



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDPs et applications

Thème

Problème inverse pour une équation différentielle hyperbolique du second ordre

Présenté par :

M^{elle} KHALFA Hadjer

Soutenu publiquement le : 19/06/2022.

Devant le jury composé de :

Président :	<i>MERZOUGUI Abdelkrim</i>	Prof.,	Université de M'sila
Encadreur :	<i>NOURI Brahim</i>	M.C.A,	Université de M'sila
Co-Encadreur :	<i>DJERIOUI Khayra</i>	M.A.A,	Université de M'sila
Examineur :	<i>ABDELKEBIR Saad</i>	M.C.B,	Université de M'sila

Année universitaire 2021/2022

Remerciements

Je remercie Dieu de m'avoir aidé à accomplir ce travail, puis je veux exprimer ma profonde gratitude à mes parents pour tant d'amours et de soutiens moraux.

J'adresse le grand remerciement à mon encadreur Dr. Nouri Brakim qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses dirigés du début à la fin de ce travail.

Tous mes remerciements et gratitude vont à Dr. M. Marzougi, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

Mes vives remerciements vont aussi à Dr. S. Abdelkebir d'avoir accepté d'être membres du jury et d'examiner mon travail.

Je remercie aussi les professeurs de mathématiques et à tout ce m'ait enseigné au long de ma vie scolaire.

J'adresse mon sincère remerciement au secrétaire de notre département. J'adresse aussi mon remerciements les plus vifs aux personnes qui m'aient apporté leur aide et qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie cette mémoire :

Ma mère

Mon père

Ma grand-mère

Mes frères

Fouad et son marie Dalal

Farid

Ilyas

Ma sœur

Ibtissem

Mes amies

Baali Nesrine

Nadji Manel

Herzi Manel

Chebabhi Barkahoum

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème inverse pour déterminer un coefficient de potentiel en fonction du temps t et le déplacement d'onde à la position x et au temps t dans une équation hyperbolique linéaire du second ordre avec des conditions aux limites non locales et une condition supplémentaire sur le côté $x = 1$. Pour le temps T est suffisamment petit et avec des hypothèses sur les données du problème, nous avons prouvé l'existence et l'unicité de la solution par le théorème de point fixe. Ensuite, nous avons proposé un algorithme pour calculer la solution numérique de ce problème inverse. Cet algorithme basé sur la méthode de collocation de Tchebychev, la méthode de Newmark et la méthode des moindres carrés avec régularisation de Tikhonov. Des exemples numériques sont présentés pour valider l'efficacité de cet algorithme.

Mots-Clés : Théorème de point fixe, Problème non auto-adjoint, Méthode de Newmark, Moindres carrés, Polynômes de Tchebychev, Régularisation de Tikhonov.

In this memoir, we studied an inverse problem to determine a coefficient of potential as a function of time t and the wave displacement at position x and at time t in a second-order linear hyperbolic equation with non-local boundary conditions and an additional condition on the side $x = 1$. For the time T is small enough and with assumptions on the data of the problem, we proved the existence and uniqueness of the solution by the fixed point theorem. Then, we proposed an algorithm to calculate the numerical solution of this inverse problem. This algorithm based on Chebyshev's collocation method, Newmark's method and the least squares method with Tikhonov regularization. Numerical examples are presented to validate the efficiency of this algorithm.

Keywords : Fixed point theorem, Non self-adjoint problem, Newmark method, Least squares, Chebyshev polynomials, Tikhonov regularization.

Table des matières

Introduction générale	6
1 Préliminaire sur des outils mathématiques utilisés	9
1.1 Espace de Banach	10
1.1.1 Normes	10
1.1.2 Espaces vectoriels normés	10
1.1.3 Espace complet	11
1.1.4 Espace Banach	12
1.2 Espace de Hilbert	12
1.2.1 Bases hilbertiennes	13
1.3 Problème spectrale	13
1.4 Théorème de point fixe de Banach	14
1.5 Polynômes de Tchebychev	15
2 Existence et unicité de la solution	17
2.1 Position de problème	18
2.2 Problème spectral auxiliaire	18
2.3 Existence et l'unicité	26
3 Étude numérique	36
3.1 Problème direct	37
3.1.1 Polynômes de Tchebychev décales du première espèce	37
3.1.2 Analyse de convergence	38
3.1.3 Méthode de collocation de Tchebychev	39
3.1.4 Méthode de Newmark	40
3.2 Problème inverse	44
3.2.1 position de problème	44
3.2.2 Problème de moindres carrés non linéaire	45
Bibliographie	53

Table des figures

3.1	solution exacte et approchée pour $T = 1$	43
3.2	l'erreur pour $T = 1$	44

Introduction générale

De nombreux modèles physiques incluent des coefficients inconnus dans l'équation, et la résolution des problèmes inverses consistant en l'identification de ces coefficients est devenue un domaine de recherche très populaire ces dernières années. Les problèmes inverses pour les équations hyperboliques présentent une valeur significative pour les applications physiques telles que la corde vibrante, la sismologie, la géophysique, etc.

Considérons le problème de la corde vibrante avec des conditions initiales arbitraires

$$v_{tt}(x, t) = c^2 v_{xx}(x, t) + a(t)v(x, t) + s(x, t), \quad (x, t) \in D_T, \quad (1)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

où $D_T = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 \leq t \leq T\}$ pour un $T > 0$ fixe, $c = \frac{\Upsilon}{\rho}$ est la vitesse de phase du mouvement des ondes, Υ est la force de tension exercée sur la corde, ρ est la masse de densité, $s(x, t)$ est la fonction des forces externes, $v(x, t)$ représente le déplacement d'onde à la position x et au temps t et les fonctions $v_0(x)$ et $v_1(x)$ sont respectivement la forme d'onde et la vitesse. Dans ce mémoire, on suppose que $c = 1$.

Pour une fonction donnée $a(t)$, le problème de trouver $v(x, t)$ à partir de l'équation (1) avec la condition initiale (2) et la condition aux limites non locales

$$v(0, t) = b(t), \quad v_x(0, t) = v_x(1, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

est appelé problème direct. La condition aux limites $v(0, t) = b(t)$ se produit si l'extrémité gauche de la corde est attachée à un système ressort-masse et $b(t)$ est la position de la masse à

l'extrémité gauche.

Si $a(t)$ est inconnu, trouver le couple de solution $\{v(x, t), a(t)\}$ du problème (1)-(3) avec la condition supplémentaire

$$v(1, t) = r(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

est appelé problème inverse.

Les problèmes inverses pour l'équation hyperbolique avec différentes conditions aux limites et coefficients dépendant de l'espace sont étudiés dans [5, 7, 11, 13] et plus récemment dans [4, 12]. Le problème inverse de l'équation hyperbolique à coefficient dépendant du temps avec condition intégrale est étudié dans [10].

Dans ce mémoire, nous avons concerné les deux aspects suivants :

- ☞ **Étude théorique** : nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution du problème inverse (1)-(4) en utilisant la méthode de Fourier, méthode de point fixe et un problème spectral non autoadjoint.
- ☞ **Étude numérique** : nous avons proposé un algorithme pour résoudre le problème inverse (1)-(4). Cet algorithme basé sur la méthode de collocation de Tchebychev, la méthode de Newmark et la méthode de moindres carrés non linéaires avec régularisation de Tchekhov. Des exemples numériques sont présentés et discutés.

Ce mémoire se décompose en trois chapitres de la manière suivante : dans le premier chapitre, nous rappelons certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires dans ce mémoire concernant les espaces fonctionnels, un problème spectral non autoadjoint et la méthode de point fixe.

Dans le deuxième chapitre, la méthode de Fourier convertit le nouveau problème inverse en un problème de point fixe dans un espace de Banach choisi. Sous certaines conditions de régularité sur les données initiales et aux limites, l'existence et l'unicité de la solution du problème inverse sont démontrées par le principe de contraction de Banach pour T est suffisamment petit.

Dans le dernier chapitre, nous avons proposé un algorithme pour résoudre le problème inverse (1)-(4). Cet algorithme basé sur la méthode de collocation de Tchebychev, la méthode de Newmark et la méthode des moindres carrés non linéaires avec régularisation de Tekhonov. Des exemples numériques sont présentés pour valider l'efficacité de cet algorithme.

On termine ce mémoire par une conclusion et quelques perspectives.

PRÉLIMINAIRE SUR DES OUTILS MATHÉMATIQUES UTILISÉS

Dans ce chapitre, nous rappelons certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires dans ce mémoire concernant les espaces fonctionnels, un problème spectral non autoadjoint et la méthode de point fixe de Banach.

1.1 Espace de Banach

1.1.1 Normes

Définition 1.1. ([3]) Soient E un espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou bien \mathbb{C}). Une norme sur E est une fonction $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur E à valeurs dans l'ensemble des nombres réels, vérifiant les quatre propriétés suivants :

1. $\forall u \in E : \|u\| \geq 0$ [Positivité].
2. un élément u de E vérifie $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ [Séparabilité]
3. $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}; \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ [Homogénéité]
4. $\forall u \in E, \forall v \in E : \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ [Inégalité triangulaire]

Pour $\forall u \in E$ donné, le nombre réel ≥ 0 , $\|u\|$ est appelé norme de u .

1.1.2 Espaces vectoriels normés

Définition 1.2. Un espace vectoriel normé réel [resp.complexe] est un couple constitué par un espace vectoriel E réel [complexe] et par une norme $\|u\|$ sur l'espace vectoriel E .

