

اللجنة العلمية

قسم الرياضيات

المسيلة في: 08 - 06 - 2023

رقم: 98/ق.ر/2023

اعتماد مطبوعة دروس

وافق رئيس اللجنة العلمية على اعتماد مطبوعة الدروس الخاصة بالأستاذ
سعد عبد الكبير المعنونة بـ:

Algèbre 1

كمراجع للدروس لطلبة السنة الأولى رياضيات وإعلام آلي.
وهذا بعد الاطلاع على التقرير الإيجابي للأستاذ الخبير المكلف بالمطبوعة.

رئيس اللجنة العلمية



رئيس اللجنة العلمية
لقسم الرياضيات
مرزوقى عبد الكريم



سلمت هذه الشهادة للمعني لاستعمالها في حدود ما يسمح به القانون.



ALGÈBRE 1

Cours destiné aux étudiants de
1^{re} année licence Mathématiques
et de l'informatique

Préparé par :

Année universitaire : 2022/2023

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



N° d'ordre :.....

Support de cours Algèbre 1.

Cours destiné aux étudiants de 1^{re} année licence Mathématique et de
l'informatique.

Préparé par :

Année universitaire : 2022/2023

Table des matières

Introduction générale	6
1 Notions de logique	9
1.1 Logique	9
1.2 Les opérateurs logiques	10
1.2.1 La conjonction $\langle et \rangle$	10
1.2.2 La disjonction $\langle ou \rangle$	11
1.2.3 L'implication $\langle \Rightarrow \rangle$	11
1.2.4 L'équivalence $\langle \Leftrightarrow \rangle$	12
1.3 Les quantificateurs	13
1.3.1 Le quantificateur \forall	13
1.3.2 Le quantificateur \exists	14
1.3.3 La négation des quantificateurs	14
1.4 Les méthodes du raisonnement mathématique	14
1.4.1 Méthode de raisonnement direct	15
1.4.2 Méthode de raisonnement cas par cas	15
1.4.3 Méthode de raisonnement par contraposée	16
1.4.4 Méthode de raisonnement par l'absurde	17
1.4.5 Méthode de raisonnement par contre-exemple	18
1.4.6 Méthode de raisonnement par récurrence	18

2 Ensembles et applications	21
2.1 Ensembles	21
2.1.1 Inclusion	21
2.1.2 Union deux ensembles	24
2.1.3 Intersection deux ensembles	24
2.2 Propriétés algébriques des ensembles	24
2.2.1 Produit cartésien de deux ensembles	26
2.3 Les applications	26
2.4 Application	26
2.5 Image directe et image réciproque	29
2.5.1 Restriction et prolongement d'une application	31
2.5.2 Composition d'applications	32
2.6 Injection, surjection, bijection	33
2.6.1 Injection	33
2.6.2 Surjection	34
2.6.3 Bijection	36
3 Relations binaires sur un ensemble	39
3.1 Généralités sur les relations binaires	39
3.1.1 Propriétés des relations binaires dans un ensemble	39
3.1.2 Relation d'équivalence	40
3.1.3 Relation d'ordre	41
4 Structures algébriques.	45
4.1 Lois De Composition Internes	45
4.1.1 Définition et exemples	45
4.2 Groupes	47
4.2.1 Sous groupe	47
4.2.2 Homomorphisme de groupes	48
4.2.3 Image et noyau d'un homomorphisme	49
4.3 Anneaux	50
4.3.1 Sous-anneau	50
4.3.2 Homomorphisme d'anneaux	51
4.3.3 Règles de calculs dans un anneau	51
4.4 Corps	52
4.4.1 Sous-corps	53

Table des figures

2.1	$A \subset E$	22
2.2	C_{EA}	23
2.3	L'union $A \cup B$, l'intersection $A \cap B$.	24
2.4	Lois de Morgan	25
2.5	L'application $f : E \rightarrow F$	27
2.6	Présentation le point $(x, f(x))$ par l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	27
2.7	L'application f et f^{-1}	29
2.8	Image directe de A par l'application f	29
2.9	Image réciproque de B par l'application f^{-1}	30
2.10	la restriction de f et le prolongement de g	32
2.11	Application injective	34
2.12	Application surjective	35
4.1	Le triangle de Pascal	52

Liste des tableaux

1.1	Table de vérité de $P \wedge Q$	10
1.2	Table de vérité de $P \vee Q$	11
1.3	Table de vérité de $P \Rightarrow Q$	11
1.4	Table de vérité de $P \Leftrightarrow Q$	12
1.5	Table de vérité pour propriété n°5.	13
1.6	Table de vérité pour propriété n°8.	13

Introduction générale

Dans ces leçons, nous résumons et donnons des concepts pour plusieurs chapitres d'Algèbre 1, qui s'adresse aux étudiants de première année de mathématiques et d'informatique. Dans le premier chapitre : **la logique mathématique** : est une discipline des mathématiques introduite à la fin du 19^e siècle, qui vise à étudier les mathématiques en tant que langage, voir : [9], [13].

À travers l'étude de la logique mathématique, les éléments de base sont des formules qui représentent des énoncés mathématiques, des preuves formelles qui représentent des inférences mathématiques et une sémantique qui a une signification mathématique. Ici, nous étudions la logique mathématique à l'aide du langage. Par exemple, toutes les formules mathématiques sont transformées en une phrase linguistique qui peut être vraie ou fausse, voir [10], [8]

Par conséquent, le vrai et le faux de toute formule de langage mathématique est ce autour duquel tourne le concept de logique mathématique.

Dans le deuxième chapitre, nous donnons des notions des ensembles, par exemple, l'ensemble des nombres naturels \mathbb{N} , entiers \mathbb{Z} , réels \mathbb{R} ...etc. Voir [2], [7], ainsi que la relation d'intersection, l'union entre deux ensembles, le complémentaire d'un ensemble dans un ensemble ...etc, voir [2], [1,7]. D'autre part, nous évoquons des concepts sur les applications en général à travers l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée, et nous mentionnons également quand l'application est surjective, injective et bijective, en donnant plusieurs exemples.

Dans le troisième chapitre, nous rappelons une relation binaire sur un ensemble E est une proposition qui lie entre eux certains éléments de cet ensemble. Plus proprement, une relation binaire \mathcal{R} sur un ensemble E , voir : [7], [1,8], [13], [11,12].

Dans le quatrième chapitre, nous donnons des concepts sur la structure algébrique dans mathématiques, en particulier des systèmes de nombres. Les structures algébriques relèvent donc d'une vision axiomatique des mathématiques. Voir : [3], [5,6].

Dans ce chapitre, nous mentionnons le concept et les caractéristiques

de la structure algébrique des termes : "**Groupe**", "**Anneau**" et "**Corps**", et nous en donnons des exemples [3], [4,6].

1.1 Logique

Définition 1.1. Une **assertion** est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.

Exemple 1.1. ☞ $2+4=6$.

☞ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x^2 \leq 0$.

☞ Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| = \sqrt{2}$.

Définition 1.2 (Une proposition). Une proposition est une expression mathématique noté : $\{P, Q, F, \dots\}$ à laquelle on peut attribuer la valeur de vérité vrai ou faux.

Exemple 1.2. ➤ Tout nombre premier est pair, cette proposition est fausse.

➤ 8 est supérieure à 5, cette proposition est vraie.

➤ $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel, cette proposition est vraie.

Notation 1.1. – On note que la proposition P est vraie par $\langle 1 \rangle$.

– On note que la proposition P est fausse par $\langle 0 \rangle$.

Définition 1.3 (La négation). Soit P une proposition, la négation de P est une proposition désignant le contraire qu'on note \overline{P} , Voici sa table de vérité.

P	\overline{P}
1	0
0	1

Maintenant Si P est une assertion et Q est une autre assertion, nous allons définir de nouvelles assertions construites à partir de P et de Q .

1.2 Les opérateurs logiques

Soient P, Q sont deux propositions

1.2.1 La conjonction $\langle et \rangle$

Définition 1.4. La conjonction est l'opérateur logique : **et** noté $\langle \wedge \rangle$, la proposition $(P \text{ et } Q)$ ou $(P \wedge Q)$ est la conjonction des deux propositions P, Q .

- ☞ L'assertion $P \wedge Q$ est vraie si P est vraie et Q est vraie.
- ☞ L'assertion $P \wedge Q$ est fausse sinon.

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	$P \wedge Q$
1	0	0
0	1	0
1	1	1
0	0	0

TABLE 1.1 – Table de vérité de $P \wedge Q$

Exemple 1.3. Nous présentons deux cas :

- ☞ 6 est un nombre pair et 3 est un nombre impair, cette proposition est vraie.
- ☞ $\sqrt{3} < 1$ et $\sqrt{2} \geq 2$, cette proposition est fausse.

1.2.2 La disjonction $\langle \vee \rangle$

Définition 1.5. La disjonction est l'opérateur logique : **ou** noté $\langle \vee \rangle$, la proposition $(P \vee Q)$ i.e : $(P \vee Q)$ est la disjonction des deux propositions P, Q .

- ☞ L'assertion $P \vee Q$ est fausse si P est fausse et Q est fausse.
- ☞ L'assertion $P \vee Q$ est vraie sinon.

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	$P \vee Q$
1	0	1
0	1	1
1	1	1
0	0	0

TABLE 1.2 – Table de vérité de $P \vee Q$

Exemple 1.4. Nous présentons deux cas :

- ☞ 2 est un nombre pair ou 3 est un nombre premier, cette proposition est vraie.
- ☞ $3 \leq 1$ ou $2 \geq 4$, cette proposition est fausse.

1.2.3 L'implication $\langle \Rightarrow \rangle$

Définition 1.6. L'implication de deux propositions P, Q est notée : $P \Rightarrow Q$ on dit P **implique** Q ou bien si P alors Q .

