

UNIVERSITÉ DE M'SILA
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine: Mathématiques et Informatiques

Filière: Mathématiques

Option: Equations aux dérivée partielle et applications

Par

SERAIDI ABDERRACHID

THÈME

SUR LA RESOLUTION NUMERIQUE DES
EQUATIONS INTEGRO-DIFFERENTIELLES VIA LE POLYNOME D'HERMITE

Soutenu le : .. / 0. / 2017

Devant le jury composé de :

- 1).....
- 2).....
- 3).....

Dirigé par:

*Mr.*MERZOUGUI ABDELKRIM

Année: 2016/2017

Remerciements

Avant tout je remercie **Allah**, le tout puissant d'avoir, éclaire notre vie, renforce notre courage et notre volenté pour finie ce travail.

Je tiens à remercier particulièrement ma directeur de thèse Monsieur **Merzougui Abdel krim**, pour toute l'aide qu'il m'a apporté et leur patience leurs conseils et pour avoir guidé ce travail avec beaucoup d'intéret.

Je tiens à remercier aussi Monsieur **Lakhali Belkacem**, d'avoir accepté de présider mon mémoire.

Je tiens à remercier madame **Bounab Noura**, pour avoir accepté d'examiner mon mémoire.

Je tiens à remercier aussi Monsieur **Zouareg Yahia** ,pour toute l'aide qu'il m'a apporté et leur patience et leurs conseils .

Mes remerciements s'adressent à tout les enseignants du département de mathématique pour leurs dévouement et leurs générosité.

Je tiens ici à exprimer mes sentiments respectueux à mes chers parents à qui je dédie ce travail pour leur grand soutien.

Un grand merci à ma famille, à mes proches et à mes collègues

Dédicaces

Au nom de Allah chémeut et le miséricordieux.

-Je dédie ce modeste travail.

- A Mon père

Tes sacrifices et tes Prières m'ont permis de vivre ce jour. Rien ne saurait exprimer la fierté, la reconnaissance et l'amour que je te porte. que Dieu le tout puissant te procure, santé et longue vie.

A Ma Mère

Avec tout mon amour pour ton soutien et tes encouragements. j'espère rester à la hauteur de tes espoirs que Dieu te protège et t'accorde santé et longue vie

-A ma chère soeur

-A mes frères

-A toute la famille.

-A toute mes amies.

- Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,
En fin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

NOTATIONS

- \mathbb{N} : L'ensemble des nombres entiers.
- H : Espace de Hilbert.
- $C([a, b])$: Espace des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$.
- $\|x\|$: La norme de vecteur x .
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$: Un produit intérieur.
- \mathbb{R} : Ensemble des réels.
- \mathbb{C} : Ensemble des nombres réels..
- \simeq : Approximation.
- A : Opérateur intégrale compact.
- $H_{i,n}$: Polynôme d'Hermite.
- $\omega(x)$: Fonction de poids.
- P_n : Polynôme orthogonaux.
- $f(x)$: Fonction donnée.
- $K(x, t)$: Noyau de l'intégrale.
- λ : Un paramètre non nul, réel ou complexe.
- u : La fonction inconnue dans l'équation intégrale (Solution exacte).
- \tilde{u} : Solution approchée.
- $R_n[x]$: L'espace des polynômes.

Table des figures

Figure (1)	page31
Figure (2)	page33
Figure (3)	page35
Figure (4)	page37
Figure (5)	page39
Figure (6)	page44
Figure (7)	page46
Figure (8)	page48
Figure (9)	page50
Figure (10)	page52
Figure (11)	page54

Liste des tableaux

Tableau (1)	page30
Tableau (2)	page32
Tableau (3)	page34
Tableau (4)	page36
Tableau (5)	page38
Tableau (6)	page43
Tableau (7)	page45
Tableau (8)	page47
Tableau (9)	page49
Tableau (10)	page51
Tableau (11)	page53

Table des matières

Introduction	1
1 Rappels d'analyse fonctionnelle	3
1.1 Notions d'analyse fonctionnelle	3
1.1.1 Espace normé	3
1.1.2 Espace de Banach	4
1.1.3 Espace euclidien	4
1.1.4 Espace de Hilbert	5
1.1.5 Espace $L^2(a, b)$	5
1.2 Les operateurs	5
1.2.1 Opérateur compact	5
1.2.2 Opérateur intégral linéaire	8
1.2.3 Opérateur adjoint	9
1.2.4 Théorème (de Banach-Steinhaus)	9
2 Polynôme d'Hermite et équation intégral	10
2.1 Polynôme d'Hermite	10
2.1.1 Définition de polynôme d'Hermite	10
2.1.2 Polynômes orthogonaux	11
2.2 L'orthogonalité des polynômes d'Hermite	12
2.2.1 polynômes orthogonaux d'Hermite	12
2.3 Propriétés :	13
2.4 Développement d'une fonction en série de polynôme d'Hermite	14

2.5	Les équations intégrales	14
2.5.1	Classifications des équations intégrales	15
2.6	Existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale	18
2.7	Méthodes d'approximation pour les équations intégrales	22
2.7.1	Méthodes du noyau dégénéré	22
2.7.2	Méthodes de projection	23
2.7.3	Méthode de collocation	24
2.7.4	Méthode de Galerkin	25
2.7.5	Méthode de Petrov-Galerkin	26
3	Analyse numérique pour les équations intégrales et équations intégral-	
	différentielles	27
3.1	Résolution de l'équation intégrale de Fredholm par polynôme d'Hermite . . .	27
3.1.1	Discrétisation de l'équation intégrale	27
3.2	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte	29
3.2.1	Discrétisation de l'équation intégral-différentielle	39
3.3	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte	42
	Conclusion générale	55
	Bibliographie	57

Introduction

Une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnue, généralement une fonction d'une ou plusieurs variables, s'apparaît sous le signe intégral (f).

Les premières équations intégrales furent obtenues par Daniel Bernoulli vers 1730 dans l'étude des oscillations d'une corde tendue. Après l'introduction du noyau de Green, il fallut attendre les dernières années du XIX^e siècle, avec les travaux de H. A. Schwarz, de H. Poincaré, de V. Volterra et sur tout ceux de I. Fredholm, pour disposer de résultats généraux en liaison étroite avec les premiers développements de l'analyse fonctionnelle. Quelques années plus tard, l'étude des équations intégrales conduisit D. Hilbert à définir l'espace qui porte son nom et à poser les premières bases de la "théorie spectrale".

Les équations intégrales sont le modèle mathématique de beaucoup des problèmes de biologie, de chimie, elles sont aussi importantes dans plusieurs domaines physiques par exemple les équations de Maxwell sont probablement les plus célèbres représentants. Elles apparaissent dans des problèmes des transferts d'énergie radiative et des problèmes d'oscillations d'une corde, d'une membrane ou d'un axe. Ainsi que les équations intégrales ont joué un rôle historique important dans l'élaboration des principaux concepts de l'analyse contemporaine.

L'étude de ce sujet est répartie sous forme de trois chapitres qui présentent respectivement :

- Le premier chapitre est consacré à une introduction sur l'analyse fonctionnelle. On va définir les opérateurs (compact, intégral linéaire ,adjoint,...).

- Dans le deuxième chapitre on va donner la définition des polynômes orthogonaux,et des Polynômes d'Hermite , et l'approximation par série d'Hermite, équation intégrales ainsi que leur

classification puis on démontre l'existence et l'unicité de la solution , et quelques méthodes d'approximation pour ces équation intégrales.

Le troisième chapitre représente le but de ce mémoire, c'est-à-dire on va résoudre numériquement des équation intégrales et integro-différentielles de Fredholm de 2^{ème} espèce par le polynôme d'Hermite. suivi par une comparaison entre la solution exactes et la solution approchée.

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle

1.1 Notions d'analyse fonctionnelle

Dans ce chapitre, on donne des définitions de base sur l'analyse fonctionnelle, étudié sur l'espace des fonctions continues sur un intervalle fermé. Aussi on donne quelques notions sur opérateurs

L'étude de diverse classe des équations intégrales nécessite l'utilisation des espaces fonctionnels, tels que les espaces de Banach ou de Hilbert.

1.1.1 Espace normé

Définition 1.1

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , E est dit espace vectoriel normé s'il est muni d'une application $\|\cdot\|$ définie sur E à valeurs dans \mathbb{R}^+ , telle que $\forall x, y \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{k}$ l'application $\|\cdot\|$ vérifie les relation suivant:

- (1). $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
- (2). $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- (3). $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Exemple 1.1

Soit $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$, l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$, espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles pour tout $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, on pose

$$\|f\|_1 = \int_a^b f(x) dx \quad (1.1)$$

et

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \quad (1.2)$$

, les applications $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$.

1.1.2 Espace de Banach

Définition 1.2

Une suite $(x_k)_k$ d'éléments d'un espace normé E est dite suite de Cauchy si :

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N \geq 1), \forall p, q \geq N \implies \|x_p - x_q\| \leq \varepsilon \quad (1.3)$$

Définition 1.3 On dit qu'un espace normé est complet si pour tout suite de Cauchy est convergente.

Définition 1.4 Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.

1.1.3 Espace euclidien

Définition 1.5 (Produit scalaire)

On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel E (réel ou complexe), une fonction $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur $E \times E$ dans $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , possédant les propriétés suivant:

$$\begin{aligned} 1. \quad \langle x, y \rangle &\geq 0 \\ 2. \quad \langle \lambda x, y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle \\ 3. \quad \langle x, y + z \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \\ 4. \quad \langle x, y \rangle &= \overline{\langle y, x \rangle} \\ 5. \quad \langle x, x \rangle &= 0 \implies x = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Remarque 1.1

La définition du produit scalaire nous donne les relations suivantes

- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- $\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$

1.1.4 Espace de Hilbert

Définition 1.6

Un espace de Hilbert $E = H$ est un espace complet par rapport à la norme induite par le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, tel que la norme $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$. En d'autres termes un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme induite par un produit scalaire.

1.1.5 Espace $L^2(a, b)$

Définition 1.7

On dit qu'une fonction f est de carré intégrable sur $[a, b]$ si l'intégrale

$$\int_a^b f^2(x) dx \quad (1.5)$$

existe (est finie). L'ensemble de toutes les fonctions carré intégrable sur $[a, b]$ sera noté $L^2(a, b)$ ou L^2 . On muni L^2 du produit scalaire défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx \quad f, g \in L^2 \quad (1.5)$$

On définit la norme d'une fonction $f \in L^2$ par :

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \quad (1.6)$$

1.2 Les operateurs

1.2.1 Opérateur compact

Définition 1.8

Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé X dans un espace normé Y , on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné en un ensemble relativement compact dans Y .

Définition 1.9

On dit qu'une application linéaire T d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F est compact, si $\overline{T(B_E)}$ est une partie compact de F .

Une application linéaire compact est aussi appelé opérateur compact.

On note $K(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires compactes de E dans F .

Remarque 1.2

Toute application linéaire compacte est continue.

Exemple 1.2

Toute application linéaire continue de rang fini est compacte.

Exemple 1.3

Une application linéaire continue T d'un espace de Hilbert H est compact si et seulement si, s'il existe une suite d'application linéaire continue de rang fini $(T_n)_n$ de H qui converge vers T .

Théorème 1.1

Un opérateur A de X dans Y est compact si et seulement si pour tout suite borné (u_n) de X , la suite (Au_n) contient une sous suite convergente dans Y .

