



Département de Génie Mécanique

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

En vue de l'obtention du diplôme de :

MASTER

En Génie Mécanique

Option : fabrication mécanique et productive

Présenté par :

MOUSSA Ali & MAHDAOUI Abdallah

Thème

Analyse du comportement dynamique des plaques stratifiées en matériaux composites par éléments finis

Devant le jury composé de :

NOM et Prénom	Grade	Qualité
Saib Cherif	MCB	Président
Farsi Chouki	MCA	Examinateur
Latrache Mohamed	-----	Encadreur

Année Universitaire : 2019 / 2020

N° d'ordre : GM/...../2020

Remerciements

Tout d'abord je remercie dieu le tout puissant qui m'a donné la volonté, le courage et l'audace pour réaliser ce modeste travail.

*Je remercie vivement, Mon encadreur **Latrache Mohamed** pour avoir assuré la direction de ce travail, et pour m'avoir apporté rigueur scientifique nécessaire à son bon déroulement, Ses compétences et ses bonnes directives m'ont aidé à achever ce mémoire de master.*

Merci aussi pour son attention et ses exigences pendant la période de rédaction du mémoire

*Je remercie également monsieur le président de jury **Saib C** et le examinateur **Monsieur Farsi C** d'avoir acceptées d'examiner mon travail.*

*Je remercie les enseignants de la faculté de technologie de **M'sila**, et en particulier les enseignants de **département de génie mécanique**. Mes vifs remerciements s'adressent également à toute personne qui a contribué à ma formation ou participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail*



Dédicacec

Loué soit Dieu, remerciez Dieu très béni ... Loué soit Dieu, avec sa grâce, les bonnes œuvres, la prière et la paix sont terminées Sur le prophète Mahomet, paix et bénédictions soient sur lui, le sceau des prophètes et des messagers.

Et maintenant : je dédie le fruit de mon humble effort à celui qui m'a porté ici et est faible et m'a torturé Al-Hanan m'a béni de ses prières depuis ma naissance et est restée debout pendant mes nuits, le pouls de mon cœur et la source de mon existence Ma maman bien-aimée, merci pour tout ce que j'ai fait pour moi, je t'aime. Au symbole de l'existence, de la constance et du djihad pour nous

À ceux qui m'ont appris que le monde est une lutte et un défi et que la science est une arme pour ceux qui n'en ont pas. Pour toi, tu es mon cher père, alors merci Pour tout ce que j'ai fait et fais encore pour moi. Merci, mes parents. Que Dieu vous accorde une longue vie

Vous avez la santé et le bien-être, si Dieu le veut. À tous ceux qui chérissent mes frères et sœurs dans mon cœur Et à chacun de mes collègues, chacun en son nom

À tous mes amis et mes proches

À tous ceux que vous connaissez de près ou de loin

MOUSSA ALI

Dédicacec

Ahmed Dieu Tout-Puissant sur lui et son aide pour achever cette recherche. À celui qui m'a doté de tout ce qu'il possède jusqu'à ce que je réalise ses espérances pour lui, à celui qui me poussait en avant pour obtenir le désir, à l'homme qui possédait l'humanité avec toute sa force, à celui qui a pris soin de mon éducation de grands sacrifices traduits dans son respect pour la connaissance, à ma première école de vie, mon cher père Mon cœur a prolongé sa vie; À la dotation qui lui a donné le plaisir de donner toute la gentillesse et la tendresse, À qui j'ai de la patience pour tout, qui a pris soin de moi le droit aux soins et mon soutien était dans l'adversité, et elle l'a appelée au succès, elle m'a suivi pas à pas dans mon travail, à qui je me suis reposée chaque fois que je me souvenais de son sourire sur mon visage, source de tendresse Pénalité dans les deux mondes; Je leur dédie cet humble travail afin d'apporter dans leur cœur une mesure de bonh eur à mes frères et sœurs qui partagent avec moi le fardeau de la vie; Je dédie également le fruit de mes efforts à mon honorable professeur, le" Dr. Latrache Mohamed " qui chaque fois que la route était en deuil devant moi, j'y recourais, et elle s'illuminait pour moi, et chaque fois que le désespoir tombait en moi, je plantais dans l'espoir d'avancer.

À tous les professeurs du Département de génie mécanique ; Et à tous ceux qui croient que les germes d'un changement réussi sont en nous et en nous-mêmes avant qu'ils ne soient en d'autres choses ...

À tout cela je dédie ce travail

Mahdaoui Abd Allah

Sommaire

Remerciements

Dédicace

Dédicace

Liste de figure

Liste de tableau

Notifications

Introduction général

Chapitre I Généralités sur les matériaux composites

1-1	Introduction	
1-1.1	Définition.....	1
1-1.2	Type de matériau composite.....	1
1-1.3	Caractéristiques générales.....	2
1-1.4	Classification suivant la forme des constituants.....	4
1-1.5	Classification suivant la nature des constituants	5
1-1.6	Les avantages et les inconvénients.....	6
1-2	Éléments constituant un matériau composite à matrice polymérique.....	6
1-2.1	Introduction.....	6
1-2.2	La résine.....	6
1-2.3	Définition.....	6
1-2.4	Type de la résine.....	7
1-2.4.1	Les résines thermodurcissables.....	7
1-2.4.2	Les résines thermoplastiques.....	7
1-2.4.3	Les résines thermoplastiques.....	7
1-2.5	Les fibres et tissus :.....	9
1-2.5.1	Les tissus	9
1-2.5.2	Généralité	9
1-3	Architecture des matériaux composites stratifiés	
1-3.1	Introduction	12
1-3.2	Stratifié	13
1-3.2.1	Stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels.....	13
1-3.2.2	Structure générale d'un stratifié.....	17
1-4	Recherche bibliographique sur la théorie des plaques	
1-4.1	Introduction.....	18
1-4.2	Historique des plaques.....	19
1-4.3	Définition.....	20
1-4.4	Différents types de plaques.....	21
1-4.5	Formulation élémentaire.....	22
1-4.5.1	Introduction.....	22
1-4.5.2	Principe de la méthode des éléments finis.....	23
1-4.5.3	Éléments à deux dimensions des plaques rectangulaires.....	24
1-5	Comportement mécanique des matériaux composites	
1-5.1	Introduction.....	25
1-5.2	Description des contraintes.....	25
1-5.3	Description des déformations	26
1-5.4	Caractérisation des matériaux.....	28
1-5.4.1	Introduction.....	28

1-5.4.2	Type des matériaux	29
---------	--------------------------	----

Chapitre II Formulation par la méthode des éléments finis

2-1	Introduction.....	30
2-2	Principe de Hamilto.....	30
2-3	Formulation mathématique.....	32
2-4	Formulation par éléments finis.....	33
	2-4.1 Formulation élémentaire.....	36
	2-4.2 Formulation globale.....	37
2-5	vibration plaques stratifié	38
	2-5.1 Introduction.....	38
2-6	Vibrations de plaques orthotropes avec diverses conditions sur les côtés.....	39
	2-6.1 Expressions générales.....	39
	2-6.2 Approximation de Rayleigh.....	41
	2-6.3 Approximation à deux termes	42
2-7	Vibrations de plaques stratifiées symétriques.....	42
	2-7.1 Expressions générales.....	42
	2-7.2 Plaque symétrique dont les côtés sont encastés ou libres.....	43

Chapitre III Simulation d'une plaque en matériaux composite par le code ANSYS apdl

3-1	Introduction.....	45
3-2	Simulation d'une plaque en matériaux composite stratifiée.....	46
	3-2.1 Analyse statique	48
	3-2.2 Analyse dynamique.....	50
3-3	Etude paramétriques.....	52
3-4	Simulation de vibration libre d'une plaque sandwich avec ANSYS Workbench ACP.....	58

Conclusion générale

Résumé

Bibliographié

Liste de figure

Chapitre I :

Figure I.1 : Matériau composite.	3
Figure I.2 : Chaîne et trame d'un tissu	11
Figure I.3 : Les principaux types d'armures utilisées pour le tissage des tissus.....	12
Figure I.4 : Constitution d'un stratifié.	13
Figure I.5 : Désignation d'un stratifié.	14
Figure I.6 : Convention de signe pour la désignation des stratifiés	14
Figure I.7 : Poutre sollicitée en flexion.	18
Figure I.8 : Fonction d'interpolation $N1$ du quadrangle. Les autres sont obtenues par rotation.....	25
Figure I.9 : Composantes des vecteurs contraintes dans un système d'axes (1, 2,3).....	26

Chapitre II :

Figure II.1 : Schéma géométrique d'une plaque (stratifiée).....	32
Figure II.2: Les fonctions de forme	34
Figure II.3: Les fonctions de forme.....	34

Chapitre III :

Figure III.1 : Géométrie de la plaque en matériaux composite étudiée	45
Figure III.2 : L'élément SOLID186.....	46
Figure III.3 : Maillage el plaque (46*46=2116 Eléments).....	46
Figure III.3.a : Conditions au limites autour des bords de la plaque	47
Figure III.3.b : Fixation des trois DDL (UX, UY, UZ) des nœuds du côté gauche de la plaque	47
Figure III.4 : L'élément 709 de la plaque stratifiée carrée symétrique cross-ply [0].....	48
Figure III.5 : Application de la force F sur le nœud 202 (Point (0.2, 0.2)).....	48
Figure III. 5. a : Déflexion résultant de l'application de F=500 N au point (0.2, 0.2).....	49
Figure III. 5. b : Déflexion résultant de l'application de F=1000 N au point (0.2, 0.2).....	49
Figure III. 5. c : Déflexion résultant de l'application de F=1500 N au point (0.2, 0.2).....	50
Figure III.7 : Modes propres de vibration libre de la stratifiée carrée symétrique cross-ply [0].	51
Figure III.8 : L'élément 1010 de la plaque stratifiée carrée symétrique cross-ply [-45,45,-45]	52
Figure III.9 : Différentes conditions aux limites de la plaque étudiée.....	53
Figure III.10 : Formes des six premiers modes de vibration libre de la plaque (ELLL).....	54
Figure III.11 : Formes des six premiers modes de vibration libre de la plaque (ELEL).....	55
Figure III.12 : Formes des six premiers modes de vibration libre de la plaque (EELL).....	56
Figure III.13 : Formes des six premiers modes de vibration libre de la plaque (EEEE).....	57
Figure III.14 : Plaque en matériaux sandwich.....	58
Figure III.15 : Matériaux et composition de la plaque sandwich en ANSYS Workbench ACP	
Figure III.16 : Géométrie de la plaque sandwich.....	60
Figure III.17 : Maillage de la plaque sandwich (Taille d'élément 10 mm).....	60
Figure III.18 : Conditions aux limites (ELLL).....	61
Figure III.19 : Formes des modes de vibration libre de la plaque sandwichent simulée.....	62

Liste de tableau

Chapitre I :

Tableau I.1. Exemples de matériaux composites, pris au sens large.....2

Chapitre II :

Chapitre III :

Tableau III.1 : Caractéristiques mécanique la plaque en matériaux composite étudiée.....45

Tableau III.2 : les trois valeurs des déflexions de la plaque stratifiée carrée symétrique cross ply [0].....50

Tableau III.3 : Quatre premières fréquences propres de vibration libre de la plaque.....52

Tableau III.4 : six premières fréquences propres de vibration libre de la plaque.....58

Tableau III.5 : Fréquences naturelles de vibration libre de la plaque sandwich simulée.....62

Notifications :

- u déplacement axial
- v, w déplacements transverses
- $\bar{\varepsilon}_{\{\varepsilon_i\}}$ le champ de déformation
- \vec{M}_{int} moment résultant au centre de surface N
- \vec{R}_{int} Le torseur des efforts intérieurs N
- N effort normal Nm
- V effort tranchant N
- T moment de torsion Nm
- M moment de flexion (ou moment fléchissant) Nm
- $\bar{\sigma}$ contrainte Pa
- \vec{u} le vecteur des déplacements
- $\vec{\gamma}$ accélération
- E rigidité (module d'Young ou module d'élasticité longitudinal) $N.m^{-2}$
- S section m^2
- ρ_m masse volumique $Kg.m^{-3}$
- ρ la masse linéique 'apparente'
- m_u la masse unitaire
- m La masse Kg
- ε_{xx} la déformations de flexion
- ω_n la fréquence rad/s
- λ_n Pulsation
- l la longueur de poutre m
- ρ rayon de courbure
- I_z moment d'inertie autour de l'axe z
- k_e la matrice de rigidité élémentaire
- q_e la matrice de rigidité globale
- f_e le vecteur charges nodales
- G la fonction de Gibbs élastique
- g est le coefficient piézoélectrique $m^2.C^{-1}$
- s est la compliance élastique $m^2.N^{-1}$

Introduction générale

De nos jours, les matériaux composites multicouches ont trouvé des applications de plus en plus larges pratiquement dans tous les secteurs industriels, tel que l'aéronautique, l'automobile, le génie civil et les constructions navales. Cette considérable utilisation est, sûrement due aux remarquables avantages qu'offrent ce type de matériaux à savoir ; un excellent rapport rigidité poids, une bonne résistance à la corrosion, une résistance à la fatigue et bien d'autre avantage d'autant plus que leurs propriétés sont ajustables pour différentes situations.

Au cours de ces deux à trois dernières décennies, les outils d'analyse disponibles pour l'ingénieur se sont modifiés et accrus, surtout ceux utilisant les méthodes numériques informatisées pour la modélisation géométrique et la simulation du comportement.

La méthode des éléments finis (MEF) est une méthode numérique de résolution approchée des équations différentielles décrivant les phénomènes physiques de l'ingénierie, une extension fantastique, qui va de pair avec le développement et l'accroissement de la puissance des ordinateurs. Elle est devenue un outil de travail, calcul et conception quotidienne, voire familière, de l'ingénieur, dans des domaines aussi variés que l'analyse des structures, le transfert de chaleur, la mécanique des fluides, l'électromagnétisme, les écoulements souterrains, la combustion ou encore la diffusion des polluants

Les moyens informatiques actuels (puissance des calculateurs, outils de visualisation) rendent facile de mise en œuvre et de nombreux logiciels généraux ou dédiés sont disponibles sur le marché.

Notre objectif est d'utiliser du code ANSYS pour l'analyse dynamique dans les problèmes de type plaques et pratiquement la vibration libre des structures non amorties. Cette analyse a pour but de déterminer les fréquences propres ainsi que les modes de vibration libre des plaques en matériaux composites stratifiés, les matériaux composites multicouches possèdent un comportement complexe et difficile. Dans ce travail, on à examiner aussi l'effet des conditions aux limites sur la variation libre des fréquences propres des plaques stratifiées carrées minces symétriques en matériaux composites.

Le travail est divisé en trois chapitres :

Le premier chapitre est un commencement bibliographique touchant des généralités sur les matériaux composites tels que ses différents constituants et leurs architectures ainsi que les différents procédés de mise en œuvre et les domaines d'application des matériaux composites.

Le deuxième chapitre sera consacré à la formulation décrivant le comportement mécanique des matériaux composites. Il s'agit de déterminer les termes de la matrice de rigidité de la monocouche en utilisant les lois de mélange. La loi de comportement du stratifié est ensuite établie sur la base de l'hypothèse de Kirchouff.

Dans le dernier chapitre on présente une simulation numérique sur les plaques composites. Premièrement, une analyse statique sur une plaque carrée en matériaux composites est chargée par des différentes valeurs des forces. Une deuxième analyse dynamique afin de déterminer les modes et les fréquences propres de la même plaque précédente pour les différentes conditions aux limites, la dernière analyse est appliquée dans une plaque sandwich.

Chapitre I
Généralités sur les matériaux
composites

1-1 Introduction :

Un matériau composite est constitué dans le cas le plus général d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue. La phase discontinue est habituellement plus dure avec des propriétés mécaniques supérieures à celles de la phase continue. La phase continue est appelée la matrice. La phase discontinue est appelée le renfort ou matériau renforçant. Le matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de natures différentes (matrice, renfort), se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément [1]

1-1.1 définitions :

Dans un sens large, le mot "**composite**" signifie "constitué de deux ou plusieurs parties différentes". En fait, l'appellation **matériau composite** ou **composite** est utilisée dans un sens beaucoup plus restrictif, qui sera précisé tout au long de ce chapitre. Nous en donnons pour l'instant la définition générale suivante. Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément. Des exemples de matériaux composites pris au sens large sont donnés au tableau [1]

1-1.2 Type de matériau composite :

Type de composite	Constituants	Domaines d'application
1. Composites à matrice organique		
Papier, carton	Résine/charges/fibres cellulosiques	Imprimerie, emballage, etc.
Panneaux de particules	Résine/copeaux de bois	Menuiserie
Panneaux de fibres	Résine/fibres de bois	Bâtiment
Toiles enduites	Résines souples/tissus	Sports, bâtiment
Matériaux d'étanchéité	Elastomères/bitume/textiles	Toiture, terrasse, etc.
Pneumatiques	Caoutchouc/toile/acier	Automobile
Stratifiés	Résine/charges/fibres de verre, de carbone, etc.	Domaines multiples
Plastiques renforcés	Résines/microsphères	

<p>2. Composites à matrice minérale Béton Composite carbone -- Composite céramique</p>	<p>Ciment/sable/granulats Carbone/fibres de carbone Céramique/fibres céramiques</p>	<p>Génie civil Aviation, espace, sports, Bio médecine, etc. Pièces thermo mécaniques</p>
<p>3. Composites à matrice métallique</p>	<p>Aluminium/fibres de bore Aluminium/fibres de carbone</p>	<p>Espace</p>
<p>4. Sandwiches Peaux Ames</p>	<p>Métaux, stratifiés, etc. Mousses, nids d'abeilles, balsa, plastiques renforcés, etc.</p>	<p>Domaines multiples</p>

Tableau I.1. Exemples de matériaux composites, pris au sens large.

1-1.3 Caractéristiques générales :

Un matériau composite consiste dans le cas le plus général d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue. Dans le cas de plusieurs phases discontinues de natures différentes, le composite est dit hybride. La phase discontinue est habituellement plus dure avec des propriétés mécaniques supérieures à celles de la phase continue. La phase continue est appelée la matrice. La phase discontinue est appelée le renfort ou matériau renforçant (figure Une exception importante à la description précédente est le cas de polymères modifiés par des élastomères, pour lesquels une matrice polymère rigide est chargée avec des particules élastomères. Pour ce type de matériau, les caractéristiques statiques du polymère (module d'Young, contrainte à la rupture, etc.) ne sont pratiquement pas modifiées par l'adjonction de particules élastomères, alors que les caractéristiques au choc sont améliorées [1].

Les propriétés des matériaux composites résultent :

- des propriétés des matériaux constituants,
- de leur distribution géométrique,
- de leurs interactions, etc.

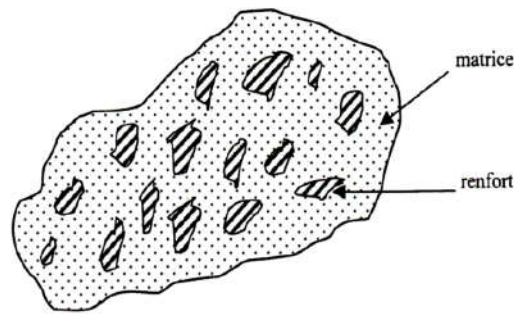


Figure I.1 : Matériau composite.

Ainsi, pour accéder à la description d'un matériau composite, il sera nécessaire de spécifier :

- la nature des constituants et leurs propriétés,
- la géométrie du renfort, sa distribution,
- la nature de l'interface matrice-renfort.

La géométrie du renfort sera caractérisée par : sa forme, sa taille, la concentration du renfort, sa disposition (son orientation), etc. Si l'ensemble de ces paramètres concourt à déterminer les propriétés du composite, les modélisations descriptives ne tiendront compte que de certains paramètres, du fait de la complexité des phénomènes mis en jeu. Par exemple, la forme du renfort sera schématiquement approchée soit par des sphères, soit par des cylindres.

La concentration du renfort est habituellement mesurée par la fraction volumique (fraction en volume) ou par la fraction massique (fraction en masse). La concentration du renfort est un paramètre déterminant des propriétés du matériau composite.

Pour une concentration donnée, la distribution du renfort dans le volume du composite est également un paramètre important. Une distribution uniforme assurera une "homogénéité" du matériau : les propriétés du composite seront indépendantes du point de mesure. Dans le cas d'une distribution non uniforme du renfort, la rupture du matériau sera initiée dans les zones pauvres en renfort, diminuant ainsi la résistance du composite.

Dans le cas de matériaux composites dont le renfort est constitué de fibres, l'orientation des fibres détermine l'anisotropie du matériau composite. Cet aspect constitue une des caractéristiques fondamentales des composites : la possibilité de contrôler l'anisotropie du produit fini par une conception et une fabrication adaptées aux propriétés souhaitées [2].

Les composites peuvent être classés suivant la forme des composants ou suivant la nature des composants.

1-1.4 Classification suivant la forme des constituants

En fonction de la forme des constituants, les composites sont classés en deux grandes classes : les matériaux composites à particules et les matériaux composites à fibre

Composites à fibres

Un matériau composite est un composite à fibres si le renfort se trouve sous forme de fibres. Les fibres utilisées se présentent soit sous forme de fibres continues, soit sous forme de fibres discontinues : fibres coupées, fibres courtes, propriétés mécaniques des matériaux composites, pour obtenir des matériaux allant de matériaux fortement anisotropes à des matériaux isotropes dans un plan.