Définition 1.3. Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} , et soit $\|u\|$ une norme sur E . On associe à cette norme une distance d sur E par la formule :

$$\forall u \in E, \forall v \in E : d(u, v) = \|u - v\|.$$

Cette distance est dite la distance associée à la norme $\|\cdot\|$.

Définition 1.4. Deux normes sur un même espace vectoriel E seront dites équivalentes si les distances associées sont équivalentes. $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes ssi il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$$\forall u \in E : \alpha \|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq \beta \|\cdot\|_1.$$

Exemple 1.1. On considère $E = \mathbb{R}^n$ comme l'espace vectoriel produit : $E = \mathbb{R}^n$ n fois, chaque exemplaire de étant muni de la norme usuelle, i.e. la valeur absolue. On obtient grâce à ce qui précède les normes holdériennes sur \mathbb{R}^n : pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $p > 1$ réel

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

1. Inégalité de Hölder :

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

2. Inégalité de Young :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

3. Inégalité de Minkowski :

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

ou $1 \leq p \leq \infty$ et q exposant conjugué de p défini par la relation

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Exemple 1.2. Soit $E = C([a, b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel de toutes les fonctions :

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui sont continues sur $[a, b]$ avec $a < b$. Les fonctions

$$E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \longrightarrow \|f\|$$

suivantes :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|f\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|.$$

définissant trois normes usuelles sur E appelées respectivement :

norme de la moyenne, norme de la moyenne quadratique, norme uniforme.

1.1.3 Espace complet

Définition 1.5. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Une suite de points $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E est une suite de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p > q > N, \|x_p - x_q\| < \epsilon.$$

Remarque 1.1. — Une suite convergente est de Cauchy.

— Une suite de Cauchy est bornée.

Définition 1.6. On dit qu'un espace normé (E, \mathbb{R}) est complet si toute suite de Cauchy de E

converge dans E.

Un espace vectoriel sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} normé complet.

1.1.4 Espace Banach

Définition 1.7. On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet.

Exemple 1.3. — Tout espace vectoriel normé de dimension finie est (en particulier \mathbb{R}^n) est un espace de Banach.

— $E = C([a, b], \mathbb{R})$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1.2 Espace de Hilbert

Définition 1.8. On dit que φ est une forme hermitienne définie positive sur H si φ vérifie :

1. $\varphi(\alpha x + \beta x', y) = \alpha\varphi(x, y) + \overline{\varphi(x', y)}$ pour $x, x', y \in H$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (linéarité en x)
2. $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)} \forall x, y \in H$ (Symétrie hermitienne)
3. $\varphi(x, x) \geq 0 \forall x \in H$ (Positivité)
4. $\varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Positivité stricte)

On notera que l'application $x \rightarrow \varphi(x, y)$ ou y étant fixé est aussi linéaire dans la seconde variable, il est "bilinéaire symétrique". On dit aussi (propriété(4)) qu'il est défini positif.

Remarque 1.2. Comme une conséquence de (1) et (2), on a l'antilinearité par rapport à la deuxième variable

$$\varphi(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}\varphi(x, y) + \overline{\beta}\varphi(x, z) \quad \text{pour } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Lemme 1.1. (Inégalité de Cauchy - Schwarz) Soit φ est une forme hermitienne définie positive sur un espace vectoriel H, alors

$$\forall x, y \in H \quad |\varphi(x, y)|^2 \leq \varphi(x, x) \cdot \varphi(y, y)$$

Théorème 1.1. Soit φ est une forme hermitienne définie positive sur un espace vectoriel H, alors H est un espace vectoriel normé

$$\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)} \quad \text{pour tout } x \in H.$$

muni de cette norme H est appelé espace **préhilbertien**

Si l'espace pré-hilbertien est complet, il est appelé de **Hilbert**. Dans ce qui suivra $\varphi(x, y)$ sera notée $\langle x, y \rangle$:

Exemple 1.4. 1. \mathbb{R}^n est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{pour tout } x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

2. $L^2(\mu)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int f \bar{g} d(\mu) \quad \text{pour tout } f, g \in L^2(\mu).$$

Remarque 1.3. On peut aussi définir une distance d sur H par

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} \quad \text{pour tout } x, y \in H$$

1.2.1 Bases hilbertiennes

Définition 1.9. Soit H espace pré-hilbertien. On dit qu'une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de H est orthogonale si l'on a

$$\forall i, j \in I : i \neq j \quad \text{alors} \quad \langle x_i, x_j \rangle = 0$$

On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est orthonormale si elle est orthogonale et si de plus $\|x_i\| = 1$ pour tout $i \in I$

Proposition 1.1. (inégalité de Bessel). Soient $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace pré-hilbertien et $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormale dans H . Pour tout $x \in H$, la famille $(|\langle x, e_i \rangle|^2)_{i \in I}$ est sommable dans \mathbb{R}^+ et on a

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

1.3 Problème spectrale

On considère le problème spectrale suivant (voir [2]) :

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, 0 \leq x \leq 1, \\ X(0) = 0, X'(1) = X'(0). \end{cases} \quad (1.1)$$

Ce problème est problème non auto-adjoint, il a le problème adjoint suivant :

$$\begin{cases} Y''(x) + \lambda Y(x) = 0, 0 \leq x \leq 1, \\ Y'(1) = 0, Y(0) = Y(1). \end{cases} \quad (1.2)$$

En effet

$\int_0^1 Y X'' dx = X'(1)(Y(1) - Y(0)) - Y'(1)X(1) + \int_0^1 Y'' X dx$. Il est clair que le cote droit de cette re-

l'annulation s'annule si $Y'(1) = 0, Y(0) = Y(1)$ Le problème spectral (1.1) possède les valeurs propres

$$\lambda_n = (2\pi n)^2.$$

et les fonction propres

$$X_0(x) = x \text{ pour } \lambda_0, X_{2n}(x) = 2 \sin(2\pi n x) \text{ pour } \lambda_n = (2\pi n)^2, n \in \mathbb{N}^*.$$

L'ensemble des fonction X_0, X_{2n-1} ne forme pas un système complet et n'est pas une base pour l'espace $L^2(0, 1)$. Pour compléter la base, nous considérons les fonctions propres X_{2n} pour λ_n associées aux X_{2n-1} définies comme la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} X''_{2n-1}(x) + \lambda X_{2n-1}(x) = -\sqrt{\lambda_n} X_{2n}(x), 0 \leq x \leq 1, \\ X_{2n-1}(0) = 0, X'_{2n-1}(0) = X'_{2n-1}(1). \end{cases} \quad (1.3)$$

Le problème (1.3) possède les fonctions propres suivantes

$$X_{2n}(x) = x \cos(2\pi n x), n \in \mathbb{N}^*.$$

En résolvant le problème adjoint (1.2), on obtient les fonctions propres

$$Y_0(x) = 2 \text{ pour } \lambda_0, Y_{2n-1}(x) = x \cos(2\pi n x) \text{ pour } \lambda_n = (2\pi n)^2, n \in \mathbb{N}^*$$

et les fonctions propres associés $Y_{2n}(x) = \sin(2\pi n x), n \in \mathbb{N}^*$, sont obtenus à partir du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} Y''_{2n-1}(x) + \lambda Y_{2n}(x) = -\sqrt{\lambda_n} Y_{2n-1}(x), 0 \leq x \leq 1, \\ Y'_{2n}(1) = 0, Y_{2n}(0) = Y_{2n}(1). \end{cases} \quad (1.4)$$

1.4 Théorème de point fixe de Banach

Définition 1.10. ([6]) Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normée, une application f est défini par $f : E \rightarrow E$, on dit que $x \in E$ est point de f si $f(x) = x$.

Théorème 1.2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normée complet non vide et soit $f : E \rightarrow E$ une application α -contraction i.e il existe $0 < \alpha < 1$ tel que $\|f(x) - f(y)\| \leq \alpha \|x - y\|$ pour tout $x, y \in E$. Alors f possède un unique point fixe.

1.5 Polynômes de Tchebychev

Les polynômes de Tchebychev sont largement utilisés dans l'analyse numérique, l'approximation des moindres carrés, l'approximation polynomiale, l'intégration numérique et les méthodes spectrales pour les équations aux dérivées partielles. Il existe quatre types de polynômes de Tchebychev. Dans cette mémoire, on considère les polynômes de Tchebychev du premier type qui sont des solutions de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$(1 - x^2) y''(x) - xy'(x) + n^2 y(x) = 0$$

Les polynômes de Tchebychev du quatrième type notés par $W_n(x)$.

