



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA  
Faculté des Mathématiques et de l'informatique  
Département de Mathématique



# MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

**Domain:** Mathématiques et Informatique

**Filière:** Mathématique

**Option:** Analyse mathématique et numérique

**Par**

**Attia Asma**

**Sujet**

**Sur les opérateurs  $n$ -hyponormaux**

Devant le jury :

Mr .Abdelkader Gasmi	Univ de M'sila	<b>Président</b>
Mr .Nadir Mostefa	Prof. Univ de M'sila	<b>Rapporteur</b>
Mr .Bachir Gagui	M.C.A Univ de M'sila	<b>Examineur</b>

**Promotion : 2021/2022**

# *Remerciements*

Je tiens à remercier tout premièrement ALLAH le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il nous a donné durant toutes ces longues années.

Ainsi, je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur **Mr. Mostefa Nadir** pour suivi continué tout le long de la réalisation de ce mémoire, ses conseils, ses encouragements.

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury **Gasmi Abdelkader, Gagui Bachir** pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

Je remercie également ceux qui m'ont aidé de près ou loin à réaliser ce travail, surtout mes collègues de promotion *2022* pour les bons moments que nous avons passé ensemble.

A grand absent de ce jour A ce qui aurait été fier de se voir A ce jour pour qui ce jour voit le jour A mon père ,**Meftah** que ALLAH yarhmu et A ma mère,**Merzaka**.

## ملخص

ليكن  $H$  فراغ هيلبرت مركب, و  $B(H)$  فراغ المؤثرات الخطية المحدودة المعرفة على  $H$ .

من اجل  $T \in B(H)$  نرسم  $T^*$  لمرافق المؤثر  $T$ .

اذا كان  $T \in B(H)$ , فان:

$$|T^*| = (TT^*)^{1/2} \text{ و}$$

$$|T| = (T^*T)^{1/2}$$

نقول ان  $T$  مؤثر  $n$  - شبه الناظمي اذا تحقق  $|T|^{2n} \geq |T^*|^{2n}$

لما تكون  $n=1$  و  $n=1/2$  نقول ان  $T$  مؤثر شبه الناظمي و نصف شبه ناظمي على الترتيب .

ان الهدف الرئيسي من هذا العمل هو إعطاء المزيد من المعلومات حول الخواص الأساسية للمؤثرات  $n$  - شبه الناظمية.

---

### Abstract

Let  $H$  be a complex Hilbert space, and let  $B(H)$  denote the set of all bounded linear operators on  $H$ .

For  $A \in B(H)$ , we denote by  $A^*$ ; the adjoint of  $A$ , For an operator  $A \in B(H)$ ; let  $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$  and  $|A^*| = (AA^*)^{\frac{1}{2}}$ .

For  $0 < n \leq 1$ ,  $A$  is said to be  $n$ -hyponormal if :

$$|A|^{2n} \geq |A^*|^{2n}.$$

When  $n = 1$  and  $n = \frac{1}{2}$ ,  $A$  is said to be hyponormal, respectively.

The main objective of this work is to give more informations on the basic properties of  $n$ -hyponormal operators

### Keywords

Hilbert space, operator, hyponormal,  $n$ -hyponormal .

### Résumé

Soient  $H$  un espace de Hilbert complexe et  $B(H)$  l'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés sur  $H$ .

Pour  $A \in B(H)$ , on note par  $A^*$  ; l' adjoint de l'opérateur  $A$ , pour un opérateur  $A \in B(H)$  ; soient  $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$  et  $|A^*| = (AA^*)^{\frac{1}{2}}$ .

Pour  $0 < n \leq 1$ ,  $A$  est un opérateur  $n$ -hyponormal si :

$$|A|^{2n} \geq |A^*|^{2n}.$$

Si  $n = 1$  et  $n = \frac{1}{2}$ ,  $A$  est dit hyponormal, respectivement.

L'objectif principal de ce travail est de donner plus d'informations sur les propriétés des opérateurs  $n$ -hyponormaux.

**Mots clefs:** Espace de Hilbert, opérateur, hyponormal, ,  $n$ -hyponormal .

# Table des matières

<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Espace normé</b>	<b>2</b>
1.1 Espace de Banach . . . . .	2
1.1.1 Espace produits . . . . .	2
1.1.2 Opérateurs continus . . . . .	3
1.1.3 Opérateurs bornés . . . . .	3
1.1.4 Espaces isomorphes . . . . .	6
1.1.5 Espaces isométriques . . . . .	7
1.1.6 Normes équivalentes . . . . .	7
1.2 Espace de Hilbert . . . . .	11
1.3 Opérateurs continus . . . . .	14
1.3.1 Linéarité des opérateurs . . . . .	14
1.3.2 Continuité des opérateurs linéaires . . . . .	15
1.3.3 Opérateurs bornés . . . . .	15
1.4 Opérateurs compacts . . . . .	18
1.4.1 Opérateurs linéaire compacts . . . . .	18
1.4.2 Ensembles relativement compacts . . . . .	18
1.4.3 opérateurs linéaire positifs . . . . .	23
1.4.4 Opérateur adjoint . . . . .	23
1.5 Opérateur inverse . . . . .	24
<b>2 Opérateurs normaux</b>	<b>25</b>
2.1 Opérateur normaloïde . . . . .	27
2.2 Opérateur n-power hyponormaux . . . . .	28
2.3 Propriétés des opérateurs n-hyponormaux . . . . .	30

# Introduction

Tout au long de cet article,  $B(H)$  désigne l'algèbre de tous les opérateurs linéaires bornés agissant sur un espace de Hilbert complexe  $H$ . Un opérateur  $A$  est dit opérateur  $n$ -normal si  $A^n A^* = A^* A^n$ ; normal si  $AA^* = A^*A$  (il est clair qu'un opérateur normal uni est un opérateur  $n$ -normal pour tout  $n$ ); auto-adjoint si  $A^* = A$  positif si  $A^* = A$  et  $\langle Ax, x \rangle \geq 0$  pour tout  $x \in H$ , et  $seky$ -normal si  $A^2 = A^{*2}$ ; projection si  $A^2 = A = A^*$  pour un opérateur  $A \in H$ , si  $\|Ax\| = \|x\|$  pour tout  $x \in H$  (ou équivalent  $A^*A = 1$ ), s'appelle alors une isométrie;  $A$  est appelé unitaire si  $AA^* = A^*A = 1$ . Un opérateur sur est appelé hyponormale si  $AA^* \leq A^*A$ .

# Chapitre 1

## Espace normé

**Définition 1.0.1** Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ; on dit que  $E$  est un espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme  $\| \cdot \|$ .

**Proposition 1.0.1** Tout espace vectoriel normé  $(E, \| \cdot \|)$  est un espace métrisable.

### 1.1 Espace de Banach

**Définition 1.1.1** On appelle espace de Banach  $(E, \| \cdot \|)$  tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de sa norme.

#### 1.1.1 Espace produits

Soient  $(E, \| \cdot \|_E)$  et  $(F, \| \cdot \|_F)$  deux espaces vectoriels normés sur le même corps  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ; alors l'espace produit  $E \times F$  défini par

$$G = E \times F = \{(x, y), \text{ tels que } x \in E \text{ et } y \in F\},$$

est un espace vectoriel normé sur  $K$ , par l'une des normes produits suivantes:

- $\|(x, y)\|_1 = \|x\|_E + \|y\|_F ; \forall x \in E, y \in F.$
- $\|(x, y)\|_p = (\|x\|_E^p + \|y\|_F^p)^{\frac{1}{p}} \forall x \in E, y \in F ; 1 < p < \infty.$
- $\|(x, y)\|_\infty = \max\{\|x\|_E, \|y\|_F\} \forall x \in E, y \in F.$

### 1.1.2 Opérateurs continus

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés, un opérateur  $A$  défini sur un sous ensemble  $G \subset E$  dans  $F$  est dit continu au point  $x_0$  de  $G$  si on a, la propriété suivante

Pour toute suite  $x_n$  de  $G$  converge vers  $x_0$ ; la suite  $A(x_n)$  converge vers  $A(x_0)$ ; c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n) = A\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = A(x_0).$$

**Remarque 1.1.1** L'opérateur  $A$  est dit continu sur  $G$ , s'il est continu en chaque point de l'ensemble  $G$ .

**Théorème 1.1.1** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés, un opérateur linéaire  $A$  défini sur un sous ensemble  $G \subset E$  dans  $F$ ; est dit continu partout sur  $G$  s'il est continu en un point  $x_0$  de  $G$ .