Le concepteur possède donc là un type de matériau dont il peut modifier et moduler à volonté les comportements mécanique et physique en jouant sur :

- la nature des constituants,
- la proportion des constituants,
- l'orientation des fibres, suivant le cahier des charges imposées.

L'importance des matériaux composites à fibres justifie une étude exhaustive de leurs comportements mécaniques. En conséquence, le présent ouvrage sera essentiellement consacré par la suite à l'étude de ce type de matériaux[2].

Composites à particules

Un matériau composite est un composite à particules lorsque le renfort se trouve sous forme de particules. Une particule, par opposition aux fibres, ne possède pas de dimension privilégiée.

Les particules sont généralement utilisées pour améliorer certaines propriétés des matériaux ou des matrices, comme la rigidité, la tenue à la température, la résistance à l'abrasion, la diminution du retrait, etc. Dans de nombreux cas, les particules sont simplement utilisées comme charges pour réduire le coût du matériau, sans en diminuer les caractéristiques.

Le choix de l'association matrice-particules dépend des propriétés souhaitées. Par exemple, des inclusions de plomb dans des alliages de cuivre augmenteront leur facilité d'usinage. Des particules de métaux fragiles tels le tungstène, le chrome et le

molybdène, incorporé dans des métaux ductiles, augmenteront leurs propriétés à températures élevées, tout en conservant le caractère ductile à température ambiante.

Les cermets sont également des exemples de composites métal-céramique à particules, adaptés à des utilisations à températures élevées. Par exemple, les cermets à base d'oxydes sont utilisés pour les outils de coupe à vitesse élevée, et pour les protections à hautes températures.

Également, des particules d'élastomère peuvent être incorporées dans des matrices polymères fragiles, de manière à améliorer leurs propriétés à la rupture et au choc, par diminution de la sensibilité à la fissuration.

Ainsi, les composites à particules recouvrent un domaine étendu dont le développement s'accroît sans cesse. Toutefois, compte tenu de leurs diversités, ce type de matériaux ne sera pas étudié dans le cadre de cet ouvrage[1].

1-1.5 Classification suivant la nature des constituants

Selon la nature de la matrice, les matériaux composites sont classés suivant des composites à matrice organique, à matrice métallique ou à matrice minérale.

Divers renforts sont associés à ces matrices. Seuls certains couples d'associations ont actuellement un usage industriel, d'autres faisant l'objet d'un développement dans les laboratoires de recherche. Parmi ces composites, nous pouvons citer[1] :

Composites à matrice organique (résine, charges), avec :

- des fibres minérales : verre, carbone, etc.
- des fibres organiques : Kevlar, polyamides, etc.
- des fibres métalliques : bore, aluminium, etc.

Composites à matrice métallique (alliages légers et ultra – légers d'aluminium, de magnésium, de titane), avec :

- des fibres minérales : carbone, carbure de silicium (SiC),
- des fibres métalliques : bore,
- des fibres métallo-minérales : fibres de bore revêtues de carbure de silicium (BorSiC).

Composites à matrice minérale (céramique), avec :

- des fibres métalliques : bore,
- des particules métalliques : cermets,
- des particules minérales : carbures, nitrures, etc.

1-1.6 Les avantages et les inconvénients :

Avantage des matériaux composites :

- ❖ Bon rapport résistance/poids
- ❖ Mise en forme de pièces complexes (principe du moulage).
- ❖ Grande résistance à la fatigue
- ❖ Faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf en cas de contact entre de l'aluminium et des fibres de carbone) [3]

Inconvénients des matériaux composites :

- ❖ Vieillissement sous l'action de l'eau et de la température
- ❖ Attention aux décapants de peinture qui attaquent les résines époxydes
- ❖ Tenue à l'impact moyenne par rapport aux métalliques
- ❖ Coût parfois prohibitifs (temps et coût études et mise en œuvre), le gain en coût est surtout valable pour des grandes séries [3].

1-2 élément constituant du matériau composite à matrice

polymérique :

1-2.1 introduction :

Les matériaux composites à matrice organique ne peuvent être utilisés que dans le domaine des températures ne dépassant pas 200 à 300 °C, alors que les matériaux composites à matrices métallique ou minérale sont utilisés au-delà : jusqu'à 600 °C pour une matrice métallique, jusqu'à 1000 °C pour une matrice céramique [2 à 4]

1-2.2 la Résines :

1-2.2.1 définition :

Les résines utilisées dans les matériaux composites ont pour rôle de transférer les sollicitations mécaniques aux fibres et de les protéger de l'environnement extérieur. Les résines doivent donc être assez déformables et présenter une bonne compatibilité avec les fibres. En outre, elles doivent avoir une masse volumique faible de manière à conserver aux matériaux composites des caractéristiques mécaniques spécifiques élevées.

1-2.2.2 types de résines :

Compte tenu de ces contraintes, les résines utilisées sont des polymères, modifiés par différents adjuvants et additifs : agents de démoulage, stabilisants, pigments, etc. Les résines sont livrées en solution, sous forme de polymères non réticulés en suspension dans des solvants qui empêchent le pontage entre les macromolécules prépolymérisées. Sous l'action de la chaleur, des liaisons se développent entre les chaînes du prépolymère pour constituer un polymère réticulé suivant une structure tridimensionnelle. Deux grandes familles de résines polymères existent : les résines thermoplastiques et les résines thermodurcissables.

Ces deux types de résine possèdent la faculté de pouvoir être moulés ou mis en forme, pour donner soit un produit fini, soit un produit semi-fini dont la forme peut être modifiée [2].

Les résines thermoplastiques, dont la fabrication atteint de loin le plus gros tonnage du fait d'un faible coût, possèdent la propriété de pouvoir être mises en forme plusieurs fois par chauffages et refroidissements successifs. Ces résines peuvent donc être récupérées et facilement recyclées.

Par contre, les résines thermodurcissables ne peuvent être mises en forme qu'une seule fois. En effet, après polymérisation par apport de chaleur en présence d'un catalyseur, ces résines conduisent à une structure géométrique qui ne peut être détruite que par un apport important d'énergie thermique. Ainsi, les résines thermodurcissables possèdent des propriétés mécaniques et surtout thermomécaniques plus élevées que les résines thermoplastiques [2].

Du fait de ces caractéristiques plus élevées, les résines thermodurcissables sont les plus employées actuellement dans la mise en œuvre des matériaux composites.

Cependant, l'amélioration des caractéristiques des résines thermoplastiques conduit à une utilisation qui ne cesse de croître.

Deux autres classes de résines à usages spécifiques sont également utilisées, ce sont :

- les résines thermoplastiques qui peuvent résister en service continu à des températures de l'ordre de 200 °C et plus,
- les élastomères dont le renforcement par différentes fibres conduit à diverses applications dans le domaine de l'automobile.

Les résines thermodurcissables :

Les principales résines thermodurcissables utilisées dans la mise en œuvre des matériaux composites sont par ordre décroissant en tonnage :

- les résines polyesters insaturées : polyesters condensés, Vinylester, dérivés allyliques, etc.,
- les résines de condensation : phénoliques, aminoplastes, franques, etc.,
- les résines époxydes.

Les résines thermoplastiques :

La famille des résines thermoplastiques (on parle de "plastiques") est très vaste, et peut être séparée en plastiques de grande diffusion et plastiques techniques (ou techno polymères).

Les plastiques de grande diffusion sont mis en œuvre soit par injection pour obtenir des objets moulés, soit par extrusion pour obtenir des films, des plaques, des tubes, des profilés, etc. Les plastiques techniques sont généralement mis en œuvre par injection.

Parmi les résines thermoplastiques, nous citerons : le polychlorure de vinyle (PVC), le polyéthylène, le polypropylène, le polystyrène, le polyamide, le polycarbonate, etc. L'intérêt des thermoplastiques réside dans leur faible coût, résultant à la fois de matières premières disponibles et des procédés de fabrication (injection, extrusion). Toutefois, ce faible coût est lié à des propriétés mécaniques et thermomécaniques faibles.

Les divers thermoplastiques peuvent être renforcés par des fibres et font partie alors des matériaux composites. Cependant, dans le domaine des composites, les résines thermoplastiques ont un développement limité, du fait de la nécessité de faire appel à des transformations à hautes températures de produits solides.

Les résines thermostables :

Les résines thermostables se distinguent des autres résines, précédemment considérées, essentiellement par leurs performances thermiques qui conservent leurs propriétés mécaniques pour des températures plus élevées que 200°C. Dans la pratique nous retrouvons pour ces résines les deux grandes familles des résines thermoplastiques et thermodurcissables.

Les résines thermostables sont développées surtout dans les domaines de l'aviation et de l'espace, où les laboratoires cherchent à mettre au point de nouvelles

résines. Parmi les résines thermostables, les résines bismaléimides et polyimides sont les plus utilisées.

Les résines bismaléimides sont des résines dont le réseau est élaboré à des températures de 180 à 200°C. Les procédés de moulage sont identiques à ceux des composites à matrice therm durcissable de type polyester ou époxyde.

Les résines polyimides sont apparues sur le marché vers 1970. Ce sont des résines à haute résistance thermique, mais de prix très élevé. Ces résines permettent d'obtenir des composites de résistance supérieure, à 250 °C, à la résistance de l'aluminium

1-2.5 Les fibre et tissus :

1-2.5.1 Les tissus :

Un **tissu** en biologie est le niveau d'organisation intermédiaire entre la cellule et l'organe. Un **tissu** est un ensemble de cellules semblables et de même origine, regroupées en amas, réseau ou faisceau (fibre). Un **tissu** forme un ensemble fonctionnel, c'est-à-dire que ses cellules concourent à une même fonction

1-2.5.2 Généralité :

Les matériaux de renfort confèrent aux composites leurs caractéristiques mécaniques : rigidité, résistance à la rupture, dureté, etc. Ces renforts permettent également d'améliorer certaines des propriétés physiques : comportement thermique, tenue en température, tenue au feu, résistance à l'abrasion, propriétés électriques, etc. Les caractéristiques recherchées pour les renforts sont : des caractéristiques mécaniques élevées, une masse volumique faible, une bonne compatibilité avec les résines, une bonne facilitée de mise en œuvre, un faible coût, etc. En fonction des utilisations, les renforts peuvent être d'origines diverses : végétale, minérale, artificielle, synthétique, etc. Toutefois, les renforts les plus utilisés se présentent sous forme de fibres ou formes dérivées, et constituent une fraction volumique du matériau composite généralement comprise entre 0,3 et 0,7. Les renforts fibres se présentent sous diverses formes commerciales :

- sous forme linéique (fils, mèches, etc.),
- sous forme de tissus surfaciques (tissus simples, mats, etc.),
- sous forme multidirectionnelle (tresses, tissus complexes, etc.).

Formes linéiques

Les fibres sont élaborées suivant un diamètre de quelques micromètres (une dizaine), et ne peuvent par conséquent pas être utilisées sous forme unitaire. Pour leur utilisation pratique, ces fibres sont réunies en fils ou en mèches de différentes formes. La nomenclature générale des diverses formes linéiques est encore mal déterminée, et généralement dérivée de celle utilisée pour les fibres de verre.

La fibre unitaire est généralement appelée filament élémentaire ou monofilament [1].

Les monofilaments sont ensuite réunis en fils ou mèches. Les fils continus ou discontinus sont caractérisés par leur masse linéique ou titre. Cette masse linéique est une mesure de la finesse des fils, et elle dépend du diamètre et du nombre de monofilaments. L'unité de masse linéique est le tex, masse d'un fil de longueur égale à 1 000 m. Soit :

$$1 \text{ tex} = 1 \text{ g/km.}$$

En fait, on devrait plutôt écrire :

$$1 \text{ tex} = 10^{-6} \text{ kg/m.}$$

Conformément au système S.I. d'unités. La première définition est toutefois mieux adaptée à l'usage pratique.

Formes surfaciques

Les fils peuvent être utilisés pour réaliser des formes surfaciques de divers types : mats, tissus ou rubans, essentiellement développés dans le cas de fibres de verre.

- **Les mats**

Les mats sont des nappes de fils continus ou discontinus, disposés dans un plan sans aucune orientation préférentielle. Ils sont maintenus ensemble par un liant soluble ou non dans les résines, suivant la mise en œuvre. L'absence d'orientation préférentielle des fibres conduit à une isotropie des propriétés mécaniques du mat dans son plan.

La différence entre les mats à fils coupés et les mats à fils continus se situe essentiellement au niveau de leur propriété de déformabilité. Les premiers sont peu déformables alors que les seconds permettent d'obtenir des "emboutis" profonds par un allongement régulier du mat dans toutes les directions. Une des principales applications des mats à fils continus est le moulage entre moule et contre-moule, de pièces pouvant avoir des formes complexes, par compression, injection ou moulage sous vide[1].

- **Les tissus et rubans**

Un tissu (ou ruban) est un ensemble surfacique de fils, de mèches, etc., réalisé sur un métier à tisser. Il est constitué (figure II.1) :

- d'une chaîne, ensemble de fils parallèles répartis dans un plan suivant la longueur du tissu,
- d'une trame, ensemble de fils s'entrecroisant avec les fils de chaîne.

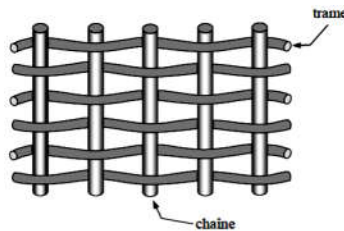


Figure I.2 : Chaîne et trame d'un tissu.

Les tissus diffèrent par le type de fils utilisés (fils simples, mèches, etc.), donc par la masse linéique des fils, et par le mode d'entrecroisement (ou armure) des fils de chaîne et des fils de trame. La figure II.2 illustre les armures classiques utilisées : toile ou taffetas, sergé, satin, armure croisée, armure unidirectionnelle.

Taffetas

Dans l'armure taffetas (figure I.2), les fils de chaîne et de trame s'entrecroisent alternativement, conduisant à un tissu très plat, stable, mais peu déformable. Cette armure confère au tissu des propriétés mécaniques sensiblement identiques dans les deux directions chaîne et trame (pour des fils de tissage identiques). Toutefois, l'armure taffetas conduit à un haut degré de courbure des fibres qui induit une diminution des performances mécaniques des composites [2].

Sergé

Pour l'armure sergé, le nombre de fils chaîne et de fils trame qui s'entrecroisent peut varier. Dans un sergé 2x1, les fils trame passent sur un fil chaîne et sous deux fils chaînes, et dans un sergé 2x2, les fils trame passent sur deux fils chaîne et sous deux fils chaîne. Ce type d'entrecroisement conduit à un motif répétitif du tissu (Figure II.16) sous forme de nervures diagonales. L'armure sergé offre l'avantage d'être à la fois souple et dense. Le tissu sergé permet ainsi un glissement entre les fils chaîne et trame et s'adapte bien à des moulages de formes complexes.

Satin

L'armure satin est assez semblable à celle du sergé, mais le nombre de fils chaîne et de fils trame qui passent les uns sur les autres avant de s'entrecroiser est plus élevé. Chaque tissu satin est caractérisé par un nombre, usuellement 4 ou 8, indiquant que les fils chaîne passent sur 4 ou 8 fils trame. Il en résulte un tissu avec une face qui contient plus de fils chaîne et une autre face plus de fils trame. L'armure satin est bien adaptée au moulage de formes complexes.

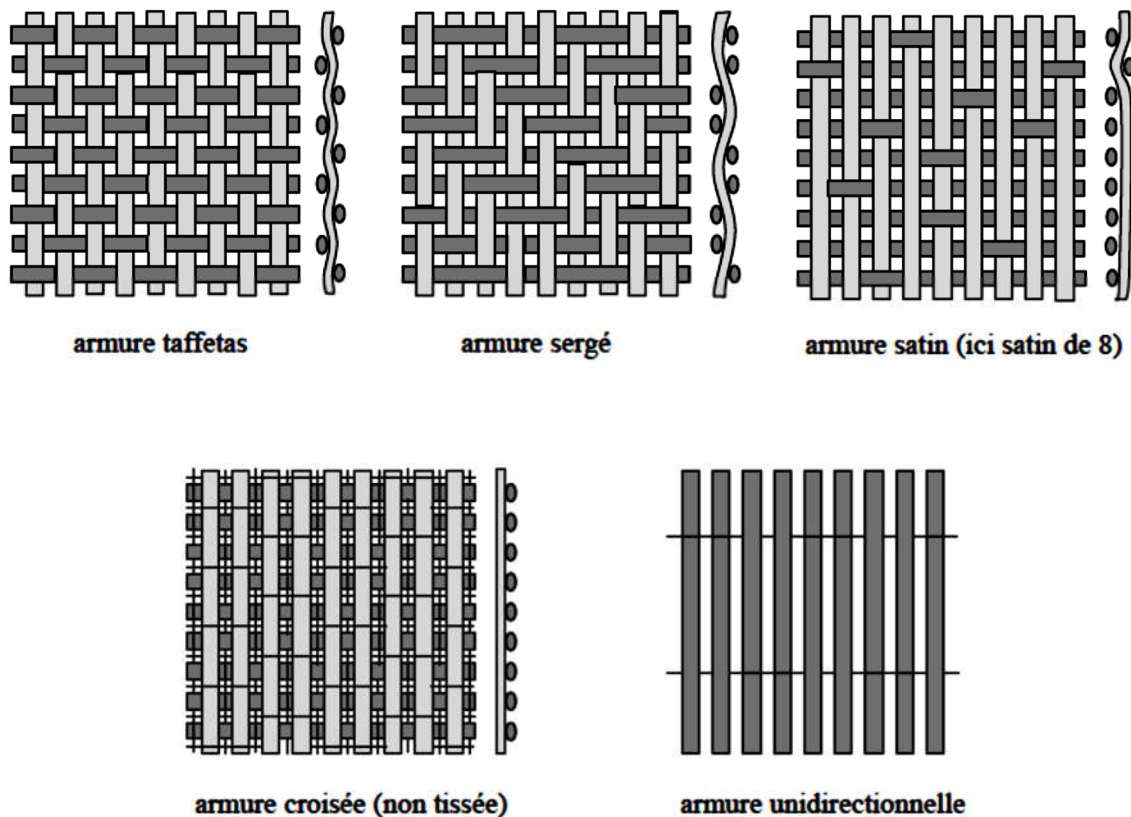


Figure I.3 : Les principaux types d'armures utilisées pour le tissage des tissus.

1-3 Architecture des Matériaux Composite stratifiée :

1-3.1 Introduction :

L'ensemble des procédés de mise en œuvre montre la prépondérance d'une conception des pièces en matériaux composites :

- par surface : plaques, coques,
- par stratification de couches successives.

Ce concept justifie l'importance qui sera donnée par la suite à l'étude des matériaux composites considérés sous la forme de plaques ou de coques, constituées

de couches différentes (ou non). Les coques peuvent être modélisées comme un ensemble de plaques, et leur étude déduite de l'étude des plaques.

L'objet de ce paragraphe est de dégager l'architecture générale des matériaux composites.

1-3.2 Stratifiés :

Les stratifiés sont constitués (figure III. 21) de couches successives (appelées parfois plis) de renforts (fils, stratifiés, mats, tissus, etc.) imprégnés de résines.

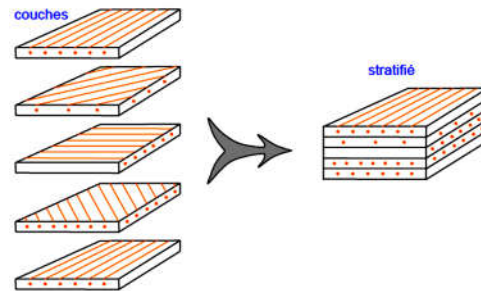


Figure I.4 : Constitution d'un stratifié.

Nous examinons les divers types de stratifiés.

1-3.2.1 Stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels :

Les stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels constituent un type de stratifié de base auquel peut se ramener en théorie tout autre type de stratifié. Ces stratifiés sont constitués (figure I. 4) de couches de fils ou de tissus unidirectionnels, dont la direction est décalée dans chaque couche. La désignation de ces stratifiés est généralement effectuée selon le code suivant :

1. Chaque couche est désignée par un nombre indiquant la valeur en degrés de l'angle que fait la direction des fibres avec l'axe x de référence.
 2. Les couches successives sont séparées par un / si leurs angles sont différents.
 3. Les couches successives de même orientation sont désignées par un indice numérique.
 4. Les couches sont nommées successivement en allant d'une face à l'autre.
- Des crochets (ou parenthèses) indiquent le début et la fin du code.

La désignation dépend du système d'axes choisi. Un exemple est donné à la figure I. 4

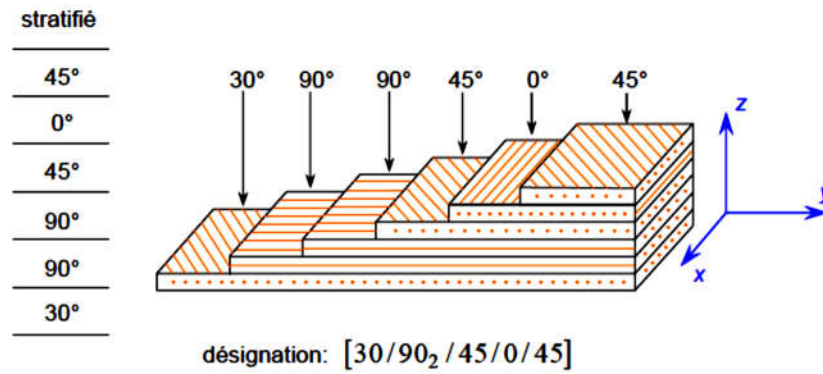


Figure I.5 : Désignation d'un stratifié.