Donc,

- ☞ $P \Rightarrow Q$ est fausse si P est vraie et Q est fausse,
- ☞ $P \Rightarrow Q$ est vraie dans les autres cas.

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	0	0
0	1	1
1	1	1
0	0	1

TABLE 1.3 – Table de vérité de $P \Rightarrow Q$

Exemple 1.5. Nous présentons deux cas :

☞ $0 \leq x \leq 25 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 5$ cette proposition est vraie.

☞ $\sin(\theta) = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$, cette proposition est fausse. Car, pour $\theta = \frac{5\pi}{2}$, $\sin(\theta) = 1$.

1.2.4 L'équivalence $\langle \Leftrightarrow \rangle$

Définition 1.7. L'équivalence de deux propositions P, Q est notée $P \Leftrightarrow Q$, on peut aussi écrire $(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)$.

On dit que :

☞ $P \Rightarrow Q$ est vraie, si P et Q ont la même la nature de la valeur de vérité.

☞ $P \Rightarrow Q$ est fausse, si pour les autres cas.

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	0	0
0	1	0
1	1	1
0	0	1

TABLE 1.4 – Table de vérité de $P \Leftrightarrow Q$

Exemple 1.6. Nous présentons deux cas :

☞ $x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$, cette proposition est vraie.

☞ $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$, cette proposition est vraie.

Propriétés 1.1. Soient P, Q et R sont trois propositions. Nous avons les équivalences (vraies) suivantes :

1. $P \Leftrightarrow \overline{\overline{P}}$
2. $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$
3. $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$
4. $\overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$ Lois de Morgan.
5. $\overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$ Lois de Morgan.

6. $(P \wedge (Q \vee R)) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

7. $(P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

8. $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$

Démonstration. Pour démontrer ces propriétés, nous utilisons la table de vérité.

Par exemple :

1. la propriété n°5.

P	Q	$P \vee Q$	$\overline{(P \vee Q)}$	\overline{P}	\overline{Q}	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0

TABLE 1.5 – Table de vérité pour propriété n°5.

2. la propriété n°8.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	\overline{P}	\overline{Q}	$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1

TABLE 1.6 – Table de vérité pour propriété n°8.

□

1.3 Les quantificateurs

1.3.1 Le quantificateur \forall

Une assertion P peut dépendre d'un paramètre x , par exemple $e^x > 1$, l'assertion $P(x)$ est vraie ou fausse selon la valeur de x .

Donc l'assertion,

$$\forall x \in E, P(x).$$

On lit l'assertion précédente : **Quel que soit x appartenant à E , $P(x)$.**

Exemple 1.7. Nous pouvons donner plusieurs exemples :

- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$. Est une assertion vraie.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+, |x| = x$. Est une assertion vraie.
- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1$. Est une assertion fausse.

1.3.2 Le quantificateur \exists

Une assertion P peut dépendre d'un paramètre x , alors l'assertion $P(x)$ est vraie lorsque l'on peut trouver au moins un x_0 de E pour lequel $P(x)$ est vraie.

Nous pouvons écrire :

$$\exists x \in E, P(x).$$

On lit l'assertion précédente : **Il existe x appartenant à E , $P(x)$.**

Exemple 1.8. Nous pouvons donner plusieurs exemples :

- ✓ $\exists x \in \mathbb{R}, P(x) = x^2 - 2x = 0$. Est une assertion vraie, car il existe deux valeurs $x_0 = 0$ et $x_1 = 2$, tels que $P(x_i) = 0, i = 0, 1$.
- ✓ $\exists n \in \mathbb{N}, n(n+1)$ est pair. Est une assertion vraie.
- ✓ $\exists x \in \mathbb{R}, |x| \leq 0$. Est une assertion fausse.

1.3.3 La négation des quantificateurs

Nous pouvons résumer cela dans le tableau suivant :

L'assertion P	La négation de l'assertion P .i.e \overline{P}
$\forall x \in E, P(x)$	$\exists x \in E, \overline{P}(x)$
$\exists x \in E, P(x)$	$\forall x \in E, \overline{P}(x)$

1.4 Les méthodes du raisonnement mathématique

Dans cette section, nous mentionnons plusieurs méthodes du raisonnement, notamment :

- ☞ Méthode de raisonnement direct

- ☞ Méthode de raisonnement cas par cas ou bien (disjonction des cas)
- ☞ Méthode de raisonnement par contraposée
- ☞ Méthode de raisonnement par l'absurde
- ☞ Méthode de raisonnement par contre-exemple
- ☞ Méthode de raisonnement par récurrence

1.4.1 Méthode de raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion $(P \Rightarrow Q)$. On suppose que P est vraie, et on veut montrer qu'alors Q est vraie.

Exemple 1.9. Montrer que :

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n : \text{pair}, \text{ et } m : \text{impair} \Rightarrow n \times m : \text{pair}.$$

Démonstration. On a :

n nombre naturel pair, alors $\exists k_1 \in \mathbb{N}, n = 2k_1$

m nombre naturel impair, alors $\exists k_2 \in \mathbb{N}, m = 2k_2 + 1$

Donc,

$$n \times m = 2k_1 \times (2k_2 + 1) = 2(2k_1 + k_2) = 2k_3, \quad k_3 \in \mathbb{N}, k_3 = 2k_1 + k_2$$

alors, $n \times m$ est un nombre pair. □

1.4.2 Méthode de raisonnement cas par cas

Si l'on souhaite vérifier une assertion $P(x)$ pour tous les x dans un ensemble E , on montre l'assertion pour les x dans une partie A de E , puis pour les x dans une partie B de E . Sachant que A et B sont une partition de E . C'est la méthode de disjonction des cas ou du cas par cas.

$$\forall x \in E, P(x) \text{ est vraie} \equiv \begin{cases} P(x), & \text{c'est vraie, } \forall x \in A \\ \wedge \\ P(x), & \text{c'est vraie, } \forall x \in B \end{cases} \quad (1.1)$$

Exemple 1.10. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$$

Démonstration. Pour prouver que $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$, il faut prouver que :

$$\begin{cases} \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}, & \text{si : } n \text{ pair,} \\ & \wedge \\ \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}, & \text{si : } n \text{ impair.} \end{cases} \quad (1.2)$$

1. Pour, n pair, alors $\exists k_1 \in \mathbb{N}$, $n = 2k_1$. Donc,

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k_1(2k_1+1)}{2} = k_1(2k_1+1) \in \mathbb{N}.$$

Car, le produit de deux nombres naturels k_1 et $2k_1+1$ est un nombre naturel. Donc le nombre $\frac{n(n+1)}{2}$ est un nombre naturel pour n est un nombre pair.

2. Pour, n impair, alors $\exists k_2 \in \mathbb{N}$, $n = 2k_2+1$. Donc,

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2k_2+1)(2k_2+2)}{2} = (2k_2+1)(k_2+1) \in \mathbb{N}.$$

Car, le produit de deux nombres naturels $(2k_2+1)$ et (k_2+1) est un nombre naturel. Donc le nombre $\frac{n(n+1)}{2}$ est un nombre naturel pour n est un nombre pair.

□

1.4.3 Méthode de raisonnement par contraposée

Le raisonnement par contra-position est basé sur l'équivalence suivante

$$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$$

Donc si l'on souhaite montrer la proposition $(P \Rightarrow Q)$, on montre en fait que si \overline{Q} est vraie alors \overline{P} est vraie.

Exemple 1.11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Démonstration. Pour démontrer que n^2 est pair $\Rightarrow n$ est pair, alors En utilisons la méthode de raisonnement contraposée,
Donc,

$$\overline{n \text{ est pair}} \Rightarrow \overline{n^2 \text{ est pair}}$$

Autrement dit,

$$n \text{ est impair} \Rightarrow n^2 \text{ est impair}$$

supposons que n est impair. Donc, $\exists k_1 \in \mathbb{N}$, tel que $n = 2k_1 + 1$. Alors

$$n^2 = (2k_1 + 1)^2 = 4k_1^2 + 4k_1 + 1 = 2(2k_1^2 + 2k_1) + 1 = 2k_2 + 1, \text{ tq } k_2 = (2k_1^2 + 2k_1) \in \mathbb{N}$$

Et donc n^2 est impair.

Nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par la démonstration de contra-position ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair. \square

1.4.4 Méthode de raisonnement par l'absurde

Pour montrer que l'assertion où bien le proposition R tels que $R = P \Rightarrow Q$ est une proposition vraie.

On suppose que \bar{R} , (i.e : $P \wedge \bar{Q}$) est vraie et on tombe sur une contradiction, et d'autre part pour démontrer que le proposition P est vraie, on suppose facilement que \bar{P} est vraie et on tombe sur une contradiction.

Exemple 1.12. Soient $a, b \geq 0$. Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

Démonstration. Par l'absurde en supposant que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ et $a \neq b$.

On a, comme $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$, alors $a(1+a) = b(1+b)$, donc $a + a^2 = b + b^2$.

On obtient

$$a^2 - b^2 = b - a = -(a - b) \Rightarrow (a - b)(a + b) = -(a - b)$$

d'où,

$$a + b = -1.$$

On tombe sur une contradiction car, $a, b \geq 0$.

Enfin nous concluons : si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

\square

1.4.5 Méthode de raisonnement par contre-exemple

Le but de cette méthode est de trouver la valeur x pour cette proposition $P(x)$ qui la rend pas toujours vraie.

Exemple 1.13. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = \ln(1+x) \neq 0$.