**Démonstration.** Soit  $x_n$  une suite convergente vers  $x$  alors cette suite peut s'écrire comme sous la forme

$$\begin{aligned} x_n &= [x_0 + (x_n - x)] + (x - x_0) \\ &= y_n + (x - x_0) \end{aligned}$$

Il est clair que la suite  $y_n$  est une suite convergente vers l'élément  $x_0$

$$\lim y_n = \lim [x_0 + (x_n - x)] = x_0,$$

la composition des deux membres par l'opérateur  $A$ ; donne

$$\begin{aligned} A(x_n) &= A(x_0 + (x_n - x)) + A(x - x_0) \\ &= A(y_n) + A(x - x_0). \end{aligned}$$

L'opérateur  $A$  étant continu au point  $x_0$  alors, il vient

$$\begin{aligned} \lim A(x_n) &= \lim A(y_n) + A(x - x_0) \\ &= A(x_0) + A(x) - A(x_0) \\ &= A(x). \end{aligned}$$

■

### 1.1.3 Opérateurs bornés

Un opérateur linéaire  $A$  défini sur  $E$  dans  $F$  est dit borné s'il existe une constante positive  $C > 0$ , telle que

$$\|A(x)\|_F \leq C \|x\|_E \quad \forall x \in E. \quad (1.1)$$

**Proposition 1.1.1** *La plus petite des constantes  $C$  vérifiant la relation (1.1) est appelée norme de  $A$  notée  $\|A\|$  et donnée par*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F = \sup_{\|x\|\leq 1} \|A(x)\|_F. \quad (1.2)$$

**Démonstration.** En effet, de la relation (1.1), les constantes  $C$  s'écrivent

$$\frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq C, \forall x \in E, x \neq 0.$$

D'où, il est simple de voir que la plus petite des constantes  $C$  notée  $\|A\|$  s'écrit comme suit

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

De plus, on écrit

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} \\ &= \sup_{x \neq 0} \left\| \frac{1}{\|x\|_E} A(x) \right\|_F \\ &= \sup_{x \neq 0} \left\| A \left( \frac{x}{\|x\|_E} \right) \right\|_F \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F. \end{aligned}$$

D'où la deuxième égalité

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F.$$

Pour la troisième égalité, il est clair que l'on a la relation

$$\sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|\leq 1, x \neq 0} \|A(x)\|_F.$$

De plus, pour tout  $x \in E$  tel que  $\|x\| \leq 1$  et  $x \neq 0$ , on écrit

$$\begin{aligned} \|A(x)\| &= \|x\|_E \left\| A \left( \frac{x}{\|x\|_E} \right) \right\|_F \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F, \end{aligned}$$

ou encore

$$\|A(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F$$

Passons au supremum sur la boule fermée  $\overline{B(0, 1)}$  des deux membres, on obtient

$$\sup_{\|x\|\leq 1, x \neq 0} \|A(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F.$$

Des deux inégalités précédentes, on tire la relation suivant

$$\sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F = \sup_{\|x\|\leq 1, x\neq 0} \|A(x)\|_F$$

D'où la troisième égalité

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1, x\neq 0} \|A(x)\|.$$

■

**Proposition 1.1.2** *La norme  $\|A\| = \sup \|A(x)\|_F$  sur la boule unité est toujours finie pour tout opérateur continu.*

**Démonstration.** Supposons que la norme  $\|A\|$  n'est pas finie, cela veut dire que l'on peut trouver un élément  $x$  de  $E$ ; tel que

$$\|x\| \leq 1, \text{ et } \sup \|A(x)\|_F = \infty,$$

ou encore il existe une suite  $x_n$  de  $E$  telle que

$$\|x_n\| \leq 1 \text{ et } \|A(x_n)\|_F = \alpha_n$$

avec

$$\lim \alpha_n = \infty$$

Définissons la suite  $y_n$  par

$$y_n = \frac{x_n}{\alpha_n}.$$

Il est à noter que cette suite converge vers l'élément 0, c'est à dire  $\lim y_n = 0$ :

D'où, il vient  $\lim$

$$\begin{aligned} \|A(x_n)\|_F &= \lim \frac{1}{\alpha_n} \|A(x_n)\|_F \\ &= \lim \frac{\alpha_n}{\alpha_n} = 1 \end{aligned}$$

Contradiction avec le fait que  $A$  est un opérateur linéaire continu, car on doit avoir la relation de la continuité

$$\lim y_n = 0 \Rightarrow \lim \|A(y_n)\|_F = 0,$$

ce qui affirme que la constante  $C = \|A\|$  est finie pour tout opérateur  $A$  linéaire et continu. ■

**Théorème 1.1.2** *Un opérateur linéaire  $A$  est continu, si et seulement si, il est borné.*

**Démonstration.** *Condition suffisante.* Supposons que l'opérateur  $A$  est borné alors, on a

$$\|A(x)\|_F \leq C \|x\|_F,$$

ou encore

$$\|A(x) - A(0)\|_F \leq C \|x - 0\|_E.$$

D'où la continuité de l'opérateur  $A$  au point 0. Autrement dit,  $\lim A(x) = A(0)$  lorsque  $\lim x = 0$ .

Ce qui entraîne la continuité partout.

*Condition nécessaire.* Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $E$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in \overline{B(0,1)} = \{x \in E, \|x\|_E \leq 1\}, \\ \text{et} \\ y \in S(0,1) = \{y \in E, \|y\|_E = 1\}. \end{array} \right.$$

Il est clair que l'on a la relation

$$\|A(y)\|_F \leq \sup \|A(x)\|_F = \|A\|.$$

D'autres part, pour tout  $x \in E$  tel que  $x \neq 0$ , on a  $\frac{x}{\|x\|_E} \in S(0,1)$  cela veut dire que l'on a

$$\left\| A \left( \frac{x}{\|x\|_E} \right) \right\|_F \leq \|A\|$$

ou encore

$$\frac{1}{\|x\|_E} \|A(x)\|_F \leq \|A\|,$$

ce qui implique la relation

$$\|A(x)\|_F \leq \|A\| \|x\|_E.$$

D'où l'opérateur  $A$  est borné, car la constante  $\|A\|$  est toujours finie pour les opérateurs  $A$  continus.

■

#### 1.1.4 Espaces isomorphes

Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces vectoriels normés, on dit que  $E$  et  $F$  sont isomorphes, s'il existe un opérateur homéomorphe  $A$  défini sur  $E$  dans  $F$ . c'est à dire

- $A$  est bijectif sur  $E$  dans  $F$ .
- $A$  et  $A^{-1}$  sont des opérateurs continus.

### 1.1.5 Espaces isométriques

Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces vectoriels normés, on dit que  $E$  et  $F$  sont isométriques, s'il existe une isométrie  $A$  appliquant  $E$  dans  $F$ , c'est à dire,

$$\|A(x)\|_F = \|x\|_E \text{ pour tout } x \in E.$$

**Remarque 1.1.2** *La notion d'isométrie est plus forte que celle de l'isomorphie.*

### 1.1.6 Normes équivalentes

Soit  $E$  un espace vectoriel muni de deux normes  $(E, \|\cdot\|_1)$  et  $(E, \|\cdot\|_2)$ ; on dit que les deux normes sont équivalentes, si on peut trouver deux constantes positives  $\alpha$  et  $\beta$ , telles que

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1, \forall x \in E.$$

Autrement dit, les deux normes sont dites équivalentes si et seulement si, l'application identique de  $E$  dans  $E$  soit un isomorphisme entre les espaces normés  $(E, \|\cdot\|_1)$  et  $(E, \|\cdot\|_2)$ .

**Théorème 1.1.3** *Dans un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

**Démonstration.** Soit  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  une base de  $E$ , alors pour tout élément  $x \in E$  on écrit

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i; \text{ avec } \alpha_i \in K, 1 \leq i \leq n.$$

Définissons sur  $E$  deux normes  $(E, \|\cdot\|)$  et  $(E, N)$ ; alors, pour tout  $x, y \in E$ , tel que

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, y = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i,$$

on a la relation

$$\begin{aligned} |N(x) - N(y)| &\leq N(x - y) \\ &= N\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^n \beta_i e_i\right) \\ &= N\left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i| N(e_i)\right). \end{aligned}$$

Cette inégalité entraîne la continuité de la norme  $N$  sur  $E$  car on a

$$\lim N(x) = N(y) \text{ lorsque } \lim x = y.$$

Etant donné que la sphère  $S(0, 1) = \{x \in E, \|x\| = 1\}$  est compact comme un ensemble fermé et borné dans un espace  $E$  de dimension finie et  $N(x)$  une fonction continue positive, alors cette fonction est uniformément continue et atteint ses bornes sur la sphère, c'est à dire

$$\exists M > 0, \exists m > 0; \text{ telle que } m \leq \left( \frac{x}{\|x\|} \right) \leq M,$$

ou encore

$$m \|x\| \leq N(x) \leq M \|x\|.$$

■

**Lemme 1.1.1** *Tout espace normé  $(E, \|\cdot\|)$  de dimension finie est complet.*

**Démonstration.** Soit  $x_n$  une suite de Cauchy de  $E$ , alors la suite est bornée dans un espace de dimension finie. D'où on peut extraire une sous suite  $x_{n_k}$  convergente vers un élément  $x$  de  $E$  ce qui implique que la suite  $x_n$  converge aussi vers le même élément  $x$  de  $E$ . D'où la complétude de l'espace  $E$ . ■

**Corollaire 1.1.1** *Tout sous espace  $F$  de dimension finie d'un espace normé  $(E, \|\cdot\|)$  est complet*

En effet,  $F$  est de dimension finie toute ses normes sont équivalente. De plus  $F$  est isomorphe à  $\mathbb{k}^n$  qui est complet et par conséquent  $F$  est complet dans  $E$ .