Angles positifs et négatifs

Lorsque des couches sont orientées à des angles égaux en valeurs absolues, mais de signes opposés, les signes + ou – sont utilisés. La convention pour les angles positifs ou négatifs dépend du système d'axes choisi : une inversion peut apparaître suivant le choix effectué (figure I. 5).

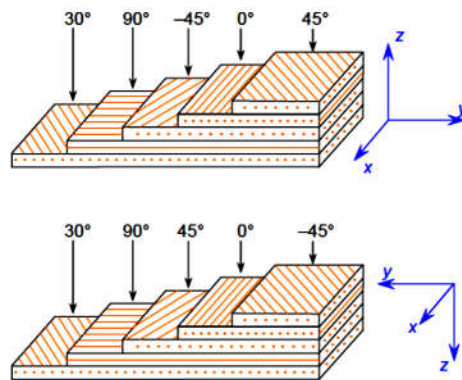


Figure I.6 : Convention de signe pour la désignation des stratifiés.

Nous donnons ci-après quelques exemples de désignation de stratifiés.

Stratifié	Désignation
$\frac{0^\circ}{\frac{30^\circ}{\frac{-30^\circ}{\frac{-45^\circ}{\frac{45^\circ}{\text{---}}}}}}$	[±45 / ∓30 / 0]
$\frac{30^\circ}{\frac{-60^\circ}{\frac{-60^\circ}{\frac{0^\circ}{\frac{45^\circ}{\text{---}}}}}}$	[45 / 0 / -60 ₂ / 30]
$\frac{0^\circ}{\frac{-45^\circ}{\frac{-45^\circ}{\frac{45^\circ}{\frac{45^\circ}{\text{---}}}}}}$	[45 ₂ / -45 ₂ / 0]
$\frac{0^\circ}{\frac{-45^\circ}{\frac{45^\circ}{\frac{45^\circ}{\frac{-45^\circ}{\frac{-45^\circ}{\frac{45^\circ}{\text{---}}}}}}}}$	[± ∓ ±45 / 0] ou [45 / -45 ₂ / 45 ₂ / -45 / 0]

Stratifiés symétriques

Un stratifié est symétrique si son plan moyen est plan de symétrie. Sa désignation ne nécessite alors que la moitié des couches successives.

Si le stratifié a un nombre pair de couches, la désignation débute sur une face pour finir au plan de symétrie. Un indice S indique que le stratifié est symétrique. Par exemple :

$\frac{90^\circ}{\frac{45^\circ}{\frac{45^\circ}{\frac{0^\circ}{\frac{0^\circ}{\frac{45^\circ}{\frac{45^\circ}{\frac{90^\circ}{\text{---}}}}}}}}}$	[90 / 45 ₂ / 0] _S
--	---

Si le stratifié comporte un nombre impair de couches, la désignation est semblable à la précédente, la couche centrale étant surlignée.

Par exemple :

$$\begin{array}{c} \hline 90^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 0^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 90^\circ \\ \hline \end{array} \quad [90/45_2/\bar{0}]_S$$

Séquences

La répétition de séquences peut être indiquée par un indice indiquant le nombre de fois où une séquence est successivement répétée. Par exemple :

$$\begin{array}{c} \hline 0^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 90^\circ \\ \hline 0^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 90^\circ \\ \hline 90^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 0^\circ \\ \hline 90^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 0^\circ \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} [(0/45/90)_2]_S \\ \text{ou } [0/45/90]_{2S} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \hline 0^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 90^\circ \\ \hline 0^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 90^\circ \\ \hline 60^\circ \\ \hline 30^\circ \\ \hline 60^\circ \\ \hline 30^\circ \\ \hline 60^\circ \\ \hline 30^\circ \\ \hline \end{array} \quad [(30/60)_3(90/45/0)_2]$$

L'alternance $[0/90]_n$ est souvent désignée par stratifié croisé.

Stratifiés hybrides

Les stratifiés hybrides sont constitués de couches successives comportant des fibres de natures différentes. Il sera alors nécessaire de les mentionner dans la désignation. Par exemple, pour des stratifiés avec la même résine :

0°	V
45°	C
-45°	C
90°	C
90°	C
-45°	C
45°	C
0°	V

$$[0_V / \pm 45_C / 90_C]_S$$

0°	K
0°	K
45°	V
90°	V
45°	V
0°	C
0°	C

$$[0_{2C} / (45 / \overline{90})_{SV} / 0_{2K}]$$

avec V : verre, C : carbone, K : Kevlar

1-3.2.2 Structure générale d'un stratifié:

Dans le cas général, le renfort de chaque couche sera de natures diverses : fils, stratifils, mats, tissus, fibres de verre, fibres de carbone, etc. Chaque couche doit alors être désignée par l'indication de la nature des fibres, du type de renfort : fils, mat, tissu avec indication de la proportion de fibres suivant le sens chaîne et trame.

Le choix de la nature et de la séquence des couches dépendra de l'utilisation du matériau composite, en l'adaptant au mieux au champ des contraintes imposé :

- les couches unidirectionnelles ont de bonnes performances mécaniques dans la direction des fibres ;
- les mats sont peu résistants en traction et devront être réservés aux zones comprimées : par exemple (figure III. 24) couches unidirectionnelles dans la zone de traction, mat dans la zone de compression d'une poutre sollicitée en flexion;
- une stratification croisée sera sensible au délaminage interlaminaire;
- une stratification avec au moins trois directions de fibres sera nécessaire pour avoir une pseudo-isotropie dans le plan du stratifié.

Enfin, il est intéressant de noter qu'une stratification symétrique garantira généralement une bonne planéité du stratifié après démoulage.

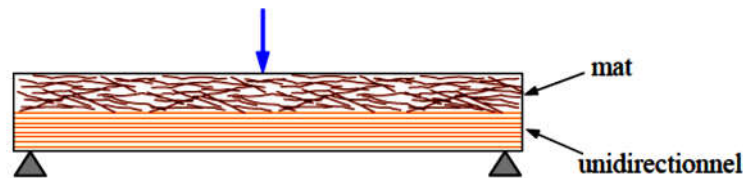


Figure I.7 : Poutre sollicitée en flexion.

Stratifiés hybrides

Les stratifiés hybrides permettent d'être plus performants en utilisant au mieux les propriétés des diverses fibres disponibles. Parmi les différents hybrides, on peut distinguer :

- des hybrides intercouches, constitués d'une suite de couches, chacune de nature différente ;
- des hybrides intracouches, constitués par une séquence de couches identiques, chaque couche étant constituée de renforts différents ;
- des couches métalliques peuvent également être intercalées entre les couches [1]

1-4 Recherche bibliographique sur la théorie des plaques :

1-4.1 Introduction :

Les problématiques rencontrées concernent essentiellement des questions de dimensionnement ou de contrôle des vibrations. Pour mieux connaître, la réponse du comportement dynamique de la structure, il est impératif d'approcher de la manière la plus Correcte possible les phénomènes mis en jeu par les plaques qui sont plus ou moins complexes. Ainsi, un bâtiment, une caisse de voiture, une aile d'avion, un bateau, Parmi tous ces domaines d'application, on peut distinguer plusieurs [5] types de plaques des plaques membranaires, des plaques minces, modérées et épaisses. Dans cette étude nous occuperons que de plaques minces homogènes isotropes.

La théorie des plaques est une théorie permettant de calculer les déformations et les contraintes dans une plaque soumise à des charges. Les plaques sont des éléments structuraux couramment utilisés dans différents types de plaques sont disponibles suivant les besoins du site industriel, d'où différentes hypothèses sont nécessaires pour caractériser le modèle analytique d'analyse :

- a) les plaques minces avec de petites flèches (Kirchhoff) où l'énergie de contribution de l'effet de cisaillement est négligée ;
- b) les plaques minces avec de grandes flèches (Karman) ;
- c) les plaques modérées ou épaisses (Mindlin- Reissner) [6] où l'énergie de contribution de l'effet de cisaillement est préservée. En général diverses forces de différentes natures (volumiques, surfaciques, ponctuelles) Peuvent se présenter comme source génératrice d'excitation. Les réponses conséquentes peuvent être exprimées en termes de mouvement que l'on peut décrire par des déplacements, des vitesses ou des accélérations. Dans le cas de l'analyse libre, on s'intéresse aux paramètres dynamiques naturels, afin de caractériser le comportement propre inhérent à la structure d'intérêt indépendamment des sollicitations extérieures [7].

1-4.2 Historique des plaques :

De point de vue historique, Euler fut l'un des premiers, en 1766, à formuler le premier modèle mathématique du problème représentant le comportement d'une plaque assimilée à une membrane en vibration libre. Puis, le physicien allemand Chladni (1787) découvrit les premiers modes propres de vibrations d'une plaque carrée horizontale, C'est ensuite Lagrange qui développa en 1811 la première équation différentielle correcte pour décrire les vibrations d'une plaque libre d'épaisseur constante, à laquelle doit satisfaire la flexion w , la détermination des fréquences naturelles fût une grande priorité. Sophie Germain a été récompensé en 1816 pour sa contribution au développement de l'équation de la plaque mince. Quelques temps après, Navier (1785-1836) introduit la méthode pour calculer les modes et les fréquences propres d'une plaque Ce dernier utilisa les fonctions trigonométriques découvertes par Fourier pour représenter la déformation d'une plaque. Ce n'est qu'en 1850 que Kirchhoff (1824-1887) a établi de façon correcte pour la première fois des conditions aux limites en partant du principe des déplacements virtuels et de l'expression du travail des contraintes de la plaque.

Lord Rayleigh (1877) ou encore Ritz (1909) [], furent parmi les premiers à formuler la théorie qu'on connaît aujourd'hui. Ritz, a amélioré la procédure de Rayleigh en se basant sur les fonctions de forme qui caractérisent le mouvement dynamique propre, chacune avec un coefficient d'amplitude indépendant. Cette procédure est appelée «

Méthode de Rayleigh Ritz ou Méthode de Ritz ». C'est la méthode approximative la plus populaire et la plus Utilisée dans l'analyse des structures en vibrations. En 1921 Timoshenko montre que la prise en compte des effets respectifs de l'inertie rotatoire et du cisaillement ont pour incidence de réduire sensiblement les fréquences propres de vibration des poutres.

Dans le même contexte, l'étude vibratoire des plaques a évolué en injectant des hypothèses supplémentaires telles que la prise en compte de l'effet de cisaillement pour le cas des plaques épaisses. Ce qui a conduit à des modèles plus raffinés comme celui de Love(1944)) qui appliqua les travaux de Kirchhoff aux plaque épaisses.

Depuis lors, de très nombreuses études ont été menées, surtout avec le développement des industries navales et aéronautiques. C'est ainsi que dans les années de l'après-guerre, de nouvelles théories des plaques minces élastiques furent élaborées par Reissner (1945). Reissner fut l'un des premiers à proposer une extension de la théorie des plaques avec cisaillement dans le cas statique. Ensuite, Uflyand 1948 et Mindlin (1951). C'est ainsi qu'ils proposèrent pour les plaques une nouvelle approche théorique rigoureuse Waburton et essentiellement Leissa (1969) ont contribué d'après plusieurs travaux de recherche contemporaines à mieux appréhender le problème de vibration des plaques entenant compte des différentes hypothèses pour la prédiction sensiblement exacte du comportement dynamique inhérent aux vibrations des plaques. En 1973 Leissa proposa un catalogue élargi à différent cas d'hypothèse pour la solution desvibrations libres de plaques rectangulaires. En parallèle, Liew et al (1995) ournissent une contribution effective pour les plaques épaisses [8].

1-4.3 définition :

Une plaque est un solide bidimensionnel, défini par une surface de référence plane et par une petite épaisseur (notée h) par rapport aux autres dimensions longueur et largeur, elle peut être constituée d'un matériau homogène ou peut être obtenue par l'empilement de différentes couches de matériaux orthotropes. Une analyse élastique des plaques consiste à une analyse d'un modèle mathématique bidimensionnel ce qui nous conduit à une analyse d'un problème en élasticité plane [7].

1-4.4 Différents types de plaques :

En fonction de la nature des matériaux qui les constituent et de la géométrie de leur section transversale, les plaques peuvent être classées en trois catégories

1- Les plaques isotropes :

elles sont constituées d'un matériau isotrope (acier, béton) et leur section transversale est homogène. Elles sont définies par deux paramètres élastiques respectivement le module d'élasticité (E) et le coefficient de Poisson (ν) ils sont utilisés dans les constructions civiles courantes (bâtiments, ouvrages d'art,...) [9].

2- Les plaques orthotropes :

Leurs propriétés élastiques sont différentes dans deux directions perpendiculaires. L'orthotrope peut être naturelle (bois) ou techniques (dalles). Le comportement de ces dalles est défini par quatre paramètres élastiques et on les retrouve dans les constructions navales, aéronavales, les réservoirs de l'industrie chimique, des bâtiments et d'ouvrages d'art

3- Les plaques anisotropes :

Leurs propriétés élastiques sont différentes dans toutes les directions. Neuf paramètres élastiques sont suffisants pour les définir. Elles sont souvent constituées de matériaux composites et sont surtout utilisées dans l'industrie aéronavale

Matériau isotrope :

Un corps homogène est isotrope vis à vis d'une propriété mécanique si cette dernière est indépendante de la direction considérée dans le corps. Un matériau est isotrope quand la matrice du tenseur d'élasticité reste identique à elle-même pour tout changement d'axes.

Les propriétés mécaniques des matériaux homogènes et isotropes peuvent être caractérisées par leur résistance et leur constante d'élasticité, le module de Young et le coefficient de Poisson. Dans un milieu isotrope, toutes les directions sont équivalentes. Est caractérisé par deux modules d'élasticité et μ appelés coefficients de Lamé ou bien par le module de Young E et par le coefficient de Poisson ν

Dans toute la base, la matrice de rigidité s'écrit sous la forme [9] :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{zx} \\ 2\epsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (I.1)$$

Alors la matrice de souplesse d'un matériau isotrope s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\frac{1+\nu}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\frac{1+\nu}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\frac{1+\nu}{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (I.2)$$

Dans le cas d'une plaque isotrope, deux coefficients seulement sont indispensables, le Module de Young **E** appelé module d'élasticité et ν coefficient de Poisson. Le module D'élasticité an cisaillement **G** ou le module de glissement relie les contraintes tangentielles Aux déformations angulaires. La matrice de rigidité s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (I.3)$$

La relation entre les déformations et les contraintes seront :

1-4.5 Formulation des éléments finis :

1-4.5.1 Introduction :

La méthode des éléments finis permet de résoudre un problème dont la solution analytique ne peut éventuellement pas être déterminée. Elle fournit une solution approchée de la solution exacte. Le milieu étudié est discrétisé en plusieurs éléments reliés entre eux par des nœuds. La géométrie d'un élément est caractérisée par un

nombre fini de nœuds sur son périmètre. La résolution d'un problème par la méthode des éléments finis consiste à trouver les déplacements (par exemple les translations et les rotations) de ces nœuds. Le champ de déplacement en tout point est déterminé par interpolation entre les valeurs déterminées aux nœuds. L'interpolation est basée sur l'utilisation de fonctions de formes [10].

1-4.5.2 Principe de la méthode des éléments finie :

Pour un problème de mécanique en élasticité, le principe des travaux virtuels S'écrit en un point M d'un domaine Ω chargé par des efforts volumiques \vec{f} et des efforts \vec{F} une partie du bord $\partial\Omega$ [10].

$$\int_{\Omega} \vec{N}(M) \cdot \vec{U}(M) dV + \int_{\partial\Omega} \vec{F}(M) \cdot \vec{U}^*(M) dS - \int_{\Omega} (\underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}^*) dV = 0 \tag{I.4}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \tag{I.5}$$

Pour le champ de déplacement u^* . La structure étudiée est discrétisée en un ensemble d'éléments le maillage. Chaque élément possède n nœuds. La résolution du problème se base sur l'interpolation du champ de déplacement de chaque élément suivant la forme :

$$\vec{U}(M) = \begin{bmatrix} u(M) \\ v(M) \\ w(M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \dots & \dots & \phi_{1(3n)} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \dots & \dots & \phi_{2(3n)} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & \dots & \dots & \phi_{3(3n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix} = [\Phi][u] \tag{I.6}$$

Les fonctions ϕ_{ij} sont les fonctions de forme. Le tenseur de déformation s'obtient par les équations de la cinématique pour s'écrire sous la forme :

$$[\varepsilon(\vec{U}(M))] = [\delta][u] \tag{I.7}$$

Où $[\delta]$ désigne à la matrice des dérivées des fonctions de forme .enfin le tenseur des contraintes s obtient grace la loi de comportement sous la forme

$$[\sigma] = [E][\delta][u] \tag{I.8}$$

Pour un matériau élastique isotrope de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν

$$[E] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{I.9}$$

Finalement, le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$(\int_{\Omega} [f_{int}][\phi] dv + \int_{\partial\Omega} [F_{ext}][\phi] ds)[u] - [u^t](\int_{\Omega} [\delta^t][E][\delta] dV)[u] = 0$$

En considérant que ce principe doit être vérifié pour tout $[u]$ et en introduisant la matrice de raideur :

$$K = \int_{\Omega} [\delta]^t [E] [\delta] dv \tag{I.10}$$

1-4.5.2 Élément à deux dimensions plaque rectangulaire :

L'approximation bilinéaire est déduite de la base polynomiale $(1, s, t, st)$ sur $(s, t) \in [1, 1]$. L'élément de référence est un carré à quatre nœuds de type « Q4 ». Les fonctions d'interpolation Sont :

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-S)(1-T) \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+S)(1-T)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+S)(1+T) \quad N_4 = \frac{1}{4}(1-S)(1+T)$$

Sur la figure , seule la fonction $N1$ est représentée, les autres s'obtenant par permutation. De la même façon, on peut construire, à partir d'une base polynomiale complète, les fonctions D'interpolation des éléments rectangulaires à neuf nœuds, pour une approximation quadratique [10],

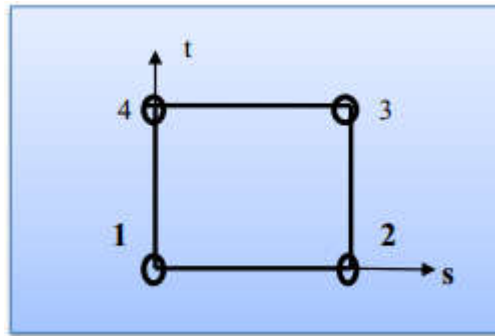


Figure I.8 : Fonction d'interpolation M_1 du quadrangle. Les autres sont obtenues par rotation

1-5 Comportement mécanique des matériaux composites :

1-5.1 Introduction :

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois appelées lois de comportement, caractérisant le comportement mécanique du milieu. Ces lois sont décrites par des axiomes qui permettent de rendre compte au mieux des phénomènes observés [3].

1-5.2 Description des contraintes :

Illustration des contraintes par un cube élémentaire (Figure 1.8)

Notation :

Le champ de contraintes au un point M d'un solide est un tenseur d'ordre 2, symétrique,

Représenté par la matrice :

$$\sigma(M) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \quad (I.11)$$

Pour tout $i \neq j$

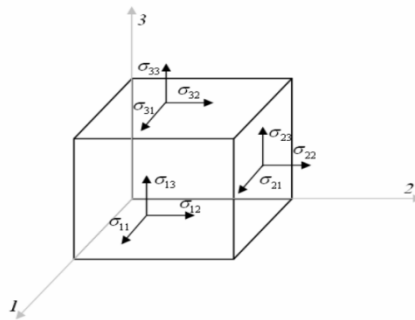


Figure I.9 : Composantes des vecteurs contraintes dans un système d'axes (1, 2,3)

Contraintes principales :

Il existe un repère dans lequel $\sigma (M)$ est de la forme :

$$\sigma(M) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{vmatrix} \quad (I.12)$$

Les contraintes dans ce repère sont les contraintes principales. Elles correspondent aux valeurs propres de la matrice $\sigma (M)$. Notation pour l'ingénieur : On peut noter les 6 variables du tenseur des contraintes sous la forme [3] :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$$

1-5.3 Description des déformations :

Comme dans le cas des contraintes, le champ de déformations au point M d'un solide est donc un tenseur d'ordre 2 symétriques notés $\varepsilon (M)$. Il y a donc 6 grandeurs représentant les déformations (3 translations et 3 rotations).

$$\varepsilon(M) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}_R \quad (I.13)$$

Avec les composantes du tenseur des déformations se réduisent alors à :

$$\varepsilon_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{1}{2} \quad (I.14)$$

Déformations principales :

Il existe un repère dans lequel $\varepsilon(M)$ est de forme :

$$\varepsilon(M) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}_{R_{pri}}$$

Les déformations dans ce repère sont les déformations principales. Elles correspondent aux valeurs propres de la matrice $\varepsilon(M)$

Notation pour l'ingénieur :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23}=2\varepsilon_{23} \\ \gamma_{13}=2\varepsilon_{13} \\ \gamma_{12}=2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} \\ \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (I.15)$$

Relation contrainte – déformation

Matrice de rigidité :

La relation d'élasticité peut s'écrire sous forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (I.16)$$

Ou sous forme condensée :

$$\sigma = c \varepsilon$$

Cette loi, généralement appelée loi de Hooke généralisée, introduit la matrice de rigidité c , symétrique. Le comportement linéaire d'un matériau est donc décrit dans le cas général à l'aide de 21 coefficients indépendants, ici les 21 constantes de rigidité C_{ij}

• **Matrice de flexibilité :**

La relation d'élasticité (1.9) peut être écrite sous forme inverse, suivante : $\varepsilon = s \sigma$ En introduisant la matrice inverse de la matrice de rigidité. La matrice s est appelée matrice de souplesse, et s'écrit dans le cas général [3] :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} & s_{56} \\ s_{61} & s_{62} & s_{63} & s_{64} & s_{65} & s_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (I.17)$$

Avec : $s = c^{-1}$ Les coefficients s_{ij} sont appelés constants de flexibilité ou constantes de souplesse.

