serge 24
3.3 Opérateurs multilinéaires Lipschitziens 27
3.4 Comparaisons avec les opérateurs de Hilbert Schmidt 30

Introduction

Ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la théorie des opérateurs multilinéaires Lipschitziens. Il porte essentiellement sur les résultat de l'article de " *Lipschitz p-summing multilinear operators*" de J. C. Angulo-López et M. Fernández-Unzueta. L'idée de base est de transforer la définition des applications Lipschiziennes sommants aux opérateurs multilinéaires.

Le mémoire s'articule autour de trois chapitres.

Dans le premier chapitre; on rappelle les résultats que on a besoin dans la suite de ce mémoire. Commençons par donner la définition d'un espace de Banach ainsi que de Hilbert et quelques propriétés relatives à ces deux types d'espaces. On donne la définition des opérateurs linéaires et quelques propriétés. Ensuite, on étudie les opérateurs multilinéaires. Quelques notions et propriétés serons exposées; telles que: l'opérateur adjoint, le produit tensoriel, l'opérateur linéairisé et enfin le produit tensoriel. On termine ce chapitre par mettre l'accent sur les application Lipschitziennes.

Le deuxième chapitre sera consacré à étudier les opérateurs sommants, version linéaire, multilinéaire et enfin Lipschitzienne. Tout d'abord on fait un rappel sur les espaces de suites, puis on introduit la définition des opérateurs linéaire sommant. Ensuite, on exposera la définition des opérateurs multilinaires sommant avec quelques types d'opérateurs célèbres. Finalement, on termine ce chapitre par les opérateurs Lipschitziennes sommant.

Le troisième chapitre sera consacré à étudier l'article "*Lipschitz p-summing multilinear operators".* On va faire une étude détaillé sur ce nouvel type d'opérateurs.

Chapter 1

Généralité sur les opérateurs multilinéaires et applications lipschitziennes

1.1 Introduction

Dans ce chapitre on va présenter les définitions et notions qu'on a besoin dans le suite. On commence par les espaces vectoriels puis les espaces de Banach et Hilbert. Ensuite, on va donner la définition d'un opérateur linéaire ainsi que l'espace des opérateurs linéaires et l'espace dual. Les opérateurs multilinéares et les application Lipschitziennes sont aussi présentés dans à la fin de ce chapitre.

1.2 Espace vectoriel

Un espace vectoriel est un ensemble formé des vecteurs, de sorte que l'on puisse additionner (et soustraire) deux vecteurs x , y pour en former troisième $x + y$ (ou $x - y$) et aussi afin que l'on puisse multiplier chaque vecteur x par un scalaire λ pour obtenir un vecteurλx.

Définition 1.1 (Espace vectoriel). Soit $\mathbb{K}$ un corps commutative ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) et soit $\mathbb{E}$ un ensemble muni de deux lois de composition, l'une interne et notée additivement

$$\begin{array}{rccc} (+): & \mathbb{E} \times \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ & (x, y) & \longrightarrow & x + y \end{array}$$

l'autre externe et notée multiplicativement

$$\begin{array}{rccc} (\cdot): & \mathbb{K} \times \mathbb{E} & \longrightarrow & E \\ & (\lambda, x) & \longrightarrow & \lambda \cdot y \end{array}$$

On dit que ($\mathbb{E}$; + ; $\cdot$) est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ si :

($\mathbb{E}$, +) est un groupe commutative ,c'est-à-dire :

- $\forall\ x\ ,\ y \in \mathbb{E} :\ x + y = y + x$ (commutatif).
- $\exists \varrho \in \mathbb{E}\ ,\ \forall\ x \in \mathbb{E} :\ x + \varrho = \varrho + x = x$ (élément neutre).
- $\forall\ x \in \mathbb{E}\ ,\ \exists x' \in \mathbb{E}\ ,:\ x + x' = x' + x = \varrho$ (élément symétrique).
- $\forall\ x\ ,\ y\ ,\ z \in \mathbb{E} :\ (x + y) + z = x + (y + z)$ (associative).

pour $x\ ,\ y \in \mathbb{E}$ et $\alpha\ ,\ \beta \in \mathbb{K}$

- $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
- $x \cdot (\alpha + \beta) = x \cdot \alpha + x \cdot \beta$
- $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$

Exemple 1.2.
Pour $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ un ensemble muni de addition et de la multiplication par un scalaire définie par :
- $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$
- $\lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2)$

est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
Pour $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2 - (0, 0)$ n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel car : si $\lambda = 0$ alors

$$\lambda(x_1, x_2) = \lambda(0, 0) = (0, 0) \notin \mathbb{R}^2 - (0, 0).$$

Définition 1.3 (sous-espace vectoriel). Soit $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $\mathbb{F}$ une partie de $\mathbb{E}$ non vide; on dit que $\mathbb{F}$ est sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ si :

$\varrho \in \mathbb{F}$ (ϱ est l'élément neutre de $\mathbb{E}$)

$\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x$, $y \in \mathbb{F}$

$$x + y \in \mathbb{F} \text{ et } \alpha x \in \mathbb{F}$$

Exemple 1.4. Pour $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$.

1. $\mathbb{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x - 2y\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$
2. $\mathbb{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ car: $(0, 0) \notin \mathbb{F}$ tq $(0, 0)$ l'élément neutre de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 1.5. $\mathbb{F}$ est sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ ssi

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in \mathbb{F} : \alpha x + y \in \mathbb{F}$$

Définition 1. 6 (*Norme*). Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) , Une application :

$$\| \cdot \| : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

est une **norme** si, et seulement si les propriétés suivantes sont vérifiées : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in X$

1. $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, (défini) ;
2. $\| \lambda x \| = | \lambda | \| x \|$ (homogénéité) ;
3. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ (inégalité triangulaire).

Si on supprime le (1), on dit que $\| \cdot \|$ est une semi-norme.

Définition 1.7 (*Espace normé*). Soit X un espace vectoriel ; on dit que câ est un **espace vectoriel normé** (**un espace normé**) s'il est muni d'une norme.

Exemple 1.8.

1. Pour $X = \mathbb{R}$ avec la norme usuelle

$$\| x \| = | x |; \forall x \in \mathbb{R} \text{ (valeur absolue).}$$

2. Pour $X = \mathbb{R}^n$. Si x est dans X, on pose $x = (x_1, ..., x_n)$, on a :

- $\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | x_i |$.
- $\| x \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2}$.
- $\| x \|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} | x |$.

Définitin 1.9 (*Equivalence des normes*). Soit $\| \cdot \|$ et $\| \cdot \|'$ deux normes sur un espace vectoriel X ; $\| \cdot \|$ et $\| \cdot \|'$ sont **équivalentes** ($\| \cdot \| \simeq \| \cdot \|'$) si :

$$\exists \alpha > 0, \beta > 0 : \alpha \| \cdot \| \leq \| \cdot \|' \leq \beta \| \cdot \| .$$

Exemple 1.10 Les trois normes $\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ de $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Proposition 1.11 Si la dimension de l'espace vectoriel normé X finie ($\dim(X) \leq \infty$); alors toutes les normes dans X sont équivalentes.

1.3 Espace de Banach

Depuis leur création par Banach en 1922, les espaces normés jouent un rôle central en analyse fonctionnelle. Les espaces de Banach sont des espaces normés complets. La complétude permet de prouver la convergence d'une suite ou d'une série sans connaitre sa limite.

Définition 1.12 (*Suite de Cauchy*). Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans un espace vectoriel normé $(X, \| \cdot \|)$; on dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **une suite de Cauchy** si :

$$\forall \varepsilon \geq 0, \exists \eta \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq \eta ; \| x_n - x_m \| \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.13 Toute suite convergente est de Cauchy.

Définition 1.14 (*Espace complet*). Un espace normé $(X, \| \cdot \|)$ sera dit complet si toute suite de Cauchy d'éléments de X est convergente dans X.

Proposition 1.15. Tout espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ normé de dimension finie est complet.

Exemple 1.16.

1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est un espace complet;
2. $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ n'est pas un espace complet.

Définition 1.17 (*Espace de Banach*) On appelle espace de Banach tout espace normé complet.

Proposition 1.18. Tout espace Banach X est fermé.

Exemple 1.19.
(1) $(\ell_p, \|\cdot\|_p), (c_0, \|\cdot\|_\infty)$ sont des espaces de Banach;
(2) $(c_0, \|\cdot\|_1)$ n'est pas espaces de Banach.

Espace de Hilbert
L'espace de Hilbert a été introduit par David Hilbert en 1909 pour développer l'analyse fonctionnelle abstraite. On note en général par H.