Définition 1.11. ([8]) le polynôme de Tchebychev du premier type $T_n(x)$ est un polynôme de degré n en x défini par :

$$T_n(x) = \cos(n\theta), \quad (1.5)$$

ou $x = \cos(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$

Proposition 1.2. Les polynômes de Tchebychev du premier type $T_n(x)$ sont orthogonaux dans l'intervalle $[-1, 1]$ par rapport à la fonction poids $w(x) = \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$ c'est à dire

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} T_n(x) T_m(x) dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

Démonstration. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ et $x = \cos(\theta)$. Nous avons :

1. Si $n \neq m$, alors,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} T_n(x) T_m(x) dx &= \int_0^\pi \cos(n)\theta \cos(m)\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(n-m)\theta + \cos(n+m)\theta] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n-m)\theta}{n-m} + \frac{\sin(n+m)\theta}{n+m} \right]_0^\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Si $n = m$, alors,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} T_n^2(x) dx &= \int_0^\pi \cos^2(n\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [1 + \cos(2n\theta)] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{\sin(2n\theta)}{2n} \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Proposition 1.3. Les polynômes de Tchebychev du première espèce $T_n(x)$ vérifiant la relation de récurrence d'ordre deux suivante :

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad \forall n \geq 2. \end{cases} \quad (1.6)$$

Démonstration. Soit $x \in [-1, 1]$ et $x = \cos(\theta)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta &= 2 \cos \left[\frac{(n+1)\theta + (n-1)\theta}{2} \right] \cos \left[\frac{(n+1)\theta - (n-1)\theta}{2} \right] \\ &= 2 \cos n\theta \cos \theta. \end{aligned}$$

donc

$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2 \cos n\theta \cos \theta$. d'où le résultat (1.6). □

Proposition 1.4. La forme explicite de polynôme de Tchebychev du première espèce $T_n(x)$ est

$$\sum_{k=0}^{E(n/2)} (-1)^k 2^{n-2k-1} \frac{n}{n-k} C_{n-k}^k x^{n-2k}. \quad (1.7)$$

Proposition 1.5. Les zéros de $T_n(x)$ sont de la forme :

$$x_k = \cos \frac{(n-1/2)\pi}{n}, k = 1, 2, \dots, n.$$

Démonstration : D'après, les zéros pour x dans $[-1, 1]$ de $T_n(x)$ doivent correspondre les zéros pour θ dans $[0, \pi]$ de $\cos n\theta$, i.e.

$$n\theta = (n-1/2)\pi, k = 1, 2, \dots, n.$$

donc, $\theta = \frac{(n-1/2)\pi}{n}$ c'est à dire $x_k = \cos \frac{(n-1/2)\pi}{n}$.

EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION

Dans ce chapitre, nous avons démontré par la méthode de Fourier et la méthode de point fixe de Banach l'existence et l'unicité de la solution du problème inverse (1)-(4) pour T est suffisamment petit.

2.1 Position de problème

(voir[14]) Comme la condition aux limites (3) n'est pas homogène, nous introduisons une nouvelle variable $u(x, t) = v(x, t) - b(t)$. Alors, $u(x, t)$ satisfait le problème suivant :

$$u_{tt} = u_{xx} + a(t)u(x, t) + f(x, t), (x, t) \in D_T, \quad (2.1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), 0 \leq x \leq 1, \quad (2.2)$$

$$u(0, t) = 0, u_x(0, t) = u_x(1, t), 0 \leq t \leq T, \quad (2.3)$$

$$u(1, t) = h(t), 0 \leq t \leq T, \quad (2.4)$$

ou $f(x, t) = s(x, t) + a(t)b(t) - b''(t)$, $\varphi(x) = v_0(x) - b(0)$, $\psi(x) = v_1(x) - b'(0)$ et $h(t) = r(t) - b(t)$.

2.2 Problème spectral auxiliaire

On pose $f(x, t) = 0$.

On suppose la solution s'écris ce la forme $u(x, t) = X(x).Y(t)$

Donc

$$X(x)Y''(t) = X''(x)Y(t) + a(t)X(x)Y(t)$$

D'ou

$$\frac{Y''(t) - a(t)Y(t)}{Y(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

D'après les conditions (2.3)

$$u(0, t) = X(0)Y(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

et

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) \Rightarrow X'(0)Y(t) = X'(1)Y(t) \Rightarrow X'(0) = X'(1).$$

Donc le problème spectrale auxiliaire :

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, 0 \leq x \leq 1, \\ X(0) = 0, X'(0) = X'(1). \end{cases} \quad (2.5)$$

Pour $\lambda = 0$

$$X_0''(x) = 0 \Rightarrow X_0(x) = ax + b$$

$$X_0(0) = 0. \Rightarrow b = 0$$

$$X_0'(0) = X_0'(1) \Rightarrow a = a \text{ on choisi } a = 1$$

Donc

$$X_0(x) = x$$

Pour $\lambda > 0$

L'équation caractéristique $r^2 + \lambda_k = 0 \Rightarrow r = i\sqrt{\lambda_k}$ avec $\sqrt{\lambda_k} = \mu_k$

$$X_{2k}(x) = A \cos(\mu_k x) + B \sin(\mu_k x)$$

$$X_{2k}'(0) = X_{2k}'(1)$$

Alors

$$B\mu_k = -A\mu_k \sin(\mu_k) + B\mu_k \cos(\mu_k) \Rightarrow \begin{cases} \cos(\mu_k) = 1 \\ \sin(\mu_k) = 0 \end{cases} \Rightarrow \mu_k = 2k\pi.$$

$$X_{2k}(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

Donc

$$X_{2k}(x) = B \sin(\mu_k x)$$

$$X_{2k}'(0) = X_{2k}'(1) \Rightarrow B\mu_k = -A \sin(\mu_k) + B \cos(\mu_k)$$

D'où

$$B\mu_k = B\mu_k \Rightarrow B = B \text{ on choisi } B = 2$$

Alors

$$X_{2k}(x) = 2 \sin(\mu_k x).$$

Donc le problème spectral à les valeurs propres $\mu_k = 2k\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$ et les fonction propres

$$X_0(x) = x (\mu = 0), X_{2k}(x) = 2 \sin(\mu_k x) k = 1, 2, \dots$$

Donc $X_k = \{X_0(x) = x, X_{2k}(x) = 2 \sin(\mu_k x)\}$

Si $\lambda < 0$ (donné solution trivial)

La famille X_k , est un système nom complet, car les fonctions propres X_{2k} ne sont pas orthogonous a X_0 . Donc ils forment pas une base sur $L^2[0, 1]$.

L' idée présentée pour compléter la base

Alors complété le système $X_k, k = 0, 1, 2, \dots$ avec la fonction associées suivante

$$X_{2k-1} = x \cos(\mu_k x). \tag{2.6}$$

On définit un problème auxiliaire associée X_k pour λ_k correspondant à X_k définit comme la solution de problème suivant :

$$\begin{cases} -X''_{2k-1}(x) = \mu_k^2 X_{2k-1}(x) + \mu_k X_{2k}(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ X_{2k-1}(0) = 0, X'_{2k-1}(0) = X'_{2k-1}(1), & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.7)$$

pour trouver l'équation (2.6) en utilise l'équation (2.7).

Nous avons

$$\begin{cases} X''_{2k-1}(x) + \mu_k^2 X_{2k-1}(x) = -\mu_k X_{2k}(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ X_{2k-1}(0) = 0, X'_{2k-1}(0) = X'_{2k-1}(1), & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

La solution homogène :

$$\text{On a } X''_{2k-1}(x) + \mu_k^2 X_{2k-1}(x) = 0 \Rightarrow X_{2k-1}(x) = A \cos(\mu_k x) + B \sin(\mu_k x)$$

On a le système suivante

$$\begin{cases} A' \cos(\mu_k x) + B' \sin(\mu_k x) = 0, \\ -A' \mu_k \sin(\mu_k x) + B' \mu_k \cos(\mu_k x) = -\mu_k 2 \sin(\mu_k x). \end{cases}$$

$$H = \begin{pmatrix} \cos(\mu_k x) & \sin(\mu_k x) \\ -\mu_k \sin(\mu_k x) & \mu_k \cos(\mu_k x) \end{pmatrix}, \text{ Donc } |H| = \mu_k \neq 0, k = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\mu_k} \int -\sin(\mu_k x)(-2\mu_k \sin(\mu_k x)) dx \\ &= 2 \int \sin^2(\mu_k x) dx \\ &= \int (1 - \cos(2\mu_k x)) dx \\ &= x - \frac{1}{2\mu_k} \sin(2\mu_k x) + C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\mu_k} \int \cos(\mu_k x)(-2\mu_k \sin(\mu_k x)) dx \\ &= -2 \int \cos(\mu_k x) \sin(\mu_k x) dx \\ &= - \int \sin(2\mu_k x) dx \\ &= \frac{1}{2\mu_k} \cos(2\mu_k x) + C_2. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} X_{2k-1}(x) &= C_1 \cos(\mu_k x) + C_2 \sin(\mu_k x) + \cos(\mu_k x) \left(x - \frac{1}{2\mu_k} \sin(2\mu_k x) \right) + \sin(\mu_k x) \left(\frac{1}{2\mu_k} \cos(2\mu_k x) \right) \\ &= (C_1 + x) \cos(\mu_k x) - \frac{1}{2\mu_k} (\sin(2\mu_k x) \cos(\mu_k x) - \cos(2\mu_k x) \sin(\mu_k x)) + C_2 \sin(\mu_k x) \\ &= (C_1 + x) \cos(\mu_k x) + \left(C_2 - \frac{1}{2\mu_k} \sin(\mu_k x) \right) \end{aligned}$$

$$X_{2k-1}(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

et

$$X'_{2k-1}(0) = X'_{2k-1}(1) \Rightarrow 1 + \mu_k C_2 - \frac{1}{2} = \cos(\mu_k) - \mu_k(C_1 + 1) \sin(\mu_k) + (\mu_k C_2 - \frac{1}{2}) \cos(\mu_k)$$

comme $\cos(\mu_k) = 1$ et $\sin(\mu_k) = 0$.

$$D'où $1 + \mu_k C_2 - \frac{1}{2} = 1 + \mu_k C_2 - \frac{1}{2}$ on choisi $C_2 = \frac{1}{2\mu_k}$.$$

Donc

$$X_{2k-1}(x) = x \cos(\mu_k x)$$

Le problème spectrale auxiliaire admet valeurs propres $\lambda_k = (2k\pi)^2 k = 0, 1, 2, \dots$ et fonctions propres correspondant :

$$X_0(x) = x, X_{2k-1}(x) = x \cos(\mu_k x), X_{2k}(x) = 2 \sin(\mu_k x) \quad (2.8)$$

$S = \{X_0(x) = x, X_{2k-1}(x) = x \cos(\mu_k x), X_{2k}(x) = 2 \sin(\mu_k x)\}$ est un système complet mais non orthogonale

on prendre contre exemple

$$\int_0^1 X_0(x) X_{2k}(x) dx = -\frac{2}{\mu_k} \neq 0.$$

Donc l'ensemble S n'est pas orthogonale sur $[0, 1]$.