1-5.4 Caractérisation de matériaux :

1-5.4.1 Introduction :

Dans le cas le plus général, la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes. Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie. Un tel matériau est appelé matériau triclinique.

La plupart des matériaux anisotropes possèdent une structure présentant une ou plusieurs symétries : par exemple, les monocristaux, les structures fibreuses, les matériaux composites à fibres ou tissus, etc. les propriétés de symétries géométriques réduisent alors le nombre de constantes indépendantes nécessaires pour décrire le comportement du matériau. Cette réduction est fonction des symétries présentées par le matériau considéré [3].

1-5.4.2 Type des matériaux :

- **matériau monoclinique :**

Ce matériau possède un plan de symétrie. La forme de matrice de rigidité (ou de souplesse) doit être telle qu'un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce plan ne modifie pas la matrice. Dans ce cas le plan de symétrie est le plan (1,2), l'exploitation des changements de base conduit à une matrice de rigidité de la forme [3] :

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{54} & c_{55} & 0 \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}$$

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constante d'élasticité indépendante est réduit à 13.

- **Matériau orthotrope :**

Le matériau orthotrope est un matériau à trois plans de symétrie orthogonaux deux à deux. En pratique, c'est le cas des tissus noyés dans un polymère. La même démarche que précédemment conduite aux expressions dans un repère défini par les axes d'orthotrope :

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}$$

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constante d'élasticité indépendante est réduit à

- **Matériau unidirectionnel :**

Le matériau unidirectionnel est un matériau possédant un axe de symétrie. C'est le cas pour un ensemble de fibres unidirectionnelles dans un substrat. Par géométrie, le matériau unidirectionnel est orthotrope. Il est souvent appelé orthotrope de révolution ou isotrope transverse. Dans le repère d'orthotrope, la matrice s'écrit [3]:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{32} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_{22} - c_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}$$

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constante d'élasticité indépendante est réduit à

- **Matériau isotrope :**

mêmes propriétés dans toutes les directions. La relation de comportement s'écrit :

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11} - c_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11} - c_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \end{bmatrix}$$

Chapitre II
Formulation par la méthode des
éléments finis

2-1 Introduction :

La méthode des éléments finis est un outil de résolution numérique approchée des équations différentielles. Qui régissent les phénomènes physiques. L'idée générale de la méthode des éléments finis consiste à la discrétisation d'un milieu contenu par des éléments qui sont interconnectés entre eux par des lignes appelées lignes nodales.

Les structures minces sont celles dont la normale reste rectiligne et perpendiculaire à la référence géométrique en configuration déformée du comportement flexionnel. Ici, on considère avant tout

- Les poutres de Bernoulli.
- Les plaques de Kirchhoff. En conséquence, les déformations de cisaillement transverses sont négligées. La qualification mince est correcte : plus l'élément est élancé (rapport a/h grand) Figure II.1.

2-2 Principe de Hamilton :

Si E_C est l'énergie cinétique, E_p l'énergie potentielle totale, entre les temps t_1 et t_2 le mouvement d'un corps élastique conservatif s'effectue de telle manière que la fonctionnelle

$$\int_{t_1}^{t_2} (E_c - E_p) dt \quad \text{Soit stationnaire} \gg \delta \int_{t_1}^{t_2} (E_c - E_p) dt = 0 \quad (\text{II .1})$$

$$E_p = U_d - w = U_d - w_v - w_s$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial u_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_i} = 0 \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} (u_i, u_i, t) dt = 0 \quad (\text{II .2})$$

Ou encore :

L'énergie potentielle totale E_p est la somme de l'énergie de déformation U_d et de conservatives des forces surfaciques et volumiques :

La fonction $E_c - E_p$ est appelée lagrangienne, elle est notée L . Si L est une fonction d'espace et du temps sont séparées $L = L(u_i, u_i, t)$

Donc pour les systèmes conservatifs, le principe de Hamilton s'énonce alors simplement :
Alors l'équation d'Euler associée à la fonctionnelle s'écrit [4,5] t

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_c}{\partial u_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial u_i} + \frac{\partial E_p}{\partial u_i} = 0 \quad (\text{II .3})$$

Ou :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial u_i} + \frac{\partial E_d}{\partial u_i} = Q_i \quad (\text{II.4})$$

Pour les systèmes non conservatifs, le principe de Hamilton devient :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (u_i, u_i, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta w^* dt = 0 \quad (\text{II.5})$$

Avec :

$\delta w = Q_i^* \delta u_i$ Les équations de Lagrange s'écrivent alors [11] :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_i} - Q_i^* = 0$$

Ou :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{u}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial u_i} + \frac{\partial U_d}{\partial u_i} = Q_i + Q_i^* \quad (\text{II.6})$$

Remarque : pour les systèmes avec amortissement, le terme additionne l- Q_i^* représente la force généralisée de dissipation.

Les équations de Lagrange permettent d'obtenir les équations de mouvement du système à partir des expressions des énergies cinétique, potentielle et de dissipation. Les équations de Lagrange d'un système conservative deviennent alors :

$$Mq^{**} + Kq = F(t) \quad (\text{II.7})$$

Dans le cas d'un système avec amortissement visqueuse, il faut ajouter au second membre leu terme additionnel de force de dissipation visqueuse.

$$Mq^{**} + cq^* + Kq = F(t) \quad (\text{II.8})$$

La solution de ce système peut s'obtenir à partir de l'étude des vibrations libres, c'est-à-dire par la superposition de solutions du système sans second membre, soit :

$$Mq^{**} + Kq = 0$$

$$e^{i\omega t} (k - \omega^2 M) q = 0 \quad (\text{II.9})$$

Le déterminant de l'équation doit être nul [11] :

$$\det([k] - \omega^2 [M]) = 0$$

On obtient ainsi les n valeurs $w^2 = (w_i, i = 1) \dots, n$ pour une dimension n des matrices $[k]$ et $[M]$.

2-3 Formulation mathématique :

Une plaque stratifiée rectangulaire mince consiste de n plis orientés différemment de dimension a et b est considérée Figure II.1.

Le système d'axes (x_1, x_2, x_3) passe par la surface moyenne de cette plaque. Dans la théorie de plaques, on ramène le comportement des points de la plaque à celui de la surface moyenne et on suppose un champ de déplacement du premier degré [3]

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(x_1, x_2, x_3, t) = u_1^0(x_1, x_2, t) + x_3 Q_1(x_1, x_2, t) \\ u_2(x_1, x_2, x_3, t) = u_2^0(x_1, x_2, t) + x_3 Q_2(x_1, x_2, t) \\ u_3(x_1, x_2, x_3, t) = u_3^0(x_1, x_2, t) \end{array} \right\} \quad (\text{II.10})$$

Où u_1, u_2, u_3 sont respectivement les déplacements suivant les directions x_1, x_2, x_3 sont les u_1^0, u_2^0, u_3^0 déplacements d'un point situé sur la surface moyenne de la plaque, respectivement suivent les directions x_1, x_2, x_3 . φ_1, φ_2 sont respectivement les rotations de normale à la surface moyenne autour des axes x_1, x_2 .

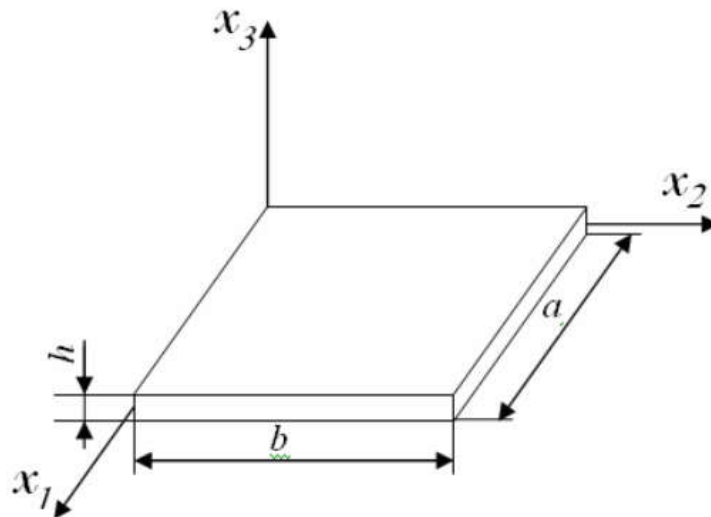


Figure II.1 : Schéma géométrique d'une plaque (stratifiée)

2-4 Formulation par éléments finis :

L'analyse est basée sur un élément rectangulaire à 4 nœuds de famille de Hermite, chaque nœud possède 3 degrés de liberté ; un déplacement u_3 et deux rotations φ_1, φ_2 le champ de déplacements élémentaire est défini par l'expression [3] :

$$u_3 = w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \quad (\text{II.11})$$

Le champ de déplacements sous forme matricielle peut être résumé par l'équation générale :

$$u_3 = w = [p_x]\{\alpha\} \quad (\text{II.12})$$

Avec :

$$[p_x] = (1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, y^3, x^3y, xy^3,)$$

$$\text{et } \{\alpha\}^t = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}\}$$

En remplaçant par leur valeur les coordonnées nodales dans l'équation (II.12) :

$$\{u^e\} = [x]\{\alpha\} \rightarrow \{\alpha\} = [x]^{-1}\{u^e\}$$

Avec :

$$[x] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 2b & 0 & a^2 & 2ab & 3b^2 & a^3 & 3ab^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & b & 0 & 3a^2 & 2ab & b^2 & 0 & 3a^2b & b^3 \\ 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 & a^3b & ab^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 0 & 3b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & b^3 \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc :

$$u_3 = [p_x][x]^{-1}\{u^e\} \quad (\text{II.13})$$

En pose :

$$[N] = [p_x][x]^{-1} \rightarrow u_3 = [N]\{u^e\}$$

Les fonctions de forme N sont schématisées sur les graphes suivants :

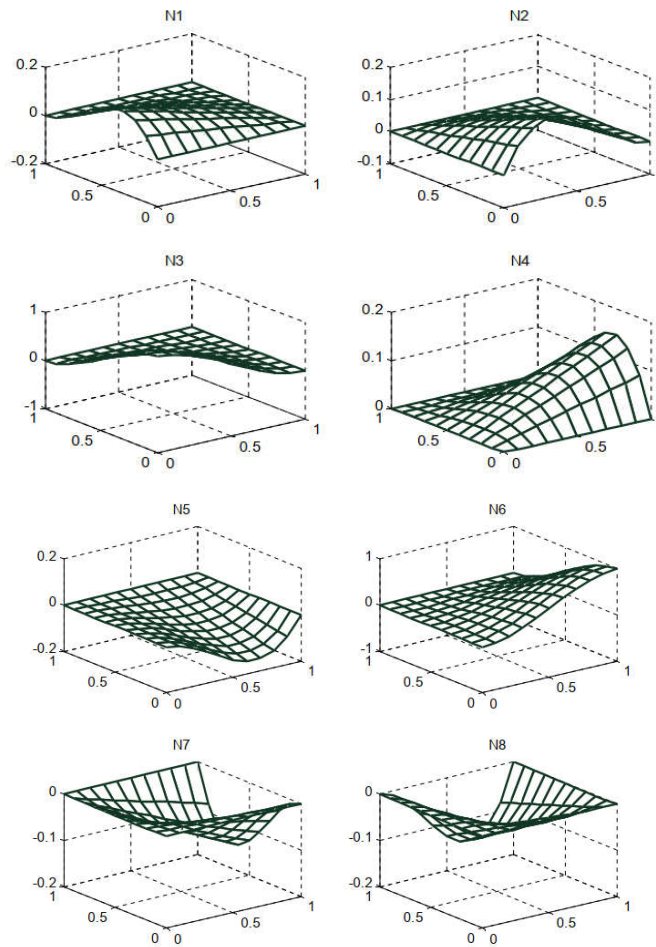


Figure II.2 : Les fonctions de forme

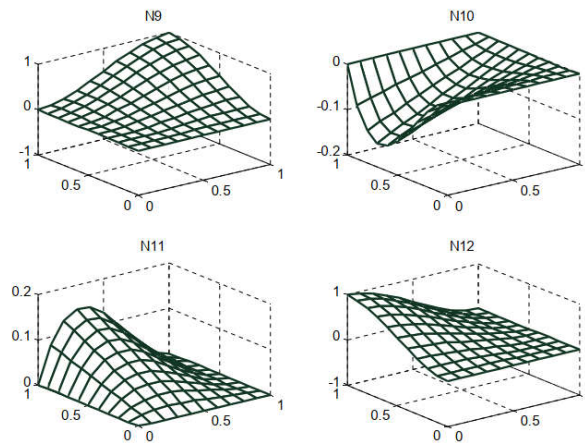


Figure II.3 : Les fonctions de forme

Dans le cas d'un problème de flexion des plaques, l'état des déformations en chaque point peut être représenté par trois composantes :

- La courbure dans la direction x_1
- La courbure dans la direction x_2
- La torsion

$$\varepsilon_f = x_3 \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{22} \\ K_{33} \end{bmatrix} = -x_3 \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = x_3 \{K\} = -x_3 [L] \{\varphi\}$$

Et :

$$\varphi_1 = \theta_2 = \frac{\partial u_3}{\partial x_1}; \quad \varphi_2 = -\theta_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \quad (\text{II.13})$$

Donc :

$$\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = \nabla u_3$$

En remplaçant u_3 par sa valeur à partir de l'équation (II.6)

$$\varepsilon_f = -x_3 L \nabla u_3 = -x_3 L \nabla [p_x][x]^{-1} \{u^e\} = -x_3 L \nabla [N] \{u^e\} \quad (\text{II.14})$$

On pose :

$$C = L \nabla [p_x]$$

Avec :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix}$$

Et :

$$\beta = C[x]^{-1}$$

Donc

$$\varepsilon_f = x_3 \{k\} = -x_3 [\beta] \{u^e\} \rightarrow \{k\} = -[\beta] \{u^e\} \quad (\text{II.15})$$

2-4.1 Formulation élémentaire :

La formulation au niveau de l'élément consiste à exprimer les énergies cinétique et potentielle en fonction respectivement des vitesses et des déplacements aux nœuds [12].

La matrice de rigidité :

On rappelle de l'énergie potentielle totale à partir de l'équation :

L'énergie potentielle totale E_p est la somme de l'énergie de déformation U_d et de travail conservatives des forces, donne l'étude des vibrations libres le travail des forces égal à zéro. Donc l'énergie potentielle totale E_p égal l'énergie de déformation U_d

$$E_p = U_d = \frac{1}{2} \int \int \left\{ D_{11} \left(\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} \right)^2 + 4 \left(D_{16} \left(\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} \right) + D_{26} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2} + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right\} dx_1 dx_2 + c \quad (\text{II.16})$$

En écrit l'équation (II.16)

sous forme matricielle :

$$E_p = U_d = \frac{1}{2} \int \int \{k\}^t [D] \{k\} dx_1 dx_2 + c \quad (\text{II.17})$$

En remplace $\{k\}$ par l'équation (II.17)

$$E_p = \frac{1}{2} \int \int \{u^e\}^t [\beta]^t [D] [\beta] \{u^e\} dx_1 dx_2 + c$$

D'autre part l'énergie potentielle s'écrit [4,6] :

$$E_p = \frac{1}{2} \int \int \{u^e\}^t [k] \{u^e\} dx_1 dx_2 + c$$

Par analogie, la matrice de rigidité élémentaire est :

$$[k^e] = \int_0^b \int_0^a [\beta]^t [D] [\beta] dx_1 dx_2 \quad (\text{II.18})$$

En remplaçant par l'expression (II.14)

$$[K^e] = ([x]^{-1})^t \left(\int_0^b \int_0^a [C]^t [D] [C] dx_1 dx_2 \right) \quad (\text{II.19})$$

Modélisation des masses par éléments finis :

L'énergie cinétique de l'élément, équation :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_v \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} dv \quad (\text{II .20})$$

Mais par ailleurs on a:

$$u_3 = [N]\{u^e\} = [p_x][x]^{-1}\{u^e\}$$

D'où :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_v \rho [N]^t \frac{\partial}{\partial t} \{u^e\}^t [N] \frac{\partial}{\partial t} \{u^e\} dv = \frac{1}{2} \{\dot{u}^e\}^t \left(\int_v \rho [N]^t [N] dv \right) \{\dot{u}^e\} \quad (\text{II .21})$$

D'autre part l'énergie cinétique s'écrit [4,6] :

$$E_c = \frac{1}{2} \{\dot{u}^e\}^t [M^e] \{\dot{u}^e\} \quad (\text{II .22})$$

Par analogie la matrice de masse cohérente de l'élément est :

$$[M^e] = \int_v \rho [N]^t [N] dv = \int_v \rho [p_x]^t ([x]^{-1})^t [p_x]^t [x]^{-1} dv \quad (\text{II .23})$$

2-4.2 Formulation globale :

1- Assemblage :

La matrice de rigidité et de masse élémentaire sont utilisées pour calculer la matrice de rigidité et de masse de la structure complète permettant d'exprimer l'énergie cinétique et potentielle en fonction des déplacements nodaux de la structure [12].