Défintion 1.20 (*Produit scalaire*). Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On appelle **produit scalaire** sur H toute application:

$$< \cdot ; \cdot >: H \times H \Rightarrow \mathbb{K}$$

vérifiant : $\forall x$, x' , $y \in \mathbb{H}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$
I) pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

1. $< x; y > = < y; x >$ (symétrique);
2. $< x + \lambda x'; y > = < x; y > + \lambda < x'; y >$ (bilinéaire);
3. $< x; x > \geq 0$ et $< x; x > = 0 \Longrightarrow x = 0$ (défiie-positive).

II) pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

1. $< x; y > = \overline{< y; x >}$ (antisymétrique);
2. $< x + \lambda x'; y > = < x; y > + \lambda < x'; y >$ (hermitiène);
3. $< x; x > \geq 0$ et $< x; x > = 0 \Longrightarrow x = 0$ (défiie-positive).

Définition 1.21 (*Espace préhilbertien*).

Un espace préhilbertien réel est un couple $(H, < \cdot; \cdot >)$ ou H est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $< \cdot; \cdot >$ un produit scalaire sur H. Si de plus, H est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $(H, < \cdot; \cdot >)$ est un espace euclidien.

Théorème 1.22. Soit $(H, < \cdot; \cdot >)$ un espace préhilbertien , alors

$$\forall x, y \in H : |< \mathbf{x}, \mathbf{y} >| \leq \| \mathbf{x} \| \| \mathbf{y} \| .$$

Corollaire 1.23. Soit $(H, < \cdot; \cdot >)$ un espace préhilbertien , alors

$$\| x \| = \sqrt{|< x, y >},$$

est une **norme** sur H.

Proposition 1.24 (*Loi de parallélograme*). Soit $(H, < \cdot; \cdot >)$ un espace préhilbertien , alors

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2).$$

Définition 1.25 (*Espace Hilbert*). Un **espace Hilbert** est un espace préhilbertien et complet.

Exemple 1.26. L'espace de suites

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{ x = (x_n)_n \in \mathbb{N} : \sum_{n \geq 0} x_n^2 < \infty \right\}$$

est un espace Hilbert avec

$$< x, y >= \sum_{n \geq 0} x_n y_n.$$

1.4 Espace des opérateurs linéaires

Définition 1.27 (*Application*). On appelle application d'un ensemble X dans un ensemble Y , toute correspondance f entre les éléments de X et ceux de Y qui à tout élément $x \in X$ fait correspondre un unique élément $y \in Y$ noté $f(x)$. Une correspondance entre X et Y

est représentée par: $f : X \longrightarrow Y$. Une application f entre X et Y est aussi représentée par

$$\begin{array}{cccc} f & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longrightarrow & f(x) \end{array}$$

Une correspondance f entre deux ensembles non vides est une application si et seulement si

$$\forall x, y \in X : x = y \Rightarrow f(x) = f(y).$$

Exemple 1.28. L'application $id_X : X \longmapsto X$ telle que $\forall x \in X$; $id_X(x) = x$ est appelée application identité sur X.

Définition 1.29. (*Application linéaire*). Soient X et Y des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On dit que l'application

$$T : X \longmapsto Y$$

est linéaire si, pour tout x et tout y dans X, et pour tout λ dans $\mathbb{K}$:

$$T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y).$$

On note $L(X, Y)$ *l'ensemble des applications linéaires.*

Définition 1.30 (*Application linéaire continue*). Soit $(X; \| \cdot \|_X)$ et $(Y; \| \cdot \|_X)$ deux espaces normés et soit $T : X \longmapsto Y$ une application linéaire. Alors T est continue (borné) si et seulement sâil existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\| T(x) \|_Y \leq C \| x \|_X ; \forall x \in X. \tag{1.4.1}$$

On note $\mathcal{B}(X, Y)$ **l'espace des applications linéaires** continues. On définit une norme des opérateurs sur $\mathcal{B}(X, Y)$ par

$$\| T \| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \| T(x) \|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \| T(x) \|_Y .$$

on a également :

$$\| T \| = \inf \{C : C \text{ vérifiant in } (1.4.1)\}$$

Espace dual

Définition 1.31. Une forme linéaire sur X est une application linéaire de X dans $\mathbb{K}$. L'ensemble des formes linéaires sur X, avec l'addition définie par :
1. $(T+T')(x) = T(x) + T'(x)$ et la multiplication par les scalaires définie par :
2. $(\lambda T)(x) = \lambda T(x)$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, appelé **l'espace vectoriel dual** de X et noté X^*.
Si x est un vecteur de X et T une forme linéaire sur X, on utilise parfois la notation $< T, x >$, (crochet de dualité).

Définition 1.32. (*L'espace dual*). Soit X est espace normé alors
- $X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ est un Banach .
- $X^* =$ le dual de X
- $X^* = \{u : X \longrightarrow \mathbb{K}$ linéaire et bornée$\}$. Soit $x^* \in X^*$ alors

$$x^*(x) =< x^*, x >$$

le crochet de dualité; $x \in X$

$$\| x^* \| = \sup_{\|x\|=1} | x^*(x) | = \sup_{\|x\|=1} |< x^*, x >| \, .$$

Définition 1.33. Le dual de $\ell_p = (\ell_p)^* = \ell_q$ telle que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Espace réflexif
Définition 1.34. (*Bidual et espace rélexif*). Le dual de X^* appelé **bidual** de X est noté par X^{**}.

L'injection canonique

$$\begin{array}{rccc} i: & X & \longrightarrow & X^{**} \\ & x & \longrightarrow & i(x) \end{array}$$

$i(x)(x^*) =< x^*, x >$ est une isométrie ($\| i(x) \| = \| x \|$); si l'isometrie canonique est surjectif (i.e $X \equiv X^{**}$) on dira que X est un espace rélexif.

Exemple 1.35. Tout espace de Hilbert est espace rélexif. Les espace ℓ_p sont des espaces rélexif, telle que : $1 < p < \infty$.

1.5 Opérateur multilinéaire

Définition 1.36 (*Opérateur multilinéaire*). Soient $X_1, ..., X_m$ et Y des espaces de Banach. Une application

$$T: X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$$

est dite opérateur (ou application) multilinéaire (ou m-linéaire) si

$$T(x_1, x_2, ..., \alpha x_k + \beta y_k, ..., x_m) = \alpha T(x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_m) + \beta T(x_1, x_2, ..., y_k, ..., x_m)$$

pour tout $x_i, y_i \in X_i, 1 \leq k \leq m, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ (c-a-d) T est linéaire pour chaque variable.
- $Y = \mathbb{K}$, T est dit forme multilinéaire.
- $m = 2$, T est dit bilinéaire (ou 2-linéaire).
On note par $L(X_1, ..., X_m; Y)$ l'ensemble des opérateurs multilinéaires de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y.

Exemple 1.37.
- L'application

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longrightarrow & xy \end{array}$$

est une application bilinéaire.
- L'application

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longrightarrow & xy + 1 \end{array}$$

n'est pas une application bilinéaire car

$$\forall x, x', y \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : T(\alpha x + \beta x', y) \neq \alpha T(x, y) + T(x', y)$$

et même chose pour y.

Espace des opérateurs multilinéaires

Proposition 1.38 (*Multilinéaire borné*). Pour $T \in L(X_1, ..., X_m; Y)$, les affirmations suivantes sont équivalentes

1. L'opérateur T est continue.
2. L'opérateur T est continue en $(0, ..., 0)$.

3. Il existe une constante $C \geq 0$ telle que :

$$\| T(x_1, ..., x_m) \| \leq C \| x_1 \| .... \| x_m \|, \forall (x_1, ..., x_m) \in X_1 \times ... \times X_m$$

Dans ce cas, on dit que T est borné et on pose

$$\| T \| = \sup_{\|x\|_k \leq 1} \| T(x_1, ..., x_m) \|$$

ou

$$\| T \| \leq \inf \{ C : \text{ C vérifiant l'inégalité} \}.$$

Il est facile de voir qu'elle définit une norme sur L($X_1, ..., X_m; Y$). L'espace des applications m-linéaires continues (ou bornées) de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y est un espace de Banach.

Linéarisation des opérateurs multilinéaires

Proposition 1.39. Soient $X_1, ..., X_m$ des espaces de Banach et Y espace normé. L'opérateur $T \in$L($X_1, ..., X_m; Y$) ssi T est séprément continue.

Corollaire 1.40. Soient $X_1, ..., X_m$ des espaces de dimension finie et Y espace norm , alors les applications

$$T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$$

est continue.