**Lemme 1.1.2** *Tout espace Banach  $(E, \|\cdot\|)$  est fermé.*

**Démonstration.** Soit  $x_n$  une suite d'éléments de  $E$  convergente vers  $x$ , alors  $x_n$  est une suite de Cauchy dans un espace complet  $E$ . D'où  $x_n$  est convergente dans  $E$ . ■

**Corollaire 1.1.2** *Tout sous espace  $F$  complet d'un espace normé  $(E, \|\cdot\|)$  est fermé*

En effet, soit  $x_0 \in \overline{F}$  alors il existe une suite  $x_n$  d'éléments de  $F$  convergente vers  $x_0$  dans  $E$ , la suite convergente  $x_n$  est de Cauchy dans  $F$  complet ce qui implique que la suite  $x_n$  est convergente dans  $F$ , la limite étant unique. D'où  $x_0 \in F$ . Autrement dit,  $F = \overline{F}$  ou encore  $F$  fermé.

**Corollaire 1.1.3** *Tout sous espace  $F$  de dimension finie d'un espace normé  $(E, \|\cdot\|)$  est fermé.*

En effet, il est clair que l'espace de dimension finie  $F$  est complet et par conséquent  $F$  est fermé.

**Remarque 1.1.3** *Tout sous espace  $F$  de dimension infinie d'un espace normé  $(F, \|\cdot\|)$  n'est pas nécessairement fermé.*

En effet, il suffit de prendre  $E = C([a, b])$  l'espace des fonctions continues sur  $[a; b]$  muni de la norme uniforme

$$\|x\| = \max_{t \in [a, b]} \|x(t)\|,$$

et soit  $F$  l'ensemble des polynômes qui est un sous espace de  $C([a, b])$ , non fermé car d'après *Weierstrass* on a, toute fonction continue sur  $[a; b]$  est une limite d'une suite uniformément convergente de Polynômes. Autrement dit, la fermeture de  $\overline{F}$  coïncide avec  $C([a, b])$ .

**Théorème 1.1.4** *Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés. L'ensemble  $L(E, F)$  de tous les opérateurs  $A$  linéaires continus sur  $E$  dans  $F$  muni de la norme  $\|A\|$  est un espace normé.*

**Démonstration.** Soit  $A \in L(E, F)$  avec  $\|A\| = 0$ , la relation de la continuité

$$\|A(x)\| \leq \|A\| \|x\|,$$

nous donne la nullité de l'opérateur  $A$ , c'est à dire

$$A(x) = 0, \forall x \in E.$$

D'où la relation  $A = 0$

- Soit  $A_1, A_2 \in L(E, F)$  alors, on a  $A_1 + A_2 \in L(E, F)$ , c'est à dire

$$\|A_1(x) + A_2(x)\| \leq \|A_1 + A_2\| \|x\|$$

De plus on a, aussi

$$\begin{aligned} \|A_1(x) + A_2(x)\| &\leq \|A_1(x)\| + \|A_2(x)\| \\ &\leq \|A_1\| \|x\| + \|A_2\| \|x\| \\ &\leq (\|A_1\| + \|A_2\|) \|x\|. \end{aligned}$$

Notons que  $\|A_1 + A_2\|$  est une borne supérieure. Autrement dit, le plus petit des majorants vérifiant l'inégalité. D'où la relation

$$\|A_1 + A_2\| \leq \|A_1\| + \|A_2\|.$$

- Soit  $A \in L(E, F)$  et  $\lambda \in \mathbb{k}$  alors, on a  $\lambda A \in L(E, F)$ , c'est à dire

$$\|\lambda A(x)\| \leq \|\lambda A\| \|x\|$$

De plus on a, aussi

$$\begin{aligned}\|\lambda A(x)\| &= |\lambda| \|A(x)\| \\ &\leq |\lambda| \|A\| \|x\|.\end{aligned}$$

Notons que  $\|\lambda A\|$  est une borne supérieure. Autrement dit, le plus petit des majorants vérifiant l'inégalité.

D'où la relation

$$\|\lambda A\| \leq |\lambda| \|A\|.$$

D'autres part on a, la relation

$$\|A(x)\| \leq \|A\| \|x\|,$$

ou encore

$$\begin{aligned}\|A(x)\| &= \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda A(x)\| \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda A\| \|x\|\end{aligned}$$

Notons que  $\|A\|$  est une borne supérieure. Autrement dit, le plus petit des majorants vérifiant l'inégalité.

D'où la relation

$$\|A\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda A\|$$

ou encore

$$|\lambda| \|A\| \leq \|\lambda A\|$$

Des deux inégalités précédentes, on déduit l'égalité

$$|\lambda| \|A\| = \|\lambda A\|.$$

■

**Théorème 1.1.5** *Soit  $E$  un espace normé et  $F$  un espace de Banach, alors  $L(E, F)$  est un espace de Banach.*

**Démonstration.** En effet, soit  $\{A_n\}$  une suite de Cauchy d'éléments de  $L(E, F)$ ,

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N_\varepsilon; \forall p, q \geq N_\varepsilon \|A_p - A_q\| \leq \varepsilon$$

alors, pour tout  $x \in E$ ; on a

$$\begin{aligned}\|A_p(x) - A_q(x)\| &= \|(A_p - A_q)(x)\| \\ &\leq \|A_p - A_q\| \|x\| \\ &< \varepsilon \|x\|\end{aligned}$$

D'où, on tire que  $\{A_n(x)\}$  est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach  $F$ , alors  $A_n(x)$  converge dans  $F$  vers un opérateur  $A(x)$ . Passons à la limite des deux membres, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_p(x) - A_q(x)\| = \|A(x) - A_q(x)\| < \varepsilon \|x\|, \forall q \geq N_\varepsilon,$$

d'où l'opérateur  $B(x) = A(x) - A_q(x)$  est borné donc continu de  $E$  dans  $F$ , il est un élément de  $L(E, F)$ , c'est à dire

$$\|A(x) - A_q(x)\| \leq \|A - A_q\| \|x\|.$$

Notons que  $\|A - A_q\|$  est une borne supérieure. Autrement dit, le plus petit des majorants vérifiant l'inégalité. ■

D'où la relation

$$\|A - A_q\| < \varepsilon.$$

Ce qui prouve la convergence de la suite  $A_q$  vers  $A$  dans  $L(E, F)$ . L'opérateur  $A$  est un élément de  $L(E, F)$  comme différence de deux opérateurs continus

$$A(x) = B(x) - A_q(x).$$

## 1.2 Espace de Hilbert

**Définition 1.2.1** *On appelle espace de Hilbert tout espace euclidien  $H$  complet au sens de la métrique associée à sa norme*

$$\rho(f, g) = \|f - g\|.$$

**Remarque 1.2.1** *Généralement l'espace  $H$  est séparable est de dimension infinie, en d'autres termes, il existe un ensemble dénombrable partout dense dans  $H$  et pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $n$  vecteurs dans  $H$  linéairement indépendants.*

**Théorème 1.2.1 ((Riesz-Fischer))** *Soit  $\{\varphi_k\}$  un système orthonormé dans un espace de Hilbert  $H$ , et soient les valeurs  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots$  telles que la série  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$  soit convergente, alors on peut trouver un vecteur  $f \in H$ , tel que*

$$\alpha_i = \langle f, \varphi_i \rangle \forall i = 1, 2, \dots$$

et de plus, on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 = \|f\|^2.$$

**Démonstration.** Soit  $\{f_n\}$  la suite des sommes partielles donnée par

$$f_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k.$$

De la convergence de la série  $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$  on déduit que la suite  $\{f_n\}$  est de Cauchy, bien entendu pour des valeurs entières  $p$  et  $q$  assez grandes, telles que  $p \leq q$ , on a

$$\|f_p - f_q\|^2 = \sum_{i=p+1}^q |\alpha_i|^2 < \varepsilon.$$

L'espace  $H$  étant de Hilbert, alors la suite  $\{f_n\}$  est une suite convergente vers un élément  $f$  de  $H$ . D'où de la relation  $f = f_n + (f - f_n)$ , et de la composition du système  $\{f_n\}$  avec les deux membres, on obtient

$$\langle f, \varphi_i \rangle = \langle f_n, \varphi_i \rangle + \langle f - f_n, \varphi_i \rangle.$$

Le second terme  $\langle f - f_n, \varphi_i \rangle$  de la somme figurant au second membre tend vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$  et cela due à la continuité du produit scalaire, car

$$|\langle f - f_n, \varphi_i \rangle| \leq \|f - f_n\| \|\varphi_i\|,$$

tandis que le premier terme  $\langle f_n, \varphi_i \rangle$  de la somme figurant au second membre coïncide avec la valeur  $\alpha_i, \forall i \leq n$  d'où la relation  $\langle f, \varphi_i \rangle = \langle f_n, \varphi_i \rangle = \alpha_i$  pour tout  $i \leq n$  ce qui entraîne

$$\langle f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \rangle = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2.$$

Passant à la limite quand  $n \rightarrow \infty$ , on obtient l'égalité de Parseval

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$$

■

**Théorème 1.2.2** Soit  $\{\varphi_k\}$  un système orthonormé d'éléments d'un espace de Hilbert  $H$ , pour que ce système soit complet, il faut et il suffit que, le seul vecteur de  $H$  orthogonal au système  $\{\varphi_k\}$  est le vecteur nul. Cela signifie qu'il n'existe pas un vecteur non nul de  $H$ , qui soit orthogonal à tous les vecteurs du système  $\{\varphi_k\}$ .