Approche énergétique :

Si les éléments ont la compatibilité requise, l'énergie cinétique et potentielle totale de la structure peut être obtenue par sommation des énergies cinétiques et potentielles totales élémentaires, soit [3].

$$E_c = \sum_{\text{éléments}} E_c^e = \sum_{\text{éléments}} \frac{1}{2} \{\dot{u}^e\}^t [M^e] \{\dot{u}^e\} = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^t [M] \{\dot{u}\} \quad (\text{II .24})$$

$$E_p = \sum_{\text{éléments}} E_p^e = \sum_{\text{éléments}} \frac{1}{2} \{u^e\}^t [k^e] \{u^e\} - \{u^e\}^t \{F^e\} = \frac{1}{2} \{u\}^t [k] \{u\} - \{u\}^t \quad (\text{II .25})$$

Oit u le vecteur des déplacements nodaux de la structure La compatibilité des déplacements nodaux de la structure est obtenue en écrivant pour chaque élément une relation matricielle de type

$$u^e = \beta^e \cdot u \quad (\text{II .26})$$

Avec :

β^e matrice de localisation ou de connectivité géométrique. Chaque relation (II .26) permet de repérer ou de localiser les d. d. l. de chaque élément dans l'ensemble des d. d. l. de la structure

En utilisant les relations (II .24) et (II .25), on peut écrire :

$$E_c = \sum_{\text{élément}} E_c^e = \sum_{\text{élément}} \frac{1}{2} \{ \dot{u}^e \}^t [\beta^e]^t [M^e] \{ \dot{u} \} [\beta^e] = \frac{1}{2} \{ \dot{u}^e \}^t [M] \{ \dot{u} \} \quad (\text{II .27})$$

La matrice de masse de la structure complète est :

$$[M] = \sum_{\text{élément}} [\beta^e]^t [M^e] [\beta^e] \quad (\text{II .28})$$

De même pour la matrice de rigidité globale et le vecteur des forces équivalentes :

$$[k] = \sum_{\text{élément}} [\beta^e]^t [k^e] [\beta^e] \quad (\text{II .29})$$

$$[F] = \sum_{\text{élément}} [\beta^e]^t [F^e] \quad (\text{II .30})$$

2-5 vibrations des plaques stratifiées :

2-5-1 Introduction :

Dans le cas où le temps est pris en compte, le champ général des déplacements en un point (x, y, z) à l'instant t s'écrit pour un schéma du premier ordre sous la forme

$$\left[\begin{array}{l} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\varphi_x(x, y, t), \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\varphi_y(x, y, t), \\ w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t). \end{array} \right] \quad (\text{II .31})$$

Les fonctions u_0, v_0, w_0, φ_x et φ_y sont solutions des relations fondamentales . En l'absence de cisaillement transverse, les fonctions φ_x et φ_y s'expriment en fonction de w_0 , et le champ des déplacements est entièrement déterminé par la connaissance des fonctions u_0, v_0, w_0 . Ces fonctions sont solutions des relations fondamentales (16.1) à (16.3), en tenant compte éventuellement de l'équation dans le cas de grandes déformations transversales en présence d'un chargement en membrane L'analyse de la vibration des plaques consiste d'abord à rechercher les fréquences propres de vibration [13]

Cette recherche s'effectue généralement en exprimant, par exemple en absence de cisaillement transverse, le champ des déplacements sous la forme :

$$\begin{cases} u_0(x, y, t) = u_0(x, y)e^{i\omega t}, \\ v_0(x, y, t) = v_0(x, y)e^{i\omega t}, \\ w_0(x, y, t) = w_0(x, y)e^{i\omega t}. \end{cases} \quad (\text{II .32})$$

Où ω est la fréquence de vibration de la plaque. La détermination des fréquences propres est obtenue ensuite en reportant ces expressions dans les relations fondamentales. Les fréquences propres peuvent également être obtenues par la méthode de Ritz. L'énergie cinétique (16.42) s'exprime alors suivant l'expression [13] :

$$E_c = \frac{1}{2} \omega^2 \iint \rho_s (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) dx dy, \quad (\text{II .33})$$

Où l'intégrale est étendue aux dimensions de la plaque

2-6 vibrations de plaques orthotropes avec diverses conditions sur les côtés :

2-6.1 Expressions générales :

Dans le paragraphe précédent, nous avons obtenu les solutions exactes de l'équation (II.36) dans le cas d'une plaque en appuis simples sur ses quatre côtés. Dans le cas d'autres conditions d'appuis, il n'est pas possible de résoudre directement l'équation (II.36) La recherche des fréquences propres nécessite alors d'utiliser des méthodes d'approximation. Nous développons ci-après la méthode de Ritz. Dans le cas de stratifiés orthotropes [13]

L'énergie U_d de déformation est donnée par l'expression (21.97) [13], alors que l'énergie cinétique maximum s'écrit d'après, en introduisant w_0 sous la forme (II.36), suivant :

$$\begin{aligned} U_{d \max} - E_{c \max} = \frac{1}{2} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ \left. 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 - \rho_s \omega^2 w_0^2 \right] dx dy. \end{aligned} \quad (\text{II .34})$$

En l'absence de charges latérales, la fonction énergie maximum (relation (8.65)) se réduit à $U_{d \max} - E_{c \max}$ avec :

$$E_{c \max} = \frac{1}{2} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \rho_s \omega^2 w_0^2 dx dy \quad (\text{II .35})$$

La solution approchée est recherchée sous la forme usuelle d'une série double de fonctions à variables séparées :

$$w_0(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (\text{II .36})$$

Où les fonctions $X_m(x)$ et $Y_n(y)$ doivent vérifier les conditions aux frontières sur les côtés $x = 0$, $x = a$ et $y = 0$, $y = b$. Les coefficients A_{mn} sont déterminés par les conditions (8.66) de stationnarité

$$\frac{\partial}{\partial A_{mn}} [\tilde{D}_{d \max} - \tilde{E}_{c \max}] = 0 \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (\text{II .37})$$

Où $U E \% \% d \max c \max -$ est l'énergie obtenue en reportant l'expression (II .37) de la flèche dans les expressions et (II .34). Compte tenu de l'expression [3], les conditions (II .38) de stationnarité conduisent alors aux $M \times N$ équations homogènes

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \{ D_{11} I_{mi}^{22} J_{nj}^{00} + [D_{12} (I_{mi}^{20} J_{nj}^{02} + I_{mi}^{02} J_{nj}^{20}) + 4D_{66} I_{mi}^{11} J_{nj}^{11}] R^2 + D_{00} I_{mi}^{00} J_{nj}^{22} R^4 - \rho_s a^4 \omega^2 I_{mi}^{00} J_{nj}^{00} \} A_{ij} = 0, \quad (\text{II .38})$$

Pour $m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N,$

Où les intégrales $I_{mi} pq$ et $J_{nj} rs$ ont été introduites. En explicitant le produit des intégrales sous la forme le système d'équations (II .38) peut être réécrit sous la forme d'un système sans dimensions, suivant :

$$D_{12} = \alpha_{12} D_{11}, \quad D_{66} = \alpha_{66} D_{11}, \quad D_{22} = \alpha_{22} D_{11},$$

et en introduisant la fréquence réduite :

$$\Omega = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho_s}{D_{11}}} \quad (\text{II .39})$$

En exprimant les coefficients de rigidité en flexion D_{ij} en fonction de D_{11} :

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \{ C_{minj}^{2200} + [\alpha_{12} (C_{minj}^{2002} + C_{minj}^{0220}) + 4\alpha_{66} C_{minj}^{1111}] R^2 + \alpha_{22} C_{minj}^{0022} R^4 - \Omega^2 C_{minj}^{0000} \} A_{ij} = 0,$$

Pour $m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N,$ (II .40)

La comparaison des équations (II .38) fait apparaître une similitude entre les équations obtenues par la méthode de Ritz dans le cas de la flexion, du flambement et des vibrations [3].

La similitude résulte de la partie de l'expression de l'énergie de déformation U_d commune à ces équations. Le système (II .38) ou (II .39) d'équations en A_{ij} étant homogène, une solution non nulle est obtenue lorsque le déterminant du système est nul. Cette condition conduit à une équation dont les solutions sont les fréquences propres ω_{mn} de vibration en flexion de la plaque.

2-6.2 Approximation de Rayleigh :

L'approximation de Rayleigh consiste à utiliser pour un mode donné mn le terme dominant de la série (II .35) :

$$\omega_{mn}(x, y) = A_{mn}X_m(x)Y_n(y). \quad (\text{II .41})$$

La fréquence propre du mode est alors obtenue en égalant l'énergie de déformation maximum à l'énergie cinétique maximum associée au déplacement transverse maximum w_{nm} .

D'après, l'énergie cinétique maximum s'écrit :

$$\tilde{E}_{c \max} = \frac{1}{2} \rho_S \omega^2 ab I_{mm}^{00} J_{nn}^{00} A_{mn}^2, \quad (\text{II .42})$$

Et l'énergie de déformation maximum est déduite de l'expression

$$\tilde{U}_{d \max} = \frac{1}{2} A_{mn}^2 [D_{11} I_{mm}^{22} J_{nn}^{00} + 2(D_{12} I_{mm}^{20} J_{nn}^{02} + 2D_{66} I_{mm}^{11} J_{nn}^{11}) R^2 + D_{22} I_{mm}^{00} J_{nn}^{22} R^4] ab \quad (\text{II .43})$$

L'égalité des deux expressions (II .44) et (II .45) conduit, avec des notations déjà introduites, à

$$\Omega_{mn}^2 = \frac{B_{mnmn}}{C_{mnmn}}, \quad (\text{II .44})$$

Où le coefficient B_{mnmn} est exprimé suivant :

$$B_{mnmn} = C_{mnmn}^{2200} + 2(\alpha_{12} C_{mnmn}^{2002} + 2\alpha_{66} C_{mnmn}^{1111}) R^2 + \alpha_{22} C_{mnmn}^{0022} R^4. \quad (\text{II .45})$$

Dans le cas de vibrations transverses de plaques orthotropes, l'écart entre la valeur de la fréquence propre obtenue par l'approximation de Rayleigh et la valeur déduite d'une approximation avec un nombre élevé de termes (II .39) est faible (Inférieure à quelques %) dans le cas d'une plaque ayant ses côtés encastés ou en appuis simples. Cet écart augmente lorsque les contraintes géométriques imposées aux quatre côtés diminuent. Schématiquement, le changement d'un côté encasté ou en appui simple en un côté libre accroît sensiblement l'écart, l'intersection de deux côtés libres (un coin libre) produit les écarts les plus élevés

2-6.3 Approximation à deux termes :

Dans le cas d'une approximation à deux termes, le déplacement transverse est exprimé, par exemple, suivant :

$$\omega_0(x, y) = A_{11}X_1(x)Y_1(y) + A_{12}X_1(x)Y_2(y), \quad (\text{II.46})$$

Et le système d'équations (II .38) se réduit à un système de deux équations : et le système d'équations (II .38) se réduit à un système de deux équations :

$$(B_{1111} - \Omega^2 C_{1111}^{0000})A_{11} + (B_{1112} - \Omega^2 C_{1112}^{0000})A_{12} = 0$$

$$(B_{1112} - \Omega^2 C_{1121}^{0000})A_{11} + (B_{1122} - \Omega^2 C_{1122}^{0000})A_{12} = 0$$

Avec :

$$B_{11ij} = C_{11ij}^{2200} + 2(\alpha_{12} C_{11ij}^{2002} - 2\alpha_{66} C_{11ij}^{1111})R^2 + \alpha_{22} C_{11ij}^{0022} R^4 \quad (\text{II.47})$$

Les fréquences propres des modes 11 et 12 sont obtenues en annulant le déterminant du système (II.47) Soit :

$$\det \begin{bmatrix} B_{1111} - \Omega^2 C_{1111}^{0000} & B_{1112} - \Omega^2 C_{1112}^{0000} \\ B_{1112} - \Omega^2 C_{1121}^{0000} & B_{1122} - \Omega^2 C_{1122}^{0000} \end{bmatrix} = 0. \quad (\text{II.48})$$

Les approximations de Rayleigh des deux modes 11 et12 sont obtenues directement à partir des termes diagonaux. Soit

$$\Omega_{11}^2 = \frac{B_{1111}}{C_{1111}^{0000}} \quad \text{Et} \quad \Omega_{12}^2 = \frac{B_{1122}}{C_{1122}^{0000}} \quad (\text{II.49})$$

Nous retrouvons les approximations données par l'expression.

2-7 vibrations de plaques stratifiées symétriques :

2-7.1 Expressions générales :

L'étude des fréquences propres en flexion de plaques stratifiées symétriques se fait de la même manière qu'au paragraphe. Dans le cas présent, l'énergie de déformation à considérer est celle introduite en [3]. Il en résulte que le système (II .39) ou (II .40) est modifié en introduisant les termes en D_{16} et D_{26} . D'où le système de $M \times N$ équations homogènes

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \{ D_{11} C_{minj}^{2200} + [D_{12} (C_{minj}^{2002} + C_{minj}^{0220}) + 4D_{66} C_{minj}^{1111}] R^2 + D_{22} C_{minj}^{0022} R^4 + 2D_{16} (C_{minj}^{1210} + C_{minj}^{2101}) R + 2D_{26} (C_{minj}^{1012} + C_{minj}^{0121}) R^3 - \rho_S \alpha^4 \omega^2 C_{minj}^{0000} \} A_{ij} = 0, \quad (\text{II.50})$$

$$\text{Pour } m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

Comme dans le cas de plaques orthotropes, il est possible d'explicitier l'approximation de Rayleigh [3] ou l'approximation à deux termes [3], suivant des expressions analogues respectivement à (II .49) et à(II .48) . Toutefois dans le cas présent, l'approximation de Rayleigh s'écarte notablement des valeurs obtenues avec un nombre élevé de termes. En effet, dans le cas

de stratifiés symétriques, la déformée à un terme ne décrit pas assez correctement la déformée réelle.

2-7.2 Plaque symétrique dont les côtés sont encastrés ou libres :

Comme application de la formulation générale précédente, nous considérons ici le cas d'une plaque rectangulaire constituée d'un stratifié symétrique, dont les côtés sont encastrés ou libres. Le cas de côtés opposés encastrés a déjà été considéré au paragraphe (relations (II.65) à (II.68)). Dans le cas de côtés opposés l'un encastré, l'autre étant libre, il est possible d'exprimer la flèche à partir des fonctions déduites de la fonction poutre introduite au paragraphe [3] :

Côté $x = 0$ encastré et côté $x = a$ libre :

$$X_m(x) = \cos \lambda_m \frac{x}{a} + \cosh \lambda_m \frac{x}{a} + \gamma_m \left(\sin \lambda_m \frac{y}{a} - \sinh \lambda_m \frac{y}{a} \right), \quad (\text{II.51})$$

- Côté $y=0$ encastré et côté $y=b$ libre :

$$Y_n(y) = \cos \lambda_n \frac{y}{b} - \cosh \lambda_n \frac{y}{b} + \gamma_n \left(\sin \lambda_n \frac{y}{b} - \sinh \lambda_n \frac{y}{b} \right), \quad (\text{II.52})$$

Où $\lambda_m, \lambda_n, \gamma_m$ et γ_n sont donnés par les relations//

$$\cos \lambda_i \cosh \lambda_i = -1, \quad i = m, n \geq 3.$$

$$\gamma_i = \frac{\cos \lambda_i + \cosh \lambda_i}{\sin \lambda_i - \sinh \lambda_i}, \quad (\text{II.53})$$

Les valeurs de λ_i et γ_i sont reportées dans le Tableau II.2. Dans le cas de côtés opposés libres, la flèche est exprimée à partir des fonctions déduites de la fonction poutre introduite en (II 28) (II 33) et (II 34) :

- côté $x = 0$ libre et côté $x = a$ libre :

$$X_1(x) = 1,$$

$$X_2(x) = \sqrt{3} \left(1 - 2 \frac{x}{a} \right)$$

$$X_m(x) = \cos \lambda_m \frac{x}{a} + \cosh \lambda_m \frac{x}{a} + \gamma_m \left(\sin \lambda_m \frac{y}{a} + \sinh \lambda_m \frac{y}{a} \right), m \geq 3 \quad (\text{II.88})$$

- Côté $y=0$ libre et côté $y=b$ libre :

$$Y_1(y) = 1,$$

$$Y_2(y) = \sqrt{3} \left(1 - 2\frac{y}{b}\right),$$

$$Y_n(y) = \cos \lambda_n \frac{y}{b} + \cosh \lambda_n \frac{y}{b} + \gamma_n \left(\sin \lambda_n \frac{y}{b} + \sinh \lambda_n \frac{y}{b} \right), n \geq 3 \quad (\text{II.89})$$

Les coefficients $\lambda_m, \lambda_n, \gamma_m$ et γ_n sont exprimés par les relations (II 82) et (II 31) :

$$\cos \lambda_i \cos \lambda_i = 1, \quad i = m, n \geq 3.$$

$$\lambda_i = \frac{\sin \lambda_i + \sin \lambda_i}{\cos \lambda_i - \cos \lambda_i}, \quad (\text{II 90})$$

Les valeurs de λ_i et γ_i sont reportées. Il est important de noter que si les fonctions poutres (II.85) à (II 90) vérifient exactement les conditions (II 29) aux frontières sur les extrémités libres d'une poutre, elles ne vérifient que de manière approchée les conditions aux frontières dans le cas de côtés libres d'une plaque. En effet, dans le cas d'un côté libre de direction parallèle à y , par exemple, les conditions aux frontières s'écrivent :

$$M_x = 0, \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x = 0 \quad (\text{II.91})$$

La résultante Q_x de cisaillement transverse est exprimée par la quatrième équation des plaques. Et les conditions aux frontières s'écrivent

$$M_x = 0, \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0. \quad (\text{II 92})$$

Les expressions du moment de flexion M_x et du moment de torsion M_{xy} sont déduites de l'équation constitutive des stratifiés. Les conditions aux frontières sur un côté libre de direction parallèle à y s'écrivent donc finalement [13] :

$$D_{11} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x \partial y} = 0, \quad (\text{II 93})$$

$$D_{11} \frac{\partial^3 \omega_0}{\partial x^3} + 4D_{16} \frac{\partial^3 \omega_0}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 4D_{16}) \frac{\partial^3 \omega_0}{\partial x \partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^3 \omega_0}{\partial y^3} = 0. \quad (\text{II 94})$$

Chapitre III
Simulation d'une plaque en
matériaux composite par le code
ANSYS apdl

3-1 Introduction :

Les fonctionnalités du logiciel ANSYS apdl relatives au calcul des structures en matériaux composites par la méthode des éléments finis ont été utilisées pour déterminer la déflexion de la plaque et les fréquences et les modes propres de vibration libre de la plaque.

Ce travail représente la simulation par le code *ANSYS apdl* d'un solide élastique en matériaux composite (plaque encadrée) figure III.1. Les caractéristiques mécaniques la plaque sont présentées dans le tableau III.1.

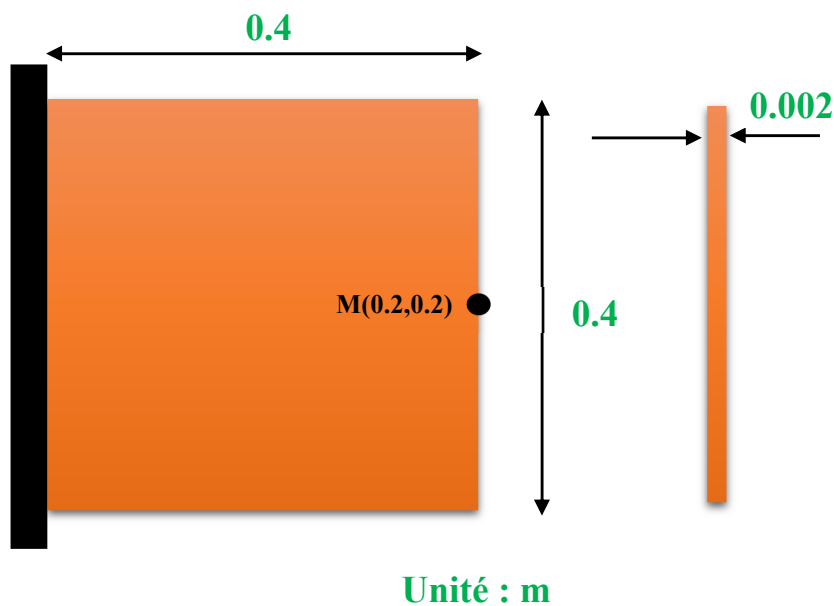


Figure III.1: Géométrie de la plaque en matériaux composite étudiée

Epoxy carbone		
module d'élasticité E	E_x	119e9
	E_y	8.67e9
	E_z	8.67e9
module de rigidité G	G_x	5.18e9
	G_y	3.29e9
	G_z	3.29e9
coefficient de Poisson μ	μ	0.31
	μ	0.31
	μ	0.31
masse volumique ρ	Rho	1550

Tableau III.1 : Caractéristiques mécanique la plaque en matériaux composite étudiée

3-2 Simulation d'une plaque en matériaux composite stratifiée carrée symétrique cross-ply [0] :

Dans cette section, nous allons prendre un exemple de structures d'une plaque stratifiée carrée symétrique cross-ply [0].

L'élément SOLID186 (Figure III.2) de la bibliothèque de l'ANSYS apdl est utilisé pour simuler les structures composites par l'activation de la commande *ET, SOLID186, 3*.

La figure III.2 l'élément SOLID186 qui possède 20 nœuds (I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, A, B) et trois DDL (UX, UY, UZ).

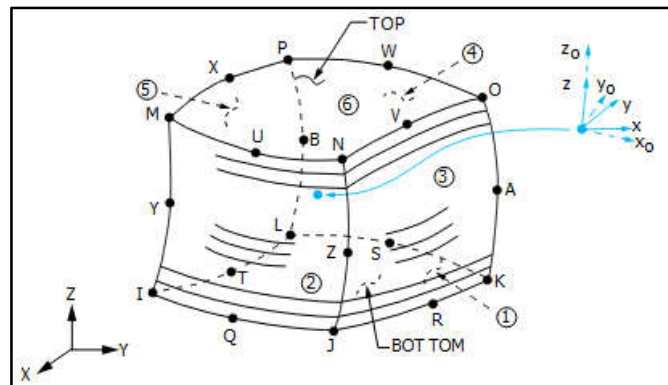


Figure III.2 : L'élément SOLID186

La géométrie de la plaque (Figure III.1) est maillée par l'élément SOLID186 à 2116 élément, chaque élément du taille 8 e-3 m (Figure III.3).

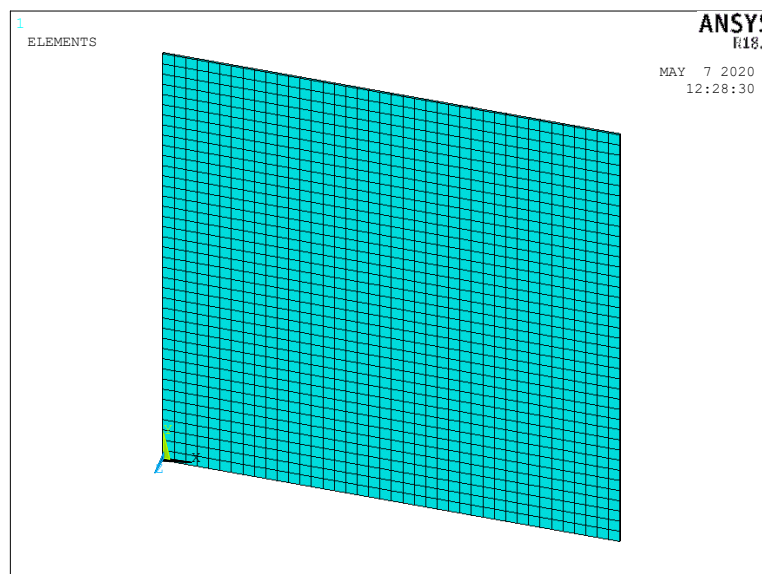


Figure III.3 : Maillage en plaque (46*46=2116 Elements)

Les types de conditions aux limites utilisées dans ce travail est donné comme suit ; (ELLL) qui sont considérées autour les bords de la plaque e (Figure III.3.a).

La Figure III.3.b la Fixation des trois degrés de libertés (DDL) (UX, UY, UZ) au niveau des nœuds du côté gauche de la plaque.

