REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse mathématique et numérique

Thème

Problèmes inverses pour une équation d'onde avec involution

Présentée par :
M^{elle} *BENALIA* Asma

Soutenu publiquement le : 01/07/2023.

Devant le jury composé de :

Président :	*GAGUI* Bachir	M.C.A.,	Université de M'sila
Encadreur :	*NOUIRI* Brahim	M.C.A.,	Université de M'sila
Examinateur :	*FERAHTIA* Nacim	M.C.B.,	Université de M'sila

Année universitaire 2022/2023

Remerciements

louange à **ALLAH** tout -puissant ,qui m'a aidé à remplir cette note et qui m'a inspiré
pour la santé et le bien -étre ,
alors merci beaucoup à Dieu.
j'adresse mes sincéres remerciements et ma gratitude à mon professeur superviseur ,

NOUIRI BRAHIM

,pour tout le soutien ,les conseils et les conseils qu'il m'a donnés pour mener à bien ce travail ,pour ce qu'il est ,et il a les plus hautes expressions de lounage et d'appréciation remercier sincérement les honorables membres du comité de discussion ,tous ceux qui m'ont enseigné et qui en ont bénéficie ,dans ma vie scientifique ,
tous mes proffesseurs aux niveaux intermédiaire ,secondaire et universitaire ,
et tous les professeurs de la faculté de mathématiques et d'informatique.

Merci
BENALLIA .A

Dédicaces

Merci à **ALLAH** ,et assez et la prièresur la bien -aimée la mustafa ,quand à Aprés :

loué soit Dieu,qui m'a permis de valorises cette étape de mon parcours académique ,avec ce mémoire ,c'est le fruit de l'effort et de la réussit ,grace à dieu tout -puissant .

je dédie ce travail

∗ A mon *cher pére*.

∗ A ma *chére maman*.

∗ A tous mes fréres,soeurs et amis. ∗ A ma chére tante .

∗ A tous les départements **AMN** et à toute la promotion **2023** université Mohamed boudif **-M'sila-**

∗ A tous ceux qui ont eu un impact ma vie ,et a tous ceux mon coeur a aimés et que plume a oubliés.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons considéré une classe de problèmes inverses pour une équation d'onde avec involution pour les cas de deux conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann. L'existence et l'unicité des solutions de ces problèmes sont prouvées. Les solutions sont obtenues sous forme de développement en série de fonctions en utilisant un ensemble de bases orthogonales appropriées pour chaque problème. La convergence des solutions obtenues est également justifiée.

Mots-Clés : Problème inverse, involution, Équation d'onde non locale, Problème de Sturm-Liouville.

In this memoir, we have considered a class of inverse problems for a wave equation with involution for the cases of two boundary conditions of Dirichlet and Neumann. The existence and the uniqueness of the solutions of these problems are proved. Solutions are obtained as a series expansion of functions using a set of appropriate orthogonal bases for each problem. The convergence of the solutions obtained is also justified.

Keywords : Inverse problem, involution, Non-local wave equation, Sturm-Liouville problem.

Table des matières

Introduction générale

Dans de nombreux problèmes physiques, la détermination des coefficients ou du membre droit en fonction de certaines informations disponibles dans une équation différentielle est nécessaire ; ces problèmes sont appelés problèmes inverses. Ce genre de problèmes sont mal posés au sens d'Hadamard. Notre objective dans ce mémoire est l'étude des problèmes inverses pour une équation d'onde non locale avec involution de la variable d'espace x. Nous considérons l'équation d'onde non locale suivante :

$$u_{tt}\left(x,t\right)=u_{xx}\left(x,t\right)-\varepsilon u_{xx}\left(\pi-x,t\right)+f\left(x\right),\ \left(x,t\right)\in\Omega_{T}, \tag{1}$$

où $\Omega_T := \{(x,t) : 0 < x < \pi,\ 0 < t \leq T\}$ avec $T > 0$ et $|\varepsilon| < 1$.

Nous considérons plus particulièrement les deux problèmes inverses suivants :

☞ **Problème inverse** $P1$ **:** Trouver un couple de fonctions $(u\left(x,t\right), f\left(x\right))$ dans le domaine Ω_T satisfaisant l'équation (1) et les conditions suivantes :

$$u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right),\ u_{t}\left(x,0\right)=\psi\left(x\right),\ u\left(x,T\right)=g\left(x\right),\ x\in\left[0,\pi\right], \tag{2}$$

$$u\left(0,t\right)=u\left(\pi,t\right),\ t\in\left[0,T\right], \tag{3}$$

où φ, ψ et g sont des fonctions données.

☞ **Problème inverse** $P2$ **:** Trouver un couple de fonctions $(u\left(x,t\right), f\left(x\right))$ dans le domaine Ω_T satisfaisant l'équation (1), les conditions initiales et finales (2) et la condition de Neumann :

$$u_{x}\left(0,t\right)=u_{x}\left(\pi,t\right),\ t\in\left[0,T\right], \tag{4}$$

Notre objective dans ce mémoire est l'étude de l'existence et l'unicité de la solution des problèmes inverses $P1$ et $P2$.

Ce mémoire se décompose en trois chapitres de la manière suivante : dans le premier chapitre, nous rappelons certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires dans ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre, nous discutons l'existence et l'unicité de la solution du problème inverse $P1$, en utilisant la méthode de Fourier et un problème spectral d'un opérateur différentiel linéaire du second ordre avec involution et une condition aux limites de Dirichlet.

Dans le dernier chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution du problème inverse $P2$ en utilisant la méthode de Fourier et un problème spectral d'un opérateur différentiel linéaire du second ordre avec involution et une condition aux limites de Neumann.

On termine ce mémoire par une conclusion et quelques perspectives.

Chapitre 1

Préliminaires sur des outils mathématiques utilisés

Dans ce chapitre, nous mentionnons quelques définitions et concepts mathématiques de base dont nous avons besoin dans ce mémoire concernant les espaces fonctionnelles et problème de Sturm- Liouville et involution.

1.1 Espace vectoriel normé

Définition 1.1. Soit E un $\mathbb{K}$ un espace vectoriel , on appele norme sur E toute application $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :
1. $\forall x \in E$, $\|x\| \geq 0$,$\|x\| = 0$,$x = 0$.
2. $\forall x, y \in E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (inégalité triangulaire).
3. $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, (homogénéité).