**Démonstration.** Soit  $f$  un élément de  $H$ , orthogonal à tous les vecteurs du système complet  $\{\varphi_k\}$ , alors tous ses coefficients de Fourier sont nuls,  $\langle f, \varphi_i \rangle = 0; \forall i = 1, 2, \dots$  le système  $\{\varphi_k\}$  étant complet donc fermé. D'où l'égalité de Parseval

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2,$$

qui implique que  $f = 0$ .

Inversement, si le système  $\{\varphi_k\}$  n'est pas complet il existerait dans  $H$  un vecteur non nul  $g$  qui réalise l'inégalité de Bessel

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle g, \varphi_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 \leq \|g\|^2,$$

et d'après le théorème de *Riesz – Fisher*, on peut trouver un élément  $f$  de  $H$ , tel que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 = \|f\|^2,$$

il est aisé de voir que le vecteur non nul  $f - g$  est orthogonal au système  $\{\varphi_i\}$  d'où la condition suffisante. ■

**Théorème 1.2.3** *Tous les espaces de Hilbert séparables sont isomorphes entre eux.*

**Démonstration.** Soit  $H$  un espace de Hilbert séparable, il existe alors un système orthonormé et complet  $\{\varphi_k\}$  tel que, pour tout vecteur  $f \in H$  il existe une suite  $\{\alpha_k\}$  de coefficients de Fourier telle que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x)$$

avec  $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty$ . cette condition nous affirme que la suite  $\{\alpha_k\}$  est un élément de  $l_2$ .

Réciproquement, soit  $\{\alpha_k\}$  une suite d'éléments de  $l_2$ , c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty,$$

il existe alors, d'après le théorème de *Riesz – Fischer* un vecteur  $f \in H$  tel que,

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$$

avec

$$\alpha_k = \langle f, \varphi_k \rangle$$

d'où l'existence d'un isomorphisme entre les espaces de Hilbert séparables et l'espace  $l_2$ .

En effet, si les éléments  $f, g \in H$  ayant pour coefficients de Fourier respectivement les suites  $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\} \in l_2$ , alors les vecteurs  $f + g$  et  $\lambda f$  de  $H$  ont comme coefficients de Fourier respectives  $\{\alpha_k + \beta_k\}$  et  $\{\lambda\alpha_k\}$ , de plus

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \overline{\beta_k}$$

car, d'après l'égalité de Parseval

$$\langle f, f \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2, \langle g, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2,$$

et

$$\langle f + g, f + g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k + \beta_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k + \beta_k) \overline{(\alpha_k + \beta_k)}$$

on a

$$\begin{aligned} \langle \langle f + g, f + g \rangle \rangle &= \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \overline{\beta_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\alpha_k} \beta_k + \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2. \end{aligned}$$

D'où l'égalité au dessus, en d'autres termes, l'isomorphisme entre les espaces de Hilbert séparables  $H$  et l'espace de Hilbert  $l_2$ , signifie qu'il existe une application bijective entre  $H$  et  $l_2$ , de plus, la somme des vecteurs, la multiplication des vecteurs par un nombre  $\lambda$  et le produit scalaire dans  $H$  sont les mêmes que la somme des coordonnées des vecteurs, la multiplication des coordonnées des vecteurs par un nombre  $\lambda$  et le produit scalaire dans  $l_2$ . Comme il est connu en algèbre linéaire, que tous les espaces vectoriels ou euclidiens de mêmes dimensions finies ne sont isomorphes entre eux, car chacun est isomorphe à l'espace  $\mathbb{k}^n$ , alors de même tous les espaces de Hilbert sont isomorphes entre eux, car chacun est isomorphe à  $l_2$ . ■

## 1.3 Opérateurs continus

### 1.3.1 Linéarité des opérateurs

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés, un opérateur  $A$  défini sur  $E$  dans  $F$  est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes

- Condition additive

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E, \text{ on a } A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2).$$

- Condition homogène

$$\forall \varphi \in E, \lambda \in \mathbb{k} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \text{ on a } A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi).$$

### 1.3.2 Continuité des opérateurs linéaires

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés, un opérateur linéaire  $A$  défini sur un sous ensemble  $G \subset E$  dans  $F$  est dit continu au point  $x_0$  de  $G$  si, on a la propriété suivante:

Pour toute suite  $x_n$  de  $G$  converge vers  $x_0$ , la suite  $A(x_n)$  converge vers  $A(x_0)$  c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n) = A\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = A(x_0).$$

**Remarque 1.3.1** *L'opérateur linéaire  $A$  est dit continu sur  $G$ , s'il est continu en chaque point de l'ensemble  $G$ .*

**Théorème 1.3.1** *Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés, un opérateur linéaire  $A$  défini sur un sous ensemble  $G \subset E$  dans  $F$ , est dit continu partout sur  $G$  s'il est continu en point  $x_0$  de  $G$ .*

**Démonstration.** Soit  $x_n$  une suite convergente vers  $x$  alors, cette suite peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned} x_n &= [x_0 + (x_n - x)] + (x - x_0) \\ &= y_n + (x - x_0). \end{aligned}$$

Il est clair que la suite  $y_n$  est une suite convergente vers l'élément  $x_0$

$$\lim y_n = \lim [x_0 + (x_n - x)] = x_0$$

La composition des deux membres par l'opérateur  $A$ , donne

$$\begin{aligned} A(x_n) &= A(x_0 + (x_n - x)) + A(x - x_0) \\ &= A(y_n) + A(x - x_0). \end{aligned}$$

L'opérateur  $A$  étant continu au point  $x_0$  alors, il vient

$$\begin{aligned} \lim A(x_n) &= \lim A(y_n) + A(x - x_0) \\ &= A(x_0) + A(x) - A(x_0) \\ &= A(x) \end{aligned}$$

■

### 1.3.3 Opérateurs bornés

Un opérateur linéaire  $A$  défini sur  $E$  dans  $F$  est dit borné s'il existe une constante positive  $C > 0$ , telle que

$$\|A(x)\|_F \leq C \|x\|_E, \forall x \in E. \quad (1.3)$$

**Proposition 1.3.1** *La plus petite des constantes  $C$  vérifiant la relation (1.3) est appelée norme de  $A$  notée  $\|A\|$  et donnée par*

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F = \sup_{\|x\| \leq 1, x \neq 0} \|A(x)\|_F \quad (1.4)$$

**Démonstration.** En effet, de la relation (1), les constantes  $C$  s'écrivent

$$\frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq C, \forall x \in E, x \neq 0,$$

d'où, il est simple de voir que la plus petite des constantes  $C$  notée  $\|A\|$  s'écrit comme suit

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

De plus, on a aussi

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} \\ &= \sup_{x \neq 0} \left\| \frac{1}{\|x\|_E} A(x) \right\|_F \\ &= \sup_{x \neq 0} \left\| A \left( \frac{x}{\|x\|_E} \right) \right\|_F \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F. \end{aligned}$$

D'où la deuxième égalité

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F.$$

Pour la troisième égalité, il est clair que l'on a la relation

$$\sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F \leq \sup_{\|x\| \leq 1, x \neq 0} \|A(x)\|_F.$$

De plus, pour tout  $x \in E$  tel que  $\|x\| \leq 1$  et  $x \neq 0$ , on écrit

$$\begin{aligned} \|A(x)\|_F &= \|x\|_E \left\| A \left( \frac{x}{\|x\|_E} \right) \right\|_F, \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F, \end{aligned}$$

ou encore

$$\|A(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F.$$

Passons au supremum sur la boule fermée  $\overline{B}(0, 1)$  des deux membres, on obtient

$$\sup_{\|x\| \leq 1, x \neq 0} \|A(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F.$$

Des deux inégalités précédentes, on tire la relation suivante

$$\sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F = \sup_{\|x\|\leq 1, x\neq 0} \|A(x)\|_F.$$

D'où la troisième égalité

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1, x\neq 0} \|A(x)\|_F.$$

■

**Proposition 1.3.2** *La norme  $\|A\| = \sup \|A(x)\|_F$  sur la boule unité est toujours finie pour tout opérateur linéaire continu.*

**Démonstration.** Supposons que la norme  $A$  n'est pas finie, cela veut dire que l'on peut trouver un élément  $x$  de  $E$ , tel que

$$\|x\| \leq 1, \text{ et } \sup \|A(x)\|_F = \infty,$$

ou encore il existe une suite  $x_n$  de  $E$  telle que

$$\|x_n\| \leq 1, \text{ et } \|A(x_n)\|_F = \alpha_n,$$

avec

$$\lim \alpha_n = \infty.$$

Définissons la suite  $y_n$  par

$$y_n = \frac{x_n}{\alpha_n}.$$

Il est à noter que cette suite converge vers l'élément 0, c'est à dire  $\lim y_n = 0$ , d'où, on obtient

$$\begin{aligned} \|A(y_n)\|_F &= \lim \frac{1}{\alpha_n} \|A(x_n)\|_F \\ &= \lim \frac{\alpha_n}{\alpha_n} = 1 \end{aligned}$$