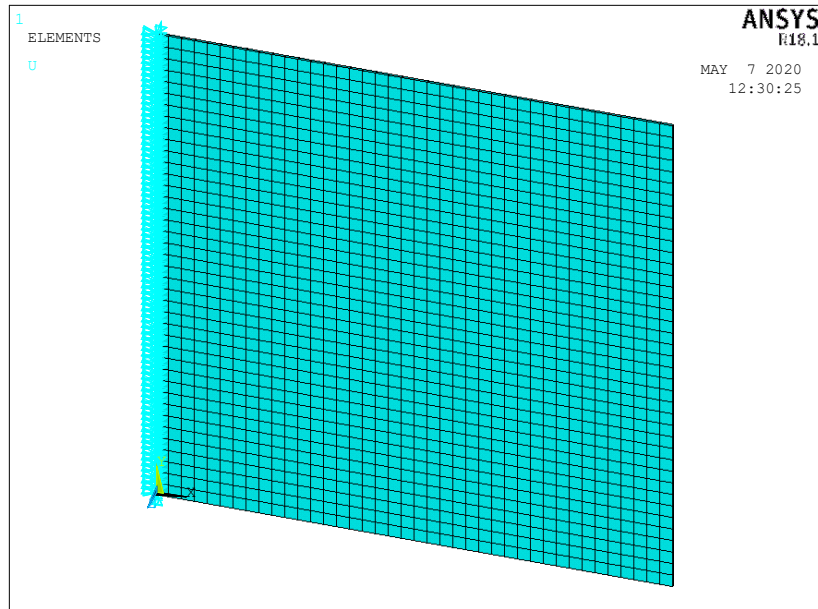


Figure III.3.a : Conditions au limites autour des bords de la plaque

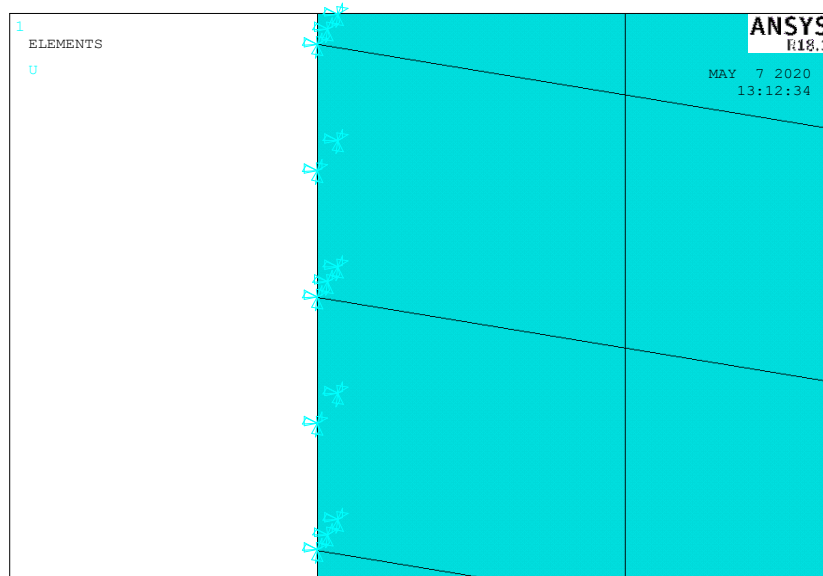


Figure III.3.a : Fixation des trois DDL (UX, UY, UZ) des nœuds du côté gauche de la plaque

Dans cette section, nous allons prendre un exemple de structure de plaque stratifiée carrée symétrique cross-ply [0] (Figure III. 4), cette figure présente un élément finis numéro 709.

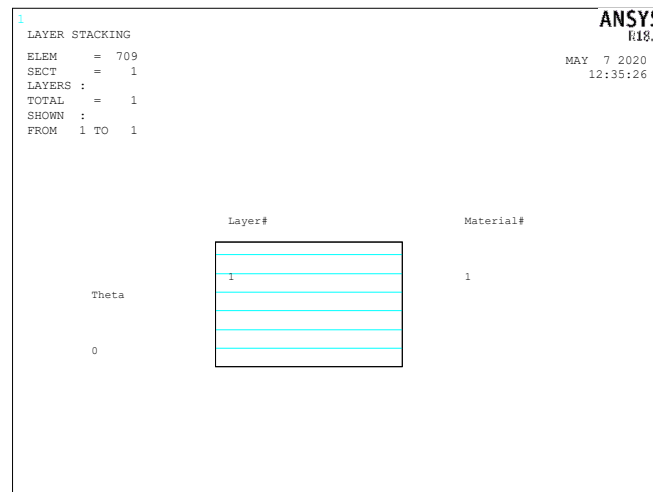


Figure III.4 : L'élément 709 de la plaque stratifiée carrée symétrique cross-ply [0]

3-2.1 Analyse statique :

Dans la présente analyse de la plaque composite orthotrope est une étude statique, nous allons appliquer une force F (Figure III.5) pour les différentes valeurs (500, 1000 et 1500N).

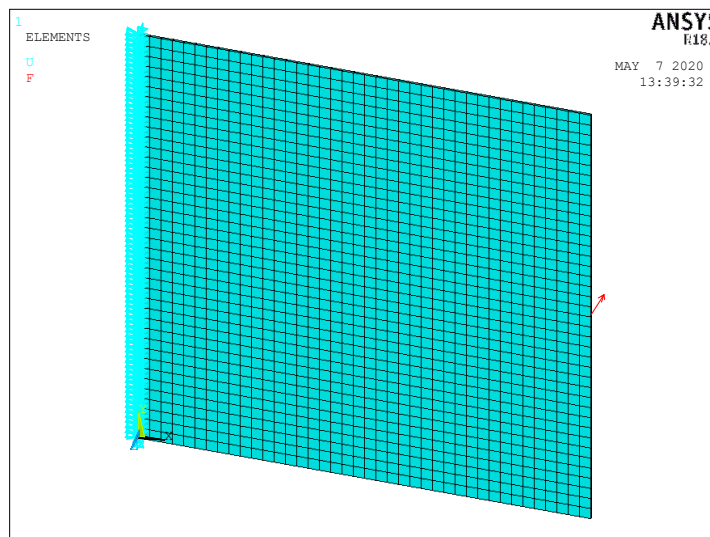


Figure III.5 : Application de la force F sur le nœud 202 (Point (0.2,0.2))

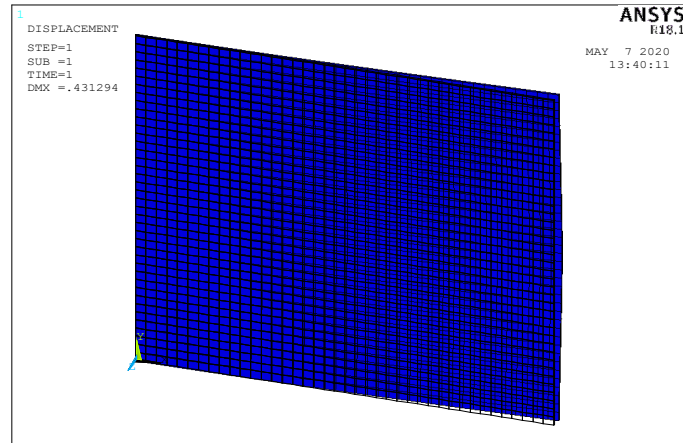


Figure III. 5.a : Déflexion résultant de l'application de $F=500$ N au point (0.2,0.2)

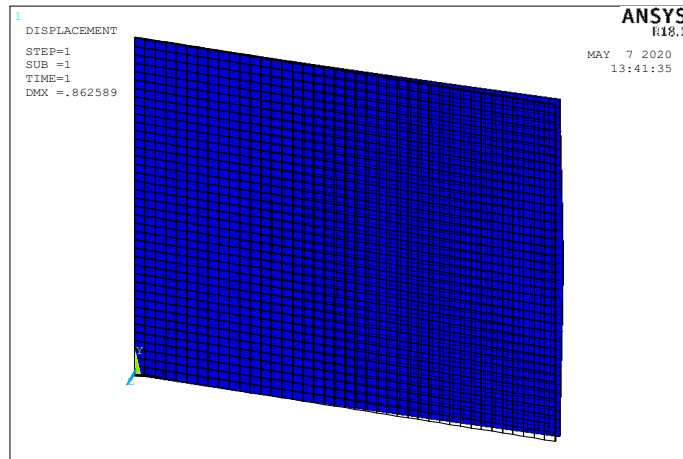


Figure III. 5.b : Déflexion résultant de l'application de $F=1000$ N au point (0.2,0.2)

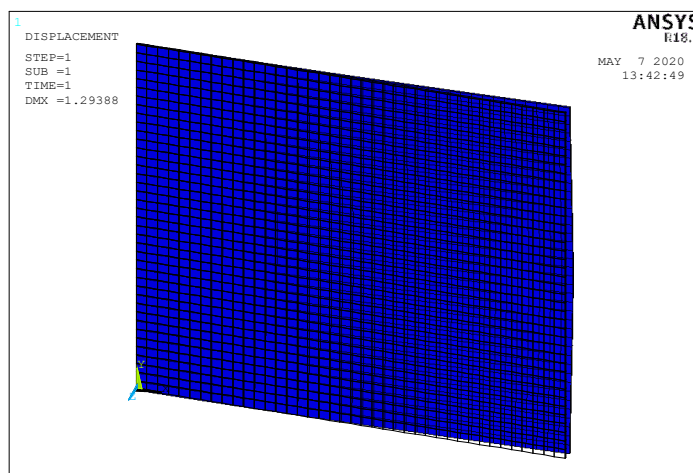


Figure III. 5. c : Déflexion résultant de l'application de $F=1500$ N au point (0.2,0.2)

Les figures III.5.a, III.5.b et III.5.c présentent la forme de déformation de déflexion de la plaque stratifiée carrée symétrique cross-ply [0].

Le tableau III.2 montre les trois valeurs des déflexions de la plaque stratifiée carrée symétrique cross-ply [0].

Force	500	1000	1500
Déflexions	0,431294	0.862589	1.293888

Tableau III.2 : les trois valeurs des déflexions de la plaque stratifiée carrée symétrique cross-ply [0].

La tension de la force F est correspondante au valeur de la déflexion.

3-2.2 Analyse dynamique :

L'analyse modale d'une structure admet d'améliorer la connaissance physique et dans certains cas du comportement : le calcul de la base modale d'une structure est aujourd'hui une étape raisonnable de son dimensionnement. Du fait de l'excitation forcée à laquelle est soumise la structure en fonctionnement, pour empêcher le problème d'amplification dynamique souvent synonyme d'inconfort voire de rupture, on peut désirer lors de la définition de la structure qu'elle n'a pas de fréquence propre dans une bande donnée. La base modale doit donc être calculer et la conception de la structure doit être parfois modifiée.

Les systèmes mécaniques sont toujours dissipatifs :

les modes propres de vibration physique sont des vecteurs complexes au sens algébriques et les fréquences propres associées sont des nombres complexes, alors que les modes propres calculés par les programmes d'analyse modale traditionnels sont des vecteurs réels au sens algébrique, donc simplement manipulables et les fréquences associées sont des nombres réels. On les nomme modes propres réels bien qu'ils n'aient de réel que leur forme mathématique.

La figure III.7 montre les quatre premières formes des modes de vibration libre de la plaque.

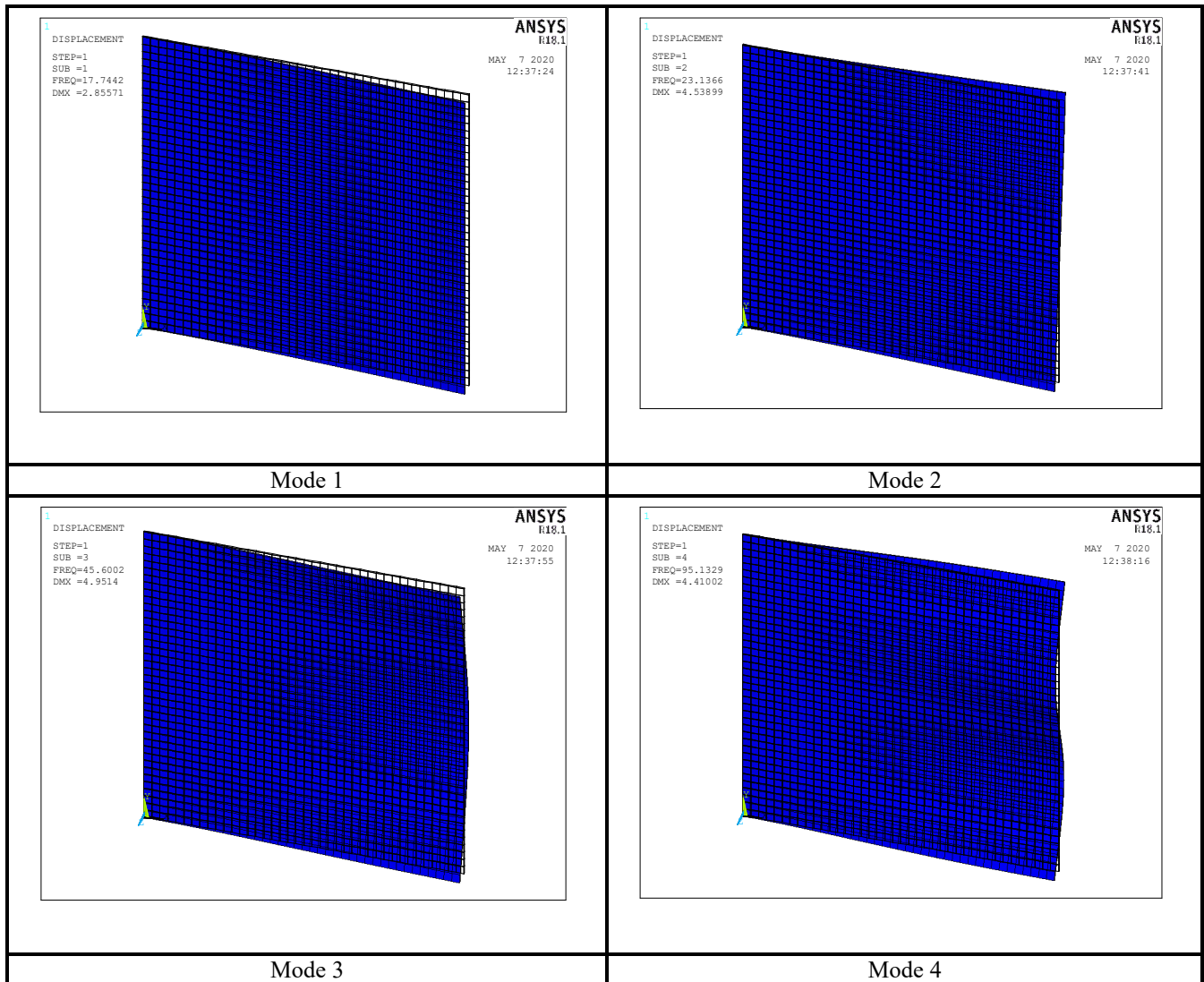


Figure III.7 : Modes propres de vibration libre de la stratifiée carrée symétrique cross-ply [0].

Le tableau III.3 présente les valeurs des quatre premières fréquences propres de vibration libre de la plaque.

Modes	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Fréquences (Hz)	17,7442	23,1366	45,6002	95,1323

Tableau III.3 : Quatre premières fréquences propres de vibration libre de la plaque.

3-3 Etude paramétriques:

L'objectif de cette partie d'étude vise à montrer la variation dans les formes des modes de vibration et les valeurs des fréquences dans les différentes cas des conditions aux limites de la même plaque précédant mais avec trois couches [-45,45,-45] (Figure III.8).

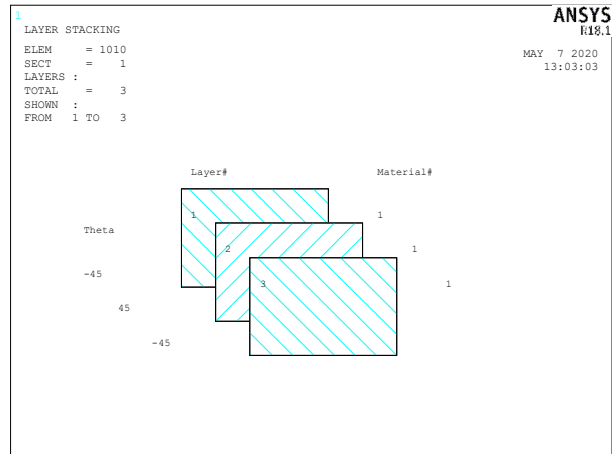


Figure III.8 : L'élément 1010 de la plaque stratifiée carrée symétrique cross-ply [-45,45,-45]

Les types de conditions aux limites utilisées dans ce chapitre sont donnés comme suit ; quatre cas, (ELLL, ELEL, EELL et EEEE) (Figure III.9).

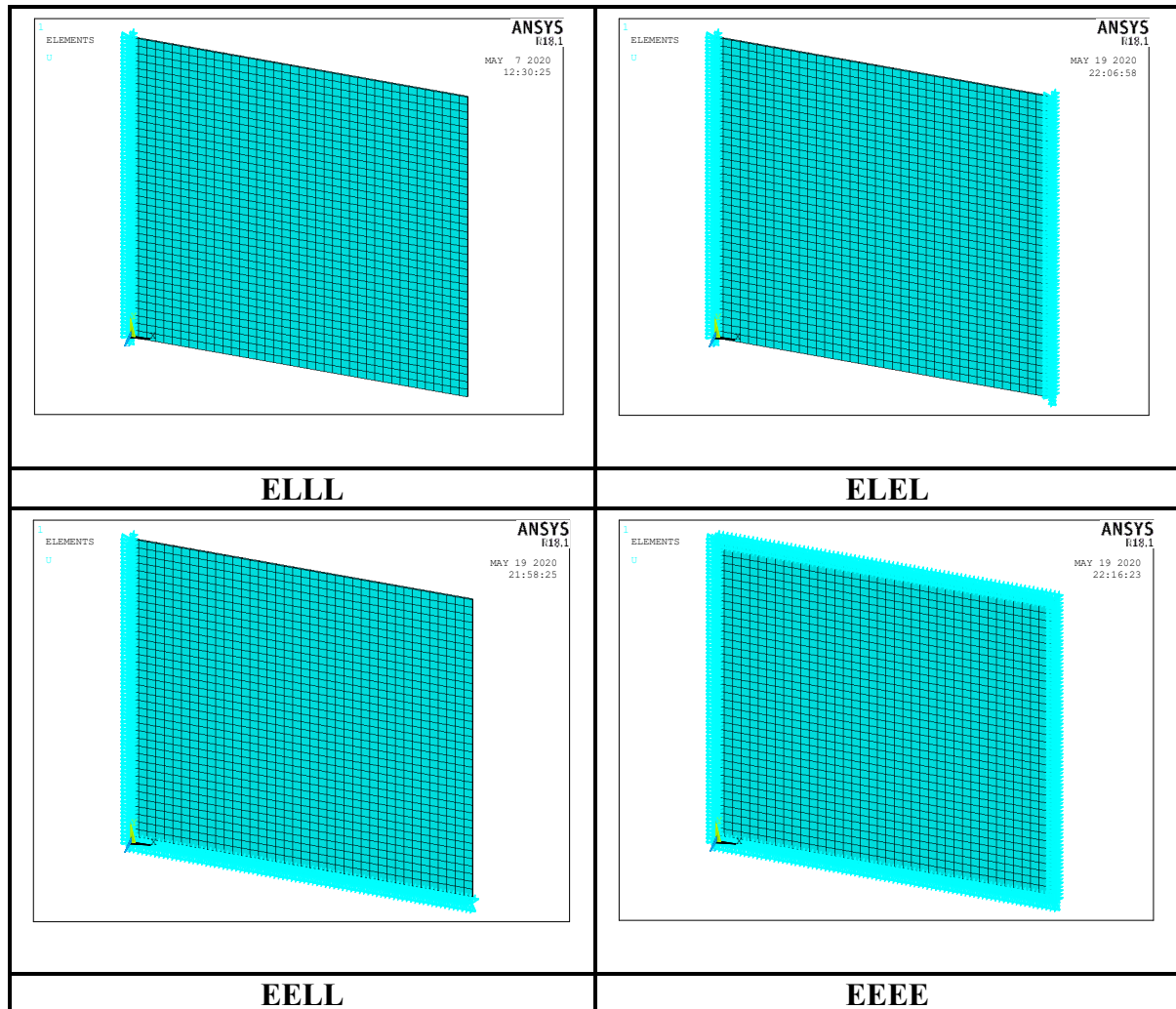


Figure III.9 : Différentes conditions aux limites de la plaque étudiée

Les figures (III.10, III.11, III.12 et III.13) et le tableau (III.4) représentent les formes et les fréquences respectivement des modes de vibration libre de la plaque stratifiée carrée symétrique cross-ply [-45,45,-45].

Les matrices des rigidités de la structure varient selon les conditions aux limites considérées par conséquent les formes des modes et les valeurs des fréquences aussi varient [REDDY].