Remarque 1.1. toute norme définit une distance suivant la formule :

$$\forall x, y \in E : d(x, y) = \|x - y\|$$

on dit dans ce que la métrique d dérivé de la norme $\|.\|$.

Remarque 1.2. l'espace vectoriel E muni d'un norme s'appelle espace normé ,noté par $(E, \|.\|)$les application suivantes sont des normes usuelle sur $\mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1} |x_i|$$

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1} |x_i|^p)^{1/p} \qquad \forall p \geq 1$$

Exemple 1.1. soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$,l'espace vectoriel des fonctions de carré intégrable sur Ω est :

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}, \int_\Omega |f(x)|^2 \, dx < \infty \right\}$$

l'application $\|.\| : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ donnés par :

$$\|f\| = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

est une norme.

1.2 Espace de Banach

Définition 1.2. toute espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.

Définition 1.3. soit E un espace vectoriel normé ,une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est de Cauchy si

$$\forall \epsilon < 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n < m \geq N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

Définition 1.4. soit E un espace vectoriel normé ,on dit que E est complet si tout suite de E est de Cauchy dans E est convergente dans E.

Remarque 1.3. dans un espace vectoriel normé ,la limite d'une suite convergente est unique.

Exemple 1.2. $(c([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$est une espace de Banach.

1.3 Espace de Hilbert

Définition 1.5. (produit scalaire) soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$,un produit scalaire sur E est une application $< .,. > \to \mathbb{K}$ telle que pour tout x , y , x_1 , $x_2 \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

$1/ < x, x > \geq 0$ et $< x, x >= 0 \Leftrightarrow = 0$.

$2/ < x, y >=< \overline{y, x} >$.

$3/ < x_1 + x_2 >=< x_1, y > + < x_2, y >$.

$4/ < \lambda x, y >= \lambda < x, y >$.

Remarque 1.4. un produit scalaire sur E définie une norme sur E donnée par :

$$\forall x \in E : \|x\| = \sqrt{< x, x >}$$

Exemple 1.3. l'espace $\mathbb{R}$ muni de produit scalaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : (x,y) = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i$$

, est un produit scalaire .

1.4 converge uniforme

Définition 1.6. soit (f_n)une suite de fonctions définie sur I ,à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,on dit que $\sum f_n$ converge uniformément sur I si (S_n) converge uniformément sur I.

Remarque 1.5. 1.si $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors $\sum f_n$ converge simplement sur I.
2.si $\sum f_n$ et $\sum g_n$ converge uniformément sur I, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sum(f_n + \lambda g_n)$ converge uniformément sur I.

1.5 Opérateur linéaire

Définition 1.7. (Opérateur linéaire). Un opérateur $A : E \to F$est dit linéaire si :
1- son domaine $D(A)$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ou $\mathbb{C})$
2- pour tout $x, y \in D(A)$ et tout nombre $\alpha, \beta \in K$ l'égalité

$$A(\lambda x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

est vérifiée de deux condition :
$i)$additivité de l'opérateur

$$\forall x, y \in E, \qquad A(x+y) = A(x) + A(y)$$

. $ii)$ homogénéité de l'opérateur

$$\forall x \in E \;\; et \;\; \alpha \in \mathbb{K}, \qquad A(\alpha x) = \alpha Ax$$

Définition 1.8. (opérateur continu) soientE, F deux espaces de Banach,un opérateur linéaire $A : E \to F$de domaine $D(A) = E$ est dit continu au point $x_0 \in E$ si
$Ax \to Ax_0$ dés que $x \to x_0$
Ici et plus loin,une telle notation signifie que

$$\|Ax - Ax_0\|_F \to 0 \quad pour \quad \|x - x_0\|_E \to 0$$

Définition 1.9. (opérateur bornée) soient E et F deux espace de Banach ,un opérateur linéaire $A : E \to F$ de domaine $D(A) = E$ est dit l'opérateur linéaire bornée si et seulement s'il existe une constante M telle que :

$$\|Ax\|_F \leq M \|x\|_E , \forall x \in E$$

Remarque 1.6. l'opérateur linéaire Aest dit continu sur S , s'il est continu en chaque point de l'ensemble S.

Théorème 1.1. *un opérateur linéaire A est continu , si et seulement si il est bornée.*

Exemple 1.4. $a- \ I : C([0,1]) \to C([0,1])$
est bien bornée car :

$$\|Ix\| = \|x\| \leq M \|x\| , \quad \forall M \geq 1$$

$b-$ l'opérateur de multiplication A défini sur l'espace $c([1,2])$, alors :

$$\begin{aligned} \|Af\|_\infty &= \sup_{x\in[1,2]} |Af(x)| \\ &= \sup_{x\in[1,2]} |x.f(x)| \\ &\leq 2 \|f\|_\infty \quad (M = 2) \quad \forall f \in C([1,2]) \end{aligned}$$

1.5.1 opérateur auto -adjoint

Définition 1.10. un opérateur $A \in L(H, H)$ dans l'espace de Hilbert H est appelé un opérateur auto -adjoint si $A^* = A$ c'est-à-dire pour tout $f, g \in H$ l'égalité

$$< Af, g >=< f, Ag >$$

Proposition 1.1. 1-*si A et Bsont deux opérateur auto-adjoint alors :*
$\star$ *AB est auto adjoint si seulement si $AB = BA$.*
$\star$ *$\alpha A + \beta B$ est un opérateur auto-adjoint $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$*
2-*si A est auto -adjoint ,alors :*

$$\|A\| = \sup \{|< Ax, x >| : \|x\| = 1\}$$

Remarque 1.7. si Aest un opérateur quelconque alors AA^* et $A + A^*$ sont auto-adjoint .