Contradiction avec le fait que  $A$  est un opérateur linéaire continu, car on doit avoir la relation de la continuité

$$\lim y_n = 0 \Rightarrow \lim \|A(y_n)\|_F = 0,$$

ce qui affirme que la constante  $C = \|A\|$  est finie pour tout opérateur  $A$  linéaire et continu. ■

**Théorème 1.3.2** *Un opérateur linéaire  $A$  est continu, si et seulement si, il est borné.*

**Lemme 1.3.1** *Soit  $x_n$  une suite de Cauchy dans un espace normé  $(E, \|\cdot\|)$  contient une sous suite  $x_{n_k}$  convergente vers  $x$  alors la suite  $x_n$  est aussi convergente vers le même élément  $x$ .*

**Corollaire 1.3.1** *Soit  $F$  un sous espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé  $E$ , alors  $F$  est complet dans  $E$ . En effet,  $F$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^n$  qui est complet et par conséquent  $F$  est complet dans  $E$ .*

## 1.4 Opérateurs compacts

### 1.4.1 Opérateurs linéaire compacts

Soit  $A$  un opérateur linéaire d'un espace normé  $E$  dans un espace normé  $F$ , on dit que  $A$  est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné  $G$  dans  $E$  à un ensemble relativement compact  $A(G)$  dans  $F$ . Autrement dit, la fermeture  $\overline{A(G)}$  est compacte

### 1.4.2 Ensembles relativement compacts

Un ensemble  $G \subset E$  est relativement compact si pour toute suite  $\{U_n\}$  de  $G$ , il existe une sous suite  $\{U_{n(k)}\}$  qui converge dans  $F$ .

**Théorème 1.4.1 (critère de compacité)** *un opérateur linéaire  $A: E \rightarrow F$  est compacte si et seulement si pour toute suite bornée  $\varphi_n$  de  $E$ , la suite  $A\varphi_n$  contient une sous suite convergente de  $F$ .*

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer les définitions appropriées d'un ensemble borné et un ensemble relativement compacte.

**Théorème 1.4.2** *Une combinaison linéaire  $A = \alpha A_1 + \beta A_2$  des opérateurs compacts est un opérateur compact.*

*Démonstration.* soit  $\{\varphi_n\}$  une suite bornée de  $E$  soit  $\{A\varphi_n\}$  une suite de  $F$ , alors

$$A\varphi_n(x) = \alpha A_1\varphi_n(x) + \beta A_2\varphi_n(x)$$

avec  $\varphi_n \in E, n \in \mathbb{N}$ .

$A_1$  et  $A_2$  étant compacts, on peut extraire de  $\{A_1\varphi_n\}$  et de  $\{A_2\varphi_n\}$  deux sous suites convergentes qui donne par leur somme une sous suite convergente de  $\{A\varphi_n\}$ , donc  $A$  est compact. ■

■

**Théorème 1.4.3** *Le produit  $AB$  de deux opérateurs bornés  $A$  et  $B$  est compact si l'un des opérateurs  $A$  ou  $B$  est compact.*

*Démonstration.* Soit  $\{\varphi_n\}$  une suite bornée de  $E$ , alors si  $B$  est un opérateur borné la suite  $B\varphi_n(x)$  est aussi bornée, et de la compacité de l'opérateur  $A$  il existe une sous suite de  $A(B\varphi_n(x))$  qui converge, ce qui implique que  $AB$  est compact. D'autre part si  $B$  est compact, on peut extraire de la suite  $B\varphi_n(x)$  une sous suite convergente  $B\varphi_{n(k)}(x)$ , et de la continuité de l'opérateur  $A$  car il est borné la suite  $A(B\varphi_{n(k)}(x))$  converge, ce qui implique que  $AB$  est compact.

**Théorème 1.4.4** Soit  $E$  un espace normé et  $F$  un espace de Banach, et soit  $\{A_n\}$  une suite d'opérateurs compacts de  $E$  dans  $F$ , convergente en norme vers l'opérateur linéaire  $A$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$$

Alors  $A$  est compact.

**Démonstration.** Soit  $\{\varphi_n\}$  une suite bornée de  $E$ , l'opérateur  $A_n$  étant compact, on peut extraire de la suite  $\{A\varphi_n\}$  une sous suite convergente; soit  $\{\varphi_n^1\}$  une sous suite de  $\{\varphi_n\}$  telle que,  $\{A_1\varphi_n^1\}$  soit convergente.

De la même façon, on peut extraire de la suite  $\{A_2\varphi_n^1\}$  une sous suite convergente, car  $A_2$  est compact; soit  $\{\varphi_n^2\}$  une sous suite de  $\{\varphi_n^1\}$  telle que, la suite  $\{A_2\varphi_n^2\}$  soit convergente.

Remarquons que, la suite  $\{A_1\varphi_n^2\}$  est une sous suite de la suite convergente  $\{A_1\varphi_n^1\}$  qui à son tour convergente.

En raisonnant de la même façon, pour les opérateurs  $A_1, A_2, \dots, A_p, \dots$ , on détermine les suites  $\{\varphi_n^1\}, \{\varphi_n^2\}, \dots, \{\varphi_n^p\}, \dots$ . Il est à remarquer que la suite  $\{\varphi_n^p\}$  est une sous suite de toutes les suites qui lui précèdent et que les suites  $\{A_k\varphi_n^p\}$  sont convergentes pour  $(k = 1, 2, \dots, p)$ .

Comme l'espace  $Y$  est complet, pour la compacité de l'opérateur  $A$  il suffit de montrer que la suite  $\{A\varphi_n^p\}$  est une suite Cauchy, alors

$$\|A\varphi_n^p - A\varphi_n^q\| \leq \|A\varphi_n^p - A_n\varphi_n^p\| + \|A_n\varphi_n^p - A_n\varphi_n^q\| + \|A_n\varphi_n^q - A\varphi_n^q\|$$

Soit  $\|\varphi_n\| \leq M$ ; choisissons  $n$  de sorte que l'on a  $\|A - A_n\| < \frac{\varepsilon}{3M}$ , ensuite choisissons  $N$  tel que, pour tous les  $p > N$  et  $q > N$ , on a la relation  $\|A_n\varphi_n^p - A_n\varphi_n^q\| < \frac{\varepsilon}{3}$  car la suite  $\{A_n\varphi_n^p\}$  est convergente. Dans ces conditions on aura pour tout  $p$  et  $q$  suffisamment grands

$$\|A\varphi_n^p - A\varphi_n^q\| < \varepsilon$$

■

■

**Théorème 1.4.5** Soit  $A$  un opérateur borné de  $E$  dans  $F$ , à image  $A(E)$  de dimension finie, alors  $A$  est compact.

**Démonstration.** En effet, car l'opérateur  $A$  transforme tout ensemble borné  $G$  de  $E$  à un ensemble borné  $A(G)$  dans un espace de dimension finie  $A(E)$  ce qui implique que  $A(G)$  est pré-compact.

**Lemme 1.4.1** Soit  $G$  un sous espace fermé d'un espace normé  $E$  tel que,  $G \neq E$ , alors il existe un élément  $\varphi \in E$ , avec  $\|\varphi\| = 1$  tel que, pour tout  $\Phi \in G$ , on a

$$\|\varphi - \Phi\| \geq \alpha, \text{ avec } 0 < \alpha < 1.$$

**Démonstration.** En effet, soit  $f$  un élément de  $E$  tel que  $f \notin G$  alors, on a

$$\inf_{\Phi \in G} \|f - \Phi\| = \beta > 0,$$

choisissons un élément  $\Psi \in G$  tel que

$$\beta \leq \|f - \Psi\| \leq \frac{\beta}{\alpha}.$$

Soit  $\varphi$  le vecteur donné par

$$\varphi = \frac{f - \Psi}{\|f - \Psi\|},$$

alors le vecteur  $\varphi$  est de norme égale à l'unité ( $\|\varphi\| = 1$ ).

De plus, on a

$$\|\varphi - \Phi\| = \frac{1}{\|f - \Psi\|} \|f - \{\Psi + (\|f - \Psi\| \Phi)\}\| \geq \frac{\beta}{\|f - \Psi\|} \geq \alpha.$$

■

■

**Théorème 1.4.6** l'opérateur identique  $I$  de  $E$  dans  $F$  est compact si et seulement si  $E$  est de dimension finie .