Démonstration. Dans cet exemple, la proposition est fautive. Car lorsque l'on prend le contre-exemple suivant : pour $x_0 = 0 \in \mathbb{R}_+$.
On trouve que $f(x) = 0$. □

1.4.6 Méthode de raisonnement par récurrence

Pour montrer que $P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P(n)$ est vraie on suit les étapes suivantes :

1. On montre que $P(n_0)$ est vraie, (n_0 : valeur initiale).
2. On suppose que $P(n)$ est vraie à l'ordre n .
3. On montre que $P(n+1)$ est vraie à l'ordre $n+1$, alors P est vraie pour tous $n \geq n_0$.

Exemple 1.14. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > n$.

Démonstration. 1. Pour $n_0 = 0$, on obtient $1 > 0$, donc la proposition $P(n)$ est vraie pour la valeur initiale $n_0 = 0$.

2. Supposons que $P(n)$ soit vraie. (i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > n$)
3. Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie. (i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{n+1} > n+1$.
(?))

$$2^{n+1} = 2^n + 2^n > n + 2^n, \text{ car par } P(n) \text{ nous savons } 2^n > n. \\ > n + 1, \text{ car } : 2^n \geq 1.$$

□

Série d'exercices N°01.
Algèbre 1

Exercice 01 :

Voici les propositions suivantes, sont-elles **vraies** ou **fausses** ?. Justifiez votre réponse.

1. $2 + 5 = 7$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n + 1 = 2$.
3. Il existe $n \in \mathbb{N}$, $n + 3 = 3$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, n est pair.
5. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$.
6. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z = \bar{z}$, si : $z \in \mathbb{R}$.
7. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et, $x, y \in \mathbb{R}$, tq : $z = x + iy$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exercice 02 :

Exprimer les assertions suivantes à l'aide des quantificateurs et répondre aux questions :

- a) Le produit de deux nombres pairs est-il pair ?
- b) Le produit de deux nombres impairs est-il impair ?
- c) Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est-il pair ou impair ?
- d) Un nombre entier est pair si et seulement si son carré est pair ? (*).

Exercice 03 :

Soient les propositions suivantes :

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}, \alpha + \beta > 0$
2. $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}, \alpha + \beta > 0$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 \geq 0$
4. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, |\alpha| \geq 0$
5. $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}, \beta^2 > \alpha$ (*).

Ces propositions sont elles vraies ou fausses ? Donner leur négation.

Exercice 04 :

Dans quels cas les propositions suivantes sont elles vraies ?

- a) $\overline{P} \vee P$
- b) $(P \Rightarrow Q) \wedge (\overline{P} \Rightarrow Q)$
- c) $\overline{P \wedge (\overline{Q} \wedge R)} \Leftrightarrow Q$
- d) $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$
- e) $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q})$
- f) $((P \vee Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$ (*).

Exercice 05 :

1. En utilisant le raisonnement par l'absurde démontrer que

- a) $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.
- b) Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier naturel.

2. Montrer par récurrence

- a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- c) $\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1+na$.

Exercice 06 : (À domicile)

On considère les propositions suivantes :

- ☞ $\mathcal{P}(n) : 4^n - 1$ est divisible par 3.
- ☞ $\mathcal{Q}(n) : 4^n + 1$ est divisible par 3.

1. Montrer que les propositions $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{Q}(n)$ sont héréditaires.
2. Montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Que peut-on dire pour $\mathcal{Q}(n)$?

Exercice 07 : (À domicile)

On rappelle que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

1. Démontrer que si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a + b\sqrt{2} = 0$, alors $a = b = 0$.
2. En déduire que si m, n, p et q sont des entiers relatifs, alors

$$m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2} \Leftrightarrow (m = p \text{ et } n = q).$$

Ensembles et applications

2.1 Ensembles

Définition 2.1. On appelle **ensemble** une collection des objets. Ces objets sont appelés les éléments de l'ensemble.

Exemple 2.1. 1. \mathbb{N} = l'ensemble de tous les nombres entiers positifs.

2. \mathbb{Z} = l'ensemble de tous les nombres entiers relatifs.

3. \mathbb{Q} = l'ensemble des nombres rationnels $\frac{n}{m}$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}^*$.

4. \mathbb{R} = l'ensemble des nombres réels.

5. \mathbb{R}_+ = l'ensemble des nombres réels positifs.

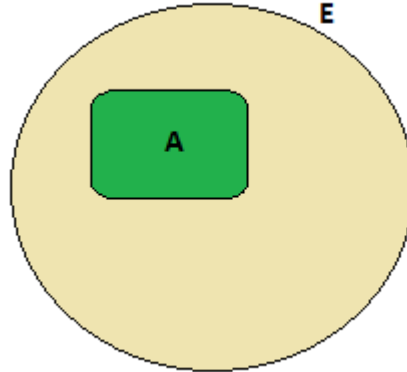
6. \mathbb{R}^* = l'ensemble des nombres réels non nuls.

2.1.1 Inclusion

Soit A est une ensemble dans E . On dit que A inclus dans E si tout élément de A est aussi un élément de E . Autrement dit :

$$A \subset E \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in E.$$

On dit alors que A est un sous-ensemble de E ou une partie de E .(Voir la figure suivante)

FIGURE 2.1 – $A \subset E$

2.1.1.1 Égalité deux ensembles

Soient A, B sont deux ensembles de E .

Définition 2.2. $A = B$ si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$. Autrement dit :

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A.$$

2.1.1.2 Ensemble des parties

Définition 2.3. Soit E un ensemble. L'ensemble des parties de E est l'ensemble, généralement noté $\mathcal{P}(E)$, dont les éléments sont les sous-ensembles de E :

$$A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E.$$

Propriétés 2.1. De la définition [2.3](#), on peut déduire les propriétés suivantes :

→ $\mathcal{P}(E)$ n'est jamais vide car l'ensemble vide \emptyset et E sont toujours des parties de E :

$$\emptyset \in \mathcal{P}(E), \text{ avec } E \in \mathcal{P}(E)$$

➤ Si E est un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .
Alors,

$$\text{Card}(E) = n, \text{Card}\mathcal{P}(E) = 2^n.$$

tels que :

- n : est le nombre d'éléments de l'ensemble E .
- 2^n : est le nombre de sous-ensembles dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$.

➤ Si $\text{Card}(E) = 0, \Leftrightarrow E = \emptyset$

Exemple 2.2. Si $A = \{1, 2, 3\}$, les parties de A sont :

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

On note que :

- ☞ $\text{Card}(A) = 3.$
- ☞ $\text{Card}(\mathcal{P}(A)) = 2^3 = 8.$

2.1.1.3 Complémentaire d'un ensemble

Définition 2.4. Le complémentaire de l'ensemble A noté $C_E A$ est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à l'ensemble A . Alors,

$$\text{Si} : A \subset E \Leftrightarrow C_E A = \{x \in E \wedge x \notin A\}$$

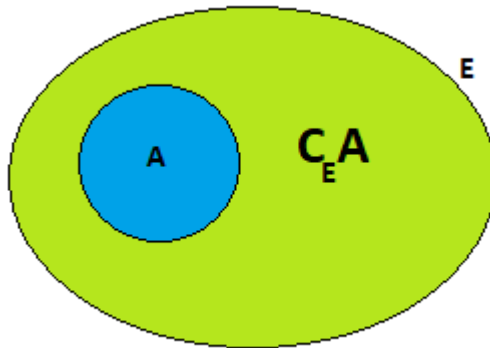


FIGURE 2.2 – $C_E A$

2.1.2 Union deux ensembles

Soient A, B sont deux ensembles dans E

Définition 2.5. L'union de deux ensembles A et B est l'ensemble noté $A \cup B$ qui contient tous les éléments qui appartiennent à A ou appartiennent à B . On la dit A union B .

La formule suivante montre l'union des ensembles A et B .

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$$

2.1.3 Intersection deux ensembles

Définition 2.6. L'intersection de deux ensembles A et B , se note $A \cap B$ et désigne l'ensemble des éléments qui appartiennent (à la fois) à A et à B . C'est l'ensemble des éléments communs à A et à B . On lit (A inter B) et pour tout x , on écrit :

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$$

La figure suivante [2.3](#) montre l'union et l'intersection.

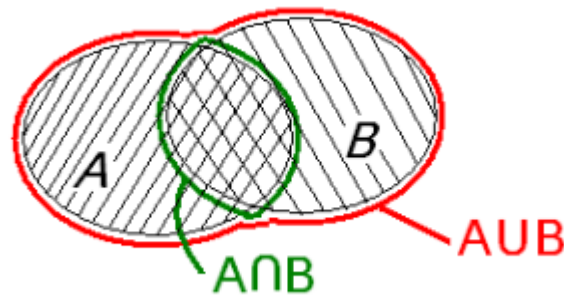


FIGURE 2.3 – L'union $A \cup B$, l'intersection $A \cap B$.

2.2 Propriétés algébriques des ensembles

Soient A, B, C des parties d'un ensemble E .

☞ L'union (*resp.* L'intersection) est **commutative**, c'est-à-dire :

$$A \cup B = B \cup A. (\text{resp.}) A \cap B = B \cap A.$$

☞ L'union (*resp.* L'intersection) est **associative**, c'est-à-dire :

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C). (\text{resp.}) (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

☞ L'union est **distributive** sur l'intersection, c'est-à-dire :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

☞ L'intersection est **distributive** sur l'union, c'est-à-dire :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

☞ $A \cup \emptyset = A, A \cup A = A, A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

☞ $A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap A = A, A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

☞ $C_E(C_E A) = A$ et donc $A \subset B \Leftrightarrow C_E B \subset C_E A$.

☞ Lois de Morgan

- $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$.

- $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$.

Voici les dessins pour les deux dernières propriétés .