Théorème 1.2

Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.

Preuve.

En effet, si on désigne par $B(0, 1) = \{x \text{ tels que } \|x\| \leq 1\}$ la boule fermée de rayon l'unité, alors l'ensemble $\overline{A(B(0, 1))}$ est compacte, donc borné, c'est-à-dire $\|A(x)\| < \infty$ et par conséquent $\sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\| < \infty$ ce qui signifie que l'opérateur A est borné.

Théorème 1.3

Une combinaison linéaire $A = A_1 + A_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact.

Théorème 1.4

Le produit $A \times B$ de deux opérateurs borné A et B est compact si l'un des opérateurs A ou B est compact.

Théorème 1.5

Soient X un espace normé et Y un espace de Banach et soit (A_n) une suite d'opérateur compact de X dans Y , convergente en norme vers l'opérateur linéaire A de X dans Y .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0 \quad (1.7)$$

Alors A est compact.

Théorème 1.6

Soit A un opérateur borné de X dans Y à l'image $A(X)$ de dimension fini, alors A est compact.

Preuve.

En effet, car l'opérateur A transforme tout ensemble borné E de X à un ensemble borné $A(E)$ dans un espace de dimension finie $A(X)$ ce qui implique que $A(E)$ est pré-compact.

■

Théorème 1.7

L'opérateur identique I de X dans X est compact si et seulement si X est de dimension finie.

Remarque 1.3

Un ensemble $G \subset E$ est relativement compact sa veut dire si pour tout suite (u_n) de G il existe un sous suite $(u_{n(k)})$ qui converge dans E .

Théorème 1.8 (de Arzela-Ascoli)

Soit D un ensemble fermé et borné dans \mathbb{R}^n , et $A \subset C(D)$ un ensemble, on dit que A est relativement compact si est seulement s'il est borné et équicontinu, c'est à dire, il existe une constante M telle que $|u(x)| \leq M$ pour tout $x \in D$ et pour tout $u \in A$ nous avons pour tout $\xi > 0$ il existe $\delta > 0$ telle que

$$|u(x) - u(y)| < \xi \text{ pour tout } x, y \in D \text{ avec } |x - y| < \delta \quad (1.8)$$

-L'opérateur intégrale A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau continu est un opérateur compact.

Preuve.

En effet, soit E un ensemble borné de $C(G)$ ($\|u\| \leq M$) pour tout $u \in E$ de plus, on a

$$\|Au(x)\| \leq M |G| \max_{x,y \in G} |K(x,y)| \quad \forall x \in E \text{ et } \forall u \in E \quad (1.9)$$

D'ou l'ensemble $A(E)$ est borné d'autre part le noyau K est uniformément continue sur le compact $G \times G$ alors pour tout x, y et z on a

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que

$$|x - y| < \delta \implies |K(x,y) - K(y,z)| < \frac{\varepsilon}{M |G|} \quad (1.10)$$

D'ou $|Au(x) - Au(y)| < \varepsilon$ pour tout $u \in E$ et $x, y \in G$ avec $|x - y| < \delta$ ceci exprime que l'ensemble $A(E)$ est équicontinue, d'ou $A(E)$ est relativement compact par le théorème d'Arzela-Ascoli, alors A est compact.

Théorème 1.9

L'opérateur intégrale A de $C(\partial G)$ dans $C(\partial G)$ à noyau continue ou à noyau faiblement singulier est un opérateur compact sur $C(\partial G)$, si ∂G est de classe C^1 .

1.2.2 Opérateur intégral linéaire

Théorème 1.10

Soit G un ensemble compact de \mathbb{R}^n et soit K une fonction continue de $G \times G$ dans \mathbb{C} , alors l'opérateur linéaire définie de $C(G)$ dans $C(G)$ par:

$$(Au)(x) = \int_G |K(x,y)u(y)| dy, \quad \forall x \in G \quad (1.11)$$

est appelé opérateur intégral à noyau continu K , cet opérateur est borné, la norme $\|A\|$ est donnée par:

$$\|A\| = \max_{x \in G} \int_G |K(x,y)| dy \quad (1.12)$$

une classe particulièrement simple les opérateurs intégraux est continue, les opérateurs à noyau dits dégénérés, de la forme:

$$K(x,y) = \sum_{j=1}^n a_j(x) b_j(y) \quad (1.13)$$

Théorème 1.11

Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach X dans lui même, avec $\|A\| < 1$, et soit I l'opérateur identique sur X . Alors $I - A$ admet un opérateur inverse borné donné par la série de Neumann

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \quad (1.14)$$

de plus

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|} \quad (1.15)$$

1.2.3 Opérateur adjoint

Soit A un opérateur intégral de noyau K , alors l'opérateur adjoint A^* est un opérateur intégral de noyau K^* , avec $K^*(t, s) = K(s, t)$.

Preuve.

De la définition on a, soit $\varphi, \psi \in \mathcal{L}^2([a, b])$

$$\begin{aligned} (T\varphi, \psi) &= \int_a^b \left(\int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy \right) \psi(x) dx \\ &= \int_{[a, b]^* [a, b]} K(x, y) \varphi(y) \psi(x) dy dx \end{aligned} \quad (1.16)$$

d'après le théorème de Fubini en échangeant encore l'ordre d'intégration, il vient

$$(T\varphi, \psi) = \int_a^b \left(\int_a^b K(x, y) \psi(x) dx \right) \varphi(y) dy = (\varphi, T^*\psi) \quad (1.17)$$

d'après la définition de l'opérateur adjoint. En permutant des variables, on obtient le résultat voulu. ■

1.2.4 Théorème (de Banach-Steinhaus)

Soit $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs bornés soit X et Y deux espaces de Banach $A_n : X \rightarrow Y$ On suppose que la suite est bornée ponctuellement, i.e. que pour tout $u \in X$, il existe une constante C_u telle que $\|A_n u\|_Y \leq C_u$. Alors, la suite est bornée uniformément en norme, i.e. il existe une constante C telle que $\|A_n u\|_Y \leq C$.

Chapitre 2

Polynôme d'Hermite et équation intégral

2.1 Polynôme d'Hermite

Dans ce chapitre on définit les polynômes d'Hermite. Ces polynômes sont importantes en mathématiques, parce qu'ils sont simplement définis, peut être calculée rapidement sur les systèmes informatiques et représentent une grande variété de fonctions. Ils peuvent être différenciés et intégrés facilement.

2.1.1 Définition de polynôme d'Hermite

Les polynômes de base d'Hermite de degré n forment une base complète dans l'espace Hilbert et sont définis par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.1)$$

Quelques polynômes

Les premiers polynômes d'Hermite sont :

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$

Orthogonalité

Définition 2.1.1 (Vecteurs orthogonaux)

On dit que deux vecteurs x et y d'un espace Euclidien E sont orthogonaux si leur produit scalaire $\langle x, y \rangle$ est nul, c'est à dire

$$\langle x, y \rangle = 0. \text{ On note } x \perp y \quad (2.2)$$

Propriétés

- Si un vecteur x de E est orthogonal à chaque vecteur d'un ensemble F , on dit que x est orthogonal à l'ensemble F , et on écrit

$$\langle x, z \rangle = 0 \quad \forall z \in F. \quad (2.3)$$

- Si les vecteurs de deux ensembles F_1 et F_2 sont orthogonaux deux à deux, on dit que ces ensembles sont orthogonaux et on écrit

$$\langle v, w \rangle = 0 \quad \forall v \in F_1 \text{ et } w \in F_2 \quad (2.4)$$

2.1.2 Polynômes orthogonaux

Les polynômes

Les polynômes constituent une famille des fonctions tout à fait remarquable en mathématiques, ils sont aussi un outil essentiel du calcul dans l'analyse numérique, notamment dans l'évaluation et l'approximation des fonctions, dans les problèmes d'interpolation, dans la résolution des équations intégrales ou équation différentielle, ...etc

Définition 2.1

Soit I un intervalle fermé ou non, borné ou non et soit $\omega : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement positive ($\omega(x) > 0$ pour tout $x \in I$) est dit fonction de poids telle que l'application

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2 \quad \langle P, Q \rangle = \int_a^b P(x) Q(x) \omega(x) dx \quad (2.5)$$

défini un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]^2$.

Définition 2.2

On appelle polynômes orthogonaux associés à la fonction poids ω sur l'intervalle I , la suite des polynômes $p_n = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots$, obtenus par orthogonalisation de Gram-Schmidt de la suite des monômes x^n , $n \geq 0$.

Définition 2.3

On dit que la famille de polynômes $(p_i)_{i \geq 0}$ est une famille de polynômes orthogonaux si :

(a) Le degré de p_i est i pour tout entier i .

(b) $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2 \quad i \neq j \implies \langle p_i, p_j \rangle = 0$. ce produit scalaire est au sens des fonctions sommables .

2.2 L'orthogonalité des polynômes d'Hermite

2.2.1 polynômes orthogonaux d'Hermite

La n -ième fonction de la suite est un polynôme de degré n . ces polynômes sont orthogonaux pour la fonction de poids $e^{-x^2} dx$

c'est-à-dire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 0 \quad (2.6)$$

pour $n \neq m$

On veut construire une suite de polynômes orthogonaux dans l'espace $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$, où la mesure est donnée par

$$d\mu(x) = e^{-x^2} dx .$$

Posons $\varphi_0(x) = e^{-x^2}$ et constatons que pour tout entier $n \geq 0$ la dérivée n ième de φ_0 est de la forme

$$\varphi_0^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) \varphi_0(x) \quad (2.7)$$

Posons aussi $\varphi_n(x) = H_n(x) e^{-x^2} = (-1)^n \varphi_0^{(n)}(x)$

d'où pour tout entier $n \geq 0$.on a $\varphi_n(x) = -\varphi_{n-1}'(x)$

pour tout entier $k, n \geq 1$

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \varphi_n(x) dx = [-x^k \varphi_{n-1}(x) dx]_{-\infty}^{+\infty} + k \int_{\mathbb{R}} x^{k-1} \varphi_{n-1}(x) dx = k \int_{\mathbb{R}} x^{k-1} \varphi_{n-1}(x) dx \quad (2.8)$$

$x^k \varphi_{n-1} dx$ est de la forme $P(x)e^{-x^2}$, avec P un polynôme

$$[-x^k \varphi_{n-1}(x)]_{-\infty}^{+\infty} = 0 \quad (2.9)$$

d'où on déduit par récurrence lorsque $k < n$

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \varphi_n(x) dx = k! \int_{\mathbb{R}} \varphi_{n-k}(x) dx = 0 \quad (2.9)$$

(puisque $n - k > 0$, on voit que la fonction φ_{n-k} est la dérivée d'une fonction qui tend vers 0 en $-\infty$ ou $+\infty$, d'où la nullité de l'intégrale). on déduit que φ_n est orthogonale aux monômes de degré $< n$; on a aussi

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \varphi_n(x) dx = n! \int_{\mathbb{R}} \varphi_0(x) dx = \sqrt{\pi} n! \quad (2.10)$$

On conclut pour tout $k < n$ la relation d'orthogonalité

$$\int_{\mathbb{R}} H_k(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} H_k(x) \varphi_n(x) dx = 0 \quad (2.11)$$