**Démonstration.** Soit  $\varphi_1$  un élément de  $E$ , tel que  $\|\varphi_1\| = 1$ , alors  $G_1 = \text{span} \{\varphi_1\}$  est un sous espace fermé de  $E$  car  $G_1$  est de dimension finie. D'après Lemme (1.4.1), il existe un élément  $\varphi_2 \in E$ , tel que

$$\|\varphi_2\| = 1 \text{ et } \|\varphi_1 - \varphi_2\| > \frac{1}{2}.$$

Prenons une deuxième fois le sous espace fermé  $G_2 = \text{span} \{\varphi_1, \varphi_2\}$ , il existe alors un élément  $\varphi_3 \in E$  avec

$$\|\varphi_3\| = 1, \|\varphi_1 - \varphi_3\| > \frac{1}{2} \text{ et } \|\varphi_2 - \varphi_3\| > \frac{1}{2}.$$

On répète la même procédure jusqu'à l'obtention d'une suite  $\{\varphi_n\}$  vérifiant  $\|\varphi_n\| = 1$  et  $\|\varphi_n - \varphi_m\| > \frac{1}{2}$ , pour tout  $m \neq n$ .

Il est à remarquer que cette suite  $\{\varphi_n\}$  est bornée mais elle ne contient aucune sous suite convergente.

**Corollaire 1.4.1** La boule unité  $B(0,1)$  dans un espace de dimension infinie n'est pas compact.

En effet, il suffit d'appliquer le théorème 6, car la boule unité  $B(0,1)$  est sa propre image dans l'espace  $X$  de dimension infinie par l'opérateur identique.

**Théorème 1.4.7** Un opérateur compact est un opérateur borné. La réciproque est fausse.

■

**Démonstration.** En effet, si on désigne par

$$B(0,1) = \{x \in X, \|x\| \leq 1\},$$

la boule fermée de rayon l'unité, alors l'ensemble  $\overline{A(B(0,1))}$  est compact, donc borné, c'est à dire

$$\|Ax\| < \infty$$

et par conséquent,  $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| < \infty$ , ce qui signifie que l'opérateur  $A$  est borné. Réciproquement, l'opérateur identique  $I$  de  $E$  dans  $E$  est borné mais il n'est pas compact.

**Théorème 1.4.8** l'opérateur intégrale  $A$  de  $C(G)$  dans  $C(G)$  à noyau continue .

**Démonstration.** Soit  $E$  un ensemble borné de  $C(G)$  alors, on a

$$\|\varphi\| \leq M \text{ pour tout } \varphi \in E.$$

De plus

$$|A\varphi(x)| \leq M |G| \max_{x,y \in G} |k(x,y)|, \forall x \in G \text{ et } \forall \varphi \in E.$$

cela veut dire que  $A(E)$  est borné.

L'opérateur  $K$  est uniformément continu sur le compact  $G \times G$ , d'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y, z \in G, |x - y| < \delta \Rightarrow |k(x,z) - k(y,z)| < \frac{\varepsilon}{M|G|}$$

d'où

$$|A\varphi(x) - A\varphi(y)| < \varepsilon \text{ pour tout } \varphi \in E \text{ et } x, y \in G,$$

avec  $|x - y| < \delta$ .

Ceci exprime que l'ensemble  $A(E)$  est équicontinu, d'où  $A(E)$  est relativement compact d'après le théorème d'Arzelà – Ascoli. Alors  $A$  est compact. ■

■

**Théorème 1.4.9** *L'opérateur intégral  $A$  de  $C(G)$  dans  $C(G)$  à noyau faiblement singulier est un opérateur compact.*

**Démonstration.** Il est à remarquer que l'opérateur

$$A\varphi(x) = \int_G k(x, y) \varphi(y) dy ; x, y \in G$$

existe comme intégrale impropre , car

$$\int_G |x - y|^{\alpha-n} dy \leq \omega_n \int_0^d \rho^{\alpha-n} \rho^{n-1} d\rho = \frac{\omega_n}{\alpha} d^\alpha$$

où  $\omega_n$  désigne la surface de la sphère unité dans  $R^n$ , et  $d$  le diamètre de l'ensemble  $G$ .

Construisons maintenant une suite d'opérateurs compacts  $A_p$ , convergente vers l'opérateur  $A$  et telle que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|A - A_p\| = 0.$$

Soit  $h$  une fonction continue par morceau, définie sur  $[0, \infty[$  à valeurs dans  $R$ , par

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2t - 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq t \leq \infty, \end{cases}$$

le noyau  $K_p$  défini sur  $G \times G$  valeurs dans  $C$ , par  $K_p(x, y) = \begin{cases} h(p|x - y|) & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$  est un noyau continu pour tout  $p \in N$  et par conséquent, les opérateurs intégraux  $A_p$  sont compacts.

De plu

$$\begin{aligned} |A\varphi(x) - A_p\varphi(x)| &= \left| \int_{G \cap |x-y| < \frac{1}{p}} \{1 - h(p|x - y|)\} K(x - y) \varphi(y) dy \right| \\ &\leq M \|\varphi\| \omega_n \int_0^{\frac{1}{p}} \rho^{\alpha-1} \rho^{n-1} d\rho \\ &\leq M \|\varphi\| \frac{\omega_n}{\alpha p^\alpha}, x \in G. \end{aligned}$$

Il est aisé de remarquer que la suite des opérateurs  $A_p\varphi$  converge uniformément vers  $A\varphi$  quand  $p \rightarrow \infty$ , d'où l'opérateur  $A\varphi$  est un élément de  $C(G)$ , de plus

$$\|A - A_p\| \leq M \frac{\omega_p}{\alpha p^\alpha} \rightarrow 0$$

lorsque  $p \rightarrow 0$ . Cela implique que l'opérateur  $A$  est compact. ■

**Théorème 1.4.10** *L'opérateur intégral  $A$  de  $C(\partial G)$  dans  $C(\partial G)$  à noyau continue ou à noyau faiblement singulier est un opérateur compact sur  $C(\partial G)$  si  $\partial G$  est de classe  $C^1$ .*

### 1.4.3 opérateurs linéaire positifs

**Définition 1.4.1** soit  $A$  un opérateur linéaire définie sur un espace de Hilbert  $H$  dans lui même ,on dit que  $A$  est un opérateur positif et que l'on note  $A \geq 0$  ,si pour tout  $\varphi \in H$ , on a

$$\langle A\varphi, \varphi \rangle \geq 0.$$

**Proposition 1.4.1** Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux opérateurs linéaires positifs définis sur un espace de Hilbert  $H$  dans lui même alors, toute combinaison linéaire  $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$  à coefficients réels positifs  $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$  est un opérateur positif.

Pour tout  $A \in L(H)$  on a  $|A| = \sqrt{A^*A}$ .

### 1.4.4 Opérateur adjoint

**Théorème 1.4.11** Soit  $H$  un espace de Hilbert. Alors

$$\forall f \in L(H, \mathbb{k}), \exists y \in H : f(x) = \langle y, x \rangle, \forall x \in H.$$

**Proposition 1.4.2** Soit  $A$  un opérateur linéaire borné défini sur un espace normé  $E$  à valeurs dans un espace normé  $F$  alors, l'opérateur Adjoint  $A^*$  est un opérateur linéaire borné de  $F^*$  dans  $E^*$  . De plus on a

$$\|A\| = \|A^*\|$$

**Proposition 1.4.3 Proposition 1.4.4** Soit  $H_1$  et  $H_2$  deux espace de Hilbert et  $A \in L(H_1, H_2)$ .

Alors il existe un unique  $T^* \in L(H_2, H_1)$  tel que, pour tout  $x \in H_1$  et tout  $y \in H_2$ , on dit

$$\langle Ax, y \rangle_{H_2} = \langle x, Ay \rangle_{H_1}$$

est appelée l'adjoint de  $A$ .

**Exemple 1.4.1** On considère l'opérateur shift  $S : l^2(\mathbb{C}) \rightarrow l^2(\mathbb{C})$  défini par

$$S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

soit  $(x_n)$  et  $(y_n)$  dans  $l^2(\mathbb{C})$  alors:

$$\begin{aligned} \langle S^* x_n, y_n \rangle &= \langle x_n, y_n \rangle \\ &= \langle (x_1, x_2, \dots), (0, y_1, y_2, \dots) \rangle \\ &= x_2 \overline{y_1} + x_3 \overline{y_2} + \dots \\ &= \langle (x_2, x_3, \dots), (y_1, y_2, \dots) \rangle? \end{aligned}$$

donc  $S$  est défini par:

$$S^*(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

## 1.5 Opérateur inverse

**Définition 1.5.1** On dit que  $A \in L(E; F)$  est inversible s'il existe  $B \in L(F; E)$  tel que :

$$AB = I_E, BA = I_F$$

l'opérateur  $B$  (lorsqu'il existe) est unique. On l'appelle l'inverse de  $A$  noté par  $A^{-1}$ .

**Théorème 1.5.1** Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $A \in L(H)$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $A$  est inversible.
2.  $A$  est injectif.
3.  $A$  est surjectif.
4.  $A$  admet un inverse à droite ( i.e. il existe  $U \in L(H)$  tel que  $A \circ U = I_H$ ).
5.  $A$  admet un inverse à gauche ( i.e. il existe  $U \in L(H)$  tel que  $V \circ A = I_H$ ).