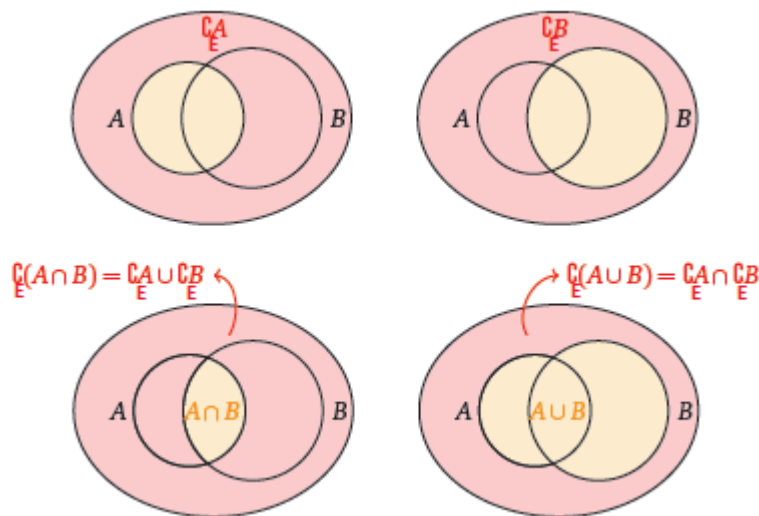


FIGURE 2.4 – Lois de Morgan

2.2.1 Produit cartésien de deux ensembles

Soient A et B deux ensembles de E .

Définition 2.7. Le **produit cartésien** de l'ensemble A par l'ensemble B est l'ensemble noté $A \times B$ de tous les couples (x, y) dont l'origine est un élément de l'ensemble A et l'extrémité est un élément de l'ensemble B . Alors,

$$A \times B = \{(x, y), \text{ tel que } : x \in A \wedge y \in B\}$$

Exemple 2.3. Soit les ensembles $A = \{m, n, e\}$ et $B = \{0, 1, 3\}$.

Alors : $A \times B = \{(m, 0), (m, 1), (m, 3), (n, 0), (n, 1), (n, 3), (e, 0), (e, 1), (e, 3)\}$.

Remarque 2.1. Nous concluons quelques remarques sur le produit cartésien, notamment :

- ☞ Le produit cartésien n'est pas commutatif.
- ☞ Le produit cartésien $A \times A$ est généralement noté A_2 et est appelé le carré cartésien de A .
- ☞ Si l'ensemble A comprend m éléments et l'ensemble B comprend n éléments, alors le produit cartésien $A \times B$ comprend $m \times n$ éléments.

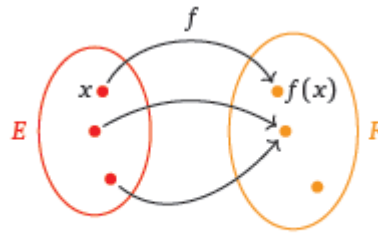
2.3 Les applications

2.4 Application

Définition 2.8. Soit E et F deux ensembles. Une application ou fonction de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F . On écrit :

$$f : E \longrightarrow F, \text{ ou } E \xrightarrow{f} F.$$

- ☞ Pour un élément $x \in E$ l'élément de F qui lui est associé est noté $f(x)$, et on écrit $x \mapsto f(x)$.
- ☞ L'élément $f(x)$ est appelé l'**image** de x par f et x est dit l'**antécédent** de $f(x)$.

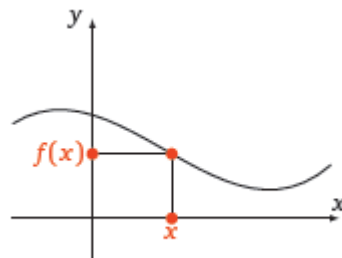
FIGURE 2.5 – L'application $f : E \longrightarrow F$

L'autre représentation est celle des fonctions continues de $E = \mathbb{R}$ dans $F = \mathbb{R}$.

Soit l'application f ,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

L'association $x \longmapsto f(x)$ est représentée par le point $(x, f(x))$.

FIGURE 2.6 – Présentation le point $(x, f(x))$ par l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Exemple 2.4. Soit l'application suivante :

1.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto 2n + 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 - 1 \end{aligned}$$

Remarques 2.1. Selon la définition de l'application, nous savons :

► L'application

$$\begin{aligned} Id_E: E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto y = x \end{aligned}$$

est appelée application **identité** sur E .

► L'application

$$\begin{aligned} f: E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto y = f(x) = a, a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

est appelée application **constante** sur E .

► On dit que deux applications f et g sont égales si :

1. Elles ont un même ensemble de départ E et un même ensemble d'arrivée F .
2. $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.

Définition 2.9. Soit l'application f

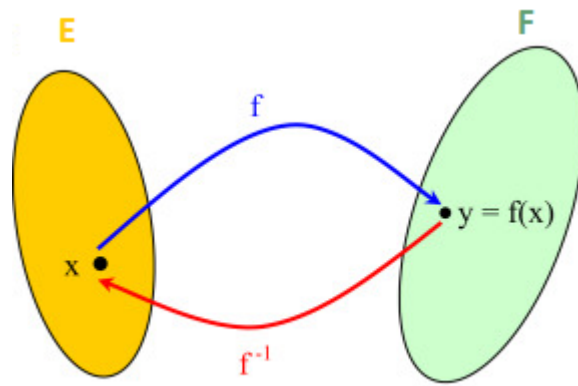
$$\begin{aligned} f: E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

On définit alors une application de F vers E , en associant à tout élément y de F son seul antécédent. Cette application, appelée application réciproque de f et notée f^{-1} .

$$\begin{aligned} f^{-1}: F &\longrightarrow E \\ y &\longmapsto f^{-1}(y) \end{aligned}$$

Avec,

$$\forall x \in E; \forall y \in F, y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

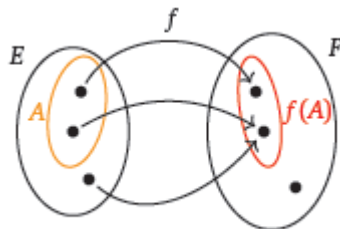
FIGURE 2.7 – L'application f et f^{-1}

2.5 Image directe et image réciproque

Soient E et F deux ensembles, A , B deux sous-ensembles de E et F respectivement

Définition 2.10. (Image directe) Soit $A \subset E$ et $f : E \rightarrow F$, l'image directe de A par f est l'ensemble :

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} \subset F$$

FIGURE 2.8 – Image directe de A par l'application f

Définition 2.11. (Image réciproque) Soit $B \subset F$ et $f : E \rightarrow F$, l'image réciproque de B par f est l'ensemble :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\} \subset E$$

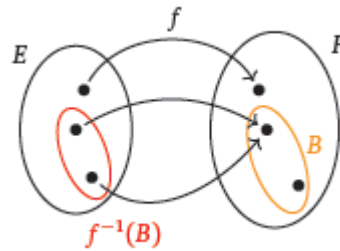


FIGURE 2.9 – Image réciproque de B par l'application f^{-1}

Exemple 2.5. Soit f une application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto 2x + 3 \end{aligned}$$

1. **Image directe**

Soit, $A = \{0, 1, 2, 3\}$, alors

$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(x), x \in A\} \\ &= \{f(0), f(1), f(2), f(3)\} \\ &= \{3, 5, 7, 9\} \end{aligned}$$

2. **Image réciproque**

Soit, $B = \{9\}$

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{x \in E, f(x) \in B\} \\ &= \{x \in E, f(x) = 9\} \\ &= \{x \in E, 2x + 3 = 9\} \\ &= \{3\} \end{aligned}$$

Propriétés 2.2. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soient A, B deux parties (sous-ensembles) de E , et D, C deux parties (sous-ensembles) de F . Alors,

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

2. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
3. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
4. $D \subset C \Rightarrow f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C)$.
5. $f^{-1}(D \cup C) = f^{-1}(D) \cup f^{-1}(C)$.
6. $f^{-1}(D \cap C) = f^{-1}(D) \cap f^{-1}(C)$.

Démonstration. La preuve de ces propriétés est en TD. □

2.5.1 Restriction et prolongement d'une application

Soit G un sous-ensemble de E , ($D \subset E$). et f une application définie de E dans F

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Soit g une application définie de D dans F

$$\begin{aligned} g : D &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto g(x) = f(x) \end{aligned}$$

Alors, $g(x) = f(x)$ est appelée la **restriction** de f à D et on écrit $g = f/D$ et on dit aussi que f est le **prolongement** de g à E .

Exemple 2.6. Soit l'application f et g définis comme suit,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \sin(x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : D = [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = \sin(x) \end{aligned}$$

Donc, on note que :

☞ g est la restriction de f à la partie $D = [0, 2\pi]$. On écrit : $g = f/[0, 2\pi]$.

☞ f est le prolongement de g sur \mathbb{R} .

Pour plus d'explications, la figure suivante montre ce qui a été mentionné dans cet exemple.