Idéaux d'opérateur multilinéaire

Définition 1.41. (*Opérateur de rang fini*). Soient $X_1, ..., X_m; Y$ des espaces normés, $T \in$L($X_1, ..., X_m; Y$) est de rang fini , s'il existe $n \in \mathbb{N}$; $\varphi_j^i \in X_j$; $\forall i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$

$$T(x^1, ..., x^m) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^1(x^1) \times .... \times \varphi_i^m(x^m) y_i$$

L'espace des opérateurs m-linéaires de rang fini sera noté $\mathrm{L}_f(X_1, \ldots, X_m; Y)$.

Définition 1.42 (*Idéal des opérateurs m-linéaires*). Un idéal des opérateurs multilinéaires (ou multi-idéal) $\mathcal{M}$ est une classe d'opérateurs multilinéaires bornés tels que pour tout $X_1, \ldots, X_m$ et Y des espaces de Banach on a:

- $\mathcal{M}(X_1, \ldots, X_m; Y)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{L}(X_1, \ldots, X_m; Y)$ et $\mathrm{L}_f \subset \mathcal{M}$.
- (Propriété d'idéal). si $T \in \mathcal{M}(X_1, \ldots, X_m; Y)$, $u_j \in \mathrm{L}(E_j, X_j); (1 \leq j \leq m)$ et $v \in \mathrm{L}(Y, F)$, alors

$$v \circ T \circ (u_1, \ldots, u_m)e \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_m; F).$$

où

$$(v \circ T \circ (u_1, \ldots, u_m))(e_1, \ldots, e_m) = v \circ T \circ (u_1(e_1), \ldots, u_m(e_m)), \forall e_i \in E_i; i = 1, \ldots, m.$$

- De plus, si $\|.\|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}_+$ satisfait.

-$(\mathcal{M}(X_1, \ldots, X_m; Y), \|.\|_{\mathcal{M}})$ est un espace normé (resp. de Banach);
- $\|I_{\mathbb{K}^m} : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}; (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \longmapsto \lambda_1 \times \ldots \times \lambda_m\|_{\mathcal{M}} = 1$;
- $\|v \circ T \circ (u_1, \ldots, u_m)\|_{\mathcal{M}} \leq \|v\| \|T\|_{\mathcal{M}} \|u_1\| \ldots \|u_m\|$, alors $(\mathcal{M}, \|.\|_{\mathcal{M}})$ s'appelle idéal normé (resp. de Banach) des opérateurs multilinéaires.

Exemple 1.43. Les espaces $\mathrm{L}(X_1, \ldots, X_m; Y)$ et $\mathrm{L}_f(X_1, \ldots, X_m; Y)$ sont des idéal multilinéaires.

1.6 Espace des applications lipschitziennes

Définition 1.44 (*Distance*). On appelle distance (ou métrique) sur un ensemble X tout application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ qui satisfait les propriétés suivantes:
1. $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ (séparation);
2. $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie);
3. $\forall x, y, z \in X : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire).

Propposituion 1.45
1. $\forall x, y, z \in X : |d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$ (seconde inégalité triangulaire).
2. $\forall x_1, \ldots, x_n \in X : d(x_1, x_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$ (inégalité triangulaire généralisée).

Définition 1.46 (*Espace métrique*). Un espace métrique est un couple (X, d) oú l'ensemble X est muni de la distance d.

Exemple 1.47.

- Soit $(\mathbb{R}, |.|)$ l'ensemble des nombres réels, muni de la distance usuelle

$$d(x, y) = |x - y| \, , \forall x, y \in \mathbb{R},$$

est un espace métrique.

- Soit X un ensemble arbitraire. On le munit de la distance suivante

$$d(x, y) = \begin{cases} 0\,, & x = 0; \\ 1\,, & x \neq 0. \end{cases}$$

On obtient évidement un espace métrique. Cet espace est appelé espace de points isolés ou l'espace métrique discret.

- Sur l'espace $\mathbb{R}^n$, on peut définir plusieurs distances faisant intervenir les distances entre les composantes. Soient $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. On définit trois distances:

1. $d_1(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.
2. $d_2(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$ (distance euclidienne).
3. $d_\infty(x, y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$.

Les opérateurs lipschitziens

Maintenant, rappelons brièvement quelques notations et terminologies de base. Nous considérons toujours des espaces métriques avec un point distingué (espaces métriques pointés) que nous notons 0. Soit X un espace métrique pointé. On note $X^{\#}$ l'espace de Banach de toutes les fonctions de Lipschitz $f : X \to \mathbb{R}$ qui s'annulent en 0 sous la norme de Lipschitz donnée par

$$Lip\,(f) = \sup \left\{ \frac{|f\,(x) - f\,(y)|}{d\,(x, y)} : x, y \in X, x \neq y \right\}.$$

On note $\mathcal{F}\,(X)$ l'espace de Banach libre sur X, i.e., $\mathcal{F}\,(X)$ est le compliment de l'espace

$$AE = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{(x_i, y_i)}, (\lambda_i)_{i=1}^{n} \subset \mathbb{R},\ \ (x_i)_{i=1}^{n}, (y_i)_{i=1}^{n} \subset X \right\},$$

avec la norme

$$\|m\|_{\mathcal{F}(X)} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \, d\,(x_i, y_i) : m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{(x_i, y_i)} \right\},$$

où la fonction $\delta_{(x,y)} : X^{\#} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$\delta_{(x,y)}(f) = f(x) - f(y).$$

Nous avons

$$\mathcal{F}(X)^* = X^{\#}.$$

Soit X un espace métrique et E un espace de Banach, on note $Lip_0(X;E)$ l'espace de Banach de toutes les fonctions de Lipschitz $T : X \rightarrow E$ telle que $T(0) = 0$. Notons que pour tout $T \in Lip_0(X;E)$, il existe un unique opérateur linéaire $\widehat{T} : \mathcal{F}(X) \longrightarrow E$ tel que

$$\widehat{T} \circ \delta_X = T$$

et $\left\|\widehat{T}\right\| = Lip(T)$, i.e., le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & E \\ \delta_X \downarrow & \nearrow \widehat{T} & \\ \mathcal{F}(X) & & \end{array}$$

où δ_X est définie par

$$\langle \delta_X(x), f \rangle = \left\langle \delta_{(x,0)}, f \right\rangle = f(x) \text{ for } f \in X^{\#}.$$

Chapter 2

Opérateurs sommant

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à étudier les opérateurs sommant. Commençons par les opérateurs linéaires sommant avec une présentation de leurs propriétés fondamentales. Ensuite, on généralise la notion de sommabilité sur la catégorie des opérateurs muntilinéaires. Certaines caractérisation et propriétés serons présentées.

2.2 Espace de suites

Soit $1 \leq p \leq \infty$. On définit les espaces de suites scalaires suivantes

$$\begin{aligned}
\ell_p &= \left\{ (a_n)_n : \|(a_n)_n\|_p = (\sum_n |a_n|^p)^{\frac{1}{p}} \right\} \\
\ell_\infty &= \left\{ (a_n)_n : \|(a_n)_n\|_\infty = \sup_n |a_n| < \infty \right\} \\
c_0 &= \left\{ (a_n)_n \in \ell_\infty : \lim_n |(a_n)_n| = 0 \right\}
\end{aligned}$$

Soit maintenant X un espace de Banach. Soit $1 \leq p \leq \infty$. On note $\ell_p^n(X)$ l'espace de Banach des suites finies $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans X muni de la norme

$$\left\|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\right\|_{\ell_p^n(X)} = (\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}},$$

et $\ell_p^{n\ \omega}(X)$ l'espace de Banach des suites finies $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ dans X muni de la norme

$$\|(x_n)\|_{\ell_p^{n\ \omega}(X)} = \sup_{x^*\in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, x^*\rangle|^p)^{\frac{1}{p}},$$

où X^* est le dual (topologique) de X. La boule unité fermée de X est notée B_X (si $p = \infty$ on prend le sup).

Définition 2.1. (*Suite fortement p-sommable*) Soit $1 \leq p \leq \infty$. Une suite $(x_n)_n$ de X est dite fortement p-sommable si

$$(\sum_n \|x_n\|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

On note $\ell_p(X)$ l'espace de Banach de toutes les suites fortement p-sommable dans X avec la norme suivante

$$\|(x_n)_n\|_p = (\sum_n \|x_n\|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 2.2. (*Suite faiblement p-sommable*) Une suite $(x_n)_n$ de X est dite faiblement p-sommable si

$$(\sum_n |x^*(x_n)|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

pour tout $x^* \in X^*$. On note $\ell_p^w(X)$ l'espace de Banach de toutes les suites faiblement p-sommable dans X avec la norme suivante

$$\|(x_n)_n\|_{p,w} = \sup_{x^*\in B_{X^*}} (\sum_n |\langle x_i, x^*\rangle|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 2.3 (*L'espace* $c_0(X)$). On note $c_0(X)$ l'espace de Banach de suites bornées telle que

$$\lim \|x_n\| = 0.$$

Proposition 2.4.