**Proposition 1.5.1** Soient  $T, S$  des opérateurs linéaires bijectifs de l'espace de Hilbert  $H$  sur  $H$ , alors l'inverse  $(ST)^{-1}$  du produit (composé)  $(ST)$  existe, défini

$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}.$$

**Définition 1.5.2** Considérons le couple d'espaces de Hilbert  $H_i (i = 1, 2)$ ; et les opérateurs  $A, B \in B(H_1), B(H_2)$  nous désignerons par  $A \otimes B$  le produit tensoriel des opérateurs  $A, B$  qui est l'opérateur bilinéaire continu

$$\otimes : B(H_1) \times B(H_2) \rightarrow B(H_1 \otimes H_2)$$

défini par :

$$(A, B) \rightarrow A \otimes B \text{ et } (A \otimes B)M = \langle A, M \rangle B$$

on peut considérer le  $(A \otimes B)M = B M A^*$ . Le produit tensoriel vérifie

$$(A \otimes B)(X \otimes Y) = (AX \otimes BY)$$

**Définition 1.5.3** Soit  $S$  opérateur de  $B(H)$ , on dit que  $S$  est similaire à un opérateur  $T$ ; s'il existe un opérateur inversible  $A$  tel que :

$$S = A^{-1}TA$$

# Chapitre 2

## Opérateurs normaux

**Définition 2.0.4** On dit que  $A \in B(H)$ . (L'espace d'opérateurs linéaire bornés définies sur  $H$ .) est un opérateur normale si  $A$  commute avec son adjoint i.e.  $A^*A = AA^*$ .

**Exemple 2.0.1** La multiplication  $A_\varphi$  par une fonction mesurable bornée  $\varphi$  est un opérateur normal sur  $L^2([0, 1])$ .

En effet, on a  $(A_\varphi f)(t) = f(t)\varphi(t)$  ou  $\varphi \in C([0, 1])$ ,  $f \in L^2([0, 1])$ .

$$\begin{aligned}\langle A_\varphi f, g \rangle &= \langle f(t)\varphi(t), g(t) \rangle \\ &= \langle f(t), \overline{\varphi(t)}g(t) \rangle,\end{aligned}$$

donc  $(A_\varphi^*g)(t) = \overline{\varphi(t)}g(t)$ , C'est-à-dire  $A_\varphi^* = A_{\overline{\varphi}}$ .

D'où

$$A_\varphi^*A_\varphi = A_\varphi A_\varphi^*.$$

L'opérateur  $A_\varphi$  est un hermitien (auto-adjoint) s'il la fonction  $\varphi$  est réelle.

**Proposition 2.0.2** Soit  $A \in B(H)$ , alors  $A$  est normale, si et seulement si:

$$\|Ax\| = \|A^*x\| \text{ pour tout } x \in H.$$

**Corollaire 2.0.1** Si  $A \in B(H)$  est normal, on a:

$$\ker(A) = \ker(A^*).$$

**Proposition 2.0.3** Soit  $A$  est normal, on a

1. L'opérateur  $aA$  est aussi normal pour tout  $a \in \mathbb{C}$ .

2. L'opérateur  $A^n$  est aussi normal pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Démonstration.**  $A$  est normal, d'où

$$\begin{aligned} AA^* &= A^*A \\ \Rightarrow (AA^*)^n &= (A^*A)^n \\ \Rightarrow A^n (A^*)^n &= (A^*)^n A^n \\ \Rightarrow A^n (A^n)^* &= (A^n)^* A^n. \end{aligned}$$

C'est-à-dire  $A^n$  est normal, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . ■

**Corollaire 2.0.2** Soit  $P$  est polynôme et  $A$  est un opérateur normal. Alors est aussi normal.

**Remarque 2.0.1**  $A^n$  normal  $\not\Rightarrow A$  normal. En effet, soit

$$A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

on a

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

est normal, mais n'est pas normal.

**Proposition 2.0.4** Soit  $A \in B(H)$  est normal, on a

$$\ker(A) \oplus \overline{\operatorname{Im}(A)} = H.$$

**Proposition 2.0.5 (Inverse d'un opérateur normal)** Soit  $A \in B(H)$  est normal et inversible d'inverse  $A^{-1}$ . Alors  $A^{-1}$  est aussi normal.

**Démonstration.** On a

$$\begin{aligned} (A^{-1})^* A^{-1} &= (A^*)^{-1} A^{-1} \\ &= (AA^*)^{-1} \\ &= (A^*A)^{-1} \text{ (car } A \text{ normal)} \\ &= A^{-1} (A^*)^{-1} \\ &= A^{-1} (A^{-1})^*. \end{aligned}$$

Donc  $A^{-1}$  est un opérateur normal. ■

**Proposition 2.0.6** *pour tout est unitaire. L'opérateur  $U^*AU$  est normal si et seulement si  $A$  est normal.*

**Proposition 2.0.7** *Soit  $A \in B(H)$ , les assertions suivantes sont équivalentes*

i)  $A$  est normal.

ii)  $A^{-1}A^*$  ( ou  $A^*A^{-1}$ ) est unitaire.

iii) Il existe un opérateur  $U$  tel que  $A^* = UA$ .

## 2.1 Opérateur normaloïde

**Définition 2.1.1** *Un opérateur  $A \in B(H)$  est normaloïde si  $r(A) = \|A\|$ , où*

$$r(A) = \sup \{|\lambda|; \lambda \in \sigma(A)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

*est le rayon spectral de  $A$ .*

**Proposition 2.1.1**  $r(A) = \|A\|$  si et seulement si  $\|A^n\| = \|A\|^n$ .

**Théorème 2.1.1** *Tout opérateur hyponormal est normaloïde.*

**Proposition 2.1.2** *Un opérateur  $A$  est normaloïde si et seulement si*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \{|\langle Ax, x \rangle|\}.$$

**Théorème 2.1.2** *Soit  $A$  un opérateur tel que  $(A - \lambda I)$  est normaloïde pour tout numéro complexe  $\lambda$ , alors nous avons*

$$\overline{W(A)} = \text{co}\sigma(A).$$

Où  $\text{co}(A)$  désigne la coque convexe de  $\sigma(A)$ . Pour prouver le théorème énoncé ci-dessus, nous avons besoin du lemme du suivant.

**Lemme 2.1.1** *Soit  $A$  un opérateur et  $\lambda \in \overline{W(A)}$  un point de  $\overline{W(A)}$ , alors il existe un nombre  $\lambda_0$  complexe satisfaisant*

$$|\lambda - \lambda_0| = \sup \left\{ |\mu - \lambda_0| : \mu \in \overline{W(A)} \right\}.$$

**Lemme 2.1.2** *Soit  $C$  un sous-ensemble convexe compact non vide du plan et  $S$  soit la collection de tous ses point nus. Alors  $C$  est la coque convexe fermée de  $S$ . Pour plus de commodité, nous énonçons le résultat connu suivant sous la forme d'un lemme.*

**Exemple 2.1.1** On utilise le théorème spectral pour calculer le spectre d'un polynôme par exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a :  $\sigma(A) = \{1, 2\}$  Si on veut calculer  $\sigma(A^2)$  à partir de  $\sigma(A)$  on trouve

$$\sigma(A^2) = \{1, 4\}$$

car : si  $P(x) = x^2$  ; alors

$$\sigma(A^2) = \sigma((A)^2).$$

## 2.2 Opérateur n-power hyponormaux

**Définition 2.2.1** Un opérateur  $A \in B(H)$  ,on dit que  $A$  est un opérateur hyponormal si et seulement si :

$$\begin{aligned} A^*A &\geq AA^* \\ A^*A - AA^* &\geq 0, \end{aligned}$$

où  $A^*$  est l'adjoint de  $A$  i.e

$$\langle (A^*A - AA^*)x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in H.$$

On note la classe des opérateurs hyponormaux par  $n(HN)$ .

**Remarque 2.2.1** Si  $n = 1$ ; alors  $A$  est hyponormal et si  $n = \frac{1}{2}$  ;  $A$  est semi-hyponormal.

**Remarque 2.2.2** La définition précédente est équivalente à :  $A$  est un opérateur n-hyponormal si

$$|A|^{2n} \geq |A^*|^{2n},$$

on a

$$|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}} \text{ et } |A^*| = (AA^*)^{\frac{1}{2}}.$$

**Proposition 2.2.1** Soit  $A \in B(H)$ , alors  $A$  est un opérateur hyponormal si et seulement si

$$A^*A + 2\lambda AA^* + \lambda^2 A^*A > 0,$$

pour tous  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Démonstration.** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $x \in H$  donnés.  $A$  est opérateur hyponormal si et seulement si :

$$\begin{aligned}
 (\|A^*x\| \leq \|Ax\|) &\Leftrightarrow \|Ax\|^2 + 2\lambda\|A^*x\|^2 + \lambda^2\|Ax\|^2 \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \langle Ax, Ax \rangle + 2\lambda\langle A^*x, A^*x \rangle + \lambda^2\langle Ax, Ax \rangle \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \langle A^*Ax, x \rangle + 2\lambda\langle AA^*x, x \rangle + \lambda^2\langle A^*Ax, x \rangle \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \langle (A^*A + 2\lambda AA^* + \lambda^2 A^*A)x, x \rangle \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow A^*A + 2\lambda AA^* + \lambda^2 A^*A > 0.
 \end{aligned}$$

■

**Remarque 2.2.3** Si  $A \in B(H)$  est hyponormal, alors  $(A - \lambda I)$  est hyponormal pour chaque  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

**Proposition 2.2.2** Soit  $A \in B(H)$ , et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , si  $A$  est hyponormal et  $(A - \lambda I)^{-1}$  existe, alors  $(A - \lambda I)^{-1}$  est hyponormal.