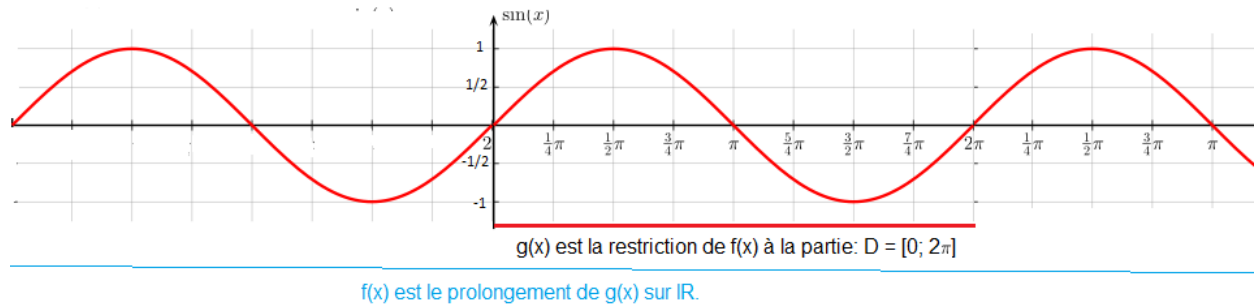


FIGURE 2.10 – la restriction de f et le prolongement de g

2.5.2 Composition d'applications

Définition 2.12 (Composée de deux applications). Soient E , F et G trois ensembles quelconques. Soient deux applications :

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

On définit la composée de f par g , notée : $g \circ f$, par :

$$\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} f \circ g : E &\longrightarrow G \\ f(x) &\longmapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

Exemple 2.7. Soit les deux applications, f et g , définies comme suit :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \cos(x), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = x^2. \end{aligned}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = \cos(x^2), \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = \cos^2(x).\end{aligned}$$

Remarque 2.2. La composition de fonctions n'est généralement pas commutative :

$$g \circ f \neq f \circ g$$

Théorème 2.1. Soient E, F et G trois ensembles et f, g deux applications telles que $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$

- ✗ Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- ✗ Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- ✗ Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.
- ✗ Si f et g sont bijectives, alors $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

2.6 Injection, surjection, bijection

Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F .

2.6.1 Injection

Définition 2.13. f est **injective** si pour tout $x_1, x_2 \in E$ avec $f(x_1) = f(x_2)$ alors $x_1 = x_2$. Autrement dit :

$$\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

L'implication précédente équivaut à sa contraposée :

$$\forall x_1, x_2 \in E, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

C'est-à-dire que f est injective si et seulement si tout élément y de F a au plus un antécédent. Voir la figure suivante.

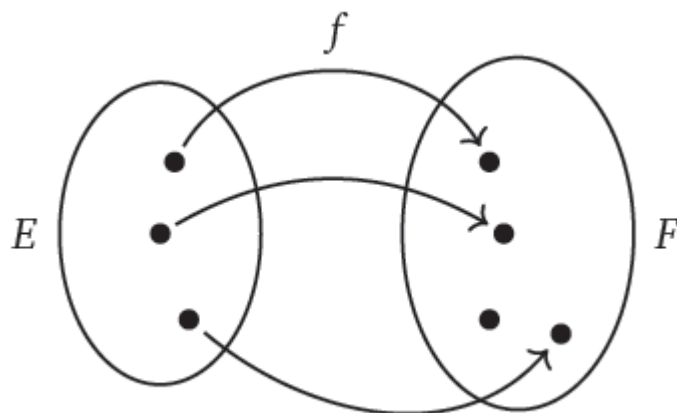


FIGURE 2.11 – Application injective

Exemple 2.8. On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 3x + 2$$

On peut dire que l'application f est injective car :

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow 3x_1 + 2 = 3x_2 + 2 \\ &\Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2 \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Alors,

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Ainsi f est injective.

2.6.2 Surjection

Définition 2.14. f est **surjective** si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, \text{Tq} : y = f(x)$$

C'est-à-dire que f est surjective si et seulement si tout élément y de F a au moins un antécédent dans E . Voir la figure suivante.

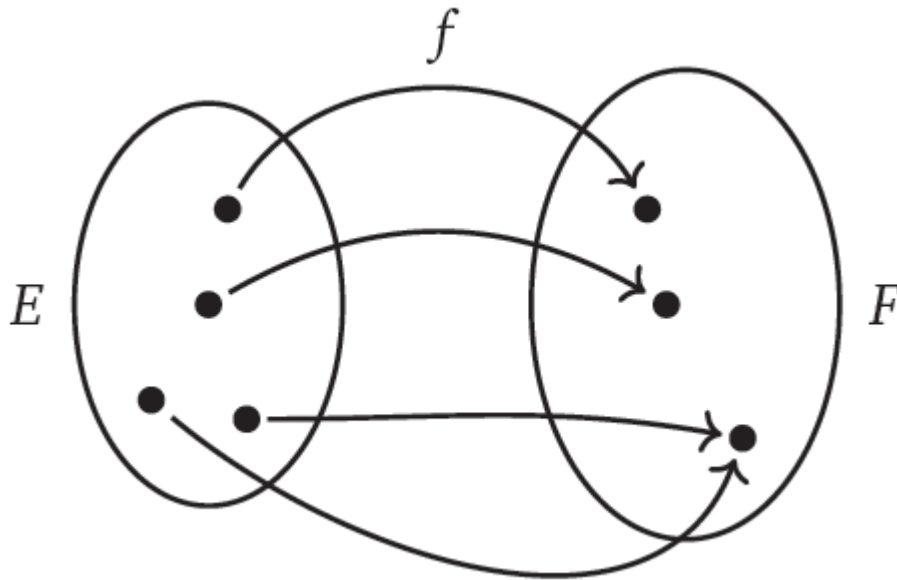


FIGURE 2.12 – Application surjective

Remarque 2.3. L'application f est surjective si et seulement si l'équation $y = f(x)$ admet **au moins une solution x de E pour tout élément y de F .**

Exemple 2.9. On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$$

D'après la remarque [2.3](#), f est-elle surjective ?

Soit $y \in \mathbb{R}$, essayons de résoudre l'équation $y = f(x)$.

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = 2x - 1 \\ &\Leftrightarrow y + 1 = 2x \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y + 1}{2} \end{aligned}$$

Il est clair que $\frac{y+1}{2}$ est définie $\forall y \in \mathbb{R}$.
Ainsi f est surjective.

Remarque 2.4. Soit l'application f est définie par :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

f est surjective si et seulement si $f(E) = F$

2.6.3 Bijection

Définition 2.15. Une application f de E dans F est dite **bijjective** si elle est à la fois injective et surjective. Tout élément de l'espace d'arrivée F a un antécédent et un seul dans E . Autrement dit :

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x). (\exists! : \text{signifie unique})$$

Lemme 2.1. L'application f est dite *bijjective* (ou f est une *bijection*) si et seulement si elle est à la fois surjective et injective.

Exemple 2.10. D'après l'exemple (2.9). Est-ce-que f est bijjective ?.

On a,

$$f \text{ est } \text{bijjective} \Leftrightarrow f \text{ est } \text{surjective} + \text{injective}.$$

1. f est **surjective**. Voir l'exemple (2.9).
2. f est **injective**. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow 2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \\ &\Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Alors,

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Ainsi f est injective.

Donc, d'après 1 et 2, f est **bijjective**.

Série d'exercices N°02.
Algèbre 1

Exercice 01 :

a) Soit l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Les propositions suivantes sont elles vraies ?. Justifiez votre réponse.

$$0 = \emptyset, 1 \subset E, \emptyset \in E, \emptyset \subset E, \{\emptyset\} \cup E = E, \{\emptyset\} \cap E = \emptyset.$$

b) Soient, $B = \{0, 2\}$ et $D = \{2, 3, 5\}$ deux ensembles.

1. Déterminer : $B \cap D, B \cup D, C_E(B), C_E(D), E - B$ et $B \Delta D$.
2. Déterminer : $B \times D, B \times \emptyset, B \times \{\emptyset\}, \mathcal{P}(B)$ et $\mathcal{P}(D)$.
3. Peut-on écrire : $C_D(B)$. Justifiez votre réponse.

Exercice 02 :

Soient A, B, C trois parties de l'ensemble E . Montrer que :

1. $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$
2. $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset C_E(B)$
3. $A \subset B \Leftrightarrow C_E(B) \subset C_E(A)$
4. $C_E(C_E(A)) = A$
5. $C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B), C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B)$ (*)
6. $A \Delta B = C_E(A) \Delta C_E(B)$
7. $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$
8. $A \subset B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$

Exercice 03 :

Soient E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$. Démontrer que :

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B),$
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B),$
3. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),$ (*)
4. $\forall C, D \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D),$
5. $\forall D \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(F \setminus D) = E \setminus f^{-1}(D).$ (*)

Exercice 04 :

Soient :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = |x|$$

1. f est-elle Injective ? Surjective ? (Justifier).
2. Soit $A = [-2, 0]$ et $B = [0, 1]$. Calculer : $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.

Exercice 05 :Soient $E = [0, 1]$, $F = [-1, 1]$, et $G = [0, 2]$ trois intervalles de \mathbb{R} . Considérons l'application f de E dans G définie par :

$$f : E \longrightarrow G$$

$$x \longmapsto f(x) = 2 - x$$

et l'application g de F dans G définie par :

$$f : F \longrightarrow G$$

$$x \longmapsto g(x) = x^2 + 1$$

1. Déterminer $f(1/2)$, $f^{-1}(0)$, $g([-1, 1])$, et $g^{-1}([0, 2])$.
2. L'application f est-elle bijective ? justifier.
3. L'application g est-elle bijective ? justifier.

Exercice 06 : (Devoir à la maison)

1. Soit l'application

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$$

$$x \longmapsto f(x) = \ln(1 + e^x)$$

☞ Montrer que f est bijective et expliciter la fonction f^{-1} .

2. Même travail avec l'application g :

$$g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \longmapsto g(x) = x^2 + x$$

Relations binaires sur un ensemble

3.1 Généralités sur les relations binaires

Soient E, F deux ensembles

Définition 3.1. Une relation binaire noté \mathcal{R} d'un ensemble E vers un ensemble F est toute assertion reliant un élément de E à un élément de F pouvant être vérifiée ou non.

Notation 3.1. Nous mettons ce qui suit

- ✦ L'ensemble E s'appelle l'ensemble de départ de \mathcal{R} .
- ✦ L'ensemble F s'appelle l'ensemble de d'arrivée de \mathcal{R} .

3.1.1 Propriétés des relations binaires dans un ensemble

Soit \mathcal{R} une relation binaire sur E .