(a) $\ell_p(X)$ et $\ell_p^w(X)$ sont des espace de Banach.

(b) Si $p = +\infty$. On a : $\ell_\infty(X) = \ell_\infty^w(X)$.

(c) Pour tout espace de Banach X

$$\ell_p(X) \subseteq \ell_p^w(X).$$

(c) Si $\dim X < +\infty$. On a :

$$\ell_p(X) = \ell_p^w(X),\ 1 \leq p \leq +\infty.$$

(d) $\ell_p^w(X) = \mathcal{B}(\ell_{p^*}, X)$ isométriquement pour $1 < p \leq +\infty$ et $\ell_1^w(X) = \mathcal{B}(c_0, X)$.

2.3 Opérateurs linéaires sommants

La définition d'un opérateur linéaire p-sommant introduite par Grothendieck pour $p = 1$, et généralisée pour tout p par Pietcsh en 67. Soient X, Y deux espaces de Banach et $u \in \mathcal{B}(X; Y)$. On dira que u est p-sommant pour $p \in]0, \infty[$, s'il existe une constante $C > 0$, telle que pour tout $x_1, ..., x_n \in X$

$$(\sum_{i=1}^{n} \|u(x_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^\star}} (\sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

On note $\Pi_p(X; Y)$ l'idéal de Banach des opérateurs linéaires p-sommants de X dans Y muni de la norme

$$\pi_p(u) = \inf\{C \text{ vérifiant } ()\}.$$

Remarque 2.5. L'opérateur u est p-sommant s'il transforme toute suite faiblement p-sommable en une suite fortement p-sommable; si $p = \infty$, c'est simplement la continuité.

Exemple 2.6. Soient K un espace compact, μ une mesure positive sur K et $1 \leq p < \infty$.
(a) L'opérateur de multiplication défini par

$$\begin{array}{cccc} u_\varphi & : & C(K) & \longrightarrow & L_p(\mu) \\ & & f & \longmapsto & f.\varphi \end{array}$$

avec $\varphi \in L_p(\mu)$, est p-sommant et $\pi_p(u) = \|\varphi\|_p$.
(b) L'injection canonique

$$\begin{array}{cccc} J_p & : & C(K) & \longrightarrow & L_p(\mu) \\ & & f & \longmapsto & f \end{array}$$

est p-sommante et $\pi_p(J_p) = \mu(K)^{\frac{1}{p}}$.

2.4 Caracterisation des opérateurs linéaires p-sommants

Théorème domination de Pietsch. *Soient $p \in]0, \infty[$ et $u : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire p-sommant et. Alors, il existe une probabilité de radon λ sur $(B_{X^\star},\ \sigma(X^\star, X))$*

telle que

$$\forall x \in X : \|u(x)\| \leq \pi_p(u) \left(\int_{B_{X^\star}} |x^*(x)|^p \, d\lambda(x^*) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Inversement, s'il existe une probabilité de radon λ sur $(B_{X^\star}, \sigma(X^\star, X))$ et $C > 0$ telle que cette formule est vérifiée, alors u est p-sommant et $\pi_p(u) \leq C$.

La factorisation proprement dite de Pietsch est

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ i_X \downarrow & & \uparrow \tilde{u} \\ i_X(X) & \xrightarrow{k_p} & S \\ \cap & & \cap \\ C(K) & \xrightarrow{J_p} & L_p(\mu) \end{array}$$

où $\tilde{u}$ est un opérateur linéaire borné, k_p est la restriction de J_p, $K = B_{X^*}$ et S est la fermeture de $k_p \circ i_X(X)$ dans $L_p(\mu)$. Dans ce cas,

$$\pi_p(u) = \|\tilde{u}\|.$$

Remarque 2.7 (*Cas particulier*). Si $p = 2$, l'opérateur $\tilde{u}$ peut s'étendre à $L_2(\mu)$ tout entier, c'est à dire u se factorise par un espace de Hilbert. En effet, soit P la projection de $L_2(\mu)$ sur S, donc

$$\bar{u} := \tilde{u} \circ P \text{ et } u = \bar{u} J_2 i_X : X \xrightarrow{J_2 i_X} L_2(\mu) \xrightarrow{\bar{u}} Y,$$

avec la remarque que $J_2 i_X$ est 2-sommant.

Théorème 2.8 (*Théorème d'inclusion*). *Si $1 \leq p \leq q < \infty$, alors*

$$\Pi_p(X;Y) \subseteq \Pi_q(X;Y).$$

De plus, on a $\pi_q(u) \leq \pi_p(u)$ pour tout $u \in \Pi_p(X;Y)$.

Théorème 2.9 (*Le théorème de Grothendieck*). *Si $X = L_1$ et $Y = L_2$, alors tout opérateur borné de X dans Y est 1-sommant. i.e.,*

$$\mathcal{B}(L_1; L_2) = \Pi_1(L_1; L_2)$$

avec $\pi_1(u) \leq k_G \|u\|$, k_G *est la constante universelle de Grothendieck.*

Théorème 2.10 (*Le petit théorème de Grothendieck*). *Soit* $1 \leq p \leq 2$. *Si* $X = L_\infty$ *et* $Y = L_p$, *alors tout opérateur borné de* X *dans* Y *est* 2*-sommant. i.e.,*

$$\mathcal{B}(L_\infty; L_p) = \Pi_1(L_\infty; L_p)$$

avec $\pi_2(u) \leq k_G \|u\|$.

2.5 Opérateur linéaire fortement p-sommant

Pietch a montré en 1967 que l'identité de ℓ_1 dans ℓ_2 est 2-sommant, mais l'opérateur adjoint n'est pas 2-sommant pour cela le concept fortement p-sommant a été introduit par cohen comme une caractérisation des conjugués des opérateurs p^*-sommants.

Définition 2.11. Soit u un opérateur continue entre deux espaces de Banach X et Y. L'opérateur u est opérateur linéaire fortement p-sommant $(1 < p \leq \infty)$ s'il existe une constante positive C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, (x_i)_{1\leq i\leq n} \subset X$ et $(y_i^*)_{1\leq i\leq n} \subset Y^*$,on a

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle u(x_i), y_i^* \rangle| \leq C(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{y\in B_Y} \|(y_i^*(y))_{1\leq i\leq n}\|_{\ell_{p^*}^n}$$

$\mathcal{D}_p(X, Y)$ est un espace des opérateurs linéaire fortement p-sommant de X dans Y. Pour $p = 1$, l'espace $\mathcal{D}_1(X, Y)$ coïncide avec $\mathcal{B}(X, Y)$,et $\mathcal{D}_p(X, Y)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$d_p(u) = \inf \{C, \text{vérifiant l'inégalité ()}\}$$

Théorème 2.12. *Soit* $1 < p \leq \infty$ *et* X, Y *deux espaces de Banach*

(1) $\mathcal{D}_p(X; Y)$ *est un espace normé.*

(2) *Si* $u \in \mathcal{D}_p(X; Y)$, *alors* u *est continue et* $\|u\| \leq d_p(u)$.

Proposition 2.13. Soit $R \in \mathcal{B}(Y; Z)$ et $S \in \mathcal{B}(E; X)$ .Si $u \in \mathcal{D}_p(X; Y)$,alors $R \circ u \circ S$ est fortement p-sommant et

$$d_p(R \circ u \circ S) \leq \|R\| \, d_p(u) \, \|S\|.$$

Théorème de factorisation de Pietsch

Théorème 2.14. *Soient $1 < p \leq \infty$ et $u \in \mathcal{B}(X;Y)$ est fortement p-sommant si et seulement s'il existe une probabilité de radon λ sur $(B_{Y^{**}}, \sigma(Y^{**}, Y^{*}))$ telle que $\forall x \in X$, $\forall y^{*} \in Y^{*}$, on a:*

$$|\langle u(x), y^{*}\rangle| \leq d_p(u)\, \|x\| \left[\int_{B_{Y^{**}}} |y^{**}(y^{*})|^{p^{*}}\, d\lambda(y^{**})\right]^{\frac{1}{p^{*}}}$$

Théorème 2.15. *Soit X,Y deux espace de Banach et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^{*}} = 1$.Alors,*

(1) *Soit $1 \leq p < \infty$.L'opérateur u est p-sommant de X dans Y si et seulement si l'opérateur adjoiut u^{*} est fortement p^{*}-sommant de Y^{*} dans X^{*} et $d_{p^{*}}(u^{*}) = \pi_p(u)$*

$$u \in \pi_p(X,Y) \iff u^{*} \in \mathcal{D}_{p^{*}}(Y^{*}, X^{*})$$

(2) *Soit $1 \leq p < \infty$.L'opérateur u est fortement p-sommant de X dans Y si et seulement si l'opérateur adjoiut u^{*} est p^{*}-sommant de Y^{*} dans X^{*} et $\pi_{p^{*}}(u^{*}) = d_p(u)$*

$$u \in \mathcal{D}_p(X,Y) \iff u^{*} \in \pi_{p^{*}}(Y^{*}, X^{*}).$$

2.6 Opérateurs multilinéaires sommants

La généralisation des opérateurs multilinéaires p-sommants a été commencé en 1983 par Pietsch. Il a introduit deux définitions: opérateurs multilinéaires absolument p-sommants et p-dominés. Quelques autres propriétés des opérateurs linéaires p-sommants restent vraies dans le cas multilinéaire.