On construise un problème spectrale adjointe qui orthonormale avec S on $[0, 1]$

$\int_0^1 Y X'' dx = Y(1)X'(1) - Y(0)X'(0) - Y'(1)X(1) + Y'(0)X(0) + \int_0^1 Y'' X dx$, (par intégration par partie) Donc

$\int_0^1 Y X'' dx = X'(1)(Y(1) - Y(0)) - Y'(1)X(1) + \int_0^1 Y'' X dx$, (d'après les conditions de problème spectrale auxiliaire)

pour $\int_0^1 Y X'' dx = \int_0^1 Y'' X dx$ il est claire que $Y(1) = Y(0), Y'(1) = 0$.

Donc

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ Y'(1) = 0, Y(0) = Y(1) \end{cases} \quad (2.9)$$

pour $\lambda = 0$

$$Y_0''(x) = 0 \Rightarrow Y_0(x) = ax + b$$

$$Y_0'(1) = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$Y_0'(0) = Y_0'(1) \Rightarrow b = b \text{ on choisi } b = 2.$$

Donc

$$Y_0(x) = 2.$$

pour $\lambda > 0$

L'équation caractéristique $r^2 + \lambda_k = 0 \Rightarrow r = i\sqrt{\lambda_k}$ avec $\sqrt{\lambda_k} = \mu_k$

$$Y_{2k-1}(x) = A \cos(\mu_k x) + B \sin(\mu_k x)$$

$$Y_{2k-1}(0) = Y_{2k-1}(1)$$

alors

$$A = A \cos(\mu_k) + B \sin(\mu_k) \Rightarrow \begin{cases} \cos(\mu_k) = 1 \\ \sin(\mu_k) = 0 \end{cases} \Rightarrow \mu_k = 2k\pi$$

$$Y'_{2k-1}(1) = 0 \Rightarrow B\mu_k = 0 \Rightarrow B = 0$$

Donc

$$Y_{2k-1}(x) = A \cos(\mu_k x)$$

$$Y_{2k-1}(0) = Y_{2k-1}(1) \Rightarrow A = A \cos(\mu_k) + B \sin(\mu_k)$$

D'ou

$$A = A \text{ on choisi } A = 4$$

Alors

$$Y_{2k-1}(x) = 4 \cos(\mu_k x).$$

Pour complet la base

$$\begin{cases} Y''_{2k}(x) + \mu_k^2 Y_{2k}(x) = -4\mu_k Y_{2k-1}(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ Y'_{2k}(1) = 0, Y_{2k}(0) = Y_{2k}(1), & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

La solution homogène :

On a

$$Y''_{2k}(x) + \mu_k^2 Y_{2k}(x) = 0 \Rightarrow Y_{2k}(x) = a \cos(\mu_k x) + a \sin(\mu_k x)$$

On a le système suivante

$$\begin{cases} a' \cos(\mu_k x) + b' \sin(\mu_k x) = 0 \\ -a' \mu_k \sin(\mu_k x) + b' \mu_k \cos(\mu_k x) = -4\mu_k \cos(\mu_k x) \end{cases}$$

$$H = \begin{pmatrix} \cos(\mu_k x) & \sin(\mu_k x) \\ -\mu_k \sin(\mu_k x) & \mu_k \cos(\mu_k x) \end{pmatrix}, \text{ Donc } |H| = \mu_k \neq 0, k = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} a' &= \frac{1}{\mu_k} \int -\sin(\mu_k x) (-4\mu_k \cos(\mu_k x)) dx \\ &= 2 \int \sin(2\mu_k x) dx \\ &= -\frac{1}{\mu_k} \cos(2\mu_k x) + C'_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b' &= \frac{1}{\mu_k} \int \cos(\mu_k x) (-4\mu_k \cos(\mu_k x)) dx \\
&= -4 \int \cos^2(\mu_k x) dx \\
&= -4 \int (1 - \sin(\mu_k x)) dx \\
&= -4 \int \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\mu_k x)\right) dx \\
&= -2x - \frac{1}{\mu_k} \sin(2\mu_k x) + C_2'
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
Y_{2k}(x) &= C_1' \cos(\mu_k x) + C_2' \sin(\mu_k x) - \frac{1}{\mu_k} \cos(\mu_k x) \cos(2\mu_k x) - 2x \sin(\mu_k x) - \frac{1}{\mu_k} \sin(\mu_k x) \sin(2\mu_k x) \\
&= \left(C_1' - \frac{1}{\mu_k}\right) \cos(\mu_k x) + (C_2' - 2x) \sin(\mu_k x)
\end{aligned}$$

$$Y_{2k}'(1) = 0 \Rightarrow -2 \sin(\mu_k) + \mu_k (C_2' - 2) \cos(\mu_k) - \left(C_1' - \frac{1}{\mu_k}\right) \cos(\mu_k) = 0$$

comme $\cos(\mu_k) = 1$ et $\sin(\mu_k) = 0$

D'où $\mu_k (C_2' - 2) = 0 \Rightarrow C_2' = 2$, et

$$Y_{2k}(0) = Y_{2k}(1) \Rightarrow C_1' - \frac{1}{\mu_k} + C_1' - \frac{1}{\mu_k} \text{ on choisi } C_1' = \frac{1}{\mu_k},$$

Donc

$$Y_{2k}(x) = 2(1 - x) \sin(\mu_k x).$$

le problème (2.9) admet même valeurs propres de problème (2.5) et fonctions propres correspondant

$$Y_0(x) = 2, Y_{2k-1}(x) = 4 \cos(\mu_k x), Y_{2k}(x) = 2(1 - x) \sin(\mu_k x) \quad (2.10)$$

$$\tilde{S} = \{Y_0(x) = 2, Y_{2k-1}(x) = 4 \cos(\mu_k x), Y_{2k}(x) = 2(1 - x) \sin(\mu_k x)\}.$$

Il est facile que vérifie les systèmes S et \tilde{S} est bi-orthonormale dans $[0, 1]$,i.e.

$$(X_i(x), Y_j(x)) = \int_0^1 X_i(x) Y_j(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

On construire l'espace fonctionnel suivant :

$$B_{2,T}^3 = \left\{ u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) X_k(x) : u_k(t) \in C[0, T], \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} = \|u_0(t)\|_{C[0,T]} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^3 \|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^3 \|u_{2k-1}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

est un espace de Banach. clairement $E_T^3 = B_{2,T}^3 \times C[0, T]$ de la fonction vectorielle $z(x, t) = \{u(x, t), a(t)\}$ avec le norme $\|z(x, t)\|_{E_T^3} = \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + \|a(t)\|_{C[0,T]}$ est aussi espace Banach.

Démonstration : (voir [15], [9])

1. Il est facile pour démontre $B_{2,T}^3$ est un espace normé.

2. $B_{2,T}^3$ Espace complet.

Espace complet :

Soit $(u^n)_{n \in \mathbb{N}} \in B_{2,T}^3$:

$u^n(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k^n(t) X_k(x)$ est une suite de Cauchy

Alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq r \geq N, \|u^n(x, t) - u^r(x, t)\|_{B_{2,T}^3} \leq \epsilon.$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \|u_0^n(t) - u_0^r(t)\|_{C[0,T]} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^3 \|u_{2k}^n(t) - u_{2k}^r(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} \\ + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^3 \|u_{2k-1}^n(t) - u_{2k-1}^r(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} < \epsilon. \end{aligned} \quad (2.11)$$

En conséquence, pour tout $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \|u_0^n(t) - u_0^r(t)\|_{C[0,T]} < \epsilon \\ \|u_{2k}^n(t) - u_{2k}^r(t)\|_{C[0,T]} < \epsilon \\ \|u_{2k-1}^n(t) - u_{2k-1}^r(t)\|_{C[0,T]} < \epsilon \end{aligned} \quad (2.12)$$

$(C[0, T], \|\cdot\|_\infty)$ est un espace complet

Donc

$$\begin{aligned} \|u_0^n(t) - u_0(t)\|_{C[0, T]} &\longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty \\ \|u_{2k}^n(t) - u_{2k}(t)\|_{C[0, T]} &\longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty \\ \|u_{2k-1}^n(t) - u_{2k-1}(t)\|_{C[0, T]} &\longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.13)$$

Par (2.11), pour tout m nombre fixée

$$\begin{aligned} \|u_0^n(t) - u_0^r(t)\|_{C[0, T]} + \left(\sum_{k=1}^m (\mu_k^3 \|u_{2k}^n(t) - u_{2k}^r(t)\|_{C[0, T]})^2 \right)^{1/2} \\ + \left(\sum_{k=1}^m (\mu_k^3 \|u_{2k-1}^n(t) - u_{2k-1}^r(t)\|_{C[0, T]})^2 \right)^{1/2} < \epsilon \quad \forall n, r \geq N. \end{aligned} \quad (2.14)$$