Exemple 1.5. 1-un opérateur intégral de Fredholm est auto-adjoint si seulement si son noyau Kvérifie $\overline{K(y,x)} = K(x,y)$
2-considérons l'opérateur Adéfinie sur $L^2(\mathbb{R})$ par :

$$(Ax)(t) = e^{-|t|}x(t)$$

A est un opérateur bornée auto-adjoint ,car :

$$\begin{aligned} < Ax, y > &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} x(t)\overline{y(t)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{e^{-|t|} y(t)} dt \\ &= < x, Ay > \end{aligned}$$

Exemple 1.6. pour tout $A \in L(E,F)$ l'opérateur $AA^* \in L(E)$ est auto-adjoint ,car :

$$(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A$$

1.6 Problème de Sturm-Liouville

Définition 1.11. l'opérateur de Sturm-Liouville est un opérateur correspondant à la frontière probléme de valeur pour une équation différentielle ordinaire du second ordre :

$$Lu = -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), 0 < x < 1 \tag{1.1}$$

avec les condition limite

$$\begin{cases} a_1 u'(0) + a_0 u(0) = 0 \\ d_1 u'(1) + d_0 u(1) = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

ou' les coefficients a_1,a_0,λ_1,λ_0 de la condition aux limites sont des nombres réeles $(a_1 + a_0 \neq 0$,$d_1 + d_2 \neq 0)$ le coefficient $q \in C[0,1]$ dans l'équation (parfois ou 'appelle un potentiel)est une fonction à valeur réelles.

Remarque 1.8. donnée sur l'espace linéaire des fonction $u \in C^2[0,1]$vérifiant les condition aux limites $(1,2)$.
les spectre et les fonctions propres du problème aux limites de Sturm -Liouville $(1,1)$-$(1,2)$seront le spectre et les vecteurs propres de l'opérateur L.

Définition 1.12. le problème spectral de sturm-Liouville est le problème des fonctions propres est valeurs propres pour l'équation

$$Lu \equiv -u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), 0 < x < 1 \tag{1.3}$$

avec les condition aix limites ,c'est -à-dire

$$\begin{cases} a_1 u'(0) + a_0 u(0) = 0 \\ d_1 u'(1) + d_0 u(1) = 0 \end{cases}$$

ou′ les coefficients a_1,a_0,d_1,$d_0$de la condition aux limites$(1,2)$sont fixes réels nombres $(a_0 + a_1 \neq 0 \;\; et \;\; d_0 + d_1 \neq 0)$les coefficient $q \in C[0,1]$est une fonction à valeurs réelles.

$-$solutions de l'éq (1.3) dépendent d'un paramètre spectrale λ. par conséquent ,il est convient de noter ces solutions par $u(x,\lambda)$, si pour un certain λ_k le problème aux limites (1.3),(1.2) admet une solution non trivial .
$-$ $u(x,\lambda_k) \neq 0$, alors le nombre λ_k est appelé une valeur propre ,et la fonction $(u(x,\lambda_k)$ est appelée une fonction propre du problème aux limites (1.3),(1.2)

Exemple 1.7. soit le problème de Sturm-Liouville

$$y''(t) + \lambda y(t) = 0$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0$$

pour $\lambda > 0$ le problème admet seulement la solution trivial $(y(t) \equiv 0)$.
pour $\lambda < 0$ la solution générale de l'équation $y''(t) + \lambda y(t) = 0$ est la forme

$$y(t) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}t) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}t)$$

tenu compte les conditions aux limites $y'(0) = 0$ et $y'(\pi) = 0$ on obtient

$$\begin{cases} c_1\sqrt{\lambda} = 0 \\ c_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\pi - c_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \end{cases}$$

par conséquent $c_1 = 0$ et $c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$
si $c_2 = 0$alors $y(t) = 0$.pour $c_2 \neq 0$
donc $\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$
il vient $\sqrt{\lambda}\pi = k\pi, k = 1, 2, ...$
D'ou , $\lambda_k = k^2$ sont les valeurs propres et $y_k(t) = \cos(kt)$ sont les fonctions propres

Exemple 1.8. soit le problème de Sturm Liouville suivant :

$$\begin{cases} y''(t) + \lambda y(t) = 0 \quad pour \;\; t \in [0,\pi] \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) + y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

1.7 involution

Définition 1.13. soit $A \subset \mathbb{R}$un ensemble contenant plus d'un point et $f : A \to A$ une fonction telle que f n'est pas Id d'identité .alors
,f est une involution si

$$f^2 = f \circ f = Id$$

Définition 1.14. soit $A \subset \mathbb{R}$,$f : A \to A$,$n \in \mathbb{N}$,$n \geq 2$
on dit que f est un ordre n involution si :
1-$f^n = f \circ \overbrace{.....}^{n} \circ f = Id$
2-$f^k \neq Id, \quad k = 1.....n-1$

Proposition 1.2. *(preuve* [5]*,p07)*
soient $A \subset \mathbb{R}$ connexe et $f : A \to A$ une continue d'ordre deux involution,alors :
1-f est strictement décroissant.
2-f a un unique point fixe.

Proposition 1.3. *(preuve* [5]*,p07) soient $A \subset \mathbb{R}$,$f : A \to A$ une involution d'ordre n,alors f est un inversible.*

Théorème 1.2. *(preuve* [5]*,p07) les seules involution continues définies dans les ensembles connecté de $\mathbb{R}$ sont d'ordre 2.*

Théorème 1.3. *(preuve* [5]*,p07) soit $A \subset \mathbb{R}$un ensemble connexe $f : A \to A$,une involution continue ,a est l'unique point fixe de $f$et f de classe deux au voisinage de a ,puis le méthode itérative*

$$\begin{cases} x_0 \in A \\ x_{k+1} = g(x_k) \quad k = 0, 1, ... \end{cases}$$

ou' $g = \frac{f+Id}{2}$,est globalement convergent vers $a$et d'ordre au moins 2.

Exemple 1.9. les involutions suivantes sont les exemples les plus courants :
1/ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f(x) = -x$. est une involution appelée réflexion .
2/ $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. connu comme renversement

CHAPITRE 2

PROBLÈME INVERSE AVEC CONDITION AUX LIMITES DE DIRICHLET

Dans ce chapitre, nous discutons l'existence et l'unicité de la solution du problème inverse $P1$, en utilisant la méthode de Fourier et un problème spectral d'un opérateur différentiel linéaire du second ordre avec involution et une condition aux limites de Dirichlet.