2.6.1 Opérateurs multilinéaires absolument p-sommants

Un opérateur m-linéaire $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ est absolument p-sommant $(1 \leq p < \infty)$ s'il existe $C > 0$ telle que pour tous $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j$ $(j = 1, ..., m)$,

$$(\sum_{i=1}^{n} \left\|T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right)\right\|^{p})^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{j=1}^{m} \left\|\left(x_i^j\right)_{i=1}^{n}\right\|_{\ell_p^n\ \omega(X_j)}.$$

On note $\mathrm{L}_p^m(X_1,...,X_m;Y)$ l'espace de Banach des opérateurs m-linéaires absolument p-sommants muni de la norme $\|T\|_p = \inf\{C : C$ vérifie $()\}$. L'espace $\Pi_p^m(X_1,...,X_m;Y)$ est un multi-idéal de Banach.

La définition suivante est une version généralisée de la précédente.

2.6.2 Opératurs multilinéaires absolument $(p;p_1,...,p_m)$-sommants.

Soient $p_1,...,p_m \in]0,\infty]$ avec $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{p_1}+...+\frac{1}{p_m}$. Un opérateur m-linéaire $T : X_1\times...\times X_m \longrightarrow Y$ est absolument $(p;p_1,...,p_m)$-sommant s'il existe une constante positive C telle que pour tous $x_1^j,...,x_n^j \in X_j$, $(j=1,...,m)$,

$$(\sum_{i=1}^{n} \left\|T\left(x_i^1,...,x_i^m\right)\right\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C\prod_{j=1}^{m}\left\|\left(x_i^j\right)_{i=1}^n\right\|_{\ell_{p_j}^{n,w}(X_j)}.$$

La classe des opérateurs m-linéaires absolument $(p;p_1,...,p_m)$-sommants de $X_1\times...\times X_m$ dans Y, notée $\mathrm{L}_{(p;p_1,...,p_m)}^m(X_1,...,X_m;Y)$, est un multi-idéal de Banach pour la norme

$$\|T\|_{(p;p_1,...,p_m)} = \inf\{C \text{ vérifiant l'inégalité } ()\}.$$

2.6.3 Opérateurs multilinéaires p-dominés

Définition 2.16. Soit $T \in\mathrm{L}(X_1,...,X_m;Y)$ un opérateur m-linéaire borné. On dira que T est p-dominé $(1\leq p<\infty)$ s'il existe une constante positive C telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $\left(x_i^j\right)_{1\leq i\leq n} \subset X_j$ $(1\leq j\leq m)$, on a

$$(\sum_{i=1}^{n}\left\|T\left(x_i^1,...,x_i^m\right)\right\|^{\frac{p}{m}})^{\frac{m}{p}} \leq C\prod_{j=1}^{m}\left\|\left(x_i^j\right)_{1\leq i\leq n}\right\|_{\ell_p^{n,\omega}(X_j)}.$$

On note $\mathrm{L}_d^p(X_1,...,X_m;Y)$ l'espace des opérateurs m-linéaires p-dominés de $X_1\times...\times X_m$ dans Y. C'est un quasi-Banach pour la quasi-norme $\delta_p(T)$, définie par

$$\delta_p(T) = \inf\{C \text{ vérifiant l'inégalité } ()\}.$$

Si $p>m$, $\delta_p(T)$ est une norme sur $\mathrm{L}_d^p(X_1,...,X_m;Y)$.

Théorème 2.17. *Soient $1 \leq p < \infty$, $T \in$L$(X_1, ..., X_m; Y)$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *L'opérateur T est p-dominé.*

(2) *Il existe une constante positive C et des probabilités de Radon μ_j sur $K_j = B_{X_j^*}$ $(1 \leq j \leq m)$ telles que*

$$\left\|T\left(x^1, ..., x^m\right)\right\| \leq C \prod_{j=1}^{m} (\int\limits_{B_{X_j^*}} \left|x^j(x^*)\right|^p d\mu_j(x^*))^{\frac{1}{p}},$$

pour tout $x^j \in X_j$. De plus, on a

$$\delta_p(T) = \inf \{C \text{ vérifiant l'inégalité ()}\}$$

(3) *Pour tout $1 \leq j \leq m$, il existe des probabilités de Radon μ_j sur $B_{X_j^*}$ et $\overline{T} \in$L$(S_1, ..., S_m; Y)$ tels que le diagramme suivant soit commutatif*

$$\begin{array}{llllllll}
X_1 & \times ... \times & X_m & & \xrightarrow{T} & Y & & \\
\downarrow i_{X_1} & & \downarrow i_{X_m} & & & \overline{T} \uparrow & & \\
i_{X_1}(X_1) & \times ... \times & i_{X_m}(X_m) & \underset{(k_1, ..., k_m)}{\longrightarrow} & S_1 & \times ... \times & S_m & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
C(K_1) & \times ... \times & C(K_m) & \underset{(k_1, ..., k_m)}{\longrightarrow} & \ell_p(\mu_1) & \times ... \times & \ell_p(\mu_m) &
\end{array}$$

où $k_j : C(K_j) \longrightarrow \ell_p(\mu_j)$ est l'injection canonique, $i_{X_j} : X_j \longrightarrow C(K_j)$ est l'isométrie canonique, S_j est la fermeture de l'espace $k_j\left(i_{X_j}(X_j)\right)$ dans $\ell_p(\mu_j)$ et $\left\|\overline{T}\right\| = \delta_p(T)$.

Remarque 2.18. La classe des opérateurs m-linéaires p-dominés est un multi-idéal. Sa construction peut s'interpréter par la méthode de factorisation, i.e.,

$$\mathcal{L}_d^p(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{L}(\Pi_p)(X_1, ..., X_m; Y),$$

où Π_p est l'espace des opérateurs linéaires p-sommants. Pour la preuve, il suffit de montrer le lemme suivant.

2.6.4 Opérateurs multilinéaires multi p-sommants

Définition 2.19. Un opérateur m-linéaire $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ est dit multi p-sommant $(1 \leq p < \infty)$, s'il existe $C > 0$ telle que pour tous $x_{i_1}^j, ..., x_{i_n}^j \in X_j$ $(j = 1, ..., m)$,

$$(\sum_{i_1,...,i_m=1}^{n_1,...,n_m} \left\| T\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m\right) \right\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{j=1}^{m} \left\| \left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{n_j} \right\|_{\ell_p^n \ \omega(X_j)}.$$

On note $\Pi_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$, l'espace de Banach des opérateurs m-linéaires multi p-sommants, muni de la norme $\pi_p^m(T) = \inf\{C : C \text{ vérifie } ()\}$.
Cette classe d'opérateurs ne vérifie pas l'analogue du théorème de Pietsch, mais c'est une bonne généralisation des opérateurs linéaires p-sommants car elle conserve plusieurs propriétés du cas linéaire.

Remarque 2.20. Soient $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces de Banach. On a

$$\mathcal{L}_d^p(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \Pi_p^m(X_1, ..., X_m; Y).$$

2.6.5 Opérateurs multilinéaires fortement p-sommants

Définition 2.21. Soit $1 \leq p \leq \infty$ et $T \in \mathrm{L}(X_1, ..., X_m; Y)$. L'opérateur T est fortement p-sommant s'il existe une constante positive C telle que pour tous $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j$ $(j = 1, ..., m)$

$$(\sum_{i=1}^{n} \left\| T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right) \right\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\Phi \in B_{\mathcal{L}(X_1,...,X_m)}} (\sum_{i=1}^{n} \left| \Phi\left(x_i^1, ..., x_i^m\right) \right|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

La classe des opérateurs m-linéaires fortement p-sommants de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y, notée $\mathrm{L}_{ss}^p(X_1, ..., X_m; Y)$, est un espace de Banach pour la norme $\|T\|_{\mathcal{L}_{ss}^p}$ qui est la plus petite constante C telle que l'inégalité () soit vérifiée.