D'après (2.13), et par passage à limite $r \longrightarrow \infty$ in (2.14), on obtient

$$\begin{aligned} \|u_0^n(t) - u_0(t)\|_{C[0, T]} + \left(\sum_{k=1}^m (\mu_k^3 \|u_{2k}^n(t) - u_{2k}(t)\|_{C[0, T]})^2 \right)^{1/2} \\ + \left(\sum_{k=1}^m (\mu_k^3 \|u_{2k-1}^n(t) - u_{2k-1}(t)\|_{C[0, T]})^2 \right)^{1/2} < \epsilon \quad \forall n \geq N. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Par passage à limite $m \longrightarrow \infty$, on obtient

$$\begin{aligned} \|u_0^n(t) - u_0(t)\|_{C[0, T]} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\mu_k^3 \|u_{2k}^n(t) - u_{2k}(t)\|_{C[0, T]})^2 \right)^{1/2} \\ + \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\mu_k^3 \|u_{2k-1}^n(t) - u_{2k-1}(t)\|_{C[0, T]})^2 \right)^{1/2} < \epsilon \quad \forall n \geq N. \end{aligned} \quad (2.16)$$

On démontre $u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) X_k(x)$ in $B_{2, T}^3$

On a $u(x, t) = u(x, t) - u^n(x, t) + u^n(x, t)$, et par (2.16) $u(x, t) - u^n(x, t) \in B_{2, T}^3$ et $u^n(x, t) \in B_{2, T}^3$ on comprend ça

$$u(x, t) \in B_{2, T}^3.$$

Par (2.16) et pour tout $\epsilon > 0$ il existe N tel que

$$\|u^n(x, t) - u(x, t)\|_{B_{2, T}^3} < \epsilon \forall n \geq N.$$

Donc

la suite $u^n(x, t)$ converge vers u dans $B_{2, T}^3$

Alors $B_{2, T}^3$ est complet,

$B_{2, T}^3$ est Banach.

2.3 Existence et l'unicité

Le couple $\{a(t), u(x, t)\}$ de classe $C[0, T] \times C^2(\overline{D_T})$, solution classique de problème (2.1)-(2.4). Telle que (2.8) c'est forme de base de Riesz et les systèmes (2.8), (2.10) est bi-orthonormale dans $L^2[0; 1]$

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)X_k(x). \quad (2.17)$$

Où

$$u_k(t) = \int_0^1 u(x, t)Y_k(x)dx,$$

la solution de problème (2.1)-(2.4) s'écris ce la forme :

$$u(x, t) = u_0(t)X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k-1}(t)X_{2k-1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(t)X_{2k}(x)$$

On utilise la méthode de Fourier, on remplace $u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)X_k(x)$ dans (2.1)

$f(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)X_k(x)$ avec $f_k(t) = \int_0^1 f(x, t)Y_k(x)dx$ on trouve

$$\begin{aligned} u_0''(t)X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k-1}''(t)X_{2k-1}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} u_{2k}''(t)X_{2k}(x) &= u_0(t)X_0''(x) + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k-1}(t)X_{2k-1}''(x) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} u_{2k}(t)X_{2k}''(x) + a(t)u_0(t)X_0(x) + a(t)\sum_{k=1}^{\infty} u_{2k-1}(t)X_{2k-1}(x) \\ &+ a(t)\sum_{k=0}^{\infty} u_{2k}(t)X_{2k}(x) + f_0(t)X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k-1}(t)X_{2k-1}(x) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k}(t)X_{2k}(x) \end{aligned}$$

On a

$$X_0''(x) = 0, X_{2k-1}''(x) = -2\mu_k \sin(\mu_k x) - \mu_k^2 x \cos(\mu_k x) \text{ et } X_{2k}''(x) = -2\mu_k^2 \sin(\mu_k x)$$

. Donc

$$u_0''(t) = a(t)u_0(t) + f_0(t),$$

$$u_{2k-1}''(t) + \mu_k^2 u_{2k-1}(t) = a(t)u_{2k-1}(t) + f_{2k-1}(t), k = 1, 2, \dots$$

$$u_{2k}''(t) + \mu_k^2 u_{2k}(t) = a(t)u_{2k}(t) + f_{2k}(t) - 2\mu_k u_{2k-1}(t), k = 1, 2, \dots$$

et d'après le condition (3.26) on trouve

$$u_k(0) = \varphi_k, u'_k(0) = \psi_k \quad \text{avec} \quad \varphi_k = \int_0^1 \psi(x)Y_k(x)dx, \psi_k = \int_0^1 \psi(x)Y_k(x)dx,$$

on pose $F_k(\tau; u, a) = a(t)u_k(t) + f_k(t)$,

$$1. \quad u''_0(t) = a(t)u_0(t) + f_0(t)$$

$$u''_0(t) = F_0(\tau; u, a)$$

par intégration sur $[0, t]$

$$u'_0(t) = u'_0(0) + \int_0^t F_0(\tau; u, a)d\tau \quad \text{et par deuxième intégration sur } [0, t]$$

avec $H_0(\tau; u, a) = \int_0^t F_0(s; u, a)$ on trouve

$$u_0(t) = \varphi_0 + \psi_0 t + \int_0^t H_0(\tau; u, a)d\tau$$

$$\int_0^t H_0(\tau; u, a)d\tau = [\tau H_0(\tau; u, a)]_0^t - \int_0^t \tau F_0(\tau; u, a)d\tau = \int_0^t (t - \tau)F_0(\tau; u, a)d\tau$$

Alors

$$u_0(t) = \varphi_0 + \psi_0 t + \int_0^t (t - \tau)F_0(\tau; u, a)d\tau, \quad (2.18)$$

$$2. \quad u''_{2k-1}(t) + \mu_k^2 u_{2k-1}(t) = a(t)u_{2k-1}(t) + f_{2k-1}(t)$$

La solution homogène

$$u_{2k-1}(t) = C_1 \cos(\mu_k t) + C_2 \sin(\mu_k t)$$

La solution générale

$$u_{2k-1}(t) = A \cos(\mu_k t) + B \sin(\mu_k t) - \frac{1}{\mu_k} \cos(\mu_k t) \int_0^t F_{2k-1}(\tau; u, a) \sin(\mu_k \tau) d\tau \\ + \frac{1}{\mu_k} \sin(\mu_k t) \int_0^t F_{2k-1}(\tau; u, a) \cos(\mu_k \tau) d\tau$$

Donc

$$u_{2k-1}(t) = A \cos(\mu_k t) + B \sin(\mu_k t) + \frac{1}{\mu_k} \int_0^t F_{2k-1}(\tau; u, a) \sin \mu_k(t - \tau) d\tau$$

par condition initiale

$$u_{2k-1}(0) = A = \varphi_{2k-1}$$

$$u'_{2k-1}(0) = B\mu_k = \psi_{2k-1} \Rightarrow B = \frac{1}{\mu_k} \psi_{2k-1}$$

Alors

$$u_{2k-1}(t) = \varphi_{2k-1} \cos(\mu_k t) + \frac{1}{\mu_k} \psi_{2k-1} \sin(\mu_k t) + \frac{1}{\mu_k} \int_0^t F_{2k-1}(\tau; u, a) \sin \mu_k(t - \tau) d\tau, \quad (2.19)$$

$$3. \quad u''_{2k}(t) + \mu_k^2 u_{2k}(t) = a(t)u_{2k}(t) + f_{2k}(t) - 2\mu_k u_{2k-1}(t)$$

la solution homogène

$$u_{2k}(t) = C_1 \cos(\mu_k t) + C_2 \sin(\mu_k t)$$

La solution générale

$$\begin{aligned}
u_{2k}(t) &= A \cos(\mu_k t) + B \sin(\mu_k t) \\
&\quad - \frac{1}{\mu_k} \cos(\mu_k t) \left(\int_0^t F_{2k}(\tau; u, a) - 2\mu_k \varphi_{2k-1} \cos(\mu_k \tau) - 2\psi_{2k-1} \sin(\mu_k \tau) \right. \\
&\quad \left. - 2 \int_0^\tau F_{2k-1}(\xi; u, a) \sin \mu_k(\tau - \xi) d\xi \right) \sin(\mu_k \tau) d\tau \\
&\quad + \frac{1}{\mu_k} \sin(\mu_k t) \left(\int_0^t F_{2k}(\tau; u, a) - 2\mu_k \varphi_{2k-1} \cos(\mu_k \tau) - 2\psi_{2k-1} \sin(\mu_k \tau) \right. \\
&\quad \left. - 2 \int_0^\tau F_{2k-1}(\xi; u, a) \sin \mu_k(\tau - \xi) d\xi \right) \cos(\mu_k \tau) d\tau
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
u_{2k}(t) &= A \cos(\mu_k t) + B \sin(\mu_k t) \\
&\quad - \frac{2}{\mu_k} \int_0^t \int_0^\tau F_{2k-1}(\xi; u, a) \sin \mu_k(\tau - \xi) d\xi \sin \mu_k(t - \tau) d\tau \\
&\quad + \frac{1}{\mu_k} \int_0^t F_{2k}(\tau; u, a) \sin \mu_k(t - \tau) d\tau \\
&\quad + 2\varphi_{2k-1} \int_0^t (\cos(\mu_k t) \cos(\mu_k \tau) \sin(\mu_k \tau) - \sin(\mu_k t) \cos(\mu_k \tau) \cos(\mu_k \tau)) d\tau \\
&\quad + \psi_{2k-1} \int_0^t \frac{2}{\mu_k} (\cos(\mu_k t) \sin(\mu_k \tau) \sin(\mu_k \tau) - \sin(\mu_k t) \sin(\mu_k \tau) \cos(\mu_k \tau)) d\tau
\end{aligned}$$