La simulation par le code ANSYS apdl valide cette variation selon les conditions aux limites considérées choisies dans notre analyse dynamique

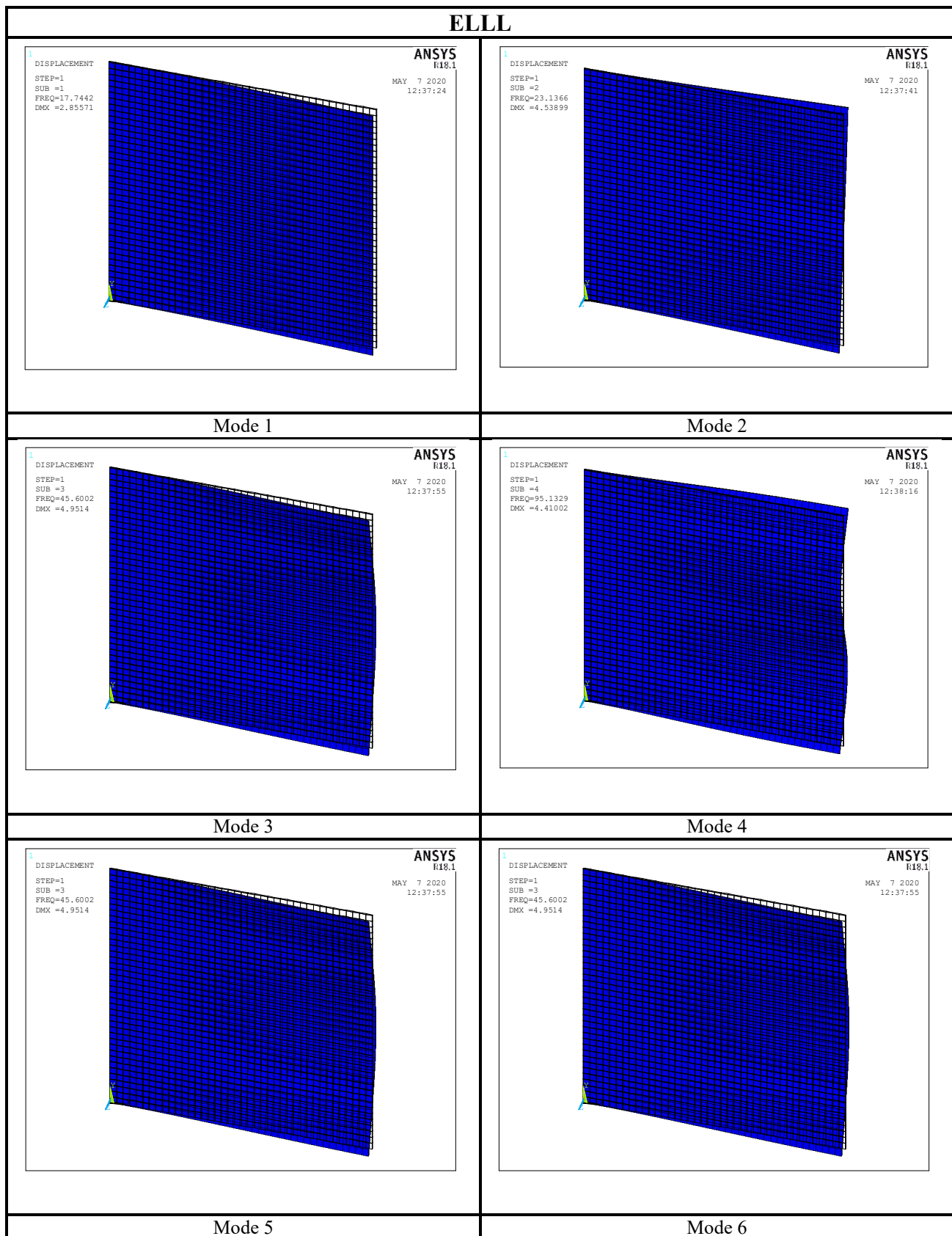


Figure III.10 : Formes des six premiers modes de vibration libre de la plaque (ELLL)

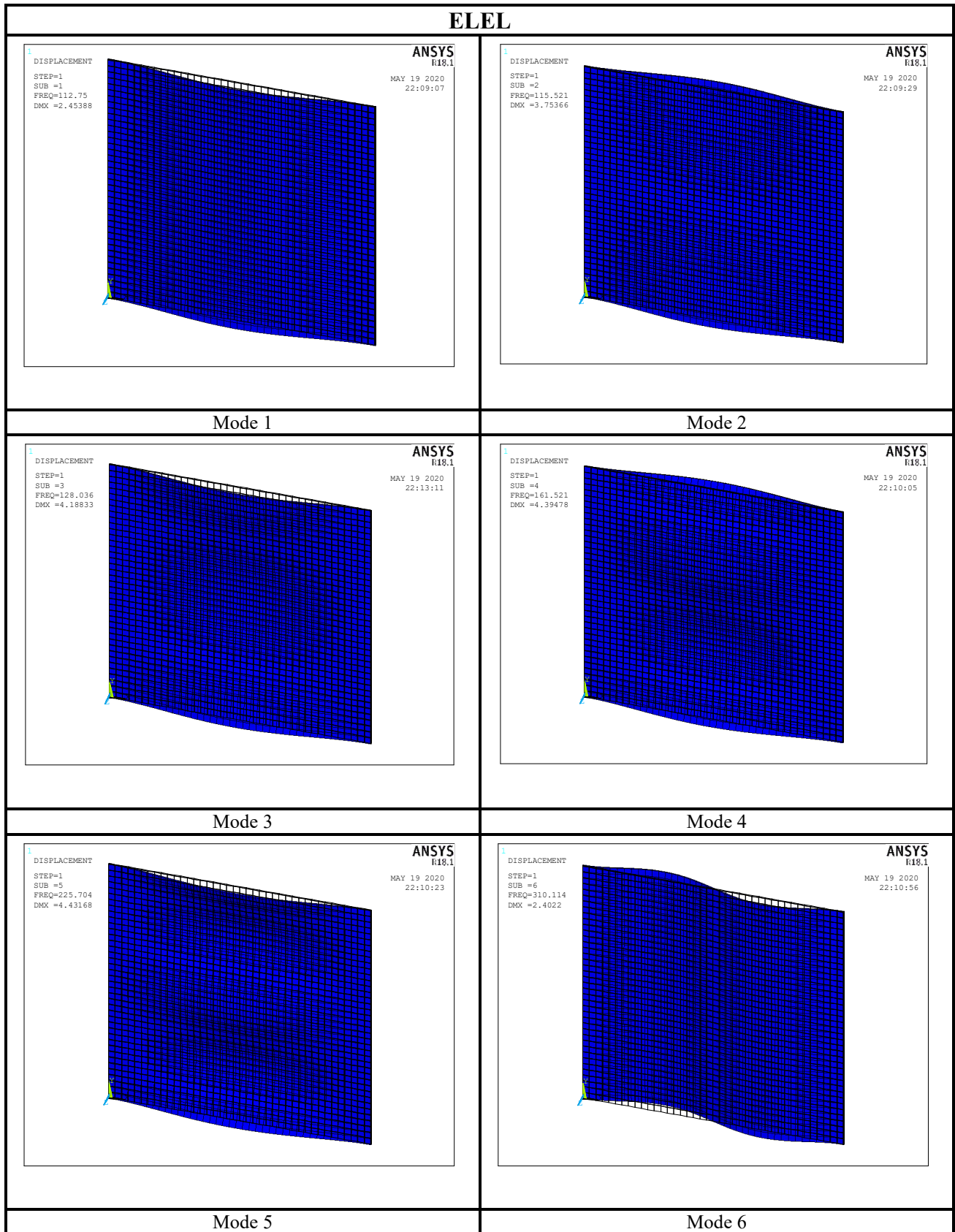


Figure III.11 : Formes des six premiers modes de vibration libre de la plaque (ELEL)

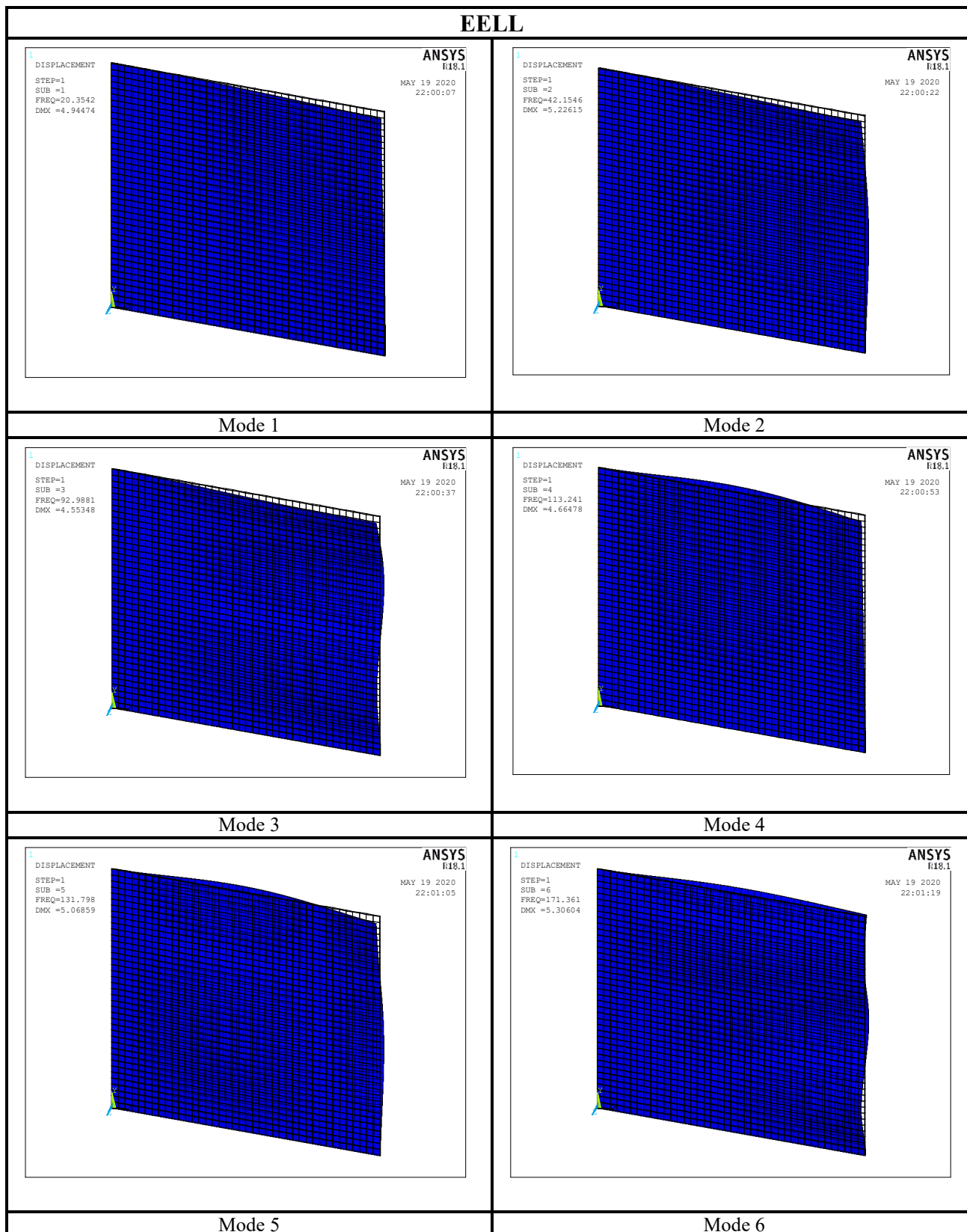


Figure III.12 : Formes des six premiers modes de vibration libre de la plaque (EELL)

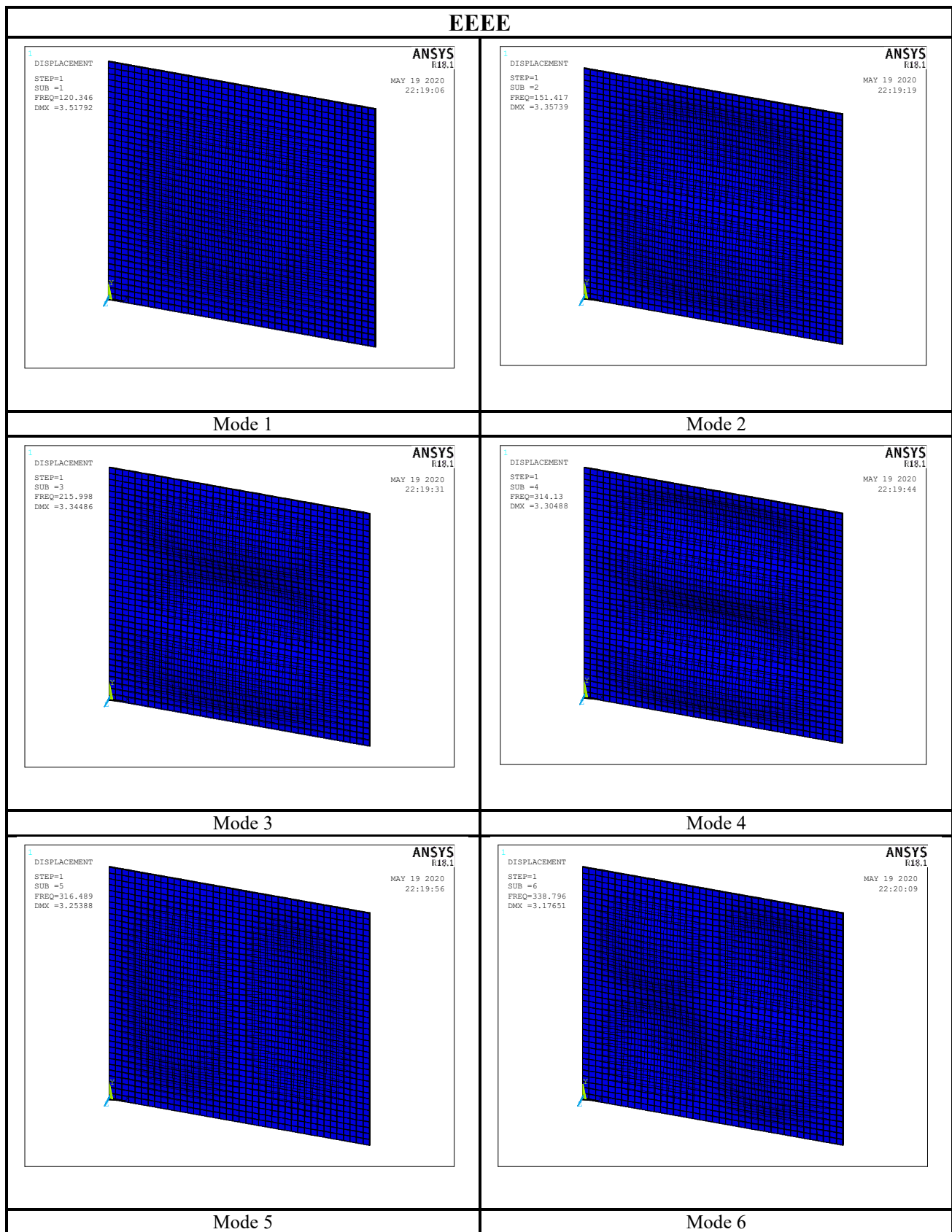


Figure III.13 : Formes des six premiers modes de vibration libre de la plaque (EEEE)

Le tableau III.4 montre les valeurs des quatre premières fréquences de vibration libre pour quatre modèles où dans chacun des modèles nous mettons une sorte de **conditions aux limites** Et chaque type se distingue par quatre fréquences naturelles différentes du reste

Type de conditions aux limites	Fréquences de vibration libre (Hz)					
	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
ELLL	17,7442	23,1366	45,6002	95,1329	45,6002	45,6002
ELEL	112,75	115,521	128,036	161,521	225,704	310,114
EELL	20,3542	42,1546	92,9881	113,241	131,798	171,361
EEEE	120,346	151,417	215,998	314,13	316,489	338,796

Tableau III.4 : Fréquences propres de la plaque composite pour les différentes conditions aux limites

3-4 Simulation de vibration libre d'une plaque sandwich avec ANSYS Workbench ACP :

Un matériau sandwich est formé d'un matériau de faible masse volumique (l'âme) sur lequel sont collées des feuilles ou plaques (les peaux). La fonction essentielle de l'âme du sandwich est de transmettre, par cisaillement, les actions mécaniques d'une peau à l'autre.

Dans le cas général, les peaux sont des stratifiés d'épaisseur h_1 (peau inférieure) et d'épaisseur h_2 (peau supérieure) (figure III.14). L'épaisseur de l'âme sera notée h . Le système de coordonnées est choisi de manière que le plan (x, y) soit le plan moyen.

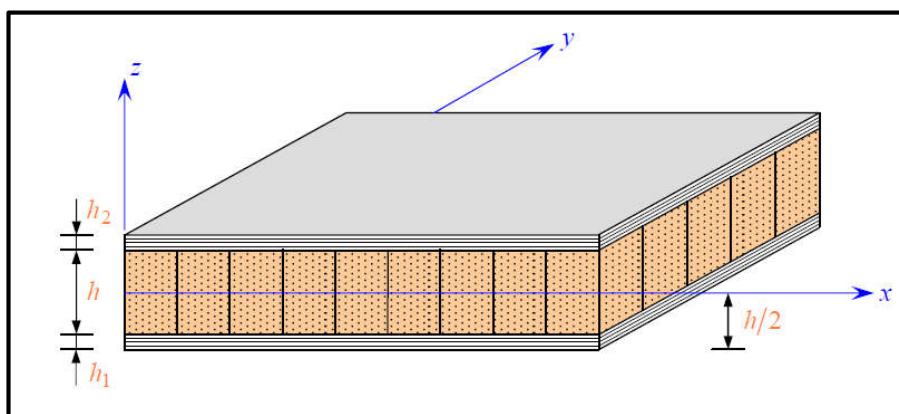


Figure III.14 : Plaque en matériaux sandwich

Dans la partie suivante de simulation, nous considérons une plaque sandwich (400*400*3.2 mm), la plaque est constituée d'âme d'**Honeycomb** d'épaisseur $h=15$ mm et de peau d'**Epoxy Carbon UD (230 GPa) Prepreg** d'épaisseur $h_1=0.25$ mm.

La peau supérieure est composée de quatre couches d'orientation $[-45,45,-45,45]$ et la peau inférieure est d'orientation $[0,90,0,90]$.

La figure III.15 présente la simulation des matériaux et composition de la plaque sandwich.