2.3 Propriétés :

Nous donnons les propriétés des polynômes d'Hermite de base généralisées dans la liste des assertions suivantes:

posons $\varphi_0(x) = e^{-x^2}$

(1) H_n est totale dans $(\mathbb{R}, \varphi_0, \lambda)$:

(2) La propriété de la fonction génératrice:

$$G(x, t) = e^{2tx - t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n. \quad \forall x, t \in \mathbb{R} \quad (2.12)$$

(3) La propriété de la relation de récurrence:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x). \quad (2.13)$$

(4) La propriété de l'équation différentielle:

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0. \quad (2.14)$$

(5) La norme du polynome d'Hermite :

$$\|H_n\| = \sqrt{2^n \cdot n! \cdot \sqrt{\pi}}. \quad (2.15)$$

(6) Les dérivés n ème degré généralisées polyômes de base Hermite sont donnés par :

$$\frac{d^n}{dx} H_n(x) = 2nH_{n-1}. \quad (2.16)$$

2.4 Développement d'une fonction en série de polynôme d'Hermite

Dans l'intervalle infini $]-\infty, +\infty[$ on peut développer une fonction donnée $f(x)$ en série de polynôme d'Hermite,

$$f(x) = \sum_{i=0}^n C_i H_i(x) \quad -\infty < x < +\infty \quad (2.17)$$

2.5 Les équations intégrales

Définition 2.4

les équations intégrales ont un caractère fort différent des équations différentielles que l'on rencontre dans la plus part des phénomènes physiques (par exemple phénomène de diffusion), le principale source d'équations de ce type est l'étude du transfert d'énergie par radiation, A la différence du transfert radiatif, les phénomènes de radiation ne peuvent pas être décrit à l'aide d'équation mettant en jeu un simple champ scalaire. Les lois de

conservation deviennent alors plus complexe et ne peuvent s'exprimer que sous formes d'intégrales étendues à toute la surface considérée.

2.5.1 Classifications des équations intégrales

Équations intégrales linéaires

Définition 2.5 On appelle équation intégrale une équation où la fonction inconnue u , apparaît le signe \int et prend la forme suivante :

$$u(x) - \lambda \int_G k(x, t)u(t)dt = f(x) \quad (2.18)$$

avec $f(x)$ et $k(x, t)$ sont deux fonctions connues, λ un paramètre numérique.

G est un ensemble borné et fermé d'un espace Euclidien, et k est le noyau de l'équation intégrale.

- Si $f(x) \neq 0$ l'équation (2.18) est dite équation intégrale non homogène.
- Si $f(x) = 0$ l'équation (2.18) est dite équation intégrale homogène.

Avec toutes ces données, notre problème est de chercher la fonction u qui satisfait l'équation (2.18)

Et peut être écrite sous forme

$$u - Au = f \quad (2.19)$$

avec $A = \int_a^b k(x, t)dt$.

Équations intégrales de Fredholm

Définition 2.6

- On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de deuxième espèce non homogène une équation de la forme

$$u(x) - \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt = f(x) \quad (2.20)$$

Si $f(x) = 0$ l'équation intégrale (2.5) s'écrit

$$u(x) - \lambda \int_a^b k(x, t) u(t) dt = 0 \quad (2.21)$$

Est appelée équation intégral homogène de Fredholm de seconde espèce.

• On appelle équation intégrale linéaire non homogène de Fredholm de première espèce une équation de la forme

$$\lambda \int_a^b k(x, t) u(t) dt = f(x). \quad (2.22)$$

Où la fonction inconnue $u(t)$ n'intervient que sous le signe d'intégration, s'appelle équation intégrale de Fredholm non homogène de première espèce.

Si $f(x) = 0$ cette équation est appelée équation intégral homogène de Fredholm de première espèce.

Équation intégrale de volterra

Définition 2.7

Soit $I = [a, b]$ un intervalle borné et fermé de \mathbb{R} . (compact)

L'équation intégrale de volterra est un cas particulier de l'équation de Fredholm.

• On appelle équation intégrale linéaire de volterra du deuxième espèce, une équation de la forme

$$u(x) - \lambda \int_a^x k(x, t) u(t) dt = f(x) \quad (2.23)$$

Si $f(x) = 0$ l'équation intégrale (2.23) s'écrit

$$u(x) - \lambda \int_a^x k(x, t) u(t) dt = 0 \quad (2.24)$$

Et s'appelle équation intégral homogène de volterra de seconde espèce.

Une équation de la forme

$$\lambda \int_a^x k(x, t) u(t) dt = f(x) \quad (2.25)$$

Est appelée équation intégrale de Volterra première espèce.

Si $f(x) = 0$ cette équation est dit équation intégral homogène de Volterra de première espèce.

Équation intégrale de Volterra-Fredholm

Définition 2.8

- On appelle équation intégrale de Volterra-Fredholm de première espèce

$$\int_{-1}^1 k \left(\frac{\xi - x}{\lambda} \right) u(\xi, t) d\xi + \int_0^t F(T)u(x, t)dT \quad (2.26)$$

$$= \pi\theta (\gamma(t) + \beta(t)x - g(x))$$

ou $\theta = G(1 - v)^{-1}$, $f \in \mathcal{L}^2((-1, 1))$, $|x| \leq 1$ et $\lambda \in (0, \infty)$.

- Et appelle équation intégrale de Volterra- Fredholm de deuxième espèce

$$\gamma u(x, t) + \int_{-1}^1 k \left(\frac{\xi - x}{\lambda} \right) u(\xi, t)d\xi + \int_0^t F(T)u(x, t)dT \quad (2.27)$$

$$= g(x, t)$$

ou $g(x, t) = \frac{\pi}{\theta_1 + \theta_2} [\gamma(t) + \beta(t)x - h_1(x) - h_2(x)]$, $|x| \leq 1$

$\lambda \in [0, \infty]$ et $\gamma \in [0, \infty[$

Équation intégrale d'Abel

On appelle équation intégrale d'Abel une équation de la forme

$$\int_0^x \frac{u(t)}{\sqrt{x-t}} dt = f(x) \quad (2.28)$$

ou $u(x)$ est la fonction inconnue et $f(x)$ une fonction donnée, c'est une équation intégrale de Volterra de première espèce.

On appelle également équation d'Abel une équation plus générale :

$$\int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^a} dt = f(x) \quad (2.29)$$

où a est une constant, tel que : $0 < a < 1$ (équation d'Abel généralisée). La fonction $f(x)$ sera supposée possédant une dérivée continue sur un segment $[0, a]$.

2.6 Existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale

On considère l'équation

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) u(t) dt, \quad (2.30)$$

avec $f : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonction continu et, $k(x, t)$ est une matrice $n \times n$ des fonction continues telles que $0 \leq x \leq \alpha$ et $\alpha \leq \infty$.

Lemme 2.1(Granwal) Soit $f, g : [0, \alpha] \rightarrow [0, \infty]$ deux fonctions continues et soit c un nombre positif

$$f(t) \leq c + \int_0^t g(s) f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq \alpha. \quad (2.31)$$

Alors

$$f(t) \leq c + \exp \int_0^t g(s) ds, \quad 0 \leq t \leq \alpha$$

Preuve.

On suppose $c > 0$ divisant la relation (2.31) par

$$\left[c + \int_0^t g(s) f(s) ds \right]$$

Et multipliant par $g(t)$ donc

$$g(t) f(t) / \left[c + \int_0^t g(s) f(s) ds \right] \leq g(t)$$

En intégrant la relation précédente entre $[0, t]$

$$\ln \left(\left[c + \int_0^t g(s) f(s) ds / c \right] \right) \leq \int_0^t g(s) ds$$

Alors

$$f(t) \leq c + \int_0^t g(s) f(s) ds \leq \exp \int_0^t g(s) ds \quad (2.31)$$

si $c = 0$ on applique la limite $c \rightarrow 0$ avec les valeurs de fonction f sont positives.

Théorème 2.1

Soit $0 < \alpha \leq \infty$, on suppose que $f : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ fonction continue et que $k(x, t)$ et un matrice $n \times n$ des fonctions telle que $0 \leq t \leq x \leq \alpha$ si $0 < t < \alpha$, alors il existe une unique solution $u(x)$ pour l'équation intégrale de Volterra suivante

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x, t) u(t) dt, \quad x \in [0, T] \quad (2.32)$$

Preuve.

Soit l'équation intégrale de Volterra

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x, t) u(t) dt$$

On définit la suite $(\psi_n(x))$ sur l'intervalle $[0, T]$ par la méthode d'approximation successive, on obtient

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= f(x) \\ \psi_1(x) &= \int_0^x k(x, t) \psi_0(t) dt \\ &\quad \vdots \\ \psi_{i+1}(x) &= \int_0^x k(x, t) \psi_i(t) dt \end{aligned}$$

$$k = \max_{0 \leq t \leq T} k(x, t)$$

$$F = \max_{0 \leq t \leq T} |f(x)|$$

$$\begin{aligned}
 |\psi_1(x)| &\leq \int_0^x |k(x,t) \psi_0(t)| dt \leq kFx \\
 |\psi_2(x)| &\leq \int_0^x |k(x,t) \psi_1(t)| dt \leq \frac{1}{2}k^2Fx^2 \\
 &\dots \\
 |\psi_n(x)| &\leq \int_0^x |k(x,t) \psi_{n-1}(t)| dt \leq \frac{F(kx)^n}{n!}
 \end{aligned}$$

par récurrence la relation précédent est vraie quelque soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{F(kx)^i}{i!} = Fe^{kx}$$

qui est une série de Taylor qui converge uniformément et absolument sur $[0, T]$ donc la suit

$$u_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(x),$$

converge vers

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(x).$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^x k(x,t) u(t) dt &= \int_0^x k(x,t) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(t) \right) dt \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\int_0^x k(x,t) \psi_i(t) dt \right) \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \psi_{i+1}(x) \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(x) - \psi_0(x) \\
 &= u(x) - f(x).
 \end{aligned}$$

Donc il existe la solution $u(x)$ telle que

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)u(t)dt. \quad (2.33)$$

Nous pouvons montrer l'unicité, on suppose qu'il existe deux solutions $X(x)$ et $Y(x)$ de l'équation (2.33), donc

$$X(x) - Y(x) = \int_0^x k(x, t) (X(t) - Y(t)) dt,$$

On obtient donc la suit suivante:

$$|X(x) - Y(x)| \leq k \int_0^x |X(t) - Y(t)| dt$$

cette relation est de la forme suivante

$$Z(x) \leq k \int_0^x |Z(t)| dt$$

telle que $Z(x) = X(x) - Y(x)$, on a $\forall c > 0$ la relation

$$Z(x) \leq c + k \int_0^x |Z(t)| dt$$

la relation précédent est vrais pour $c = 0$ telle c est une constante, d'après le lemme de Gronwall

$$|Z(x)| \leq ce^{kx} = 0,$$

puisque $c = 0$, donc

$$\begin{aligned} Z(x) &= X(x) - Y(x) = 0 \\ X(x) &= Y(x) \end{aligned}$$

Alors la solution de l'équation intégrale (2.33) est unique.

2.7 Méthodes d'approximation pour les équations intégrales

Un grand nombre de méthodes fondées sur des principes différents ont été proposées et sont pratiquement utilisées pour la résolution numérique des équations intégrales. Dans cette partie on donne quelques méthodes d'approximation.