**Exemple 2.2.1** Soit  $H = \bigoplus_{n=-\infty}^{+\infty} H_n$ , tel que  $H_n$  est un espace d'Hilbert de dimension deux. Soient  $E$  et  $F$  des matrices positives tels que

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } F = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Alors les décompositions polaires de  $E$  et  $F$  sont  $E = VE$  et  $F = WF$  respectivement, avec

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } W = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Soient  $\{U_n\}$  et  $\{P_n\}$  tels que

$$U_n = \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} \text{ et } P_n = \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}.$$

On définit les opérateurs  $U$  et  $P$  sur  $H$  par

$$(Ux)_n = U_{n-1}x_{n-1} \text{ et } (Px)_n = P_nx_n,$$

avec  $(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$ ; pour  $x_n \in H_n$ ; Alors  $T = UP$  est  $n$ -hyponormal.

## 2.3 Propriétés des opérateurs n-hyponormaux

**Lemme 2.3.1** Soit  $A = UA$  un opérateur n-hyponormal,  $0 \leq P \leq \frac{1}{2}$ , alors l'opérateur

$$r\tilde{A} = |A|^{\frac{1}{2}} U |A|^{\frac{1}{2}}$$

est hyponormal si  $\frac{1}{2} \leq P \leq 1$ , et  $(P + \frac{1}{2})$  hyponormal si  $0 \leq P \leq \frac{1}{2}$

**Démonstration.** Puisque tout opérateur n-hyponormal pour  $\frac{1}{2} \leq P \leq 1$  et  $U$  est semi-hyponormal, nous avons  $(A^*A)^{\frac{1}{2}} \geq (AA^*)^{\frac{1}{2}}$  ou de manière équivalente

$$U^* |A| U \geq |A| \geq U |A| U^*.$$

Maintenant

$$\left( \tilde{A}^* \tilde{A} \right) - \left( \tilde{A} \tilde{A}^* \right) = |A|^{\frac{1}{2}} (U^* |A| U - U |A| U^*) \geq 0,$$

et donc  $T$  est hyponormal. ■

**Théorème 2.3.1** Soit  $A = UA$  la décomposition polaire de l'opérateur  $A_\varepsilon$ , si  $A$  est inversible, alors

$$|A_\varepsilon| = |A|^{\frac{1}{2}} S^{-1} |A|^{\frac{1}{2}}$$

et

$$U_\varepsilon = |A|^\varepsilon U |A|^{\frac{1}{2}} S |A|^{-\frac{1}{2}},$$

où l'opérateur  $S$  est défini par l'équation

$$S \left( |A|^{\frac{1}{2}-\varepsilon} U^* |A|^{2\varepsilon} U |A|^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \right) = |A|,$$

est inversible.

**Démonstration.** Par la définition de la décomposition polaire

$$\begin{aligned} |A_\varepsilon| &= (A_\varepsilon^* A_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} = \left( |A|^{1-\varepsilon} U^* |A|^{2\varepsilon} U |A|^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \\ &= \left( |A|^{\frac{1}{2}} |A|^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} U^* |A|^{2\varepsilon} U |A|^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

■

**Théorème 2.3.2** Soit  $E = |A|^{\frac{1}{2}-\varepsilon} U^* |A|^{2\varepsilon} U |A|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$  et  $F = |A|$ .

Si  $\varepsilon \leq P$ , alors il est clair que  $E \geq F$  et la condition  $(E^{\frac{1}{2}} F E^{\frac{1}{2}}) \leq E$ .

Si  $\varepsilon \geq P$ , alors on peut montrer en utilisant l'inégalité de Furtura que  $E_\varepsilon^2 \geq F_\varepsilon^2$ , et donc la condition  $(E^{\frac{1}{2}} F E^{\frac{1}{2}}) \leq E$  est à nouveau vérifiée, par conséquent il existe un opérateur positif  $S$  tel que  $SES = F$ , ainsi

$$= \left( |A|^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} U^* |A|^{2\varepsilon} U |A|^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \right) = |A|,$$

où équivalent

$$|A|^{\frac{1}{2}-\varepsilon} U^* |A|^{2\varepsilon} U |A|^{\frac{1}{2}-\varepsilon} = S^{-1} |A| S^{-1}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} |A_\varepsilon| &= \left( |A|^{\frac{1}{2}} S^{-1} |A| S^{-1} |A|^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |A|^{\frac{1}{2}} S^{-1} |A|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Puisque la racine carrée d'un opérateur positif est unique. En remplaçant l'expression de  $|A_\varepsilon|$  par  $A_\varepsilon = U_\varepsilon |A_\varepsilon|$  on trouve

$$U_\varepsilon = |A|^2 U |A|^{\frac{1}{2}} S |A|^{-\frac{1}{2}}.$$

**Proposition 2.3.1** Soient  $S, A$  deux opérateurs  $n$ -hyponormaux, alors  $S \oplus A$  est un opérateur  $n$ -hyponormal.

**Démonstration.** On a:

$$\begin{aligned} & ((S \oplus A) (S \oplus A)^*)^n \\ &= ((S \oplus A) (S^* \oplus A^*))^n \\ &= (SS^* \oplus AA^*)^n \leq (S^*S \oplus A^*A)^n \\ &= ((S \oplus A)^* (S \oplus A))^n, \end{aligned}$$

alors  $S \oplus T$  est un opérateur  $n$ -hyponormal. ■

**Théorème 2.3.3** Soient  $S, A$  deux opérateurs  $n$ -hyponormal, alors  $S \otimes A$  est un opérateur  $n$ -hyponormal.

**Démonstration.** on a pour  $(x_1, x_2) \in H$

$$\begin{aligned} ((S \otimes A) (S \otimes A)^*)^n (x_1 \otimes x_2) &= ((S \otimes A) (S^* \otimes A^*))^n (x_1 \otimes x_2) \\ &= (SS^*)^n x_1 \otimes (AA^*)^n x_2 \leq (S^*S)^n x_1 \otimes (AA^*) x_2 \\ &= ((S^* \otimes A^*) (S \otimes A))^n (x_1 \otimes x_2) \\ &= ((S \otimes A)^* (S \otimes A))^n (x_1 \otimes x_2) \end{aligned}$$

Donc  $S \otimes A$  est un opérateur  $n$ -hyponormal. ■

# Bibliographie

- [1] M. GUESBA, Traitement sur les opérateurs normaux et les opérateurs compacts, thèse de doctorat, Univ.Mohamed Boudiaf-M'sila 2017.
- [2] M.NADIR, Opérateur positif, Cours d'analyse fonctionnelle sur le site web (www.mostefanadir.com), 2017.
- [3] M.NADIR, Opérateurs continus, Cours d'analyse fonctionnelle sur le site web (www.mostefanadir.com), 2017.
- [4] M.NADIR, Opérateur compact, Cours d'analyse fonctionnelle sur le site web (www.mostefanadir.com), 2017.
- [5] S.A ALZURAIQI, A.B. Patel, On  $n$ -normal operators, General Mathematics Nots.1/2 (2010),61-73 . Memoire de master académique, GHARBI LATIFA 2019/2020.
- [6] A.SMATI, Etude des condition entre les opérateurs compacts, normaux et positifs, thèse de doctorat, Université Mohamed Boudiaf-M'sila, 2018.Memoire de master académique, GHARBI LATIFA 2019/2020.
- [7] V.ISTRATESCU, T. Saito, and T. Yoshino : On a class of operators. TShoku. Math. joun, 18,410-413(1966).Memoire de master académique, GHARBI LATIFA 2019/2020.
- [8] AKKOUCHI. M , Remarks on the spectrum of bounded and normal operators on Hilbert space,An. St. Univ. Ovidius Constanta. 16/2 (2008), 7-14.Memoire de master académique :ABDELMALEK CHAHINEZ /MEBARKIA KHAOULA 2020/2021.

- [9] A. ALUTHGE, On  $p$ -hyponormal operators for  $0 < p < 1$ , *Journal of Integral Equations and Operator Theory*, *13(1990)*, 307-315. Memoire de master académique : ABDELMALEK CHAHINEZ /MEBARKIA KHAOULA 2020/2021.
- [10] M. ITO, Generalizations of the results on powers of  $p$ -hyponormal operators, to appear in *J. Inequal. Appl.* Memoire de master académique : ABDELMALEK CHAHINEZ /MEBARKIA KHAOULA 2020/2021.
- [11] GUEMARI.D, N. BOULIFA, Théorie spectrale des quelques classes d'opérateurs, Memoire de master académique, Université d'El Oued, 2014. Memoire de master académique : ABDELMALEK CHAHINEZ /MEBARKIA KHAOULA 2020/2021.