2.1 Position de problème

Trouver un couple de fonctions $(u(x,t), f(x))$ satisfaisant l'équation

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + \epsilon\, u_{xx}(\pi - x, t) = f(x) \tag{2.1}$$

$(x,t) \in \Omega = \{\, 0 < x < \pi, 0 < t < T\}$. Sous les conditions

$$\begin{cases} u(x,0) = 0, \quad x \in [0,\pi], \\ u(x,T) = \psi(x), \quad x \in [0,\pi], \\ u_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{2.2}$$

Et les conditions aux limites de Dirichlet homogènes

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{2.3}$$

où $\psi(x)$ est une fonction donnée suffisamment lisse

2.2 Problème spectral

Le problème spectral est :

$$\begin{cases} -y''(x) + \epsilon\, y''(\pi - x) = \lambda y(x) = 0. \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Utilisant de la méthode de Fourier pour résoudre le problème (2.4) conduit au problème spectral pour l'opérateur L donnée par l'expression et la condition aux limite de Dirichlet.
Nous avons le problème d'onde suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) - \epsilon\, u_{xx}(\pi - x, t) + f(x), \\ D_T = \{\ (x,t) : 0 < x < \pi, 0 < t < T\} \\ u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = 0 \quad x \in [0,\pi], \\ u(x,T) = \psi(x), \quad x \in [0,\pi], \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \end{cases} \tag{2.5}$$

Pour trouver le problème spectral (2.4) on pose $f(x) = 0$ dans (2.5) alors donnée le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + \epsilon\, u_{xx}(\pi - x, t), \\ D_T = \{\ (x,t) : 0 < x < \pi, 0 < t < T\} \\ u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = 0 \quad x \in [0,\pi], \\ u(x,T) = \psi(x), \quad x \in [0,\pi], \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \end{cases} \tag{2.6}$$

Nous avons le problème de Sturn-Liouville suivant :
si on pose

$$\begin{cases} u(x,t) = X(t)\, Y(x), \\ u(\pi - x, t) = X(t)\, Y(\pi - x). \end{cases}$$

En remplaçant dans (2.6) on obtient

$$X''(t)\, Y(x) = X(t)\, Y''(x) - \epsilon X(t)\, Y''(\pi - x).$$

D'où

$$\frac{X''(t)}{X(t)} = \frac{Y''(x) - \epsilon\, Y''(\pi - x)}{Y(x)} = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Et comme x et t sont indépendant, on trouve :

$$\begin{cases} Y''(x) - \epsilon\, Y''(\pi - x) + \lambda Y(x) = 0 \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0. \end{cases}$$

Ce qui implique

$$\begin{cases} Y''(x) - \epsilon\, Y''(\pi - x) + \lambda Y(x) = 0 \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ X(t)\, Y(0) = X(t)\, Y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} Y''(x) - \epsilon\, Y''(\pi - x) = -\lambda Y(x) \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ Y(0) = Y(\pi) = 0. \end{cases}$$

on résoudre le probléme spectral (2.4) alors :
on pose

$$\begin{cases} S(x) = y(x) + y(\pi - x) \\ W(x) = y(x) - y(\pi - x) \end{cases}$$

,alors

$$\begin{cases} -y''(x) + \epsilon\, y''(\pi - x) = \lambda y(x). \\ -y''(\pi - x) + \epsilon\, y''(x) = \lambda y(\pi - x). \end{cases}$$

alors : $-S''(x) + \epsilon S''(x) = \lambda S(x)$.
$\Longleftrightarrow S''(x) = -\dfrac{\lambda}{(1-\epsilon)} S(x) = -\mu_1^2 S(x) \quad \mu_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{(1-\epsilon)}}$.
$\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} S''(x) = -\mu_1^2 S(x) \\ S(0) = 0 \\ S(\pi) = 0 \end{cases}$$

alors : $S(x) = A\cos(\mu_1 x) + B\sin(\mu_1 x)$.

$$S(0) = 0 \Longleftrightarrow A = 0.$$
$$S(\pi) = 0 \Longleftrightarrow B\sin(\mu_1 \pi) = 0.$$
$$\Longleftrightarrow \mu_1 \pi = n\pi \quad n \in \mathbb{N}\,.$$
$$\Longleftrightarrow \mu_1 = n \quad n \in \mathbb{N}.$$

alors : $\quad S(x) = B\sin(nx) \quad B \in \mathbb{R}$.
D'autre part , on a :

$$\begin{cases} -W''(x) - \epsilon\, W''(x) = \lambda W(x). \\ \Longleftrightarrow W''(x) = -\frac{\lambda}{(1+\epsilon)} W(x) = -\mu_2^2 W(x), \\ pour \quad \mu_2 = \sqrt{\frac{\lambda}{(1+\epsilon)}} \end{cases}$$

alors $w(x) = A'\cos(\mu_2 x) + B'\sin(\mu_2 x)$.
$W(0) = 0 \Longleftrightarrow A' = 0$.
$W(\pi) = 0 \Longleftrightarrow B'\sin(\mu_2 \pi) = 0$.
$\Longleftrightarrow \mu_2 \pi = p\pi \qquad p \in \mathbb{N}$.
$\Longleftrightarrow \mu_2 = p \qquad p \in \mathbb{N}$.
alors : $\quad W(x) = B'\sin(px) \quad B' \in \mathbb{R}$.
on a :

$$\begin{cases} S(x) = y(x) + \epsilon\, y(\pi - x) \\ W(X) = y(x) - \epsilon\, y(\pi - x) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow y(x) = \frac{1}{2}\left[B \sin nx + B' \sin px\right].$$

En remplaçant $y_n(x) = B \sin(nx)$ dans l'équation :

$$-y_n''(x) + \epsilon y_n''(\pi - x) = \lambda_n y_n(x).$$

on a :

$$y_n'(x) = Bn \cos(nx)$$

$$y_n''(x) = -Bn^2 \sin(nx)$$

alors :

$Bn^2 \sin nx + \epsilon Bn^2 \sin(n\pi - nx) = \lambda_n B \sin nx.$
$\Longleftrightarrow n^2 \sin nx + \epsilon n^2[\cos n\pi \sin nx] = \lambda_n \sin nx.$
$\Longleftrightarrow n^2 \left(1 + \epsilon \cos n\pi\right) \sin nx = \lambda_n \sin nx.$
$\Longleftrightarrow 1 + \epsilon \cos n\pi = \frac{\lambda_n}{n^2} = 1 - \epsilon.$
$\Longleftrightarrow 1 + \epsilon \left(-1\right)^n = 1 - \epsilon.$
$\Longleftrightarrow (-1)^n = -1$
. $\Longleftrightarrow n = 2k + 1.$

alors

$$\begin{cases} \lambda_n = (1 - \epsilon)\ (2k + 1)^2 \\ y_n = B \sin(2k + 1)x \qquad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

de la meme façont de $y_p = B' \sin(px)$ dans l'équation , alors :