2.7.1 Méthodes du noyau dégénéré

Soit A l'opérateur intégral défini sur l'espace $C[a, b]$. La méthode du noyau dégénéré correspond à approximer le noyau K par une suite de noyau dégénérés K_n de la forme :

$$K_n(x, t) = \sum_{j=1}^n p_j(x) q_j(t) \quad \forall x, y \in [a, b] \quad (2.34)$$

Où $(p_j)_{1 < j < n}$ et $(q_j)_{1 < j < n}$ sont des familles d'éléments de $C[a, b]$, avec de plus la famille $(p_j)_{1 < j < n}$ est linéairement indépendante. Dans ce cas l'opérateur intégral A est approximer par une suite d'opérateurs $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la forme :

$$A_n u = \sum_{j=1}^n \langle u, q_j \rangle p_j \quad (2.35)$$

Et par conséquence, l'équation (2.18) avec $\lambda = 1$ sera elle aussi approximer par

$$u_n(x) - \sum_{j=1}^n z_j p_j(x) = f(x) \quad (2.36)$$

Où

$$z_j = \int_a^b q_j(t) u(t) dt \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.37)$$

Aussi, on peut écrire :

$$z_i = \int_a^b q_i(x) u(x) dx = \int_a^b q_i(x) f(x) dx + \sum_{j=1}^n \left(\int_a^b q_i(x) p_j(x) dx \right) z_j. \quad (2.38)$$

Posons

$$c_i = \int_a^b q_i(x) f(x) dx, \quad a_{ij} = \int_a^b q_i(x) p_j(x) dx \quad (2.39)$$

On obtient

$$z_i = c_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.40)$$

Finalement, on a le théorème suivant :

Théorème 2.2 Les solutions de l'équation :

$$u_n(x) - \sum_{j=1}^n \langle u, q_j \rangle p_j = f \quad (2.41)$$

ont la forme :

$$u_n = f + \sum_{j=1}^n z_j p_j \quad (2.42)$$

Où les coefficients z_1, z_2, \dots, z_n sont solution du système (2.40) i.e

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad z_i - \sum_{j=1}^n \langle p_j, q_i \rangle z_j = \langle f, q_i \rangle \quad (2.43)$$

2.7.2 Méthodes de projection

Définition 2.9

Soit X un espace vectoriel normé, et U un sous espace de X . Un opérateur borné

$P : X \rightarrow Y$ est appelé projecteur s'il vérifie :

$$\forall u \in U, \quad Pu = u \quad (2.44)$$

Définition 2.10 (Méthodes de projection)

On se donne X et Y deux espaces de Banach, ainsi que $A : X \rightarrow Y$ un opérateur borné injectif. Pour $f \in A(X) \subset Y$, on cherche à approcher la solution du problème:

$$\text{trouver } u \in X \text{ tel que } Au = f \quad (2.45)$$

Pour se faire, on se donne une suite de sous espaces vectoriels $X_n \subset X$ et $Y_n \subset Y$ de dimension finie n , ainsi que des projecteurs $P_n : Y \rightarrow Y_n$.

On considère le problème approché :

$$\text{trouver } u_n \in X_n \text{ tel que } P_n A u_n = P_n f \quad (2.46)$$

Cette méthode de projection est dite convergente s'il existe un rang n_0 à partir duquel pour tout $f \in A(X)$, l'équation approché (2.46) admet une unique solution $u_n \in X_n$ et que cette solution converge vers la solution u de (2.45), i.e $u_n \rightarrow u$ si $n \rightarrow +\infty$.

Cette condition de convergence peut s'exprimer simplement en fonction de l'opérateur $A_n = P_n A : X_n \rightarrow Y_n$.

Elle signifie simplement qu'à partir d'un certain rang, cet opérateur est inversible, et que de plus, on a une convergence ponctuelle

$$A^{-1}(P_n f) = A^{-1}(P_n(Au)) = (P_n A)^{-1} P_n A u \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \quad (2.47)$$

2.7.3 Méthode de collocation

Généralement, le principe de la méthode de collocation appliqué à la résolution approchée d'opérateur équation

$$u - Au = f \quad (2.48)$$

Consiste à chercher une solution approchée dans un sous espace de dimension finie, en exigeant que l'équation(2.48)soit vérifiée seulement sur un nombre fini de points appelés points de collocation.

En pratique, nous choisissons une suite de sous espaces $X_n \subset X$, $n \geq 1$ de dimension finie, généralement des sous espaces de $C(G)$ ou de $L^2(G)$. Soit $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ une base de X_n .

On cherche une fonction $u_n \in X_n$, de la forme

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x), \quad x \in G \quad (2.49)$$

Pour déterminer les coefficients (c_j) , on substituant, cette fonction dans l'équation (2.48), et on exigeant que l'équation soit exacte dans le sens où le résidu

$$\begin{aligned} R_n(x) &= u_n(x) - \int_G K(x,t) u(t) dt - f(x) \\ &= \sum_{j=1}^n c_j \left\{ \psi_j(x) - \int_G K(x,t) \psi_j(t) dt \right\} - f(x), \quad x \in G \end{aligned} \quad (2.50)$$

soit nul sur un système de noeuds $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$, (i.e, aux points de collocation)

Ce qui conduit systématiquement à la résolution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \psi_j(x_i) - \int_G K(x_i,t) \psi_j(t) dt \right\} c_j = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.51)$$

de la forme $\Psi_n X = f_n$. Évidemment, ce système admet une solution unique si le det Ψ_n est non nul, ce qui dépend d'ailleurs du choix des points de collocation.

2.7.4 Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin est semblable à la précédente, sauf qu'elle demande des conditions optimales pour les fonctions $u_n \in X_n$. Plutôt que rechercher l'orthogonalité avec l'espace transformé \widehat{X}_n , on demande simplement l'orthogonalité avec l'espace X_n . Si on note P_n l'opérateur de projection sur X_n , ces conditions se traduisent simplement par la projection de l'équation (2.48):

$$u_n - P_n A u_n = P_n f \quad (2.52)$$

On peut expliciter les équations obtenues sur notre base v_i de X_n :

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \langle \widehat{u}_n - f, u_i \rangle &= 0 \\ \iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \langle u_n - A u_n - f, v_i \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

En recherchant u_n par l'intermédiaire d'une combinaison linéaire comme en (2.52), ces équations se traduisent par le système :

$$\begin{bmatrix} \langle \hat{u}_1, u_1 \rangle & \dots & \langle \hat{u}_n, u_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \hat{u}_1, u_n \rangle & \dots & \langle \hat{u}_n, u_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, u_n \rangle \end{bmatrix}$$

2.7.5 Méthode de Petrov-Galerkin

Il s'agit d'une méthode essentiellement Hilbertienne, c'est à dire qu'elle met en jeu la projection de notre équation dans un sous espace de dimension finie. Pour ce faire, soit X un espace d'Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on se donne une suite de sous espace $X_n \subset X$ de dimension finie. Soit $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ une base orthonormale de X_n , on cherche une fonction $u_n \in X_n$ de la forme (2.49) proche de la solution exacte du problème original. Donc pour le problème (2.48), l'idée est de minimiser l'erreur

$$r_n = \sum_{i=1}^n c_i (I - A) \psi_i - f \quad (2.54)$$

d'où on impose la condition d'orthogonalité suivante

$$\langle r_n, \psi_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n c_i (I - A) \psi_i - f, \psi_j \right\rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.55)$$

ce qui implique

$$\left\langle \sum_{i=1}^n c_i (I - A) \psi_i, \psi_j \right\rangle - \langle f, \psi_j \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.56)$$

ou

$$\sum_{i=1}^n c_i \{ \langle \psi_i, \psi_j \rangle - \langle A \psi_i, \psi_j \rangle \} = \langle f, \psi_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.57)$$

Ainsi, on obtient le système linéaire

$$c_j - \sum_{i=1}^n c_i \langle A \psi_i, \psi_j \rangle = \langle f, \psi_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.58)$$

Chapitre 3

Analyse numérique pour les équations intégrales et équations intégréo-différentielles

La résolution des équations intégrales et intégréo-différentielles est très difficile, donc on doit résoudre numériquement.

L'objectif est de trouver une solution approchée de la solution exacte. Dans ce chapitre on va résoudre numériquement des équations intégrales de Fredholm de 2^{ème} espèce et équations intégréo-différentielles de Fredholm de 2^{ème} espèce par polynôme d'Hermite et on va faire un comparaison entre les solutions exactes et les solutions approchés.

3.1 Résolution de l'équation intégrale de Fredholm par polynôme d'Hermite

3.1.1 Discrétisation de l'équation intégrale

Dans cette partie, nous voulons à l'équation de Fredholm de 2^{ème} espèce qui défini par :

$$u(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) u(t) dt = f(x), \quad x \in [a, b] \quad (3.1)$$

Où $f(x)$ est une fonction continue dans $[a, b]$, $k(x, t)$ fonction continue $\forall (x, t) \in [a, b]^2$.

Nous convertissons cette équation en système des équations linéaires. Pour ce résultat, nous avons besoin de quelques fonctions de base pour estimer la solution de l'équation intégrale. De sorte que, nous choisissons des polynômes d'Hermite comme les fonctions de base

Maintenant nous employons la technique de la méthode de Galerkin

Pour ceci, nous estimons la fonction inconnue $u(x)$ comme suit

$$u(x) = \sum_{i=0}^n a_i H_i(x) \quad (3.2)$$

Où H_i sont des polynômes d'Hermite et, $a_i, i = 0, 1, \dots, n$ sont des paramètres inconnus, être déterminés. On remplace (3.2) dans l'équation (3.1), nous obtenons

$$\sum_{i=0}^n a_i H_i(x) + \lambda \int_a^b \left[k(x, t) \sum_{i=0}^n a_i H_i(t) \right] dt = f(x) \quad (3.3)$$

ou

$$\sum_{i=0}^n a_i \left[H_i(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) H_i(t) dt \right] = f(x) \quad (3.4)$$

Alors les équations de Galerkin sont obtenues en multipliant les deux côtés de (3.4) par H_j et puis en intégrant en ce qui concerne x de a à b , nous avons

$$\sum_{i=0}^n a_i \left[\int_a^b \left[H_i(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) H_i(t) dt \right] H_j(x) dx \right] = \int_a^b H_j(x) f(x) dx. \quad (3.5)$$

Puisque dans chaque équation, il y a trois intégrales. La fonction à intégrer intérieure du côté gauche est une fonction de x et de t , et est intégrée en ce qui concerne t de a à b . En conséquence la fonction à intégrer externe devient une fonction de x seulement et

l'intégration avec le respect à x rapporte une constante. Ainsi pour le chaque

($j = 0, 1, \dots, n$) nous prenons une équation linéaire avec les inconnus $(n + 1)$ ($a_i, i = 0, 1, \dots, n$).

Enfin (3.5) représente le système $(n + 1)$ des équations linéaires dans les $(n + 1)$ inconnues, et s'écrit sous forme

$$A_{i,j}X_i = b_j, \quad i, j = 0, 1, \dots, n \quad (3.6)$$

avec

$$A_{i,j} = \int_a^b \left[H_i(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)H_i(t) dt \right] H_j(x) dx, \quad i, j = 0, 1, \dots, n$$

$$b_j = \int_a^b H_j(x) f(x) dx, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

$$X_i^t = (a_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

3.2 Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte

Dans ce paragraphe on donne quelques exemples ulistratifs pour tester la méthode que on a traité dans 3.5 puis on donne les tableaux comparatif de la solution exacte avec la solution approchée suivi par l'erreur obtenue en chaque noeud .