Comme

$$2\varphi_{2k-1} \int_0^t (\cos(\mu_k t) \cos(\mu_k \tau) \sin(\mu_k \tau) - \sin(\mu_k t) \cos(\mu_k \tau) \cos(\mu_k \tau)) d\tau = -t\varphi_{2k-1} \sin(\mu_k t),$$

et

$$\begin{aligned}
\psi_{2k-1} \int_0^t \frac{2}{\mu_k} (\cos(\mu_k t) \sin(\mu_k \tau) \sin(\mu_k \tau) - \sin(\mu_k t) \sin(\mu_k \tau) \cos(\mu_k \tau)) d\tau &= \frac{1}{\mu_k} t \psi_{2k-1} \\
&\quad - \frac{1}{\mu_k^2} \psi_{2k-1} \sin(\mu_k t),
\end{aligned}$$

par les conditions initiale on a

$$\begin{aligned}
u_{2k}(t) &= \varphi_{2k} \cos(\mu_k t) + \frac{1}{\mu_k} \psi_{2k} \sin(\mu_k t) \\
&\quad - \frac{2}{\mu_k} \int_0^t \int_0^\tau F_{2k-1}(\xi; u, a) \sin \mu_k(\tau - \xi) d\xi \sin \mu_k(t - \tau) d\tau \\
&\quad + \frac{1}{\mu_k} \int_0^t F_{2k}(\tau; u, a) \sin \mu_k(t - \tau) d\tau \\
&\quad - t\varphi_{2k-1} \sin(\mu_k t) + \frac{1}{\mu_k} t\psi_{2k-1} - \frac{1}{\mu_k^2} \psi_{2k-1} \sin(\mu_k t).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

On remplace (2.18)-(2.20) dans (2.17)

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \left(\varphi_0 + \psi_0 t + \int_0^t (t - \tau) F_0(\tau; u, a) d\tau \right) X_0(x) \\
&\quad + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{2k-1} \cos(\mu_k t) + \frac{1}{\mu_k} \psi_{2k-1} \sin(\mu_k t) + \frac{1}{\mu_k} \int_0^t F_{2k-1}(\tau; u, a) \sin \mu_k(t - \tau) d\tau \right) X_{2k-1}(x) \\
&\quad + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{2k} \cos(\mu_k t) + \frac{1}{\mu_k} \psi_{2k} \sin(\mu_k t) - \frac{2}{\mu_k} \int_0^t \int_0^\tau F_{2k-1}(\xi; u, a) \sin \mu_k(\tau - \xi) d\xi \sin \mu_k(t - \tau) d\tau \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\mu_k} \int_0^t F_{2k}(\tau; u, a) \sin \mu_k(t - \tau) d\tau - t\varphi_{2k-1} \sin(\mu_k t) + \frac{1}{\mu_k} t\psi_{2k-1} - \frac{1}{\mu_k^2} \psi_{2k-1} \sin(\mu_k t) \right) X_{2k}(x).
\end{aligned}$$

Considérons $x = 1$ dans l'équation (2.1) et on utilise le condition (2.4) on trouve :

$$u(1, t)_{tt} = u(1, t)_{xx} + a(t)u(1, t) + f(1, t),$$

$$u(1, t)_{xx} = - \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 u_{2k-1}(t) \quad (\text{car } X_0''(1) = 0, X_{2k}''(1) = 0, X_{2k-1}''(1) = -\mu_k^2)$$

$$\begin{aligned}
a(t) &= \frac{1}{h(t)} \left[h''(t) - f(1, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 \left(\varphi_{2k-1} \cos(\mu_k t) + \frac{1}{\mu_k} \psi_{2k-1} \sin(\mu_k t) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\mu_k} \int_0^t F_{2k-1}(\tau; u, a) \sin \mu_k(t - \tau) d\tau \right) \right].
\end{aligned}$$

Dénotons $z = [a(t), u(x, t)]^T$ et considère l'opérateur suivant :

$$z = \phi(z) = [\phi_0(z), \phi_1(z)],$$

avec

$$\phi_0(z) = \frac{1}{h(t)} \left[h''(t) - f(1, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 \left(\varphi_{2k-1} \cos(\mu_k t) + \frac{1}{\mu_k} \psi_{2k-1} \sin(\mu_k t) + \frac{1}{\mu_k} \int_0^t F_{2k-1}(\tau; u, a) \sin \mu_k(t - \tau) d\tau \right) \right].$$

$$\begin{aligned} \phi_1(z) &= \left(\varphi_0 + \psi_0 t + \int_0^t (t - \tau) F_0(\tau; u, a) d\tau \right) X_0(x) \\ &+ \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{2k-1} \cos(\mu_k t) + \frac{1}{\mu_k} \psi_{2k-1} \sin(\mu_k t) + \frac{1}{\mu_k} \int_0^t F_{2k-1}(\tau; u, a) \sin \mu_k(t - \tau) d\tau \right) X_{2k-1}(x) \\ &+ \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{2k} \cos(\mu_k t) + \frac{1}{\mu_k} \psi_{2k} \sin(\mu_k t) - \frac{2}{\mu_k} \int_0^t \int_0^\tau F_{2k-1}(\xi; u, a) \sin \mu_k(\tau - \xi) d\xi \sin \mu_k(t - \tau) d\tau \right. \\ &\left. + \frac{1}{\mu_k} \int_0^t F_{2k}(\tau; u, a) \sin \mu_k(t - \tau) d\tau - t\varphi_{2k-1} \sin(\mu_k t) + \frac{1}{\mu_k} t\psi_{2k-1} - \frac{1}{\mu_k^2} \psi_{2k-1} \sin(\mu_k t) \right) X_{2k}(x). \end{aligned}$$

On va montre $\phi \in E_T^3$, nous devons montrer $\phi_0(z) \in C[0, T]$ et $\phi_1(z) \in B_{2,T}^3$ pour $z = [a(t), u(x, t)]^T$ avec $a(t) \in C[0, T]$, $u(x, t) \in B_{2,T}^3$

On utilise les conditions suivantes :

- (A) $\varphi(x) \in C^3[0, 1]$, $\varphi(0) = \varphi''(0) = 0$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$,
- (B) $\psi(x) \in C^2[0, 1]$, $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = \psi'(1)$,
- (C) $h(t) \in C^2[0, T]$, $h(0) = \varphi(1)$, $h'(0) = \psi(1)$,
- (D) $f(x, t) \in C(\bar{D}_T)$, $f_x, f_{xx} \in C[0, 1]$, $f(0, t) = 0$, $f_x(0, t) = f_x(1, t)$,

On va montre $\phi_0(z) \in C[0, T]$ avec les conditions (A)-(D), on obtient :

$$\begin{aligned} |\phi_0(z)| &\leq \frac{1}{|h(t)|} \left(|h''(t)| + |f(1, t)| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} |\alpha_{2k-1}| \right. \\ &\left. + \frac{1}{\mu_k} |\beta_{2k-1}| + \frac{1}{\mu_k} \int_0^T (|\gamma_{2k-1}| + \mu_k^2 |a(t)| |u_{2k-1}(t)|) dt \right), \end{aligned}$$

$$\alpha_{2k-1} = \mu_k^3 \varphi_{2k-1} \text{ avec } \alpha_{2k-1} = -4 \int_0^1 \varphi'''(x) \sin(\mu_k x) dx$$

$$\varphi_{2k-1} = 4 \int_0^1 \varphi(x) \cos(\mu_k x) dx, \text{ (par intégration par partie on trouve } \alpha_{2k-1}$$

$$\beta_{2k-1} = \mu_k^2 \psi_{2k-1} \text{ avec } \beta_{2k-1} = 4 \int_0^1 \psi''(x) \cos(\mu_k x) dx,$$

$$\gamma_{2k-1}(t) = \mu_k^2 f_{2k-1}(t) \text{ avec } \gamma_{2k-1} = 4 \int_0^1 f_{xx}(x, t) \cos(\mu_k x) dx,$$

$$\begin{aligned}
|\phi_0(z)| \leq & \frac{1}{|2h(t)|} \left(\left| 2h''(t) \right| + |2f(1, t)| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} 4 \int_0^1 \left| \varphi'''(x) \right| |\sin(\mu_k x)| dx \right. \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} 4 \int_0^1 \left| \psi''(x) \right| |\cos(\mu_k x)| + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \frac{1}{\mu_k} 4 \int_0^1 |f_{xx}(x, t)| |\cos(\mu_k x)| dx \\
& \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \frac{1}{\mu_k^2} |a(t)| (\mu_k^3 u_{2k-1}(t)) \right) dt,
\end{aligned}$$

$$(\int_0^1 \sin^2(\mu_k x))^{1/2} = 1/4, \text{ et } (\int_0^1 \cos^2(\mu_k x))^{1/2} = 1/4.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz on trouve

$$\begin{aligned}
|\phi_0(z)| \leq & \frac{1}{|h(t)|} \left[\left| h''(t) \right| + |f(1, t)| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} \left\| \varphi'''(x) \right\|_{L^2(0,1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} \left\| \psi''(x) \right\|_{L^2(0,1)} \right. \\
& \left. + \sqrt{T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} \|f_{xx}(x, t)\|_{L^2(D_T)} + T \|a(t)\|_{C[0,T]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2} \left(\mu_k^3 \|u_{2k-1}(t)\|_{C[0,T]} \right) \right],
\end{aligned}$$

Donc

$$\|\phi_0(z)\|_{C[0,T]} \leq A_1(T) + A_2(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3},$$

$$\text{avec } c_0 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2} \right)^{\frac{1}{2}}, c_1 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^4} \right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\begin{aligned}
A_1(T) = & \frac{1}{\|h(t)\|_{C[0,T]}} \left[\left\| h''(t) \right\|_{C[0,T]} + \|f(1, t)\|_{C[0,T]} + c_0 \left(\left\| \varphi'''(x) \right\|_{L^2(0,1)} \right. \right. \\
& \left. \left. + \left\| \psi''(x) \right\|_{L^2(0,1)} + \sqrt{T} \|f_{xx}(x, t)\|_{L^2(D_T)} \right) \right],
\end{aligned}$$

$$A_2(T) = \frac{c_1 T}{\|h(t)\|_{C[0,T]}},$$

Donc $\phi_0(z) \in C[0, T]$.