$$-\ y_p''(x) + \epsilon y_p''(\pi - x) = \lambda_p y_p(x)$$

on trouve
$1 + \epsilon(-1)^p = 1 + \epsilon$
$\Longleftrightarrow (-1)^p = 1$
$\Longleftrightarrow p = 2k \quad k \in \mathbb{N}^*$
alors :

$$\begin{cases} \lambda_p = (1 + \epsilon)(2k)^2 \\ y_p = B' \sin 2kx \end{cases}$$

donc les valeures propres est :

$$\begin{cases} \lambda_{2K} = (1+\epsilon)(2K)^2 & k \in \mathbb{N} \\ \lambda_{2K+1} = (1-\epsilon)(2K+1)^2 & k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

et les vecteurs propres est

$$\begin{cases} y_{2K} = B' \sin 2Kx & k \in \mathbb{N} \\ y_{2K+1} = B \sin(2K+1)x & k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

avec la normalisation , alors :

$$\begin{aligned} \langle y_{2k}, y_{2k} \rangle &= \int_0^\pi (y_{2k}(x))^2 \ dx = 1 \\ &= \int_0^\pi B'^2 \sin^2(2k)x \ dx = 1 \\ &= B'^2 \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{8k} \sin(4kx) \right]_0^\pi = 1 \\ &= B'^2 \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{8k} \sin(4k\pi) \right] = 1 \\ = B'^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1 \implies B'^2 = \frac{2}{\pi} \implies B' &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \end{aligned}$$

Et la même façon de la normalisation de y_{2k+1} telle que :

$$\langle y_{2k+1}, y_{2k+1} \rangle = \int_0^\pi (y_{2k+1}(x))^2 \ dx = 1.$$

On trouve $B = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, alors

$$\begin{cases} y_{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(2k)x & k \in \mathbb{N}, \\ y_{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(2k+1)x & k \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \tag{2.7}$$

Lemme 2.1. *les systèmes de fonction* (2.7) *sont complets et orthonormal en* $L^2(0,\pi)$

Définition 2.1. (Système complet)
Un système d'éléments d'un espace de Hilbert est dit système complet s'il en existe vecteur orthogonal à tous les vecteurs de ce système est égal à zéro.

Définition 2.2. (Système orthogonal)

Deux systèmes d'éléments $\{x_k\}$ et $\{z_k\}$ sont dits systèmes biorthogonaux dans H si la relation

$$\langle x_k, z_k\rangle = \delta_{kj} \equiv \begin{cases} 1 & si \quad k = j \\ 0 & si \quad k \neq j \end{cases}$$

vaut pour toutes les valeurs des indices K et J. Ici δ_{kj} est le delta de kronecker.
En particulier, tout système orthonormé $\{x_k\}$ est biorthogonal à lui-meme :

$$\langle x_k, x_j\rangle = \delta_{kj}$$

`preuve2.1.` le système (2.7) est orthonormal

$$\begin{cases} y_{2k} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin 2kx \quad k \in \mathbb{N} \\ \\ y_{2k+1} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin 2(k+1)x \quad k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

alors :

$$\bullet\langle y_{2k}, y_{2k'}\rangle = \int_0^\pi \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2k)x \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2k')xdx$$

$$\bullet\langle y_{2k+1}, y_{2k'+1}\rangle = \int_0^\pi \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2k+1)x \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2k'+1)xdx$$

Si $k = k'$ on trouve

$$\begin{aligned} \bullet\langle y_{2k}, y_{2k'}\rangle &= \int_0^\pi \frac{2}{\pi}\sin^2(2k)xdx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4k}\sin(2k)x\right]_0^\pi \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\right] = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet\langle y_{2k+1}, y_{2k'+1}\rangle &= \int_0^\pi (y_{2k+1}(x))^2 dx \\ &= \int_0^\pi \frac{2}{\pi}\sin^2(2k+1)xdx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4k+2}\sin(2k+1)x\right]_0^\pi \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\right] = 1 \end{aligned}$$

Si $k \neq k'$

$$\begin{aligned}
\bullet\langle y_{2k}, y_{2k'}\rangle &= \int_0^\pi \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2k)x \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2k')xdx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(2k)x \cdot \sin(2k')xdx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin[2(k-k')x]}{4(k-k')} - \frac{\sin[2(k+k')x]}{4(k+k')}\right]_0^\pi \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin 2H'x}{4H'} - \frac{\sin 2Hx}{4H}\right] \qquad (H = k+k') \;\; et \;\; (H' = k-k') \quad H, H' \in \mathbb{N}^* \\
&= \frac{2}{\pi}[0] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet\langle y_{2k+1}, y_{2k'+1}\rangle &= \int_0^\pi \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2k+1)x \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2k'+1)xdx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(2k+1)x \cdot \sin(2k'+1)xdx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin[2(a-a')x]}{4(a-a')} - \frac{\sin[2(a+a')x]}{4(a+a')}\right]_0^\pi \qquad (a = 2k+1) \;\; et \;\; (a' = 2k'+1) \quad a, a' \in \mathbb{N}^* \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin H'x}{2H'} - \frac{\sin Hx}{2H}\right]_\pi^0 \qquad (H = a+a') \;\; et \;\; (H' = a-a') \quad H, H' \in \mathbb{N}^* \\
&= \frac{2}{\pi}[0] = 0
\end{aligned}$$

`preuve2.2.` La système (2.7) est complet en $L^2(0,\pi)$:

$$\int_0^\pi f(x)\sin(2k)xdx \quad k \in \mathbb{N}$$
$$\int_0^\pi f(x)\sin(2k+1)xdx \quad k \in \mathbb{N}_0$$

pour $f \in L^2(0,\pi)$ conduisant à $f(x) = 0$ dans $L^2(0,\pi)$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(x)\sin(2k+1)xdx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(2k+1)xdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\sin(2k+1)xdx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - f(\pi - x)\sin(2k+1)xdx = 0\end{aligned}$$

Alors par la complétude du système $\{\sin(2k+1)x\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ dans $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
on obtient $f(x) = f(\pi - x) \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$
De la même manière

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(x)\sin(2k)xdx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(2k)xdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\sin(2k)xdx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x) + f(\pi - x)\sin(2k)xdx = 0\end{aligned}$$

alors la complétude de système $\{\sin(2kx)\}_{k\in\mathbb{N}}$ dans $L^2\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,
on obtient $f(x) = -f(\pi - x), \;\; 0 < x < \frac{\pi}{2}$.
Après quoi $f(x) = 0$ dans $L^2\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, et par conséquent, $f(x) = 0$ dans $L^2\left(0, \pi\right)$.