- **Réflexivité** : On dit que \mathcal{R} est réflexive si :

$$\forall x \in E, x\mathcal{R}x.$$

- **Symétrie** : On dit que \mathcal{R} est symétrique si :

$$\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y = y\mathcal{R}x.$$

- **Transitivité** : On dit que \mathcal{R} est transitive si :

$$\forall x, y, z \in E, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z.$$

– **Anti-symétrie** : On dit que \mathcal{R} est anti-symétrique si :

$$\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y.$$

3.1.2 Relation d'équivalence

Définition 3.2. Soit \mathcal{R} une relation binaire dans un ensemble E . On dit que \mathcal{R} est une **relation d'équivalence** si \mathcal{R} est :

1. réflexive,
2. symétrique,
3. transitive.

Exemple 3.1. Soit la relation suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y, \text{ est une relation d'équivalence.}$$

en effet :

1. $\forall x \in \mathbb{N}, x = x \Leftrightarrow x\mathcal{R}x \Leftrightarrow \mathcal{R}$ est **réflexive**.
2. $\forall x, y \in \mathbb{N}, x = y \Leftrightarrow y = x \Leftrightarrow y\mathcal{R}x \Leftrightarrow \mathcal{R}$ est **symétrique**.
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{N}, (x = y) \wedge (y = z) \Leftrightarrow x = z \Leftrightarrow \mathcal{R}$ est **transitive**.

Donc, la relation \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

3.1.2.1 Classe d'équivalence

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un ensemble E .

Définition 3.3. La **classe d'équivalence** d'un élément x , noté : \bar{x}, \dot{x}, C_x , est l'ensemble des éléments de E qui sont en relation avec x . Autrement dit

$$\dot{x} = \{y \in E : y\mathcal{R}x\}.$$

Remarque 3.1. L'ensemble des classes d'équivalence n'est jamais vide.

3.1.2.2 Ensemble quotient

Soit E un ensemble munit d'une relation d'équivalence \mathcal{R} .

Définition 3.4. L'ensemble quotient est l'ensemble des classes d'équivalence de tous les éléments de E . On le note E/\mathcal{R} , et on a :

$$E/\mathcal{R} = \left\{ \{x\}, x \in E \right\}$$

Exemple 3.2. D'après l'exemple précédent (3.1), on a la classe d'équivalence $x = a \in \mathcal{R}$ comme,

$$\dot{x} = \dot{a} = \{x \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}a\}.$$

Nous avons,

$$x\mathcal{R}a \Leftrightarrow x = a,$$

alors,

$$\dot{a} = \{a, a \in \mathbb{R}\},$$

et l'ensemble quotient \mathbb{R}/\mathcal{R} est donné par :

$$\mathbb{R}/\mathcal{R} = \{\{a\}, a \in \mathbb{R}\}$$

3.1.3 Relation d'ordre

Définition 3.5. Une relation est dite relation d'ordre si elle est :

1. réflexive,
2. anti-symétrique,
3. transitive.

Exemple 3.3. Soit la relation suivante,

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leq y, \text{ est une relation d'ordre.}$$

En effet :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x \Leftrightarrow x\mathcal{R}x \Leftrightarrow \mathcal{R}$ est **réflexive**.
2. $\forall x, y \in \mathbb{N}, (x \leq y) \wedge (x \leq y) \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow \mathcal{R}$ est **antisymétrique**.

3. $\forall x, y, z \in \mathbb{N}, (x \leq y) \wedge (y \leq z) \Leftrightarrow x \leq z \Leftrightarrow \mathcal{R}$ est **transitive**.

Donc, la relation \mathcal{R} est une relation d'ordre.

Proposition 3.1. Soit \mathcal{R} une relation d'ordre sur un ensemble E .

☞ On dit que \mathcal{R} est **d'ordre total** si :

$$\forall x, y \in E; x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x.$$

☞ On dit qu'elle est **d'ordre partiel** si elle n'est pas d'ordre total, c'est à dire :

$$\exists x, y \in E; x\not\mathcal{R}y \wedge y\not\mathcal{R}x.$$

Exemple 3.4. D'après l'exemple (3.3), on a la relation \mathcal{R} est une relation **d'ordre total**, car :

- $x\mathcal{R}y$ est une relation d'ordre.
- ou
- $y\mathcal{R}x$ est une relation d'ordre.

Donc, n'est pas une relation **d'ordre partiel**.

Série d'exercices N°03.
Algèbre 1

Exercice 01 :

Soient E un ensemble et \mathcal{R} une relation définie dans E .

Les propositions suivantes sont vraies ou fausses. (Corrigez la proposition fausse)

1. \mathcal{R} est une relation binaire si elle est **réflexive, transitive, symétrique** et **anti-symétrique**.
2. \mathcal{R} est une relation d'équivalence si elle est **réflexive** et **transitive**.
3. \mathcal{R} est une relation d'ordre si elle est **réflexive, symétrique** et **anti-symétrique**.

Exercice 02 :

Dans \mathbb{C} on définit la relation \mathcal{R} par :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}; z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|.$$

1. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de z tel que, $z = 2$.
3. Déterminer l'ensemble quotient \mathbb{C}/\mathcal{R} .

Exercice 03 :

1. Dire si les trois relations suivantes sont réflexives, symétriques, anti-symétriques, transitives :

(a) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = -y.$

(b) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1.$

(c) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B.$

2. Que peut-on conclure de ces relations ?
3. Si (b) une relation d'équivalence. Trouver la classe d'équivalence de $x = \frac{\pi}{2}$.
4. Déterminer l'ensemble quotient \mathbb{R}/\mathcal{R}

Exercice 04 :

Soit la relation \mathcal{R} définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \frac{x}{1+x^2} = \frac{y}{1+y^2}.$$

1. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'ordre.
2. Est-ce que \mathcal{R} est une relation d'ordre total.

Exercice 05 : (Devoir à la maison)

Montrer que la relation suivante sur \mathbb{N} est une relation d'ordre :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, p\mathcal{R}q \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*, q = p^k.$$

Exercice 06 : (Devoir à la maison)

Soit Ω l'ensemble des nombres premiers strictement supérieurs à 2. On considère la relation \mathcal{R} entre deux éléments de Ω définie par :

$$\forall p, q \in \Omega, p\mathcal{R}q \iff \frac{p+q}{2} \in \Omega.$$

1. La relation est-elle réflexive, symétrique et transitive ?
2. Que peut-on conclure ?

Structures algébriques.

4.1 Lois De Composition Internes

4.1.1 Définition et exemples

Définition 4.1. Soit E un ensemble. Une **loi de composition interne** sur E est une application de $E \times E$ dans E . Si on la note

$$\begin{aligned} * : E \times E &\longrightarrow E \\ (a, b) &\longmapsto a * b \end{aligned}$$

On dit que $(a * b)$ est le composé de a et b pour la loi $*$.

Exemples 4.1. On pose que $E = \mathbb{Z}$

☞ L'addition définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (a, b) &\longmapsto a + b, \end{aligned}$$

est une loi de composition interne sur \mathbb{Z} .

☞ L'addition définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (a, b) &\longmapsto a - b, \end{aligned}$$

est une loi de composition interne sur \mathbb{Z} .

☞ L'addition définie par :

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (a, b) &\longmapsto a \times b,\end{aligned}$$

est une loi de composition interne sur \mathbb{Z} .

☞ L'addition définie par :

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (a, b) &\longmapsto \frac{a}{b},\end{aligned}$$

n'est pas loi de composition interne sur \mathbb{Z} . Car $\frac{a}{b}$ n'est pas défini pour tous les couples (a, b) d'entiers.

Définition 4.2. Soient $*$ une loi de composition interne sur E , on dit que :

1. $*$ est dite **commutative** si et seulement si :

$$\forall x, y \in E, x * y = y * x.$$

2. Soit E un ensemble muni par une loi de composition interne $*$ et F une partie de E . On dit que F est une **partie stable** pour la loi $*$ si :

$$\forall (x, y) \in F \times F, x * y \in F,$$

3. $*$ est dite **associative** si et seulement si :

$$\forall x, y, z \in E, (x * y) * z = x * (y * z).$$

4. $*$ admet un **élément neutre** noté $\langle e \rangle$ si et seulement si :

$$\exists e \in E, \forall x \in E, x * e = e * x = x.$$

5. $*$ admet un élément neutre e . Alors il existe un **élément symétrique (Inverse)**, soient x et x' deux éléments sont symétriques pour la loi $*$ si :

$$x * x' = x' * x = e.$$

4.2 Groupes

Définition 4.3. On appelle groupe un ensemble E muni d'une loi interne $*$ telle que :

1. $*$ est associative.
2. $*$ admet un élément neutre.
3. Tout élément de E admet un élément symétrique dans E .

Si de plus $*$ est commutatif, alors $(E, *)$ est un groupe commutatif ou abélien.

Exemple 4.1. 1. $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif.

2. (\mathbb{R}_+^*, \times) est un groupe commutatif.
3. (\mathbb{R}, \times) n'est pas un groupe car 0 n'admet pas d'élément symétrique.

4.2.1 Sous groupe

Définition 4.4. Soit $(G, *)$ un groupe et soit H une partie non vide de G . On dit que H est un sous-groupe de G si :

1. L'élément neutre e appartient à H , i.e : $(e \in H)$,
2. H est stable pour la lois $*$: $\forall (x, y) \in H \times H, x * y \in H$,
3. H est stable pour le passage à l'inverse $\forall x \in H, x' \in H$.

Remarque 4.1. Un critère pratique et plus rapide pour prouver que H est un sous-groupe de G est :

- H contient au moins un élément,
- $\forall (x, y) \in H \times H, x * y \in H$.