Théorème 2.22 [Dim03]. *Soit $T \in \mathrm{L}(X_1, ..., X_m; Y)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes.*
(1) L'opérateur T est fortement p-sommant.
(2) Il existe une mesure de probabilité de Radon μ sur $B_{\mathcal{L}(X_1,...,X_m)}$ (muni de sa topologie $*$-faible) et une constante positive $C > 0$ telle que pour tout $(x^1, ..., x^m)$ dans $X_1 \times ... \times X_m$, on a

$$\left\| T\left(x^1, ..., x^m\right) \right\| \leq C(\int_{B_{\mathcal{L}(X_1,...,X_m)}} \left| \Phi\left(x^1, ..., x^m\right) \right|^p d\mu(\Phi))^{\frac{1}{p}}.$$

On note que l'espace $\mathrm{L}_{ss}^{p}(X_1, ..., X_m; Y)$ forme un multi-idéal de Banach. On a aussi

$$\Pi_p \circ \mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; Y\right) \subseteq \mathcal{L}_{ss}^{p}\left(X_1, ..., X_m; Y\right).$$

Proposition 2.23. *Soit* $T \in \mathrm{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ *. Alors,*

(1) *Si* $\widetilde{T}$ *est p-sommant, alors* T *est fortement p-sommant.*

(2) *Théorème de Grothendieck multilinéaire: si les* $X_j = L_1$ *et* Y *est un espace de Hilbert, on a pour tout* $1 \leq p \leq \infty$

$$\mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; Y\right) = \mathcal{L}_{ss}^{p}\left(X_1, ..., X_m; Y\right).$$

2.6.6 Opérateurs Cohen fortement p-sommants

Définition 2.24. Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et X_j, Y des espaces de Banach $(1 \leq j \leq m)$. Un opérateur m-linéaire $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ est Cohen fortement p-sommant, $1 < p \leq \infty$, s'il existe une constante positive C telle que pour tout $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j$ et tout $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$,

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^*\right\rangle\right| \leq C\left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left\|x_i^j\right\|_{X_j}^p\right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \left\|\left(y_i^*(y)\right)\right\|_{l_{p^*}^n}.$$

La classe des opérateurs m-linéaires Cohen fortement p-sommants de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y, notée $\mathcal{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$, est un espace de Banach pour la norme

$$d_p^m(T) = \inf\{C \text{ vérifiant l'inégalité ()}\}.$$

Pour $p = 1$, on a $\mathcal{D}_1^m(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$.

Chapter 3

Opérateurs multilinéaires Lipschitziens

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à étudier les opérateurs multlinéaires lipschiziens. Ce type d'opérateurs a été étudié en 2020 dans l'article de " *Lipschitz p-summing multilinear operators*" de J. C. Angulo-López et M. Fernández-Unzueta. L'idée de base est de transforer la définition des applications Lipschiziennes sommants aux opérateurs multilinéaires. Dans ce chapitre, on va faire une étude détaillé sur ce nouvel type d'opérateurs.

3.2 Cône de Serge

Soient $X_1, ..., X_m$ des espaces de Banach. On définit le cône de Serge des espaces $X_1, ..., X_m$ par

$$\Sigma_{X_1,...,X_m} = \{x_1 \otimes ... \otimes x_m : x_k \in X_k; 1 \leq k \leq m\}.$$

Soit $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ un opérateur multinéaire et $\widehat{T} : X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m \longrightarrow Y$ son opérateur linéairisé. L'application

$$\begin{array}{rcll} f_T = \widehat{T}_{/\Sigma_{X_1,...,X_m}} & \Sigma_{X_1,...,X_m} & \rightarrow & Y \\ & x_1 \otimes ... \otimes x_m & \mapsto & f_T(x_1 \otimes ... \otimes x_m) = T(x_1, ..., x_m) \end{array}$$

est appelée Σ-opérateur. L'espace des applications continues Σ-opérateurs muni de la norme Lipschitizienne

$$\|f_T\| = \sup \frac{\|f_T(x_1 \otimes ... \otimes x_m) - f_T(x'_1 \otimes ... \otimes x'_m)\|}{\|x_1 \otimes ... \otimes x_m - x'_1 \otimes ... \otimes x'_m\|}$$

sera noté $\mathrm{L}(\Sigma_{X_1,...,X_m}; Y)$ et $\mathrm{L}(\Sigma_{X_1,...,X_m})$ dans le cas où $Y = \mathbb{K}$.

Nous avons l'identification suivante.

Théorème 3.1. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Soient $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces de Banach. Alors, nous avons l'identification isométrique suivante

$$\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{L}(\Sigma_{X_1,...,X_m}; Y).$$

Preuve. Définissons l'opérateur suivant

$$\begin{array}{cccc} \Psi: & \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y) & \to & \mathcal{L}(\Sigma_{X_1,...,X_m}; Y) \\ & T & \mapsto & f_T \end{array}$$

1) *L'opérateur T est bien définie*: Soient $T_1, T_2 \in \mathrm{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ tels que $T_1 = T_2$. Soit $x_1 \otimes ... \otimes x_m \in \Sigma_{X_1,...,X_m}$. On a

$$T_1(x_1, ..., x_m) = T_2(x_1, ..., x_m),$$

c'est à dire

$$f_{T_1}(x_1 \otimes ... \otimes x_m) = f_{T_2}(x_1 \otimes ... \otimes x_m),$$

donc $f_{T_1} = f_{T_2}$.

2) *T est isométrique*: On va vérifier que $\|\Psi(T)\| = \|T\|$. En effet,

$$\begin{aligned} \|\Psi(T)\| &= \|f_T\| \\ &= \sup \frac{\|f_T(x_1 \otimes ... \otimes x_m) - f_T(x'_1 \otimes ... \otimes x'_m)\|}{\|x_1 \otimes ... \otimes x_m - x'_1 \otimes ... \otimes x'_m\|} \\ &= \sup \frac{\|T(x_1, ..., x_m) - T(x'_1, ..., x'_m)\|}{\|x_1 \otimes ... \otimes x_m - x'_1 \otimes ... \otimes x'_m\|} \\ &= \sup \frac{\left\|\widehat{T}(x_1 \otimes ... \otimes x_m - x'_1 \otimes ... \otimes x'_m)\right\|}{\|x_1 \otimes ... \otimes x_m - x'_1 \otimes ... \otimes x'_m\|} \\ &= \sup \left\|\widehat{T}\left(\frac{x_1 \otimes ... \otimes x_m - x'_1 \otimes ... \otimes x'_m}{\|x_1 \otimes ... \otimes x_m - x'_1 \otimes ... \otimes x'_m\|}\right)\right\| \\ &\leq \left\|\widehat{T}\right\| = \|T\| \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup \frac{\|T(x_1,...,x_m)\|}{\|x_1\|...\|x_1\|} \\ &= \sup \frac{\|f_T(x_1 \otimes ... \otimes x_m)\|}{\|x_1 \otimes ... \otimes x_m\|} \\ &\leq \|f_T\| = \|\Psi(T)\|.\end{aligned}$$

3) <u>*T est surjective*</u>: Soit $f \in$L$(\Sigma_{X_1,...,X_m}; Y)$ alors il existe $T \in$L$(X_1,...,X_m; Y)$ tel que

$$f(x_1 \otimes ... \otimes x_m) = T(x_1,...,x_m).$$

Alors;

$$\Psi(T) = f.$$

Lemme 3.2. Soit $x_k \in X_k$ $(1 \leq k \leq m)$. On définit l'application $\delta_{x_1 \otimes ... \otimes x_m}$:L$(X_1,...,X_m) \to$ $\mathbb{K}$ comme suite

$$\delta_{x_1 \otimes ... \otimes x_m}(\varphi) = \varphi(x_1,...,x_m) \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{L}(X_1,...,X_m).$$

Alors, nous avons cette inclusion isométrique

$$\begin{array}{ccc}\Sigma_{X_1,...,X_m} & \overset{i}{\hookrightarrow} & C\left(B_{\mathcal{L}(X_1,...,X_m)}, w^*\right) \\ x_1 \otimes ... \otimes x_m & \mapsto & \delta_{x_1 \otimes ... \otimes x_m}\end{array}$$

Definition 3.3. Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $f \in$L$(\Sigma_{X_1,...,X_m}; Y)$ une application Σ-opérateur. f est dit p-sommant, s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u_i, v_i \in \Sigma_{X_1,...,X_m}$, $(i = 1,...,n)$, nous avons

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|f(u_i) - f(v_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{\mathcal{L}\left(\Sigma_{X_1,...,X_m}\right)}} (\sum_{i=1}^{n} |\varphi(u_i) - \varphi(v_i)|^p)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.1}$$

La classe des applications Σ-opérateurs p-sommant de $\Sigma_{X_1,...,X_m}$ dans Y, noté $\Pi_p(\Sigma_{X_1,...,X_m}; Y)$, est un espace de Banach avec la norme $\pi_p(f)$ qui est la plus petite constante C telle que l'inégalité (2.1) soit vérifiée.