CHAPITRE 3

PROBLÈME INVERSE AVEC CONDITION AUX LIMITES DE NEUMANN

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution du problème inverse $P2$ en utilisant la méthode de Fourier et un problème spectral d'un opérateur différentiel linéaire du second ordre avec involution et une condition aux limites de Neumann.

3.1 Position de problème

Trouver un couple de fonctions $(u(x,t), f(x))$ satisfaisant l'équation

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + \epsilon\, u_{xx}(\pi - x, t) = f(x) \tag{3.1}$$

$(x,t) \in \Omega = \{\, 0 < x < \pi, 0 < t < T\}$. Sous les conditions

$$\begin{cases} u(x,0) = 0, \quad x \in [0,\pi], \\ u(x,T) = \psi(x), \quad x \in [0,\pi], \\ u_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{3.2}$$

Et les conditions aux limites de Neumann homogènes

$$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{3.3}$$

où $\psi(x)$ est une fonction donnée suffisamment lisse

3.2 Problème spectral

Le problème spectral est :

$$\begin{cases} -y''(x) + \epsilon\, y''(\pi - x) = \lambda y(x) = 0. \\ y'(0) = y'(\pi) = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Utilisant de la méthode de Fourier pour résoudre le problème (3.4) conduit au problème spectral pour l'opérateur L donnée par l'expression et la condition aux limite de Neumann.
Nous avons le problème d'onde suivant

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) - \epsilon\, u_{xx}(\pi - x, t) + f(x), \\ D_T = \{\ (x,t) : 0 < x < \pi, 0 < t < T\} \\ u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = 0 \quad x \in [0,\pi], \\ u(x,T) = \psi(x), \quad x \in [0,\pi], \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \end{cases} \tag{3.5}$$

Pour trouver le problème spectral (3.4) on pose $f(x) = 0$ dans (3.5) alors donnée le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + \epsilon\, u_{xx}(\pi - x, t), \\ D_T = \{\ (x,t) : 0 < x < \pi, 0 < t < T\} \\ u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = 0 \quad x \in [0,\pi], \\ u(x,T) = \psi(x), \quad x \in [0,\pi], \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \end{cases} \tag{2.6}$$

Nous avons le problème de Sturn-Liouville suivant :
si on pose

$$\begin{cases} u(x,t) = X(t)\, Y(x), \\ u(\pi - x, t) = X(t)\, Y(\pi - x). \end{cases}$$

En remplaçant dans (3.6) on obtient

$$X''(t)\, Y(x) = X(t)\, Y''(x) - \epsilon X(t)\, Y''(\pi - x).$$

D'où

$$\frac{X''(t)}{X(t)} = \frac{Y''(x) - \epsilon\, Y''(\pi - x)}{Y(x)} = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Et comme x et t sont indépendant, on trouve :

$$\begin{cases} Y''(x) - \epsilon\, Y''(\pi - x) + \lambda Y(x) = 0 \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0. \end{cases}$$

Ce qui implique

$$\begin{cases} Y''(x) - \epsilon\, Y''(\pi - x) + \lambda Y(x) = 0 \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ X(t)\, Y'(0) = X(t)\, Y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} Y''(x) - \epsilon\, Y''(\pi - x) = -\lambda Y(x) \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ Y'(0) = Y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

on résoudre le probléme spectral (3.4) alors :
on pose

$$\begin{cases} S(x) = y(x) + y(\pi - x) \\ W(x) = y(x) - y(\pi - x) \end{cases}$$

,alors

$$\begin{cases} -y''(x) + \epsilon\, y''(\pi - x) = \lambda y(x). \\ -y''(\pi - x) + \epsilon\, y''(x) = \lambda y(\pi - x). \end{cases}$$

alors :

$$\begin{cases} \quad -S''(x) + \epsilon S''(x) = \lambda S(x). \\ \Longleftrightarrow S''(x) = -\frac{\lambda}{(1-\epsilon)} S(x) = -\mu_1^2 S(x), \\ pour \quad \mu_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{(1-\epsilon)}}. \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} S''(x) = -\mu_1^2 S(x) \\ S'(0) = 0 \\ S'(\pi) = 0 \end{cases}$$

D'autre part , on a :

$$\begin{cases} \quad -W''(x) - \epsilon\, W''(x) = \lambda W(x). \\ \Longleftrightarrow W''(x) = -\frac{\lambda}{(1+\epsilon)} W(x) = -\mu_2^2 W(x), \\ pour \quad \mu_2 = \sqrt{\frac{\lambda}{(1+\epsilon)}}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} W''(x) = -\mu_2^2 W(x) \\ W'(0) = 0 \\ W'(\pi) = 0 \end{cases}$$

alors
$*$ si $\lambda = 0$ alors

$$S''(x) = 0 \Rightarrow S(x) = ax + b\ .$$

et $S'(x) = a$.

$$\Leftrightarrow S'(0) = S'(\pi) = a = 0\ .$$
$$\Leftrightarrow S(x) = b.$$

D'autre part , on a :

$$W''(x) = 0 \Rightarrow W(x) = a'x + b'\ .$$
$$\text{et } W'(x) = a'$$
$$\Leftrightarrow W'(0) = W'(\pi) = a' = 0.$$
$$\Leftrightarrow W(x) = b'.$$