On va montre $\phi_1(z) \in B_{2,T}^3$

$$\phi_{1,0}(z) = \varphi_0 + \psi_0 t + \int_0^t (t - \tau) F_0(\tau; u, a) d\tau,$$

$$\phi_{1.2k-1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{2k-1} \cos(\mu_k t) + \frac{1}{\mu_k} \psi_{2k-1} \sin(\mu_k t) + \frac{1}{\mu_k} \int_0^t F_{2k-1}(\tau; u, a) \sin \mu_k(t - \tau) d\tau,$$

$$\begin{aligned} \phi_{1.2k-1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{2k} \cos(\mu_k t) + \frac{1}{\mu_k} \psi_{2k} \sin(\mu_k t) \\ &\quad - \frac{2}{\mu_k} \int_0^t \int_0^\tau F_{2k-1}(\xi; u, a) \sin \mu_k(\tau - \xi) d\xi \sin \mu_k(t - \tau) d\tau \\ &\quad + \frac{1}{\mu_k} \int_0^t F_{2k}(\tau; u, a) \sin \mu_k(t - \tau) d\tau - t\varphi_{2k-1} \sin(\mu_k t) + \frac{1}{\mu_k} t\psi_{2k-1} - \frac{1}{\mu_k^2} \psi_{2k-1} \sin(\mu_k t), \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} |\phi_{1.0}(z)| &+ \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^3 |\phi_{2k-1}(z)|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^3 |\phi_{2k}(z)|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |\varphi_0| + T|\psi_0| + T \int_0^T (|f_0| + |a(t)| |u_0(t)|) dt + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^3 |\varphi_{2k-1}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^2 |\psi_{2k-1}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\mu_k^2 \int_0^T |f_{2k-1}(t)| dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} \left(\mu_k^3 \int_0^T |a(t)| |u_{2k-1}(t)| dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^3 |\varphi_{2k}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^2 |\psi_{2k}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\mu_k^2 \int_0^T |f_{2k}(t)| dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} \left(\mu_k^3 \int_0^T |a(t)| |u_{2k}(t)| dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k |\psi_{2k-1}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + T \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^2 |\psi_{2k-1}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + T \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^3 |\varphi_{2k-1}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2 \left(\mu_k^2 \int_0^T \int_0^t |f_{2k-1}(\tau)| d\tau dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_k} \left(\mu_k^3 \int_0^T \int_0^t |a(t)| |u_{2k-1}(\tau)| d\tau dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
|\phi_{1.0}(z)| &+ \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^3 |\phi_{1.2k-1}(z)|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^3 |\phi_{1.2k}(z)|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2 \int_0^1 \varphi(x) dx + 2T \int_0^1 \psi(x) dx + 2T \int_0^T \int_0^1 f(x,t) dx dt + T^2 \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u_0(t)\|_{C[0,T]} \\
&+ 4 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 |\varphi'''(x)| \sin(\mu_k x) dx \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 4T \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 |\varphi'''(x)| \sin(\mu_k x) dx \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ 4 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 |\psi''(x)| \cos(\mu_k x) dx \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 4T \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 |\psi''(x)| \cos(\mu_k x) dx \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ 4 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu_k} \int_0^1 |\psi''(x)| \cos(\mu_k x) dx \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 |\varphi'''(x)(1-x) - 3\varphi''(x)| \cos(\mu_k x) dx \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 |\psi''(x)(1-x) - 2\psi'(x)| \sin(\mu_k x) dx \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ 4 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^T \int_0^1 |f_{xx}(x,t)| \cos(\mu_k x) dx dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ 8 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^T \int_0^t \int_0^1 |f_{xx}(x,t)| \cos(\mu_k x) dx d\tau dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^T \int_0^1 |f_{xx}(x,t)(1-x) - 2f_x(x,t)| \cos(\mu_k x) dx dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \|a(t)\|_{C[0,T]} \left[c_0 T \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^3 \|u_{2k-1}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + c_0 T^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^3 \|u_{2k-1}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
&\left. + c_0 T \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^3 \|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right],
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Bessel et Cauchy-Schwartz on trouve

$$\|\phi_1(z)\|_{B_{2,T}^3} \leq B_1(T) + B_2(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3},$$

$$\begin{aligned}
B_1(T) &= 2 \|\varphi(x)\|_{C(0,1)} + 2T \|\psi(x)\|_{C(0,1)} + 2T^2 \|f(x,t)\|_{C(D_T)} + (2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}T) \left\| \varphi'''(x) \right\|_{L^2(0,1)} \\
&+ (2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}T + 2\sqrt{2}c_0) \left\| \varphi''(x) \right\|_{L^2(0,1)} + \sqrt{2} \left\| \varphi'''(x)(1-x) - 3\varphi''(x) \right\|_{L^2(0,1)} \\
&+ \sqrt{2} \left\| \psi''(x)(1-x) - 2\psi'(x) \right\|_{L^2(0,1)} + \sqrt{2T} \|f_{xx}(x,t)(1-x) - 2f_x(x,t)\|_{L^2(D_T)} \\
&+ (2\sqrt{2T} + 4\sqrt{\frac{2}{3}}T^{3/2}) \|f_{xx}(x,t)\|_{L^2(D_T)},
\end{aligned}$$

$$B_2(T) = \max(T^2, 2c_0T, c_0T^2),$$

Donc

$$\phi_1(z) \in B_{2T}^3.$$

K_r est une boule de rayon $r = A(T) + 2$ et de centre zéro dans E_T^3

Théorème 2.1. (voir [10]) Si les conditions (A)-(D) et

$$(A(T) + 2) B(T) \leq 1, \quad (2.21)$$

vérifiée et pour petite T le problème (2.1)-(2.4) admet unique solution dans la boule de rayon $A(T) + 2$ et de centre zéro dans E_T^3 .

Démonstration

$$\|\phi(z)\|_{E_T^3} \leq A(T) + B(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2T}^3}$$

$$\text{avec } A(T) = A_1(T) + B_1(T), B(T) = A_2(T) + B_2(T)$$

pour tout z_1, z_2 dans E_T^3 .

$$\text{On a } \|\phi(z_1) - \phi(z_2)\|_{E_T^3} = \|\phi_0(z_1) - \phi_0(z_2)\|_{C(0,T)} + \|\phi_1(z_1) - \phi_1(z_2)\|_{B_{2T}^3} \text{ avec } z_i = [a^i(t), u^i(x,t)], i = 1, 2$$

$$\phi_0(z_1) - \phi_0(z_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{h(t)\mu_k} \left(\int_0^t F_{2k-1}(\tau; u^2, a^1) \sin \mu_k(t - \tau) d\tau - \int_0^t F_{2k-1}(\tau; u^2, a^1) \sin \mu_k(t - \tau) d\tau \right),$$

$$\begin{aligned}
\phi_1(z_1) - \phi_1(z_2) &= \left(\int_0^t (t - \tau) F_0(\tau; u^1, a^1) d\tau - \int_0^t (t - \tau) F_0(\tau; u^2, a^1) d\tau \right) X_0(x) \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu_k} \int_0^t F_{2k-1}(\tau; u^1, a^1) \sin \mu_k(t - \tau) d\tau \right. \\
&- \left. \frac{1}{\mu_k} \int_0^t F_{2k-1}(\tau; u^2, a^1) \sin \mu_k(t - \tau) d\tau \right) X_{2k-1}(x) \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu_k} \int_0^t F_{2k}(\tau; u^1, a^1) \sin \mu_k(t - \tau) d\tau - \frac{1}{\mu_k} \int_0^t F_{2k}(\tau; u^2, a^1) \sin \mu_k(t - \tau) d\tau \right. \\
&- \left. \frac{2}{\mu_k} \int_0^t \int_0^\tau F_{2k-1}(\xi; u^1, a^1) \sin \mu_k(\tau - \xi) d\xi \sin \mu_k(t - \tau) d\tau \right. \\
&+ \left. \frac{2}{\mu_k} \int_0^t \int_0^\tau F_{2k-1}(\xi; u^2, a^1) \sin \mu_k(\tau - \xi) d\xi \sin \mu_k(t - \tau) d\tau \right) X_{2k}(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\phi(z_1) - \phi(z_2)\|_{E_T^3} &= \|\phi_0(z_1) - \phi_0(z_2)\|_{C(0,T)} + \|\phi_1(z_1) - \phi_1(z_2)\|_{B_{2,T}^3} \\
&\leq A_2(T) \|a^1 - a^2\|_{C[0,T]} \|u^2\|_{B_{2,T}^3} + B_2(T) \|a^1\|_{C[0,T]} \|u^1 - u^2\|_{B_{2,T}^3} \\
&\leq A_2(T) \|a^1 - a^2\|_{C[0,T]} \left(B_1(T) + B_2(T) \|a^1\|_{C[0,T]} \|u^2\|_{B_{2,T}^3} \right) \\
&\quad + B_2(T) \|u^1 - u^2\|_{B_{2,T}^3} \left(A_1(T) + A_2(T) \|a^1\|_{C[0,T]} \|u^2\|_{B_{2,T}^3} \right) \\
&\leq A_2(T) B_1(T) \|a^1 - a^2\|_{C[0,T]} + A_1(T) B_2(T) \|u^1 - u^2\|_{B_{2,T}^3} \\
&\quad + A_2(T) B_2(T) \|a^1\|_{C[0,T]} \|u^2\|_{B_{2,T}^3} \left(\|a^1 - a^2\|_{C[0,T]} + \|u^1 - u^2\|_{B_{2,T}^3} \right) \\
&\leq A(T) B(T) \left(\|a^1 - a^2\|_{C[0,T]} + \|u^1 - u^2\|_{B_{2,T}^3} \right) \\
&\quad + B(T)^2 \|a^1\|_{C[0,T]} \|u^2\|_{B_{2,T}^3} \left(\|a^1 - a^2\|_{C[0,T]} + \|u^1 - u^2\|_{B_{2,T}^3} \right),
\end{aligned}$$

on a $\|z\|_{E_T^3} \leq A(T) + 2 \Rightarrow \|a^1\|_{C[0,T]} + \|u^2\|_{B_{2,T}^3} \leq A(T) + 2$,

et on a $\|a^1\|_{C[0,T]} + \|u^2\|_{B_{2,T}^3} \leq A(T) + B(T) \|a^1\|_{C[0,T]} \|u^2\|_{B_{2,T}^3}$,