Remarque 3.4. Si $m = 1$, nous avons $\Sigma_X = X$ et l'application Σ-opérateur sera un opérateur linéaire de X dans Y. De plus, les application Σ-opérateurs p-sommant et les opérateurs linéaires p-sommant coincident.

3.3 Opérateurs multilinéaires Lipschitziens

Definition 3.5. Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ un opérateur multinéaire. L'opérateur T est dit Lipschitz p-sommant, s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u_i, v_i \in X_1 \times ... \times X_m$, $(i = 1, ..., n)$ et $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$, nous avons

$$(\sum_{i=1}^{n} \|T(u_i) - T(v_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{\mathcal{L}(X_1 \times ... \times X_m)}} (\sum_{i=1}^{n} |\varphi(u_i) - \varphi(v_i)|^p)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.1}$$

La classe des opérateurs multiniéaires Lipschitz p-sommant de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y, noté $\Pi_p^{Lip}(X_1, ..., X_m; Y)$, est un espace de Banach avec la norme π_p^{Lip} qui est la plus petite constante C telle que l'inégalité (2.1) soit vérifiée.

Exemple 3.6.

1. Toute forme multilinéaire bornée $\psi : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow \mathbb{K}$ est Lipschitz p-sommant, i.e.,

$$\mathcal{L}(X_1, ..., X_m) = \Pi_p^{Lip}(X_1, ..., X_m).$$

En effet, soit $\psi \in$L$(X_1, ..., X_m)$, alors

$$\begin{aligned}(\sum_{i=1}^{n} |\psi(u_i) - \psi(v_i)|^p)^{\frac{1}{p}} &= \|\psi\| (\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\psi}{\|\psi\|}(u_i) - \frac{\psi}{\|\psi\|}(v_i)\right|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|\psi\| \sup_{\varphi \in B_{\mathcal{L}(X_1 \times ... \times X_m)}} (\sum_{i=1}^{n} |\varphi(u_i) - \varphi(v_i)|^p)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

C'est à dire

$$\psi \in \Pi_p^{Lip}(X_1, ..., X_m) \text{ et } \pi_p^{Lip}(\psi) \leq \|\psi\|.$$

2. Soient K, $K_1, ..., K_n$ sont des espaces compact de Hausdorff et μ et ν deux mesures positive régulières de Borel sur K et $K_1 \times ... \times K_n$ respectivement. Si $h \in L_p(\mu)$ et $f \in L_p(\nu)$, l'opérateurs multilinéaires $T_h \in$L$(C(K), ..., C(K); \ell_p(\mu))$ et $S_f \in$L$(C(K_1), ..., C(K_n); \ell_p(\nu))$ définis par

$$T_h(g_1, ..., g_n) = h(w) g_1(w) ... g_n(w)$$

et

$$S_f(g_1, ..., g_n) = f(w_1, ..., w_n) g_1(w_1) ... g_n(w_n)$$

sont Lipschitz p-sommant.

3. Soit $\lambda = (\lambda_k) \in L_p$, l'opérateur diagonal $T_\lambda \in$L$(L_\infty, ..., L_\infty; L_p)$ définie par

$$T_\lambda \left(\left(a_k^1\right)_k, ..., (a_k^n)_k \right) = \left(\lambda_k a_k^1 ... a_k^n\right)_k$$

est Lipschitz p-sommant.

Nous avons l'identification suivante.

Théorème 3.7. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Soient $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces de Banach. Alors, nous avons l'identification isométrique suivante

$$\Pi_p^{Lip}(X_1, ..., X_m; Y) = \Pi_p(\Sigma_{X_1,...,X_m}; Y).$$

Preuve. On peut facilement montrer l'identification via cet operateur

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & \Pi_p^{Lip}(X_1, ..., X_m; Y) & \to & \Pi_p(\Sigma_{X_1,...,X_m}; Y) \\ & T & \mapsto & f_T \end{array}$$

Dans le résultat suivant, nous allons montrer que l'espace Π_p^{Lip} se situe entre deux classes d'opérateurs multilinéaires, qui sont des généralisation des opérateurs linéaires p-sommant. La classe L$_{ss}^p$ désigne la famille des opérateurs multilinéaires fortement p-sonnat de Dimant.

Proposition 3.8. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Soient $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces de Banach. Nous avons

$$\left\{ T \in \mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; Y\right) : \widehat{T} \in \Pi_p \left(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y\right) \right\} \subset \Pi_p^{Lip}(X_1, ..., X_m; Y) \subset \mathcal{L}_{ss}^p(X_1, ..., X_m; Y).$$

Preuve. Soit $T \in$L$(X_1, ..., X_m; Y)$ tel que $\widehat{T} \in \Pi_p \left(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y\right)$. Alors

$$\begin{array}{rcl} (\sum\limits_{i=1}^{n} \|T(u_i) - T(v_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} & = & (\sum\limits_{i=1}^{n} \left\| \widehat{T}(u_i - v_i) \right\|^p)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq & \pi_p \left(\widehat{T}\right) \sup\limits_{\varphi \in B_{(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m)^*}} (\sum\limits_{i=1}^{n} |\varphi(u_i - v_i)|^p)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq & \pi_p \left(\widehat{T}\right) \sup\limits_{\varphi \in B_{\mathcal{L}(X_1 \times ... \times X_m)}} (\sum\limits_{i=1}^{n} |\varphi(u_i) - \varphi(v_i)|^p)^{\frac{1}{p}} \end{array}$$

Donc, $T \in \Pi_p^{Lip}(X_1, ..., X_m; Y)$ et on a

$$\pi_p^{Lip}(T) \leq \pi_p \left(\widehat{T}\right).$$

Maintenant soit $T \in \Pi_p^{Lip}(X_1, ..., X_m; Y)$, alors

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{n} \left\| T\left(x_1^i, ..., x_m^i\right) \right\|^p)^{\frac{1}{p}} &= (\sum_{i=1}^{n} \left\| T\left(x_1^i, ..., x_m^i\right) - T\left(0, ..., 0\right) \right\|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_p^{\ell ip}\left(T\right) \sup_{\varphi \in B_{\mathcal{L}(X_1 \times ... \times X_m)}} (\sum_{i=1}^{n} \left| \varphi\left(x_1^i, ..., x_m^i\right) - \varphi\left(0, ..., 0\right) \right|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_p^{\ell ip}\left(T\right) \sup_{\varphi \in B_{\mathcal{L}(X_1 \times ... \times X_m)}} (\sum_{i=1}^{n} \left| \varphi\left(x_1^i, ..., x_m^i\right) \right|^p)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

D'où $T \in \mathrm{L}_{ss}^p(X_1, ..., X_m; Y)$ et nous avons

$$\pi_p^{ss}\left(T\right) \leq \pi_p^{Lip}\left(T\right).$$

Proposition 3.9. (*Théorème de Grothendieck*) Si $X_1, ..., X_m$ sont des espace L_1 et Y est un espace L_2, alors nous avons

$$\Pi_1^{Lip}(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; Y\right).$$

Preuve. On sait que $X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$ est L_1-space. Par le théorème de Grothendieck cas linéaire, nous avons

$$\begin{aligned}
\Pi_1(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y) &= \mathcal{B}\left(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y\right) \\
&= \mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; Y\right)
\end{aligned}$$

par la Proposition précédente, on a

$$\begin{aligned}
\left\{T \in \mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; Y\right) : \widehat{T} \in \Pi_1\left(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y\right)\right\} &= \Pi_1^{Lip}(X_1, ..., X_m; Y) \\
&= \mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; Y\right).
\end{aligned}$$

Proposition 3.10. (*Théorème d'inclusion*). Soient $1 \leq p \leq q < \infty$, alors

$$\Pi_p^{Lip}(X_1, ..., X_m; Y) \subset \Pi_q^{Lip}(X_1, ..., X_m; Y),$$

et nous avons

$$\pi_q^{Lip}\left(T\right) \leq \pi_p^{Lip}\left(T\right) \text{ pour tout } T \in \Pi_p^{Lip}(X_1, ..., X_m; Y).$$

Corollaire 3.11. Si $X_1, ..., X_m$ sont des espaces L_1 et Y est un espace de Banach. Alors

$$\Pi_1^{Lip}(X_1, ..., X_m; Y) = \Pi_2^{Lip}(X_1, ..., X_m; Y).$$

3.4 Comparaisons avec les opérateurs de Hilbert Schmidt

La définition des opérateurs de Hilbert Schmidt a été introduite par Dwyer [Dwy71], et étudiée par plusieurs auteurs notammant Pietsch dans [Pie83].