on a : $y(x) = \frac{1}{2}\left[S(x) + W(x)\right]$
$\Longleftrightarrow y(x) = \frac{1}{2}\left[b + b'\right]$
alors : $y(x) = c$.
$*$ si $\lambda 0$ alors :
$S(x) = A\cos(\mu_1 x) + B\sin(\mu_1 x)$.
alor : $S'(0) = 0 \Longleftrightarrow -A\mu_1\sin(\mu_1 0) + B\mu_1\cos(\mu_1 0) = 0$
$\Longleftrightarrow B\mu_1 = 0 \Rightarrow B = 0.$
$S'(\pi) = 0 \Longleftrightarrow -A\mu_1\sin(\mu_1\pi) = 0 \Rightarrow \sin(\mu_1\pi) = 0.$
$\Longleftrightarrow \mu_1\pi = n\pi \quad n \in \mathbb{N}$
$\Longleftrightarrow \mu_1 = n \quad n \in \mathbb{N}$
alors : $S(x) = A\cos(nx) \quad A \in \mathbb{R}$.
et on a,
$w(x) = A'\cos(\mu_2 x) + B'\sin(\mu_2 x)$.
$W'(0) = 0 \Longleftrightarrow -A'\mu_2\sin(\mu_2 0) + B'\mu_2\cos(\mu_2 0) = 0$
$\Rightarrow B'\mu_2 = 0 \Rightarrow B' = 0.$
$W(\pi) = 0 \Longleftrightarrow -A'\sin(\mu_2\pi) = 0 \Rightarrow \sin(\mu_2\pi) = 0.$
$\Longleftrightarrow \mu_2\pi = p\pi \quad p \in \mathbb{N}$
$\Longleftrightarrow \mu_2 = p \quad p \in \mathbb{N}$

alors : $W(x) = A'\cos(px) \quad A' \in \mathbb{R}$.
on a :

$$\begin{cases} S(x) = y(x) + \epsilon\, y(\pi - x) \\ W(X) = y(x) - \epsilon\, y(\pi - x) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow y(x) = \frac{1}{2}\left[A\cos(nx) + A'\cos(px)\right].$$

En remplaçant $y_n(x) = A\cos(nx)$ dans l'équation :

$$-y_n''(x) + \epsilon y_n''(\pi - x) = \lambda_n y_n(x).$$

on a :

$$y_n'(x) = -nA\sin(nx)$$

$$y_n''(x) = -n^2 A\cos(nx)$$

alors :

$n^2 A\cos nx + \epsilon A n^2 \cos(n\pi - nx) = \lambda_n A\cos nx.$

$\Longleftrightarrow n^2\cos nx - \epsilon n^2[\cos(n\pi - nx)] = \lambda_n \cos nx.$

$\Longleftrightarrow n^2\cos nx - \epsilon n^2[\cos(n\pi)\cos(nx)] = \lambda_n \cos nx.$

$\Longleftrightarrow n^2 - \epsilon n^2(-1)^n = (1-\epsilon)n^2.$

$\Longleftrightarrow 1 - \epsilon(-1)^n = 1 - \epsilon.$

$\Longleftrightarrow -(-1)^n = -1$

$. \Longleftrightarrow (-1)^n = 1$

$\Longleftrightarrow n = 2k.$

alors

$$\begin{cases} \lambda_n = (1-\epsilon)\ (2k)^2 \\ y_n = A\cos(2k)x \qquad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

de la meme façont de $y_p = A'\cos(px)$ dans l'équation , alors :

$$-\,y_p''(x) + \epsilon y_p''(\pi - x) = \lambda_p y_p(x)$$

on trouve

$1 - \epsilon\cos(\pi p) = 1 + \epsilon$

$1 - \epsilon(-1)^p = 1 + \epsilon$

$\Longleftrightarrow -(-1)^p = 1$

$\Longleftrightarrow (-1)^p = -1$

$\Longleftrightarrow p = 2k+1 \quad k \in \mathbb{N}^*$

alors :

$$\begin{cases} \lambda_p = (1+\epsilon)(2k+1)^2 \\ y_p = A'\cos(2k+1)x \end{cases}$$

donc les valeures propres est :

$$\begin{cases} \lambda_{2K} = (1-\epsilon)(2K)^2 \quad k \in \mathbb{N}^* \\ \lambda_{2K+1} = (1+\epsilon)(2K+1)^2 \quad k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

et les vecteurs propres est

$$\begin{cases} y_0 = cy_{2K} = A\cos 2Kx \quad k \in \mathbb{N} \\ y_{2K+1} = A'\cos(2K+1)x \quad k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

avec la normalisation , alors :

*

$$\begin{aligned} \langle y_0, y_0 \rangle = & \qquad \int_0^\pi (y_0(x))^2 \, dx = 1 \\ &= \int_0^\pi c^2 \, dx = 1 \\ &= c^2 [x]_0^\pi = 1. \\ &= c^2(\pi) = 1 \implies c^2 = \frac{1}{\pi} \\ &= c \Longleftrightarrow c = \sqrt{\frac{1}{\pi}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} *\langle y_{2k}, y_{2k} \rangle &= \int_0^\pi (y_{2k}(x))^2 \, dx = 1 \\ &= \int_0^\pi A^2 \cos^2(2k)x \, dx = 1 \\ &= A^2 \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{8k}\sin(4kx) \right]_0^\pi = 1 \\ &= A^2 \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{8k}\sin(4k\pi) \right] = 1 \\ = A^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1 \implies A^2 = \frac{2}{\pi} &\implies A = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \end{aligned}$$

Et la même façon de la normalisation de y_{2k+1} telle que :

$$*\langle y_{2k+1}, y_{2k+1} \rangle = \int_0^\pi (y_{2k+1}(x))^2 \, dx = 1.$$

On trouve $A' = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$, alors

$$\begin{cases} y_0 = \sqrt{\dfrac{1}{\pi}}; \\ y_{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(2k)x \quad k \in \mathbb{N}; \\ y_{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(2k+1)x \quad k \in \mathbb{N}^*; \end{cases} \tag{3.7}$$

Lemme 3.1. *les systèmes de fonction* (3.7) *sont complets et orthonormal en* $L^2(0,\pi)$

`preuve`3.1. le système (3.7) est orthonormal alors :

$$\begin{aligned}
\bullet\langle y_0, y_0\rangle &= \int_0^\pi \sqrt{\frac{1}{\pi}}^2 dx \\
\bullet\langle y_{2k}, y_{2k'}\rangle &= \int_0^\pi \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(2k)x \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(2k')x dx \\
\bullet\langle y_{2k+1}, y_{2k'+1}\rangle &= \int_0^\pi \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(2k+1)x \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(2k'+1)x dx
\end{aligned}$$

Si $k = k'$ on trouve

$$\begin{aligned}
\bullet\langle y_0, y_0\rangle &= \int_0^\pi \frac{1}{\pi}dx \\
&= \frac{1}{\pi}[x]_0^\pi \\
&= \frac{1}{\pi}[\pi] = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet\langle y_{2k}, y_{2k'}\rangle &= \int_0^\pi \frac{2}{\pi}\cos^2(2k)x dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{8k}\sin(4k)x\right]_0^\pi \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\right] = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet\langle y_{2k+1}, y_{2k'+1}\rangle &= \int_0^\pi (y_{2k+1}(x))^2 dx \\
&= \int_0^\pi \frac{2}{\pi}\cos^2(2k+1)x dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{8k+4}\sin(4k+2)x\right]_0^\pi \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}\right] = 1
\end{aligned}$$