Exemple 3.1

Soit l'équation de Fredholm suivant

$$u(x) - \int_0^1 2e^x e^t u(t) dt = e^x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

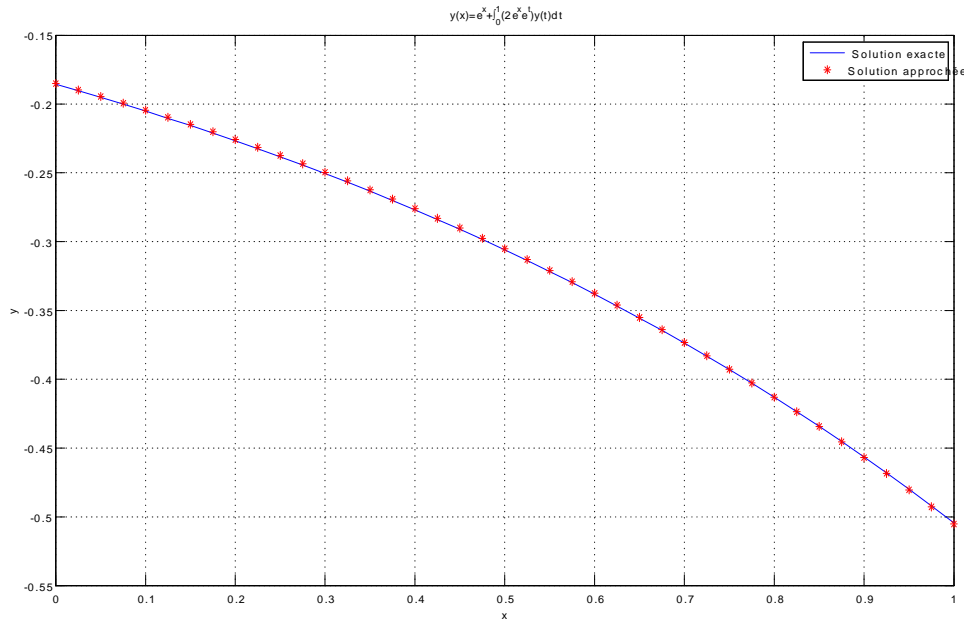
La solution exacte de cette équation est $u(x) = \frac{e^x}{2-e^2}$.

La solution approché $\tilde{u}(x)$ de la solution exacte $u(x)$ est obtenu par la solution du système des équations linéaires pour $n = 4$ et $n = 8$

3.2. Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte

			pour $n = 4$		pour $n = 8$	
	x	Solution exacte	Sol approché	erreur	Sol approché	erreur
1	0.0	-0.185561	-0.185387	1.744100e-004	-0.185143	4.187355e-004
2	0.1	-0.205077	-0.205116	3.902008e-005	-0.204353	7.235674e-004
3	0.2	-0.226645	-0.226719	7.352367e-005	-0.225756	8.893342e-004
4	0.3	-0.250481	-0.250505	2.345189e-005	-0.249506	9.754945e-004
5	0.4	-0.276825	-0.276785	3.954645e-005	-0.275896	9.287872e-004
6	0.5	-0.305939	-0.305870	6.891248e-005	-0.305124	8.145013e-004
7	0.6	-0.338115	-0.338069	4.581596e-005	-0.337503	6.112137e-004
8	0.7	-0.373674	-0.373692	1.792841e-005	-0.373322	3.529416e-004
9	0.8	-0.412974	-0.413051	7.663810e-005	-0.412949	2.555398e-005
10	0.9	-0.456407	-0.456454	4.720080e-005	-0.456749	3.419282e-004
11	1.0	-0.504408	-0.504213	1.948621e-004	-0.505171	7.630412e-004

Tab(1): Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 1 pour $n=4$ et $n=8$



Fig(1): Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 1 pour $n=40$

Exemple 3.2

Soit l'équation de Fredholm suivant

$$u(x) - \int_{-1}^1 (x^4 - t^4) u(t) dt = x, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

La solution exacte de cette équation est $u(x) = x$.

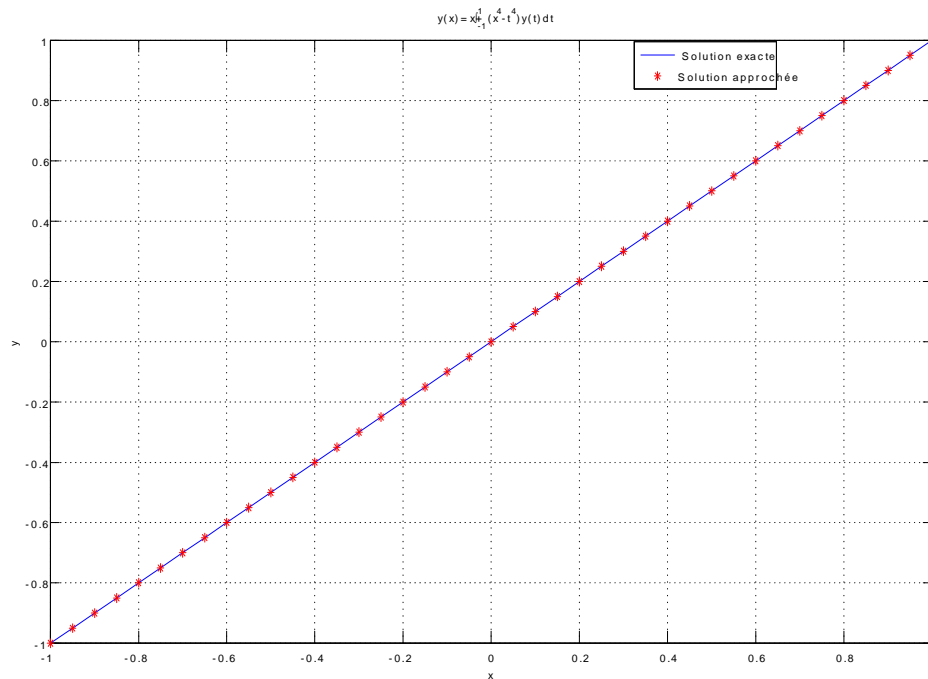
La solution approché $\tilde{u}(x)$ de la solution exacte $u(x)$ est obtenu par la solution du système des équations linéaires pour $n = 4$

3.2. Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte

			pour $n = 4$		pour $n = 8$	
	x	Solution exacte	Sol approché	erreur	Sol approché	erreur
1	-1.0	-1.000000	-1.000000	0.000000e+000	-1.000000	0.000000e+000
2	-0.8	-0.800000	-0.800000	0.000000e+000	-0.800000	0.000000e+000
3	-0.6	-0.600000	-0.600000	0.000000e+000	-0.600000	0.000000e+000
4	-0.4	-0.400000	-0.400000	0.000000e+000	-0.400000	0.000000e+000
5	-0.2	-0.200000	-0.200000	0.000000e+000	-0.200000	0.000000e+000
6	0.0	0.000000	0.000000	0.000000e+000	0.000000	0.000000e+000
7	0.2	0.200000	0.200000	0.000000e+000	0.200000	0.000000e+000
8	0.4	0.400000	0.400000	0.000000e+000	0.400000	0.000000e+000
9	0.6	0.600000	0.600000	0.000000e+000	0.600000	0.000000e+000
10	0.8	0.800000	0.800000	0.000000e+000	0.800000	0.000000e+000
11	1.0	1.000000	1.000000	0.000000e+000	1.000000	0.000000e+000

Tab(2): Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 2 pour $n=4$ et $n=8$

Remarque 3.2.1 la colonne de l'erreur est $\equiv 0 \Leftrightarrow$ que la solution approché coincide avec la solution exacte .



Fig(2): Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 2 pour $n=40$

Exemple 3.3

Soit l'équation de Fredholm suivant

$$u(x) + \int_0^1 x e^t u(t) dt = e^{-x}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

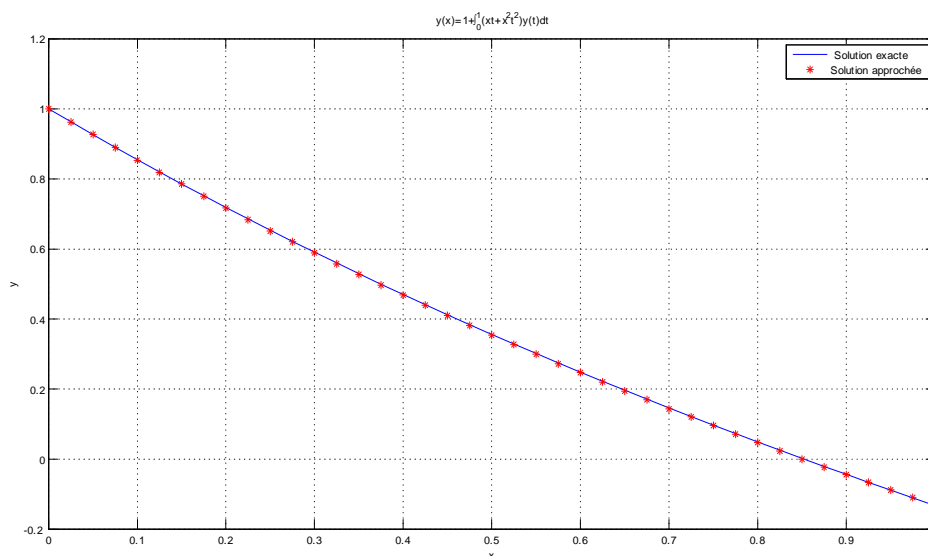
La solution exacte de cette équation est $u(x) = e^{-x} - \frac{x}{2}$.