Exemple 4.2. $\Leftrightarrow (\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un sous-groupe de (\mathbb{R}^*, \times) . En effet :

1. L'élément neutre $e = 1 \in \mathbb{R}_+^*$.
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, x \times y \in \mathbb{R}_+^*$,
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^{-1} = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$.

$\Leftrightarrow (\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Théorème 4.1 (Caractérisation des sous-groupes). Soit $(G, *)$ un groupe et soit H une partie non vide de G . Alors H est un sous-groupe de G si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in H \times H, x * y' \in H$$

4.2.2 Homomorphisme de groupes

Définition 4.5. Soient $(G_1, *)$ et (G_2, Δ) deux groupes. On appelle homomorphisme (ou morphisme) de groupes de G_1 dans G_2 , une application $f : G_1 \longrightarrow G_2$ telle que,

$$\forall x, y \in G_1, f(x * y) = f(x) \Delta f(y).$$

Exemple 4.3. Soit l'application f donnée par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \ln(x) \end{aligned}$$

Donc, f est un homomorphisme de (\mathbb{R}^*, \times) dans $(\mathbb{R}, +)$ car :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x \times y) = \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y) = f(x) + f(y).$$

Corollaire 4.1. Soient $(G_1, *)$ et (G_2, Δ) deux groupes d'éléments neutres e_1 et e_2 et soit f un homomorphisme de G_1 dans G_2 . Alors

- ☞ f est un **isomorphisme de groupes** si f est une bijection.
- ☞ f est un **automorphisme de groupes** si f est un isomorphisme et si $G_1 = G_2$, (même groupe au départ et à l'arrivée).

Proposition 4.1. Soient $(G_1, *)$ et (G_2, Δ) deux groupes d'éléments neutres e_1 et e_2 et soit f un homomorphisme de G_1 dans G_2 . Alors

1. $f(e_1) = e_2$,
2. $\forall x \in G_1, (f(x))' = f(x')$.

Exemple 4.4. Soit f un homomorphisme donné par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto f(x) = e^x \end{aligned}$$

Proposition 4.2. Soient $(G_1, *)$ et (G_2, Δ) deux groupes d'éléments neutres e_1 et e_2 et soit f un homomorphisme de G_1 dans G_2 . Alors

1. Si H est un sous-groupe de G_1 , alors $f(H)$ est un sous-groupe de G_2 ,
2. Si L est un sous-groupe de G_2 , alors $f^{-1}(L)$ est un sous-groupe de G_1 .

4.2.3 Image et noyau d'un homomorphisme

1- L'image d'un homomorphisme :

Définition 4.6. Soient $(G_1, *)$ et (G_2, Δ) deux groupes d'éléments neutres e_1 et e_2 et soit f un homomorphisme de G_1 dans G_2 . Alors, On appelle **Image** de f l'ensemble

$$Im(f) = f(G_1) = \{f(x) \in G_2, x \in G_1\}$$

.

2- Le noyau d'un homomorphisme :

Définition 4.7. Soient $(G_1, *)$ et (G_2, Δ) deux groupes d'éléments neutres e_1 et e_2 et soit f un homomorphisme de G_1 dans G_2 . Alors, On appelle **noyau** de f l'ensemble

$$Ker(f) = f^{-1}(e_2) = \{x \in G_1, f(x) = e_2\}$$

.

Exemple 4.5. Soit f un homomorphisme donné par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^* \\ x &\longmapsto f(x) = 2^x \end{aligned}$$

✗ **L'image de f** est donnée par :

$$Im(f) = \{f(x), x \in \mathbb{R}\},$$

et, $y = f(x) \Rightarrow y = 2^x$, donc $y \in]0, +\infty] = \mathbb{R}_+^*$.

D'où, $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$.

✗ **Le noyau de f** est donnée par :

$$Ker(f) = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R}; 2^x = 1\} = \{0\}.$$

Théorème 4.2. Soit f un homomorphisme de $(G_1, *)$ dans (G_2, Δ) . Alors

1. $Ker(f)$ est un sous-groupe de G_1 ,
2. $Im(f)$ est un sous-groupe de G_2 ,
3. f est injective si et seulement si $Ker(f) = \{e_1\}$,
4. f est surjective si et seulement si $Im(f) = G_2$.

4.3 Anneaux

Définition 4.8. Soit A un ensemble muni de deux lois de composition internes $*$, \bullet , on dit que $(A, *, \bullet)$ est un **anneau** si :

1. $(A, *)$ est un groupe commutatif.
2. Distributivité à gauche et à droite,

$$\forall x, y, z \in A, x \bullet (y * z) = (x \bullet y) * (x \bullet z), \text{ et } (x * y) \bullet z = (x \bullet z) * (y \bullet z).$$

3. \bullet est associative .

Remarque 4.2. On remarque :

- Si de plus \bullet est commutative, on dit que $(A, *, \bullet)$ est un anneau commutatif.
- Si \bullet admet un élément neutre, on dit que $(A, *, \bullet)$ est un anneau unitaire.

Exemple 4.6. ✓ $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

- ☞ Car, $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif.
- ☞ Et en plus la distributivité à gauche et à droite existe par rapport les deux lois de composition internes $+$, \times .

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z}, x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z), \text{ et } (x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z).$$

4.3.1 Sous-anneau

Définition 4.9. Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau et soit B une partie de A . On dit que B est un sous-anneau de $(A, +, \cdot)$ si et seulement si :

1. $0_A \in B \Rightarrow B \neq \emptyset$,
2. $(B, +)$ est un sous-groupe de A ,
3. B stable pour la loi \cdot ,

Exemple 4.7. 1. $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$,

2. $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$
3. $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$

4.3.2 Homomorphisme d'anneaux

Définition 4.10. Soient $(A, +, \cdot)$ et $(B, +, \cdot)$ deux anneaux.

On dit qu'une application $f : A \rightarrow B$ est un homomorphisme (ou morphisme) si :

1. $f(1_A) = 1_B$,
2. $\forall a, b \in A, f(a + b) = f(a) + f(b)$,
3. $\forall a, b \in A, f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$.

4.3.3 Règles de calculs dans un anneau

Dans \mathbb{Z} la formule du binôme de Newton est une formule mathématique donnée par Isaac Newton pour trouver le développement d'une puissance entière quelconque d'un binôme. Elle est aussi appelée formule du binôme ou formule de Newton.

Proposition 4.3. Soient $(A, +, \cdot)$ un anneau et $x, y \in A$, avec $a \cdot b = b \cdot a$, et pour $n \in \mathbb{N}$. Alors :

☞ Si x et y sont deux éléments d'un anneau A qui commutent :

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k}.$$

Cette formule est connue sous le nom de 'binôme de Newton' ici :

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

☞ Remplaçant y par $-y$ et utilisant la relation simple dans la formule précédente ci-dessus, il vient :

$$(x - y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} x^k y^{n-k}.$$

☞ Toujours avec l'hypothèse que x et y commutent, $n \in \mathbb{N}$:

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k.$$

☞ En particulier, en faisant $x = 1$ dans la formule ci-dessus.

$$1 - y^n = (1 - y) \sum_{k=0}^{n-1} y^k.$$

Démonstration. Pour prouver cette proposition, on utilise la démonstration par récurrence avec la formule du triangle de Pascal.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

FIGURE 4.1 – Le triangle de Pascal

□

4.4 Corps

Définition 4.11. Soit \mathbb{B} un ensemble munie de deux lois de composition internes $*$, \bullet , on dit que $(\mathbb{B}, *, \bullet)$ est un **corps** si :

1. $(\mathbb{B}, *, \bullet)$ est un anneau.
2. Tout élément distinct de e est inversible pour la loi \bullet , où e est l'élément neutre de la loi $*$.

Remarque 4.3. Si de plus \bullet est commutative, on parle de corps commutatif.

Exemple 4.8. ✓ $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.

1. $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps, et plus :

✂ Car, $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un anneau commutatif.

✂ Et en plus tout élément $x \neq 0$ est inversible pour la loi \times

2. $(\mathbb{Z}, +, \times)$ n'est pas un corps.

4.4.1 Sous-corps

Définition 4.12. Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps et soit \mathbb{L} une partie de \mathbb{K} . On dit que \mathbb{L} est un **sous corps** de \mathbb{K} lorsque :

1. $1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{L}$,
2. \mathbb{L} est stable par $+$ et \times ,
3. $\forall x \in \mathbb{L}, (-x) \in \mathbb{L}$ et $\forall x \in \mathbb{L} - \{0_{\mathbb{K}}\}, x^{-1} \in \mathbb{L}$.

Exemple 4.9. \mathbb{R} est un sous corps de $(\mathbb{C}, +, \times)$.

Série d'exercices N°04.
Algèbre 1

Exercice 01 :

1. On définit sur \mathbb{R} une loi de composition interne $*$ par

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, a * b = \ln(e^a + e^b)$$

- (a) La loi $*$ est-elle commutative ?, Associative ? Possède-t-elle un élément neutre ?.
(b) $(\mathbb{R}, *)$ est-il un groupe ?.

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On définit dans \mathbb{R} une loi de composition interne \circ par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \circ y = ax + by$$

- (a) Déterminer a, b pour que la loi \circ : (1) Soit associative. (2) Possède un élément neutre.

Exercice 02 :

Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ la loi de composition interne définie sur G par

$$\forall (a, b), (c, d) \in G : (a, b) * (c, d) = (ac, ad + b)$$

1. Montrer que $(G, *)$ est un groupe non commutatif.
2. Montrer que l'ensemble $H = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est un sous groupe de $(G, *)$.

Exercice 03 :

1. Soit $G = \mathbb{R}$. on définit sur G la loi de composition interne notée $*$ par

$$\forall a, b \in G, a * b = a + b + \frac{1}{4}$$

- (a) Montrer que $*$ est une loi commutative.
(b) Montrer que $(G, *)$ est un groupe.