Si $k \neq k'$

$$
\begin{aligned}
\bullet\langle y_{2k}, y_{2k'}\rangle &= \int_0^\pi \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(2k)x \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(2k')xdx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(2k)x \cdot \cos(2k')xdx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin[2(k'-k)x]}{4(k'-k)} + \frac{\sin[2(k'+k)x]}{4(k'+k)}\right]_0^\pi \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin 2H'x}{4H'} + \frac{\sin 2Hx}{4H}\right]_0^\pi \qquad (H = k'+k) \;\; et \;\; (H' = k'-k) \quad H, H' \in \mathbb{N}^* \\
&= \frac{2}{\pi}[0] = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bullet\langle y_{2k+1}, y_{2k'+1}\rangle &= \int_0^\pi \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(2k+1)x \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(2k'+1)xdx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(2k+1)x \cdot \cos(2k'+1)xdx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin[2(a'-a)x]}{4(a'-a)} + \frac{\sin[2(a'+a)x]}{4(a'+a)}\right]_0^\pi \qquad (a = 2k+1) \;\; et \;\; (a' = 2k'+1) \quad a, a' \in \mathbb{N}^* \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin H'x}{2H'} + \frac{\sin Hx}{2H}\right]_\pi^0 \qquad (H = a'+a) \;\; et \;\; (H' = a'-a) \quad H, H' \in \mathbb{N}^* \\
&= \frac{2}{\pi}[0] = 0
\end{aligned}
$$

`preuve3.2.` La système (3.7) est complet en $L^2(0,\pi)$:

$$
\int_0^\pi f(x)\cos(2k)xdx \quad k \in \mathbb{N}
$$
$$
\int_0^\pi f(x)\cos(2k+1)xdx \quad k \in \mathbb{N}_0
$$

pour $f \in L^2(0,\pi)$ conduisant à $f(x) = 0$ dans $L^2(0,\pi)$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(x)\cos(2k+1)xdx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(2k+1)xdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos(2k+1)xdx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - f(\pi - x)\cos(2k+1)xdx = 0\end{aligned}$$

Alors par la complétude du système $\{\cos(2k+1)x\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ dans $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$
on obtient $f(x) = f(\pi - x) \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$
De la même manière

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(x)\cos(2k)xdx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(2k)xdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos(2k)xdx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x) + f(\pi - x)\cos(2k)xdx = 0\end{aligned}$$

alors la complétude de système $\{\cos(2kx)\}_{k\in\mathbb{N}}$ dans $L^2\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,
on obtient $f(x) = -f(\pi - x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$.
Après quoi $f(x) = 0$ dans $L^2\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, et par conséquent, $f(x) = 0$ dans $L^2\left(0,\pi\right)$.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié une classe de problèmes inverses pour une équation d'onde avec involution pour les cas de deux conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann. Ce travail se déroule en deux étapes :

- ✓ Nous avons discuté l'existence et l'unicité de la solution du problème inverse $P1$, en utilisant la méthode de Fourier et un problème spectral d'un opérateur différentiel linéaire du second ordre avec involution et une condition aux limites de Dirichlet.
- ✓ Nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution du problème inverse $P2$ en utilisant la méthode de Fourier et un problème spectral d'un opérateur différentiel linéaire du second ordre avec involution et une condition aux limites de Neumann.

Dans les deux problèmes inverse, nous avons utilisé la méthode Fourier.

Bibliographie

[1] S. Abdelkebir. *Étude de quelques problémes d'évolution pour des équations aux dérivées fractionnaires*. PhD thesis, Université de M'sila, Algérie, 2022.

[2] F. Athmani. Etude d'un problÃ¨me inverse pour l'Ã©quation tÃ©lÃ©graphique linÃ©aire. Master's thesis, UniversitÃ© de M'sila, AlgÃ©rie, 2022.

[3] A. Cabada and F.A. Tojo. *Differential Equations with involutions*. Atlantis Press, 2015.

[4] M. Kirane and N. Al-Salti. Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation. *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 9 :1243–1251, 2016.

[5] M. Ruzhansky, M. Sadybekov, and D. Suragan. *Spectral Geometry of Partial Differential Operators*. CRC Press, New york, 2020.

[6] R. Tapdiagoglu and B.T. Torebek. Inverse source problems for a wave equation with involution. *Bulletin of the Karaganda University*, 3(91), 2018.

[7] B.T. Torebek and R. Tapdiagoglu. Some inverse problems for the nonlocal heat equation with caputo fractional derivative. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 40 :6468–6479, 2017.

ملخص: في هذه المذكرة، درسنا فئة من المسائل العكسية لمعادلة الموجة مع الانقلاب مع شروط حدية من النوع دريكلي ونيومان. تم إثبات وجود ووحدانية الحل لهذين المسألتين العكسيتين. يتم الحصول على الحل بواسطة نشر سلسلة دوال متقاربة وفق قاعدة متعامدة لكل مسألة عكسية.

كلمات مفتاحية: مسألة عكسية، انقلاب، معادة الموجة غير المحلية، مسألة شتورم- ليوفيل.

Dans ce mémoire, nous avons considéré une classe de problèmes inverses pour une équation d'onde avec involution pour les cas de deux conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann. L'existence et l'unicité des solutions de ces problèmes sont prouvées. Les solutions sont obtenues sous forme de développement en série de fonctions en utilisant un ensemble de bases orthogonales appropriées pour chaque problème. La convergence des solutions obtenues est également justifiée.

Mots-Clés : Problème inverse, involution, Équation d'onde non locale, Problème de Sturm-Liouville.

In this memoir, we have considered a class of inverse problems for a wave equation with involution for the cases of two boundary conditions of Dirichlet and Neumann. The existence and the uniqueness of the solutions of these problems are proved. Solutions are obtained as a series expansion of functions using a set of appropriate orthogonal bases for each problem. The convergence of the solutions obtained is also justified.

Keywords : Inverse problem, involution, Non-local wave equation, Sturm-Liouville problem.