La solution approché $\tilde{u}(x)$ de la solution exacte $u(x)$ est obtenu par la solution du système des équations linéaires pour $n = 4$

3.2. Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte

			pour $n = 4$		pour $n = 8$	
	x	Solution exacte	Sol approché	erreur	Sol approché	erreur
1	0.000000	1.000000	0.999614	3.863593e-004	1.000000	0.000000e+000
2	0.100000	0.854837	0.854931	9.354185e-005	0.853516	1.321793e-003
3	0.200000	0.718731	0.718883	1.519075e-004	0.716797	1.933878e-003
4	0.300000	0.590818	0.590854	3.551937e-005	0.588867	1.951033e-003
5	0.400000	0.470320	0.470229	9.085043e-005	0.468750	1.570046e-003
6	0.500000	0.356531	0.356394	1.366352e-004	0.354492	2.038472e-003
7	0.600000	0.248812	0.248733	7.841202e-005	0.248047	7.647611e-004
8	0.700000	0.146585	0.146632	4.648777e-005	0.143555	3.030616e-003
9	0.800000	0.049329	0.049475	1.457601e-004	0.047852	1.477402e-003
10	0.900000	-0.043430	-0.043353	7.735973e-005	-0.043945	5.149722e-004
11	1.000000	-0.132121	-0.132466	3.457667e-004	-0.131836	2.846213e-004

Tab(3): Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 3 pour $n=4$ et $n=8$



Fig(3): Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 3 pour $n=40$

Exemple 3.4

Soit l'équation de Fredholm suivant

$$u(x) - \int_0^1 (xt + x^2 t^2) u(t) dt = 1, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

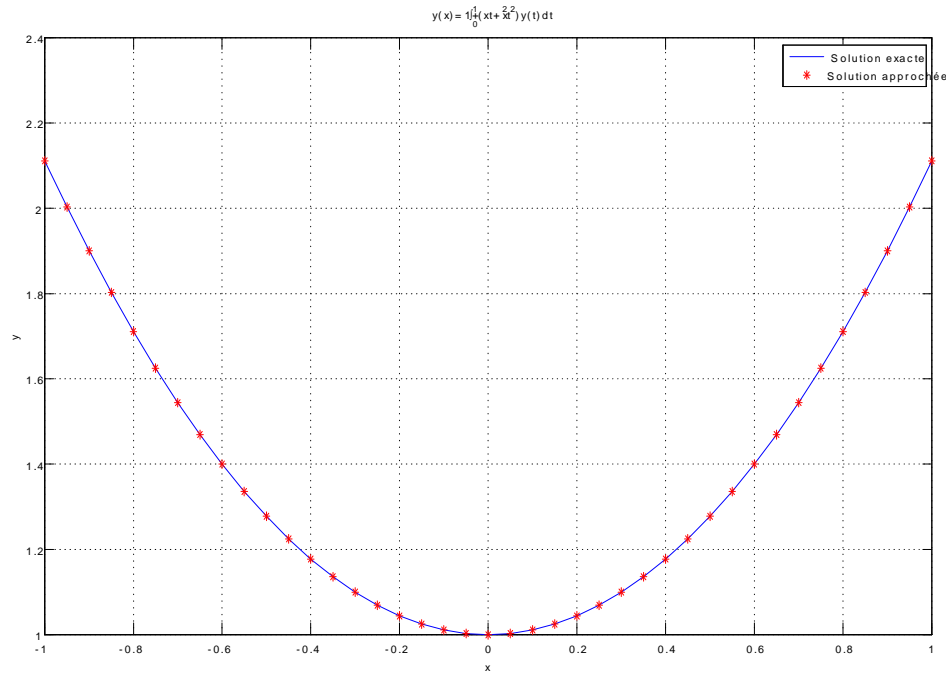
La solution exacte de cette équation est $u(x) = 1 + \frac{10}{9}x^2$.

La solution approché $\tilde{u}(x)$ de la solution exacte $u(x)$ est obtenu par la solution du système des équations linéaires pour $n = 4$

3.2. Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte

			pour $n = 4$		pour $n = 8$	
	x	Solution exacte	Sol approché	erreur	Sol approché	erreur
1	0.000000	2.111111	2.111111	0.000000e+000	2.111111	0.000000e+000
2	0.100000	1.711111	1.711111	0.000000e+000	1.711111	0.000000e+000
3	0.200000	1.400000	1.400000	0.000000e+000	1.400000	0.000000e+000
4	0.300000	1.177778	1.177778	0.000000e+000	1.177778	0.000000e+000
5	0.400000	1.044444	1.044444	2.220446e-016	1.044444	2.220446e-016
6	0.500000	1.000000	1.000000	0.000000e+000	1.000000	0.000000e+000
7	0.600000	1.044444	1.044444	2.220446e-016	1.044444	2.220446e-016
8	0.700000	1.177778	1.177778	0.000000e+000	1.177778	0.000000e+000
9	0.800000	1.400000	1.400000	0.000000e+000	1.400000	0.000000e+000
10	0.900000	1.711111	1.711111	0.000000e+000	1.711111	0.000000e+000

Tab(4): Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 4 pour $n=4$ et $n=8$



Fig(4): Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 4 pour $n=40$

Exemple 3.5

Soit l'équation de Volterra suivant

$$u(x) + 4 \int_0^x (x-t) u(t) dt = \sin(x), \quad 0 \leq x \leq 5,$$

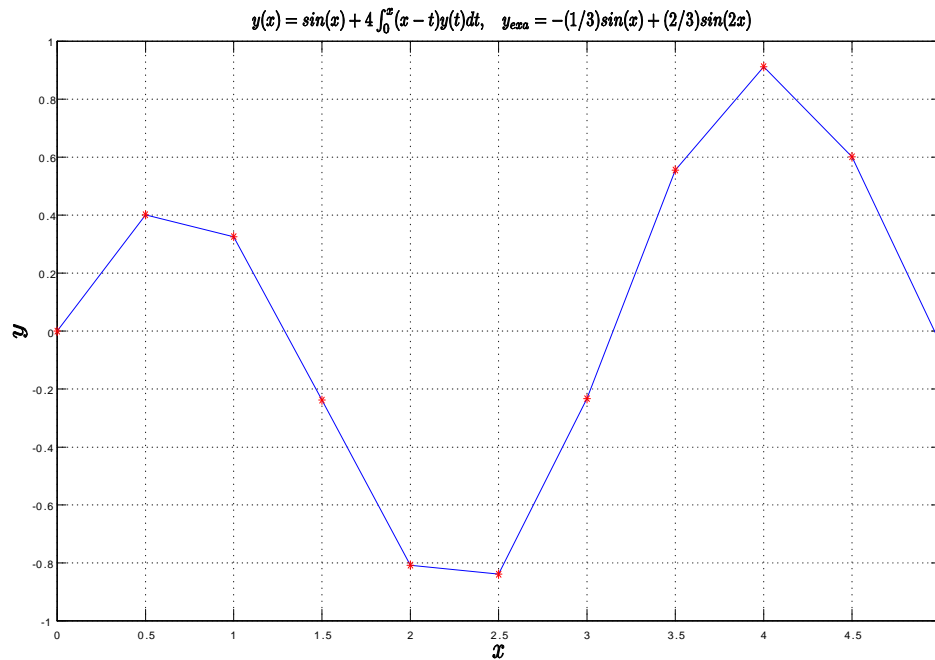
La solution exacte de cette équation est $u(x) = -\frac{\sin(x)}{3} + 2\frac{\sin(2x)}{3}$.

La solution approché $\tilde{u}(x)$ de la solution exacte $u(x)$ est obtenu par la solution du système des équations linéaires pour $n = 10$

3.2. Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte

	Points de x	Solution exacte	Solution approché	erreur
1	0.000000	0.000000	-0.000080	8.049607e-005
2	0.100000	0.401172	0.401110	6.250784e-005
3	0.200000	0.325708	0.325790	8.229998e-005
4	0.300000	-0.238418	-0.238494	7.529785e-005
5	0.400000	-0.807634	-0.807616	1.838216e-005
6	0.500000	-0.838774	-0.838693	8.027353e-005
7	0.600000	-0.233317	-0.233450	1.332026e-004
8	0.700000	0.554919	0.555063	1.444095e-004
9	0.800000	0.911840	0.911721	1.189399e-004
10	0.900000	0.600589	0.600698	1.093523e-004

Tab(5): Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 6 pour $n=4$



Fig(5): Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 6 pour n=10

3.2.1 Discrétisation de l'équation intégrro-différentielle

Dans cette partie, nous voulons à l'équation integro-differentielle qui défini par :

$$\alpha(x)u''(x) + \beta(x)u'(x) + \gamma(x)u(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt = f(x), \quad x \in [a,b] \quad (3.7)$$

avec $u(a) = r1$, $u'(a) = r2$

Où $f(x)$ est une fonction continue dans $[a,b]$, $k(x,t)$ fonction continue $\forall (x,t) \in [a,b]^2$.

Nous convertissons cette équation en système des équations linéaires. Pour ce résultat, nous avons besoin de quelques fonctions de base pour estimes la solution de équation intégrale. De sort que, nous choisissons des polynômes d'Hermite comme les fonctions de base

Maintenant nous employons la technique de la méthode de Galerkin

Pour ceci, nous estimons la fonction inconnue $u(x)$ comme suit

$$u(x) = \sum_{i=0}^n a_i H_i(x) \quad (3.8)$$

alors

$$u'(x) = \sum_{i=0}^n a_i H_i'(x) \quad (3.8)$$

et

$$u''(x) = \sum_{i=0}^n a_i H_i''(x) \quad (3.9)$$

Où H_i sont des polynômes d'Hermite et, $a_i, i = 0, 1, \dots, n$ sont des paramètres inconnus, être déterminé. on remplace (3.8) et (3.8) et (3.9) dans l'équation (3.7), nous obtenons

$$\sum_{i=0}^n \alpha(x) a_i H_i''(x) + \sum_{i=0}^n \beta(x) a_i H_i'(x) + \sum_{i=0}^n \gamma(x) a_i H_i(x) + \lambda \int_a^b \left[k(x, t) \sum_{i=0}^n a_i H_i(t) \right] dt = f(x) \quad (3.10)$$

ou

$$\sum_{i=0}^n a_i \left[\alpha(x) H_i''(x) + \beta(x) H_i'(x) + \gamma(x) H_i(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) H_i(t) dt \right] = f(x) \quad (3.11)$$

Alors les équations de Galerkin sont obtenues en multipliant les deux côtés de (3.11) par H_j et puis en intégrant en ce qui concerne x de a à b , nous ont

$$\sum_{i=0}^n a_i \left[\int_a^b \left[\alpha(x) H_i''(x) + \beta(x) H_i'(x) + \gamma(x) H_i(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) H_i(t) dt \right] H_j(x) dx \right] = \int_a^b H_j(x) f(x) dx \quad (3.12)$$

Puisque dans chaque équation, il ya trois intégrales. La fonction à intégrer intérieure du côté gauche est une fonction de x et de t , et est intégrée en ce qui concerne t de a à b . En conséquence la fonction à intégrer externe devient une fonction de x seulement et l'intégration avec le respect à x rapporte une constante. Ainsi pour le chaque

($j = 0, 1, \dots, n$) nous prenons une équation linéaire avec les inconnus ($n + 1$) (a_i $i = 0, 1, \dots, n$).

Donc les conditions initiales de problème(3.7) sont donné

$$u(a) = \sum_{i=0}^n a_i H_i(a) = r1$$

et

$$u'(a) = \sum_{i=0}^n a_i H_i'(a) = r2$$

Enfin (3.12) représente le système ($n + 1$) des équations linéaires dans les inconnue ($n + 1$), sont donné

$$M_{i,j} X_i = b_j, \quad i, j = 0, 1, \dots, n \tag{3.13}$$

où

$$M_{i,j} = \int_a^b \left[\alpha(x) H_i''(x) + \beta(x) H_i'(x) + \gamma(x) H_i(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) H_i(t) dt \right] H_j(x) dx, \quad i = 2, 3, \dots, n \text{ et } j =$$

$$M_{1,j} = H_j(a), \quad j = 0, 1, \dots, n$$

$$M_{2,j} = H_j'(a), \quad j = 0, 1, \dots, n$$

$$b_j = \int_a^b H_j(x) f(x) dx, \quad j = 2, 3, \dots, n$$

$$b_0 = r1 \quad \text{et} \quad b_1 = r2$$

$$X_i^t = (a_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

on pose $G_{i,j} = \int_a^b \left[A(x) H_i''(x) + B(x) H_i'(x) + C(x) H_i(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) H_i(t) dt \right] H_j(x) dx$

alors le systeme $M_{i,j} X_i = b_j$ est donné comme suite

$$\begin{bmatrix} H_0 & H_1 & \dots & H_n \\ H'_0 & H'_1 & \dots & H'_n \\ G_{0,0} & G_{1,0} & \dots & G_{n,0} \\ G_{0,1} & G_{1,1} & \dots & G_{n,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{0,n} & G_{1,n} & \dots & G_{n,n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_4 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \int_a^b H_2(x) f(x) dx \\ \dots \\ \dots \\ \int_a^b H_n(x) f(x) dx \end{bmatrix}$$

3.3 Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte

Exemple 3.6

Soit l'équation de Fredholm suivant

$$u''(x) - \int_{-1}^1 (1 - xt)u(t) dt = 32x, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

$$\text{avec } u(0) = -\frac{5}{2}, \quad u'(0) = 12$$

La solution exacte de cette équation est $u(x) = 5x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$.