Définition 3.12. Soient $H_1, ..., H_m, H$ des espaces de Hilbert. L'opérateur multilinéaire $T : H_1 \times ... \times H_m \to H$ est de Hilbert-Schmidt si

$$\sum_{e_{i_1} \in I_1, ..., e_{i_m} \in I_m} \|T(e_{i_1}, ..., e_{i_m})\|^2 < \infty$$

où $\left(e_{i_j}\right)_{i_j \in I_j}$ est une base orthonormale de l'espace H_j $(1 \leq j \leq m)$. Noter que cette quantité ne dépend pas du choix de la base orthonormale. La norme de Hilbert-Schmidt de T est

$$\|T\|_{HS} = (\sum_{e_{i_1} \in I_1, ..., e_{i_m} \in I_m} \|T(e_{i_1}, ..., e_{i_m})\|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme dans le cas linéaire, l'espace des opérateurs multilinéaires de Hilbert-Schmidt

$$\mathcal{L}_{HS}(H_1, ..., H_m; H),$$

est un espace de Hilbert dont la norme $\|.\|_{HS}$ est induite du produit scalaire suivant

$$\langle T, S \rangle = \sum_{e_{i_1} \in I_1, ..., e_{i_m} \in I_m} \left\langle T(e_{i_1}, ..., e_{i_m}), \overline{S(e_{i_1}, ..., e_{i_m})} \right\rangle .$$

Définition 3.13 (*Produit tensoriel de Hilbert*). On peut munir le produit tensoriel algébrique $H_1 \otimes ... \otimes H_m$ du produit scalaire défini par

$$\forall h = (h_1 \otimes ... \otimes h_m) , k = (k_1 \otimes ... \otimes k_m) \in H_1 \otimes ... \otimes H_m : \langle h, k \rangle = \prod_{j=1}^{m} \langle h_j, k_j \rangle .$$

On note β la norme correspondante et $H_1 \widehat{\otimes}_2 ... \widehat{\otimes}_2 H_m$ l'espace de Hilbert complété. Rappelons que cette norme est raisonnable et vérifie

$$\varepsilon (v) \leq \beta (v) \leq \pi (v) , \tag{1.24}$$

pour tout $v \in H_1 \otimes ... \otimes H_m$ où ε est la norme tensoriel injective sur $H_1 \otimes ... \otimes H_m$. Soit $\left(e_{k_j}\right)_{k_j \in I_j}$ une base orthonormale de H_j $(1 \leq j \leq m)$, on peut voir sans difficulté que le système

$$\left\{e_{k_1} \otimes ... \otimes e_{k_m}\right\}_{\substack{k_j \in I_j \\ 1 \leq j \leq m}} ,$$

forme une base orthonormale de $H_1\widehat{\otimes}_\beta...\widehat{\otimes}_\beta H_m$. La proposition suivante devient donc immédiate.

Proposition 3.14 [Mat03, Proposition 5.10]. *Soient $H_1, ..., H_m, H$ des espaces de Hilbert. Les deux propréités suivantes sont équivalentes.*
(1) *L'opérateur T est dans $\mathrm{L}_{HS}\left(H_1, ..., H_m; H\right)$.*
(2) *L'opérateur $\widetilde{T}_2$ est dans $\mathrm{L}_{HS}\left(H_1\widehat{\otimes}_\beta...\widehat{\otimes}_\beta H_m; H\right)$, ($\widetilde{T}_2$ est l'extension de $\widetilde{T}$ sur l'espace $H_1\widehat{\otimes}_\beta...\widehat{\otimes}_\beta H_m$).*

Remarque 3.15. Dans le cas $m = 1$, toutes les définitions précédentes coïncident avec la définition des opérateurs linéaires p-sommants.

Definition 3.16. Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $T \in \mathcal{L}_{HS}\left(H_1\widehat{\otimes}_\beta...\widehat{\otimes}_\beta H_m; H\right)$. L'opérateur T est dit H-Lipschitz p-sommant, s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u_i, v_i \in X_1 \times ... \times X_m$, $(i = 1, ..., n)$ et $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$, nous avons

$$(\sum_{i=1}^{n} \|T(u_i) - T(v_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi\in B_{\mathcal{L}_{HS}(X_1\times...\times X_m)}} (\sum_{i=1}^{n} |\varphi(u_i) - \varphi(v_i)|^p)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.1}$$

La classe des opérateurs multiniéaires H-Lipschitz p-sommant de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y, noté $\Pi_p^{Lip,H}(X_1, ..., X_m; Y)$, est un espace de Banach avec la norme $\pi_p^{Lip,H}$ qui est la plus petite constante C telle que l'inégalité (2.1) soit vérifiée.

La coïncidence suivante généralise le résultat du cas linéaire.

Théorème 3.17. Pour $1 \leq p < \infty$, nous avons

$$\mathcal{L}_{HS}\left(H_1, ..., H_m; H\right) = \Pi_p^{Lip,H}(H_1, ..., H_m; H)$$

et nous avons

$$\|T\|_{HS} \leq \pi_p^{Lip,H}(T) \leq B_m^p \|T\|_{HS}$$

où B_m^p est la constante de Khintchine.

Bibliography

[**AM07**] D. Achour and L. Mezrag. On the Cohen strongly p-summing multilinear operators. J. Math. Anal. Appl. 327 (1) (2007), 550-563.

[**BGV04**] F. Bombal, D. Pérez-García, I. Villanueva. Multilinear extensions of Grothendieck's theorem. Quart. J. Math. 55 (2004), 441-450.

[**BPR07**] G. Botelho, D. Pellegrino and P. Rueda. On composition ideals of multilinear mappings and homogeneous polynomials, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 43 (2007), 1139–1155.

[**Coh73**] J. S. Cohen. Absolutely p-summing, p-nuclear operators and their conjugates, Math. Ann. 201 (1973), 177-200.

[**DJT95**] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge. Absolutely summing operators. Cambridge University Press, (1995).

[**Dim03**] Verónica Dimant. Strongly p-summing multilinear operators. J. Math. Anal. Appl. 278 (2003) 182–193.

[**DF93**] A. Defant, K. Floret. Tensor Norms and Operator Ideals. North-Holland (1993). 121.

[**GG99**] M. Gonzalez and J. M. Gutierrez. *Injective factorization of holomorphic mappings.* Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999), no. 6, 1715–1721.

[**Gro56**] A. Grothendieck. Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques. Bol. Soc. Mat. SaoPaulo 8, 1–79 (1956).

[**GVill05**] D. Pérez-García and I. Villanueva, A composition theorem for multiple summing operators. Monatsh. Math. 146 (2005), 257-261.

[**Dwy71**] T. A. W. Dwyer III. Partial dierential equations in Fischer-Fock spaces for the Hilbert-Schmidtholomorphy type. Bull. Amer. Math. Soc. 77, 725–730 (1971).

[**LT96**] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. Classical Banach Spaces, I and II. Springer-Verlag, Berlin (1996).

[**Mat03**] M. C. Matos. Fully absolutely summing and Hilbert-Schmidt multilinear mappings. Collect. Math. 54,111–136 (2003).

[**Muj86**] J. Mujica. Complex Analysis in Banach Spaces. Math. Studies, Vol. 120.

[**Pie67**] A. Pietsch. Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Räumen. Studia Math. 28, 333–353(1967). 45.

[**Pie83**] A. Pietsch. Ideals of multilinear functionals (designs of a theory), Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and their Applications in Theoretical Physics, 185-199. Leipzig. Teubner-Texte, 1983.

[**Saa10**] Saadi khalil. Les opérateurs multi p-sommant et leurs applications. Thèse Doctorat, Batna, Algérie 2010.

[**Zaa97**] A. C. Zaanen. Introduction to operator theory in Riesz space. Springer-Verlag. (1997).