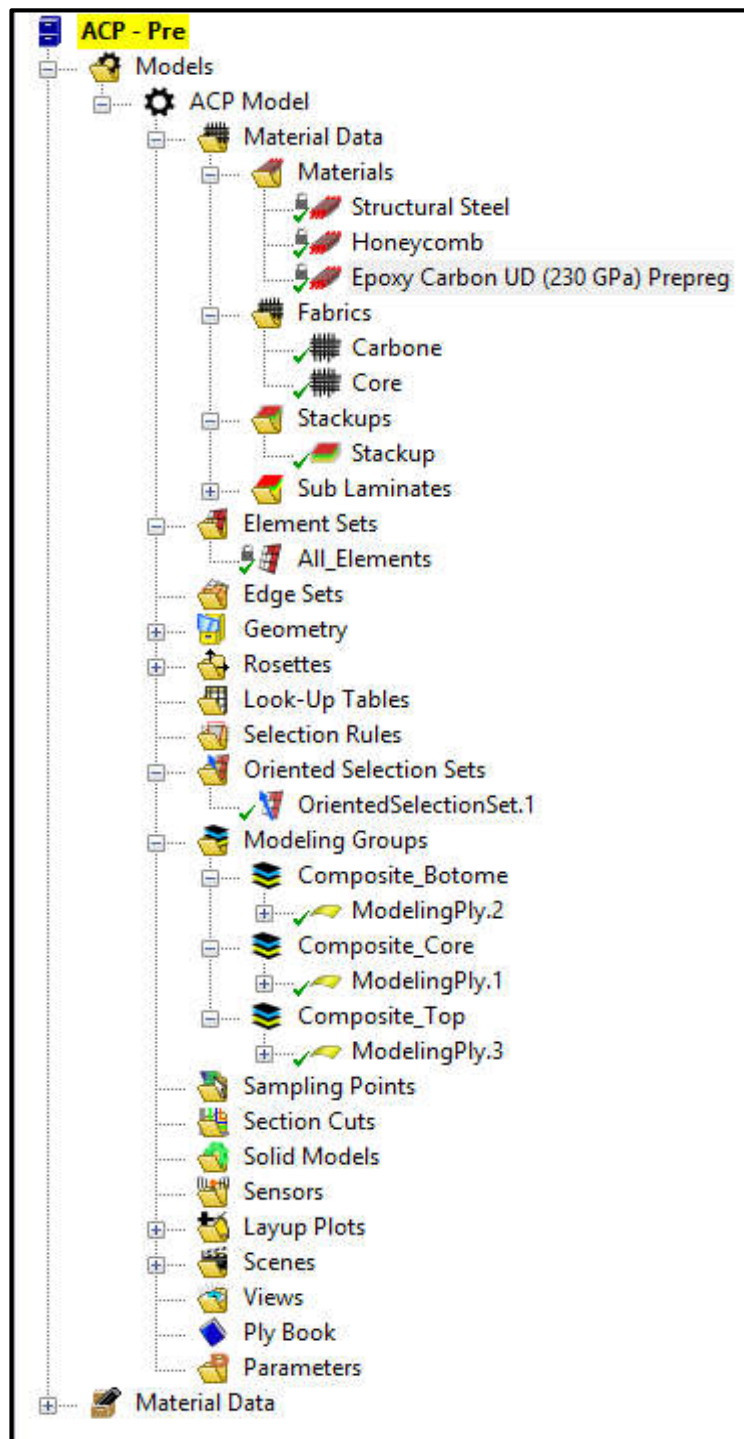


Figure III.15 : Matériaux et composition de la plaque sandwich en ANSYS Workbench ACP. La figure III.16 montre la géométrie de la plaque sandwich simulée

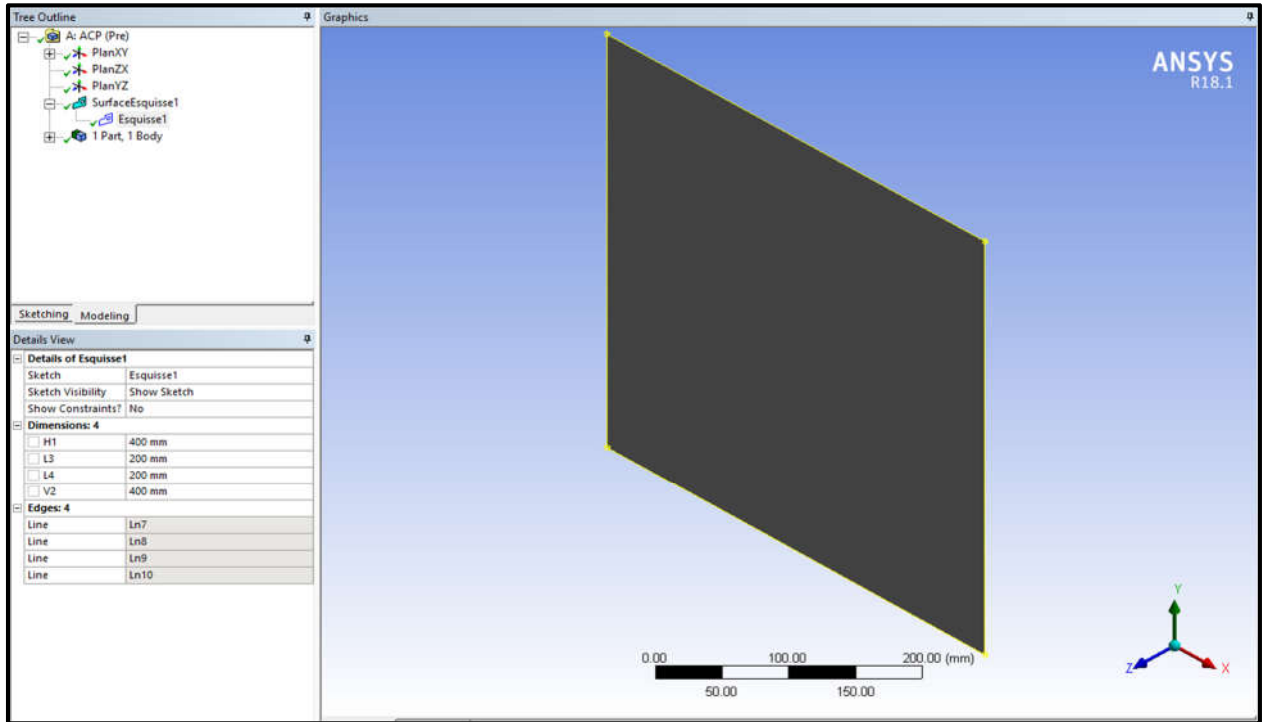


Figure III.16 : Géométrie de la plaque sandwich

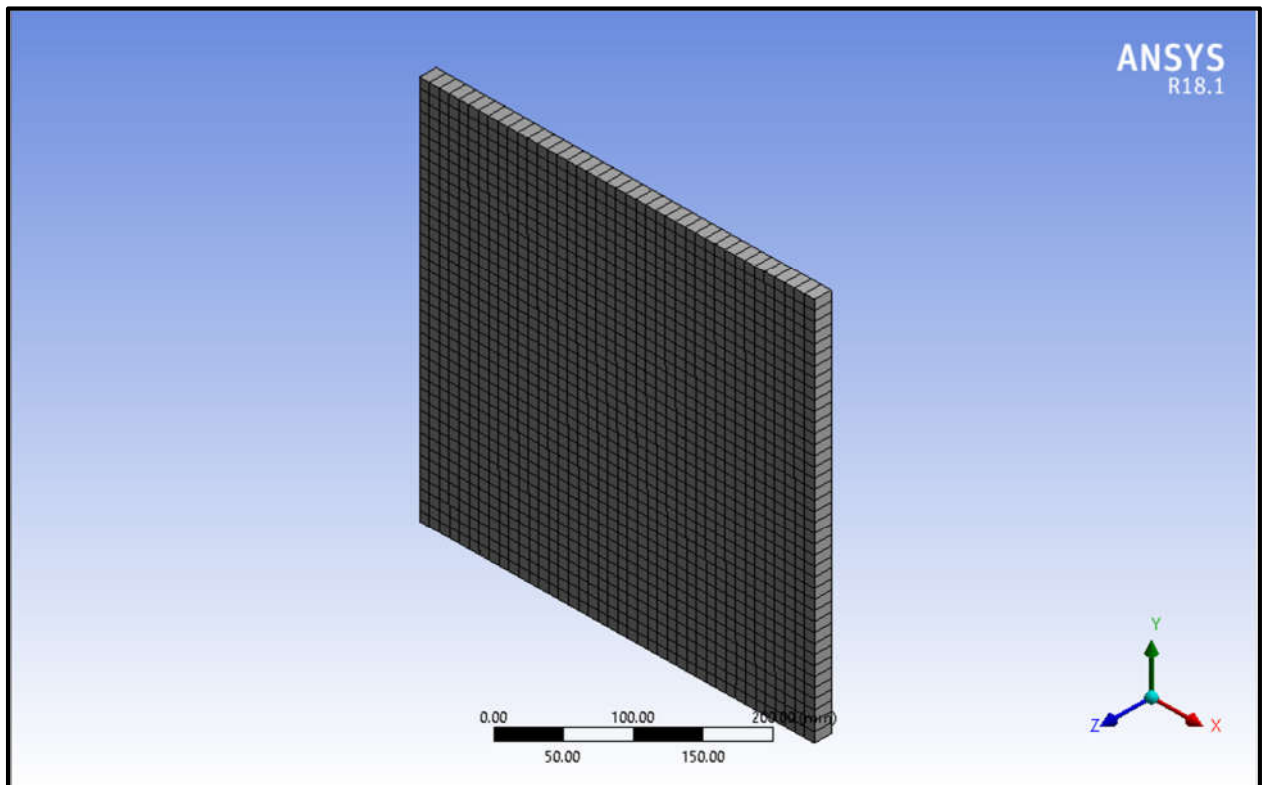


Figure III.17 : Maillage de la plaque sandwich (Taille d'élément 10 mm)

Le maillage de plaque sandwich est lustrée dans la figure III.17.

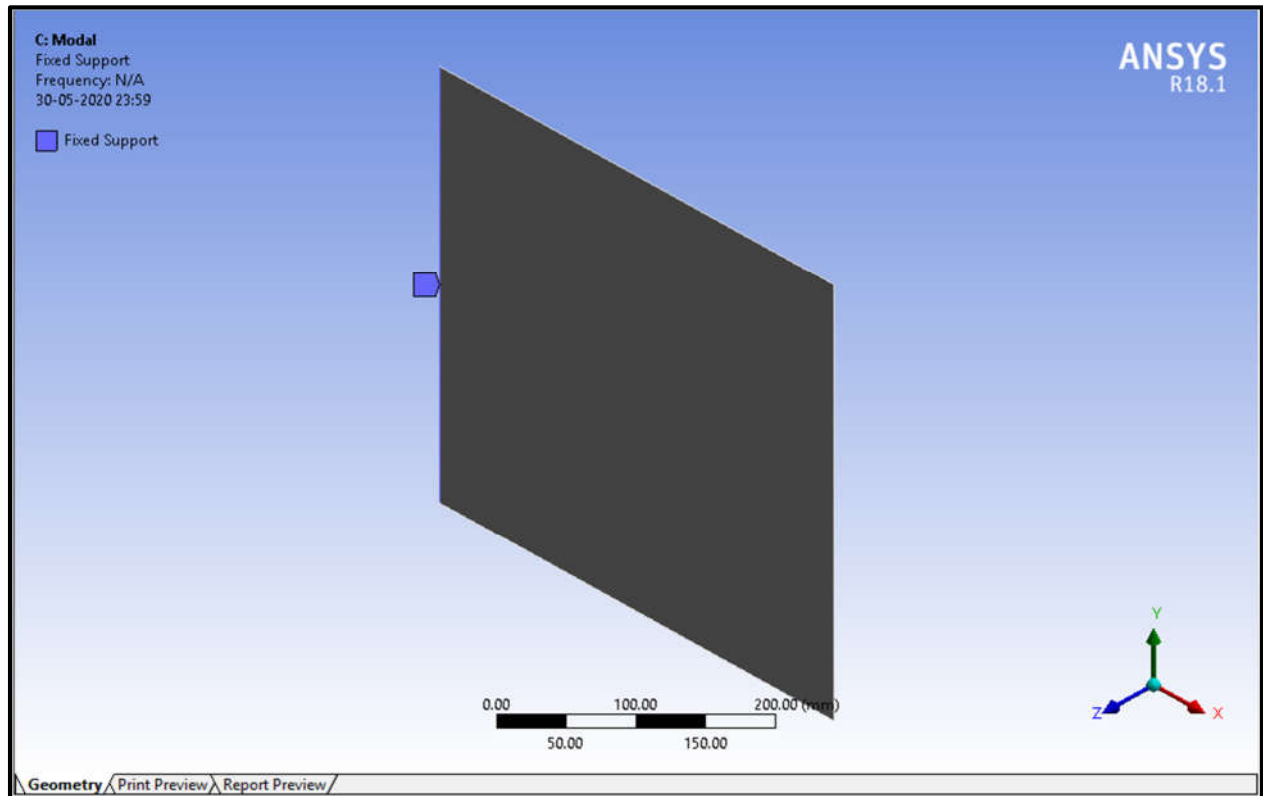


Figure III.18 : Conditions aux limites (ELLL)

Nous choisissons la plaque (ELLL) pour simuler la plaque sandwich (Figure III.19), ANSYS Workbench avec l'intégration d'ACP permet d'obtenir l'analyse modale pour déterminer les formes des modes de vibration libre de la plaque sandwich simulée (Figure III.19) , et au même temps les fréquence naturelle (Tableau III.5).

Les vibrations constituent un problème majeur dans de nombreuses applications industrielles ou de défense.

L'analyse dynamique des structures mécanique et spécialement les structures composites et sandwich est déterminé les modes est les fréquences naturelles pour contrôler et régler les vibrations de ces structures.

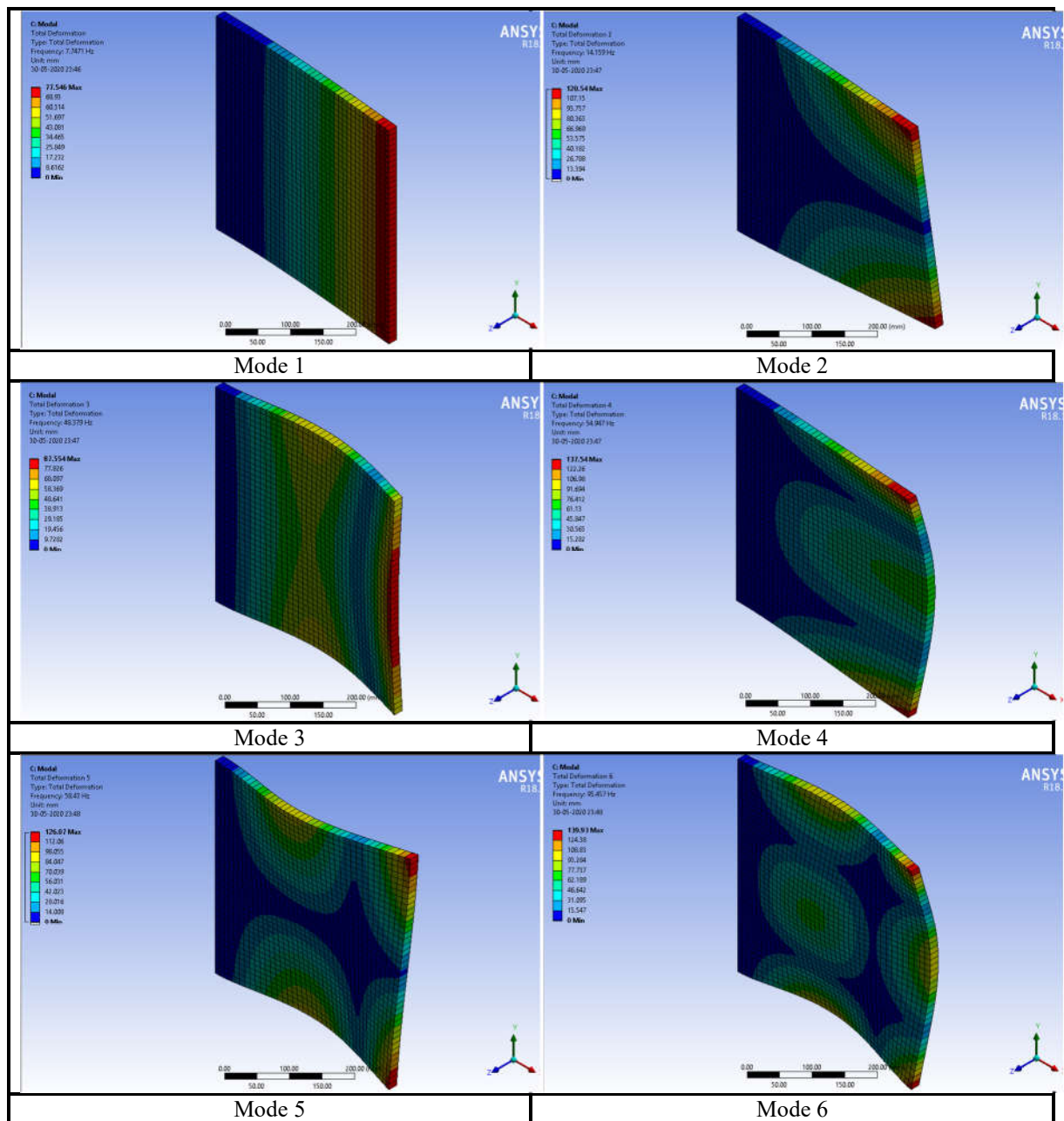


Figure III.19 : Formes des modes de vibration libre de la plaque sandwich simulée

Tableau III.5 Les fréquences naturelles affichent la vibration libre du panneau sandwich simulé et nous donnent les valeurs des six premières fréquences naturelles de la vibration libre du panneau sandwich.

Modes	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
Fréquences naturelles (Hz)	7.7471	14.159	48.379	54.947	58.43	95.457

Tableau III.5 : Fréquences naturelles de vibration libre de la plaque sandwich simulée

Conclusion

L'objectif principal de ce mémoire est d'amener les modes propres ainsi que les fréquences de vibration libre des plaques en matériaux composites stratifiés. Nous avons débuté par une analyse théorique qui expose les matériaux composites stratifiés en termes très généraux et leur comportement mécanique, ainsi qu'une ébauche sur les comportements dynamiques des structures.

La deuxième partie peut être remplacée par un développement en éléments finis. L'analyse a été basée sur un élément rectangulaire à quatre nœuds de type Hermite adapté aux stratifiés.

La dernière partie de ce mémoire a été consacrée à un exemple illustratif et une étude paramétrique pour mettre en évidence les effets des conditions aux limites sur la variation des formes et des fréquences naturelles de vibration libre des plaques.

Résumé

Le travail présenté dans ce mémoire est une analyse numérique des vibrations libres des plaques carrées en matériaux composite stratifié.

L'analyse a été établie sur un élément volumique (SOLID186) à vingt nœuds de type adapté aux stratifié, pour examiner l'influence de certain paramètre, tel que le rapport géométrique, l'orientation des fibres et les conditions aux limites, etc. sur la variation des fréquences propres. Au travers un série d'exemples, les résultats de simulation numérique sont respectées la littérature dans la variation des modes et des valeurs de vibration libre des structures composés.

Mots clés : *plaques, stratifié, matériaux composité, dynamique, modélisation, vibration*

ملخص :

العمل المقدم في هذه الرسالة هو تحليل رقمي للاهتزازات الحرة للصفائح المربعة في المواد المركبة المصفاة. تم إجراء التحليل على عنصر حجمي (SOLID186) مع عشرين نوعاً من النوع تتكيف مع الصفح، لفحص تأثير معلمة معينة، مثل التقرير الهندسي، واتجاه الألياف وظروف الحدود، إلخ. على اختلاف الترددات الطبيعية. من خلال سلسلة من الأمثلة، يتم احترام نتائج المحاكاة العددية في الأدبيات في تنوع أوضاع وقيم الاهتزاز الحر للهياكل المركبة.

الكلمات المفتاحية: الصفائح، المواد المركبة، الديناميكيات، النمذجة، الاهتزاز

Bibliographié :

- [1] **J.M. Berthelot** "Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures, 3ème édition " Paris : Editions Tec&Doc, 1999.
- [2] **R.G. Weatherhead** (1980). FRP Technology. Fibre Reinforced Resin Systems. Applied Science Publishers, Londres.
- [3] **Abderrazak ELGHARBI**, « ANALYSE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES PLAQUES STRATIFIEES RECTANGULAIRES MINCES SYMETRIQUES EN MATERIAUX COMPOSITES», Département de Génie Mécanique, Faculté des Sciences et de la Technologie, Université Mohamed Khider - Biskra, Algérien [3] **J. Weiss et C. Bord** (1983). Les Matériaux Composites (tomes 1 et 2). Éditions de l'Usine, Paris.
- [4] **I.K. Partridge (éd.)** (1989). Advanced Composites. Elsevier Applied Science, Londres et New York.
- [5] article: **Kirchhoff–Love** plate theory, Note: the Einstein summation convention of summing on repeated indices is used below
- [6] **R.D. Mindlin**. "Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates", Journal of applied mechanics, 18 31 -38 (1951).
- [7] **Florence Zara** Modèle mécanique d'une plaque mince, Version du 10 mai 2017 Université Lyon 1, Faculté des Sciences et Technologie
- [8] **MIMOUNE Boubakeur**, «Etude numérique du comportement dynamique des plaques trouées en matériaux isotrope», DEPARTEMENT de Génie Mécanique, FACULTE de Technologie, UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA, ALGERIEN
- [9] : Edward L. Wilson "Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures isotropic materials" January 2002
- [10] **Les éléments finis** : la théorie à la pratique **André Fortin** Professeur titulaire, Département de mathématiques et de statistique Université Laval et **André Garon** Professeur titulaire Département de génie mécanique École Polytechnique de Montréal 1997-2017
- [11] **Franck Jędrzejewski** " Introduction aux méthodes numériques" Deuxième édition SpringerVerlag France, Paris 2005.

- [12] **O.C.Zienkiewicz & R.L.Taylor** "The Finite Element Method Fifth edition"
Butterworth Heinemann 2000
Vol. 1: The Basis;
Vol. 2: Solid Mechanics;
Vol. 3: Fluid Dynamics.
- [13] **J.M. Berthelot** "Matériaux composites : Mécanique des Matériaux et Structures
Composites, 3ème édition " France : Editions Tec&Doc, 2013
- [14] **J.F. Imbert** "Analyse des structures par éléments finis " cepadues-editions,
Décembre 1984.
- [15] **Franck Jedrzejewski**" Introduction aux méthodes numériques Deuxième
édition"Springer Verlag France, Paris 2005.
- [17] **O.C.Zienkiewicz & R.L.Taylor** "The Finite Element Method Sixth edition"
Butterworth Heinemann 2005
Vol. 1: The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics;
Vol. 2: The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals;
Vol. 3: The Finite Element Method for fluid Dynamics.
- [18] **F.François & J.Jaroslav** "Analyse des structures et milieux continus 'méthode des
éléments finis"Ecole polytechnique fédérale de Lausanne 2001.
- [19] **T. Kant, K. Swaminathan** "Analytical solutions for free vibration of laminated
composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory. Composite
Structures, 53 (2001)73 85.92
- [20] **H. Nguyen-Van, N. Mai-Duy, T. Tran-Cong** "Free vibration analysis of laminated
plate/shell structures based on FSDT with a stabilized nodal-integrated quadrilateral
element" Journal of Sound and Vibration 313 (2008) 205–223
- [21] **M. Bachene, S. Rechak** "Effets du rapport géométrique et de l'orientation des fibres
sur les fréquences propres des plaques composite stratifiées"5èmes Journées de
Mécanique de l'EMP, 2006
- [22] **J. Wang, K.M. Liew, M.J. Tan, S. Rajendran** "Analysis of rectangular laminated
composite plates via FSDT meshless method" Journal of Mechanical Sciences 44 (2002)
1275 1293
- [23] **W.Q. Chen, C.F. Lue** "3D free vibration analysis of cross-ply laminated plates
with one pair of opposite edges simply supported"Composite Structures69 (2005)77–87