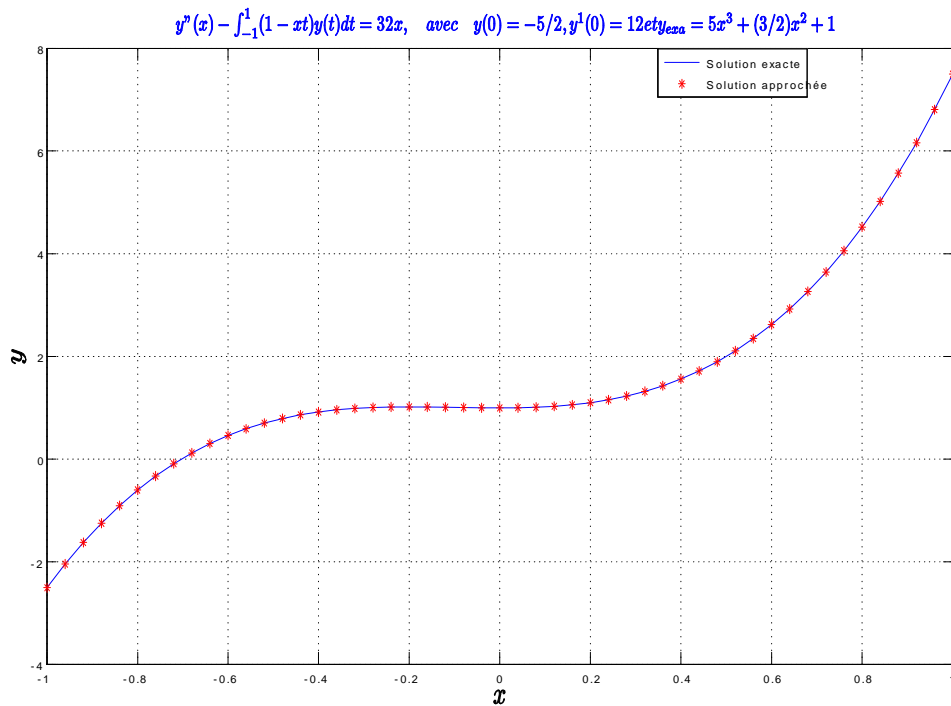
La solution approché $\tilde{u}(x)$ de la solution exacte $u(x)$ est obtenu par la solution du système des équations linéaires pour $n = 8$

3.3. Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte

	Points de x	Solution exacte	Solution approché	erreur
1	-1.0000000	-2.500000	-2.500000	1.776357e-015
2	-0.8000000	-0.600000	-0.600000	1.287859e-014
3	-0.6000000	0.460000	0.460000	5.373479e-014
4	-0.4000000	0.920000	0.920000	1.272316e-013
5	-0.2000000	1.020000	1.020000	2.378098e-013
6	0.0000000	1.000000	1.000000	3.912426e-013
7	0.2000000	1.100000	1.100000	5.913048e-013
8	0.4000000	1.560000	1.560000	8.431034e-013
9	0.6000000	2.620000	2.620000	1.151079e-012
10	0.8000000	4.520000	4.520000	1.520561e-012
11	1.000000	7.500000	7.500000	1.955769e-012

Tab(6): Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 11 pour $n=8$

3.3. Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte



Fig(6): Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 7 pour $n=50$

Exemple 3.7

Soit l'équation de Fredholm suivant

$$u'(x) - \int_0^1 xt u(t) dt = 6x + 3, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

avec $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$

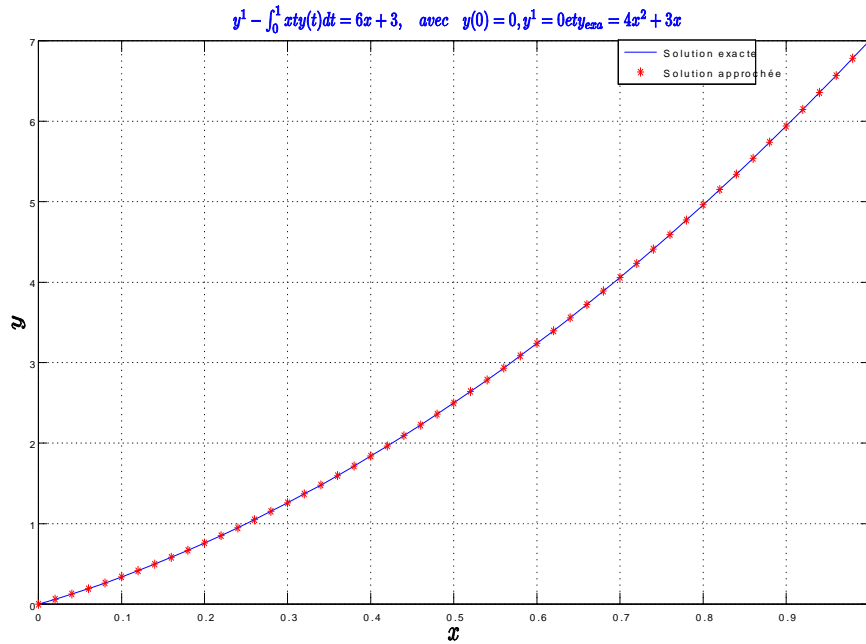
La solution exacte de cette équation est $u(x) = 4x^2 + 3x$.

La solution approché $\tilde{u}(x)$ de la solution exacte $u(x)$ est obtenu par la solution du système des équations linéaires pour $n = 8$

3.3. Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte

	Points de x	Solution exacte	Solution approché	erreur
1	0.0000000	0.000000	0.000000	0.000000e+000
2	0.1000000	0.340000	0.340000	2.650768e-012
3	0.2000000	0.760000	0.760000	6.164735e-012
4	0.3000000	1.260000	1.260000	8.767209e-012
5	0.4000000	1.840000	1.840000	9.402923e-012
6	0.5000000	2.500000	2.500000	7.737366e-012
7	0.6000000	3.240000	3.240000	4.155343e-012
8	0.7000000	4.060000	4.060000	2.389200e-013
9	0.8000000	4.960000	4.960000	3.621103e-012
10	0.9000000	5.940000	5.940000	3.447909e-012
11	1.000000	7.000000	7.000000	3.545608e-012

Tab(7): Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 8 pour $n=8$



Fig(7): Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 8 pour $n=50$

Exemple 3.8

Soit l'équation de Fredholm suivant

$$u''(x) + u'(x) + u(x) - \int_0^1 xt u(t) dt = x^2 + \frac{7}{4}x + 2, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

avec $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$

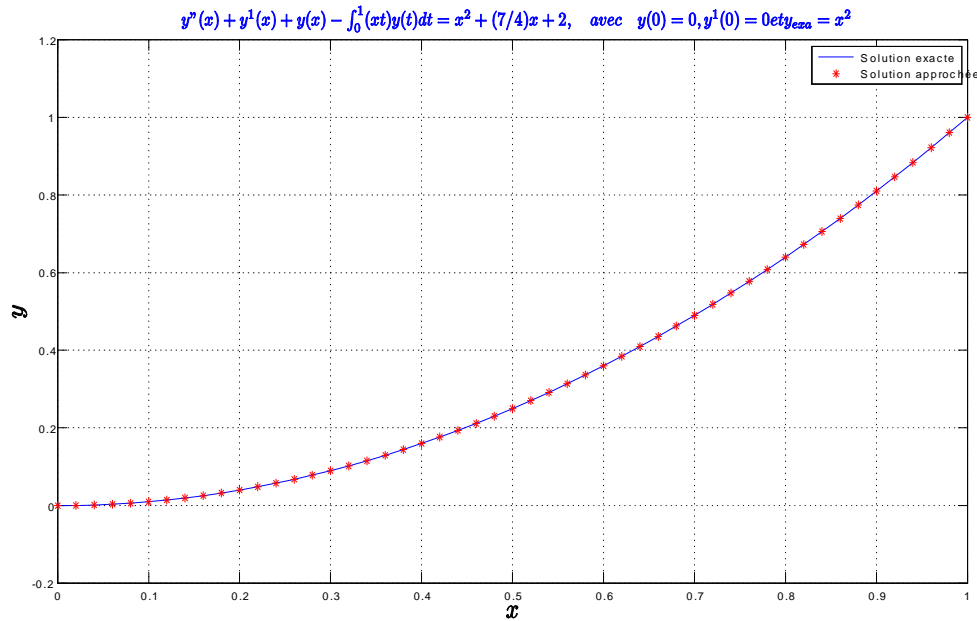
La solution exacte de cette équation est $u(x) = x^2$.

La solution approché $\tilde{u}(x)$ de la solution exacte $u(x)$ est obtenu par la solution du système des équations linéaires pour $n = 8$

3.3. Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte

	Points de x	Solution exacte	Solution approché	erreur
1	0.000000	0.000000	-0.000000	2.220446e-016
2	0.100000	0.010000	0.010000	1.454455e-012
3	0.200000	0.040000	0.040000	4.730577e-012
4	0.300000	0.090000	0.090000	8.476664e-012
5	0.400000	0.160000	0.160000	1.171535e-011
6	0.500000	0.250000	0.250000	1.384326e-011
7	0.600000	0.360000	0.360000	1.463074e-011
8	0.700000	0.490000	0.490000	1.422246e-011
9	0.800000	0.640000	0.640000	1.313671e-011
10	0.900000	0.810000	0.810000	1.226608e-011
11	1.000000	1.000000	1.000000	1.287681e-011

Tab(8): Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 9 pour $n=8$



Fig(8): Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 9 pour n=50

Exemple 3.9

Soit l'équation de Fredholm suivant

$$u''(x) + 2u'(x) + 3u(x) - \int_0^1 xt u(t) dt = 6e^x - \frac{x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

avec $u(0) = 1, u'(0) = 1$

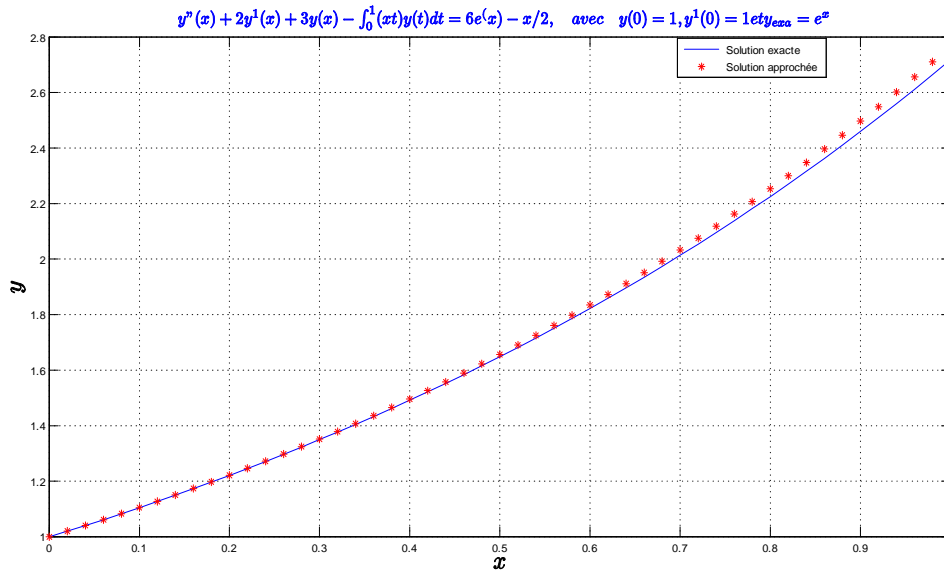
La solution exacte de cette équation est $u(x) = e^x$.