2. Soit

$$f : (G, *) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$$
$$x \longmapsto f(x) = 2x + \frac{1}{2}$$

- Montrer que f est un isomorphisme de groupe.

☞ **Indication :** f est un isomorphisme $\Leftrightarrow f$ est un homomorphisme bijective.

Exercice 04 :

1. On munit l'ensemble $A = \mathbb{R}^2$ de deux lois définies par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x * y = x + y - 2, \quad x \bullet y = xy - 2x - 2y + 6.$$

- (a) Montrer que $(A, *)$ est un groupe Abélien (commutatif).
- (b) Montrer que la loi \bullet est : **(i)** commutative, **(ii)** associative.
- (c) Montrer que $(A, *, \bullet)$ est un anneau commutatif.
- (d) Soit $B = \mathbb{Z}^2$. Montrer que $(B, *, \bullet)$ est un sous-anneau de $(A, *, \bullet)$.

2. On munit l'ensemble $K = \mathbb{R}$ par l'addition et la multiplication usuelle.

- (a) Pourquoi $(K, +, \times)$ est-il un corps ?

Exercice 05 : (Devoir à la maison)

On munit l'ensemble $A = \mathbb{Z}^2$ de deux lois définies par :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \text{ et } (x, y) \star (x', y') = (xx', xy' + x'y)$$

- 1. Montrer que $(A, +)$ est un groupe commutatif.
- 2. Montrer que la loi \star est commutative et associative.
- 3. Déterminer l'élément neutre pour la loi \star .
- 4. Montrer que $(A, +, \star)$ est un anneau unitaire commutatif.
- 5. Montrer que $B = \{(a, 0), a \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de $(A, +, \star)$.

Examen final.
Algèbre 1

Exercice 01 :

1. Soient P, Q deux propositions.

(a) À l'aide de la table de vérité, vérifier que :

$$\overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q})$$

2. Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^n > n$.

3. Soient A, B deux parties non vide d'un ensemble E .

(a) Trouver l'expression de la différence symétrique $A \Delta B$.

(b) Déduire l'expression de la différence symétrique $A \Delta B$, pour $A \cap B = \emptyset$.

Exercice 02 :

Soit \mathcal{R} , la relation définie sur \mathbb{R}^* par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y}.$$

1. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

2. Déterminer la classe d'équivalence de $a \in \mathbb{R}^*$, puis trouver l'ensemble quotient \mathbb{R}^*/\mathcal{R} .

Exercice 03 :

1. Soit $G = \mathbb{R}$, on définit sur G la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\forall x, y \in G, x * y = x + y - \frac{1}{2}.$$

(a) Montrer que $*$ est une loi commutative.

(b) Montrer que $(G, *)$ est un groupe.

2. Soit,

$$\begin{aligned} f : (G, *) &\longrightarrow (\mathbb{R}, +) \\ x &\longmapsto f(x) = 2x - 1. \end{aligned}$$

(a) Montrer que f est homomorphisme de groupe.

(b) L'application f est-elle bijective ? justifier.

(c) Déduire un autre nom pour l'application f .

Exercice 04 : On considère le polynôme $P(X)$ de $\mathbb{R}[X]$, qui s'écrit,

$$P(X) = X^3 + 2X^2 + aX + b.$$

1. Déterminer les valeurs de a et b pour que $P(X)$ admette i comme racine dans \mathbb{C} .

Corrigé type d'examen final.
Algèbre 1

Correction de l'exercice 01 :

1. Soient P, Q deux propositions.

(a) À l'aide de la table de vérité, montrer que : $\overline{(P \wedge \overline{Q})} \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$.

P	Q	\overline{P}	\overline{Q}	$P \wedge \overline{Q}$	$\overline{(P \wedge \overline{Q})}$	$\overline{P} \vee Q$	$\overline{(P \wedge \overline{Q})} \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$
1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1

2. Par récurrence démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^n > n$.

Soit $P(n)$ la propriété : $2^n > n$.

- Pour : $n = 1, 2^1 = 2 > 1$, c'est vraie. **0.5**
- Supposons que, $P(n)$ est vraie.i.e : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^n > n$.
- Démontrons que, $P(n + 1)$ est vraie.i.e : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n+1} > n + 1$.

Nous avons,

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2n, \quad \mathbf{0.5}$$

et on a, pour tout n de \mathbb{N}^* , $2n > n + 1$. Donc,

$$2^{n+1} > n + 1, \quad \mathbf{0.5}$$

$P(n + 1)$ est vraie, alors $P(n + 1)$ est vraie pour tout n de \mathbb{N}^* .

3. Soient A, B deux parties non vide d'un ensemble E .

(a) L'expression de la différence symétrique $A \Delta B$.

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) \quad \mathbf{0.5}$$

(b) Dédurre l'expression de la différence symétrique $A \Delta B$, pour $A \cap B = \emptyset$.

Si : $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow (A - B = A, \text{ et } B - A = B)$. Donc,

$$\mathbf{0.5} \quad A \Delta B = A \cup B \quad \mathbf{0.5}$$

Correction de l'exercice 02 :

Soit \mathcal{R} , la relation définie sur \mathbb{R}^* par :

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y}.$$

1. \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

(a) \mathcal{R} est réflexive car,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, x - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x} \Leftrightarrow x \mathcal{R} x$$

ce qui montre que \mathcal{R} est réflexive. **01**

(b) \mathcal{R} est symétrique car on a,

$$\begin{aligned}\forall x, y \in \mathbb{R}^*, x\mathcal{R}y &\Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y}, \\ &\Leftrightarrow y - \frac{1}{y} = x - \frac{1}{x}, \\ &\Leftrightarrow y\mathcal{R}x.\end{aligned}$$

donc

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x.$$

ce qui montre que \mathcal{R} est **symétrique**. 01

(c) \mathcal{R} est transitive car on a,

$$\begin{aligned}\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z &\Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \wedge y - \frac{1}{y} = z - \frac{1}{z}, \\ &\Rightarrow x - \frac{1}{x} + \cancel{y - \frac{1}{y}} = \cancel{y - \frac{1}{y}} + z - \frac{1}{z}, \\ &\Rightarrow x - \frac{1}{x} = z - \frac{1}{z}, \\ &\Rightarrow x\mathcal{R}z.\end{aligned}$$

donc

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

ce qui montre que \mathcal{R} est **transitive**. 01

De (a), (b) et (c), on déduit que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

2. Déterminons :

(a) La classe d'équivalence de $a \in \mathbb{R}^*$. Nous avons,

$$\dot{a} = \{x \in \mathbb{R}^*, x\mathcal{R}a\}$$

alors,

$$\begin{aligned}x\mathcal{R}a &\Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = a - \frac{1}{a}, \quad \mathbf{0.5} \\ &\Leftrightarrow x - \frac{1}{x} - a + \frac{1}{a} = 0, \\ &\Leftrightarrow \frac{ax^2 - (a^2 - 1)x - a}{ax} = 0, \text{ et } ax \neq 0, \\ &\Leftrightarrow ax^2 - (a^2 - 1)x - a = 0. \quad \mathbf{0.5}\end{aligned}$$

$$\Delta = a^4 + 2a^2 + 1 = (a^2 + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = a^2 + 1. \quad \mathbf{0.5}$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{a^2 - 1 + a^2 + 1}{2a} = \frac{2a^2}{2a} = a, \quad \mathbf{0.5} \\ &\quad \vee \\ x &= \frac{a^2 - 1 - a^2 - 1}{2a} = -\frac{2}{2a} = -\frac{1}{a}. \quad \mathbf{0.5}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\dot{a} = \left\{ a, -\frac{1}{a} \right\}$$

(b) L'ensemble quotient $\mathbb{R}^*/_{\mathcal{R}}$ D'après les classes d'équivalence de a , ($a \in \mathbb{R}^*$), par suite

$$\mathbb{R}^*/_{\mathcal{R}} = \left\{ \left\{ a, -\frac{1}{a} \right\}, a \in \mathbb{R}^* \right\}. \quad \mathbf{0.5}$$

Bibliographie

- [1] AZOULY, E., AVIGNANT, J., AND AULIAC, G. **Problèmes corrigés de mathématiques, deug mias/sm, ediscience (dunod pour la nouvelle édition), 2002.**
- [2] BOREL, É. *Leçons sur la théorie des fonctions :(éléments et principes de la théorie des ensembles ; applications à théorie des fonctions), vol. 1. Gauthier-Villars, 1914.*
- [3] BOUIZEM, N. **Algèbre 1.**
- [4] CUESTA, T. **Algèbre 1 mias.**
- [5] ESCOFIER, J.-P. *Toute l'algèbre du 1er cycle : cours et exercices corrigés. Dunod, 2002.*
- [6] MAATOUG, A., AND GUEDDA, P. L. **Cours d'algèbre 1 re année lmd mathématiques et informatique.**
- [7] MARCO, J.-P., LAZZARINI, L., BOUALEM, H., BROUZET, R., AND DELORO, A. *Mathématiques L1 : Cours complet avec fiches de révision, 1000 tests et exercices corrigés. Pearson Education France, 2013.*
- [8] PEANO, G. *Logique mathématique, vol. 2. Bocca Frères, 1897.*
- [9] POINCARÉ, H. *Les mathématiques et la logique. Revue de métaphysique et de morale 13, 6 (1905), 815–835.*
- [10] POINCARÉ, H. *Les mathématiques et la logique. Revue de métaphysique et de morale 14, 3 (1906), 294–317.*

- [11] SALIHA, M. **Algèbre cours et exercices première année lmd.**
- [12] SALIHA, M. **Algèbre cours et exercices première année lmd.**
- [13] SEBESTIK, J. *Logique et mathématique chez Bernard Bolzano.* Vrin, 1992.