La solution approché $\tilde{u}(x)$ de la solution exacte $u(x)$ est obtenu par la solution du système des équations linéaires pour $n = 8$

3.3. Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte

	Points de x	Solution exacte	Solution approché	erreur
1	0.0000000	1.000000	1.000000	0.000000e+000
2	0.1000000	1.105171	1.105255	8.423571e-005
3	0.2000000	1.221403	1.221977	5.745404e-004
4	0.3000000	1.349859	1.351667	1.807777e-003
5	0.4000000	1.491825	1.495910	4.085299e-003
6	0.5000000	1.648721	1.656381	7.660082e-003
7	0.6000000	1.822119	1.834841	1.272250e-002
8	0.7000000	2.013753	2.033137	1.938463e-002
9	0.8000000	2.225541	2.253204	2.766284e-002
10	0.9000000	2.459603	2.497062	3.745865e-002
11	1.000000	2.718282	2.766819	4.853746e-002

Tab(9): Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 10 pour $n=8$



Fig(9): Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 10 pour n=50

Exemple 3.10

Soit l'équation de Fredholm suivant

$$xu''(x) + xu'(x) + u(x) - \int_0^1 x u(t) dt = e^{-x} - \left(\frac{e-1}{e}\right), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

avec $u(0) = 1$, $u'(0) = -1$

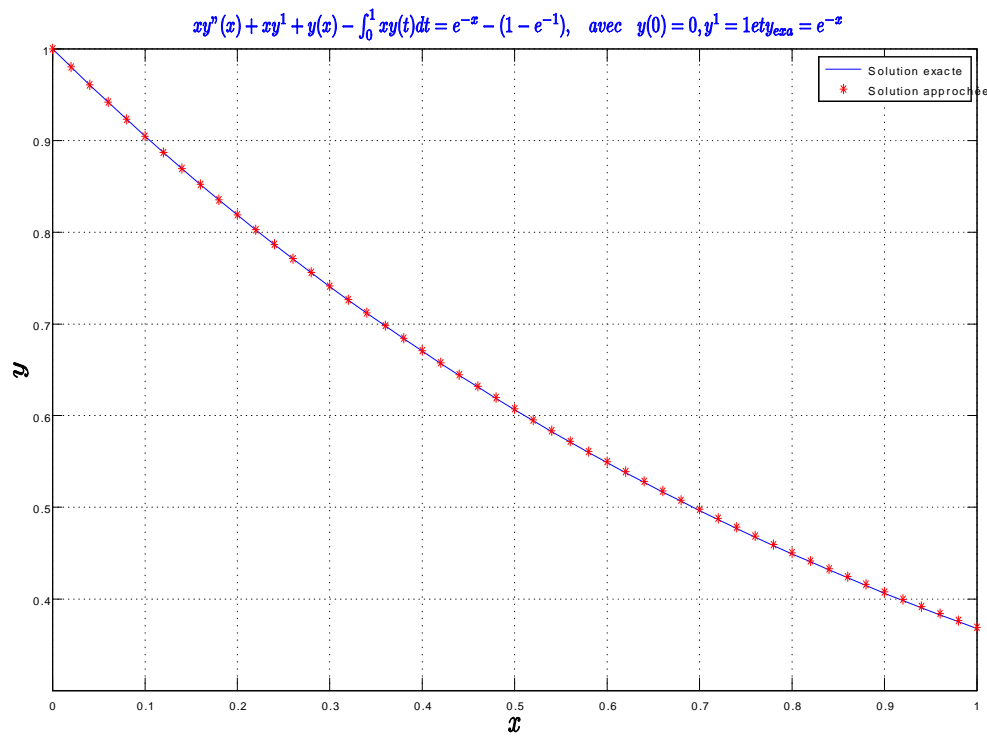
La solution exacte de cette équation est $u(x) = e^{-x}$.

La solution approché $\tilde{u}(x)$ de la solution exacte $u(x)$ est obtenu par la solution du système des équations linéaires pour $n = 8$

3.3. Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte

	Points de x	Solution exacte	Solution approché	erreur
1	0.000000	1.000000	1.000000	1.110223e-016
2	0.100000	0.904837	0.904886	4.907598e-005
3	0.200000	0.818731	0.818919	1.880487e-004
4	0.300000	0.740818	0.741210	3.921747e-004
5	0.400000	0.670320	0.670947	6.270128e-004
6	0.500000	0.606531	0.607387	8.562277e-004
7	0.600000	0.548812	0.549860	1.048652e-003
8	0.700000	0.496585	0.497770	1.184676e-003
9	0.800000	0.449329	0.450591	1.262027e-003
10	0.900000	0.406570	0.407871	1.301006e-003
11	1.000000	0.367879	0.369229	1.349216e-003

Tab(10): Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 11 pour $n=8$



Fig(10): Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 11 pour $n=50$

Exemple 3.11

Soit l'équation integro-différentielle de Volterra suivant

$$u''(x) - \int_0^x (x-t)u(t) dt = x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

avec $u(0) = 1$, $u'(0) = -1$

La solution exacte de cette équation est $u(x) = \sinh(x)$.

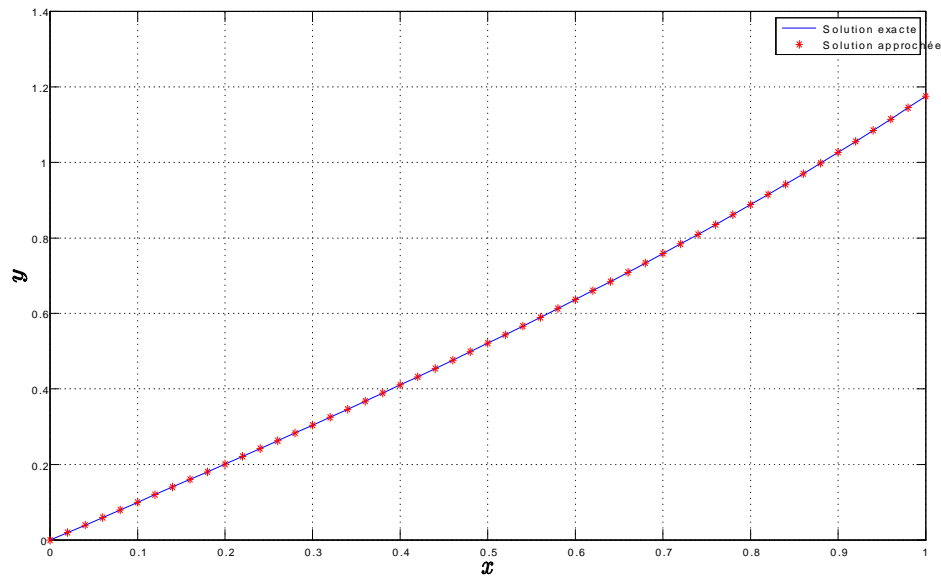
La solution approché $\tilde{u}(x)$ de la solution exacte $u(x)$ est obtenu par la solution du système des équations linéaires pour $n = 8$

3.3. Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte

	Points de x	Solution exacte	Solution approché	erreur
1	0.0000000	0.000000	0.000000	1 2.710505e-020
2	0.1000000	0.100167	0.100167	7.909763e-010
3	0.2000000	0.201336	0.201336	5.462371e-010
4	0.3000000	0.304520	0.304520	1.272566e-009
5	0.4000000	0.410752	0.410752	1.319598e-010
6	0.5000000	0.521095	0.521095	1.450521e-009
7	0.6000000	0.636654	0.636654	7.215613e-010
8	0.7000000	0.758584	0.758584	8.755036e-010
9	0.8000000	0.888106	0.888106	7.357860e-010
10	0.9000000	1.026517	1.026517	5.878626e-010
11	1.000000	1.175201	1.175201	5.521783e-011

Tab(11): Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 12 pour $n=8$

3.3. Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte



Fig(11): Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple 16 pour $n=50$

Conclusion générale

La résolution numérique des équations intégrales et integro-différentielles sont souvent nécessaires, faute de l'existence de solution analytiques.

Les méthodes de résolution numérique des équations intégrales et integro-différentielles jouent un rôle très important dans divers domaines scientifiques. Avec l'avantage des machines de calcul numérique, notamment les ordinateurs, ces méthodes sont devenues aujourd'hui un outil essentiel pour l'investigation dans les différents problèmes fondamentaux dans les assimilations des phénomènes scientifiques qui sont difficiles à réaliser, voir impossible à résoudre.

Dans ce travail, nous avons étudié la résolution numérique des équations intégrales et integro-différentielles de type "Fredholm de 2^{ème} espèce" par les polynômes d'Hermite". Ou nous utilisons la méthode de Galerkin sur la base des polynômes d'Hermite généralisées. Nous avons utilisé plusieurs exemples pour les équations intégrales et les équations integro-différentielles pour tester l'efficacité de la méthode ,on conclut généralement que cette méthode est très efficace pour résoudre ce genre de problème .

Bibliographie

- [1] ABDUL J. JERRI, *Introduction to integral equation with applications* (John Wiley & Sons Inc, 1999). NIELS NIELSEN
- [2] ANDREI. D, POLYANIN ALEXANDER, MANZHIROV. V, *Hand book of Integral Equation*, CRC Press, Boca Roca Ration 1998.
- [3] ATKINSON. K.E, *The Numerical Solution of Integrations of the Second Kind*, Cambridge University Press.
- [4] CHAKRABARTI A. AND MARTHA S. C., *Approximate solutions of Fredholm integral equation of the second kind*, Applied Mathematics and Computation, vol. 211, No. 2, pp. 459 – 466, 2009.
- [5] DAVIS P. J., *Interpolation and approximation*, Dover, New York, 1975.
- [6] FLETCHER C. W. A., *Computational Galerkin Methods*, Springer, New York, 1984.
- [7] ISAACSON E. AND KELLER H. B., *Analysis of numerical methods*, Dover, New York, 1994.
- [8] JERRI A. J. 1985. *Introduction to Integral Equation With applications*, Marcel Dekker, Inc, New York.
- [9] G.N.WATSON., *Notes on generating functions of polynomials:(2) Hermite polynomials*, J.London math .soc., 8 pp.194 – 199, 1993.
- [10] KRESS R., *Linear Integral Equations*, Springer-Verlag, New York, 1998.

- [11] NADIR M., *Cours d'analyse fonctionnelle*, Université de M'sila 2004.
- [12] NADIR M., *Cours sur les équations intégrales*, Université de M'sila.
- [13] NIELSEN N., *Recherche sur les polynomes d'Hermite*, Cobenhagn, 1918.
- [14] V.VOLTERRA., *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations*. Dover ,New York, 1959.