Donc

$$\|a^1\|_{C[0,T]} \|u^2\|_{B_{2,T}^3} \leq \frac{2}{B(T)},$$

$$\|\phi(z_1) - \phi(z_2)\|_{E_T^3} \leq B(T) (A(T) + 2) \left(\|a^1 - a^2\|_{C[0,T]} + \|u^1 - u^2\|_{B_{2,T}^3} \right),$$

avec $0 \leq B(T) \leq 1$ (T est petit)

D'après le condition (2.21) et le théorème de point fixe de Banach ϕ est contracte dans K_r donc ϕ admet unique point de fixe z ,

Alors le problem (2.1)-(2.4) admet unique solution K_r .

On déduire que $v(x, t) = u(x, t) + b(t)$ (1)-(4) avec les condition suivant :

1. $v_0(x) \in C^3[0, 1], v_0(0) = b(0), v_0''(0) = 0, v_0'(0) = v_0'(1),$
2. $v_1(x) \in C^2[0, 1], v_1(0) = b'(0), v_1'(0) = v_1'(1),$
3. $r(t) \in C^2[0, T], v_0(1) = r(0), v_1(1) = r'(0),$
4. $s(x, t) \in (\bar{D}_T)_{s_x}, s_{xx} \in C[0, 1], \forall t \in [0, T], s(0, t) = -a(t)b(t) + b''(t), s_x(0, t) = s_x(1, t),$

admet solution unique.

ÉTUDE NUMÉRIQUE

Dans ce chapitre, nous avons proposé un algorithme pour résoudre le problème inverse (1)-(4). Cet algorithme basé sur la méthode de collocation de Tchebychev, la méthode de Newmark et la méthode des moindres carrés non linéaires avec régularisation de Tekhonov. Des exemples numériques sont présentés pour valider l'efficacité de cet algorithme.

3.1 Problème direct

3.1.1 Polynômes de Tchebychev décales du première espèce

On pose (voir [1], [8])

$$s = 2x - 1 \text{ ou } x = \frac{1}{2}(s + 1), \text{ avec } s \in [-1, 1] \text{ et } x \in [0, 1].$$

Donc les polynômes de Tchebychev décales du première espèce $T_n^*(x)$ de degrés n en x sont définis sur $[0, 1]$ par

$$T_n^*(x) = T_n(s) = T_n(2x - 1). \quad (3.1)$$

Proposition 3.1. Les polynômes de Tchebychev décales du première espèce $T_n^*(x)$ vérifiant la formule de récurrence suivante :

$$\begin{cases} T_0^*(x) = 1 \\ T_1^*(x) = 2x - 1 \\ T_n^*(x) = 2(2x - 1)T_{n-1}^*(x) - T_{n-2}^*(x) \quad n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Proposition 3.2. La forme explicite de $T_n^*(x)$ de degrés n est donnée par :

$$T_n^*(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k 2^{2n-2k} \frac{n}{2n-k} C_{2n-k}^k x^{n-k}. \quad (3.2)$$

Proposition 3.3. Les racines du polynôme $T_n^*(x)$ sont de la forme

$$x_p = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{(p - \frac{1}{2})\pi}{n} \right) \right), p \in \mathbb{N}^*. \quad (3.3)$$

Proposition 3.4. Les polynômes de Tchebychev décales du première espèce $T_n^*(x)$ sont orthogonaux dans l'intervalle $[0, 1]$ par rapport à la fonction poids $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ i.e

$$\int_0^1 \frac{T_n^*(x)T_m^*(x)dx}{\sqrt{x-x^2}} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m \neq 0 \end{cases}$$

Une fonction $u(x)$, qui est carré intégrable dans $[0, 1]$, peut être exprimée en termes de polynômes de Tchebychev décales du première espèce $T_n^*(x)$ comme suit :

$$u(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k T_k^*(x).$$

ou

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{u(x)T_i^*(x)dx}{\sqrt{x-x^2}}, c_i = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{u(x)T_i^*(x)dx}{\sqrt{x-x^2}}.$$

pour des raisons pratiques, nous prenons seulement les premiers $(m + 1)$ -termes de $T_n^*(x)$ qui donné par :

$$u_m(x) = \sum_{k=0}^m c_k T_k^*(x). \quad (3.4)$$

3.1.2 Analyse de convergence

Théorème 3.1. (Convergence uniforme) Soit u est une fonction deux fois différentiable sur $[0, 1]$ et la deuxième dérivée est bornée sur $[0, 1]$ c'est à dire

$$\exists m \geq 0, \forall x \in [0, 1] : |u''(x)| \leq m.$$

Si $\sum_{i=0}^{+\infty} c_i T_i^*(x)$, alors la suite des somme partielles $(u_m(x))$ avec $\sum_{i=0}^m c_i T_i^*(x)$ converge uniformément vers $u(x)$ sur $[0, 1]$.

Démonstration. . En utilisant la changement de variable $2x - 1 = \cos(\theta)$ dans , nous obtenons :

$$c_i = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) \cos i\theta d\theta$$

Par intégration par parties deux fois, on obtiens :

$$c_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi u'' \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) a_i(\theta) d\theta$$

avec

$$a_i(\theta) = \sin \theta \frac{1}{i} \left[\frac{\sin(i-1)\theta}{i-1} - \frac{\sin(i+1)\theta}{i+1} \right],$$

$$|c_i| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi u'' \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) a_i(\theta) d\theta \right| \leq \frac{m}{2\pi} \int_0^\pi |a_i(\theta)| d\theta \leq \frac{m}{i^2 - 1} \approx \frac{m}{i^2},$$

D'autre part, on a :

$$|u(x) - u_m(x)| \leq \sum_{m+1}^{+\infty} |c_i| |T_i^*(x)| \leq \sum_{m+1}^{+\infty} |c_i| \approx \sum_{m+1}^{+\infty} \frac{m}{i^2},$$

Donc, $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2}$ est la séries de Riemann converge, alors le reste de cette séries converge vers zéro, donc la suite $u_m(x)$ est converge uniformément vers $u(x)$ sur $[0, 1]$. \square

3.1.3 Méthode de collocation de Tchebychev

Dans cette section, nous appliquons le méthode de collocation de Tchebychev sur le problème (1)-(4). Notons $v_m(x, t)$ comme approximation de $v(x, t)$ donnée par :

$$v_m(x, t) = \sum_{k=0}^m c_k(t) T_k^*(x). \quad (3.5)$$

En utilisant (3.5), (3.5) et (1), on obtient :

$$\sum_{k=0}^m c_k''(t) T_k^*(x) = \sum_{i=0}^m c_i(t) (T_i^*)''(x) + a(t) \sum_{k=0}^m c_k(t) T_k^*(x) + s(x, t). \quad (3.6)$$

En remplaçant x dans (3.6) par les racines x_p de polynôme $T_{m-1}^*(x)$, définis par :

$$x_p = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{(p - \frac{1}{2})\pi}{m - 1} \right) \right), p = 1, 2, \dots, m - 1$$

nous obtenons

$$\sum_{k=0}^m c_k''(t) T_k^*(x_p) + c_k(t) S_k(x_p) = s(x_p, t). \quad (3.7)$$

ou

$$\begin{cases} R_0(x_p) = R_1(x_p) = 0, \\ R_i(x_p) = (T_i^*)''(x_p), i = 2, 3, \dots \\ S_i(x_p) = -a(t) T_i^*(x_p) - R_i(x_p), i = 0, 1, \dots, m \end{cases} \quad (3.8)$$

D'après les condition (3), on obtient :

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k c_k(t) = b(t), \sum_{i=0}^m c_i(t) 2 [T_i'(-1) - T_i'(1)] = 0 \quad (3.9)$$

avec

$$T_i'(-1) - T_i'(1) = -(i)^2 ((-1)^i + 1)$$

On introduit les vecteurs $V(t)$ et $F(t)$ définis par :

$$V(t) = (c_0(t), \dots, c_i(t))^T, \quad (3.10)$$

$$F(t) = (f(x_1, t), \dots, f(x_{m-1}, t), b(t), 0)^T. \quad (3.11)$$

En remplaçant (3.5) dans (2), on obtient

$$V(0) = (c_0(0), \dots, c_i(0))^T, \quad (3.12)$$

$$\frac{d}{dt}V(0) = (c'_0(0), \dots, c'_i(0))^T. \quad (3.13)$$

En combinant avec les équations (3.7) et (3.9), nous trouvons la forme matricielle suivant :

$$\begin{cases} M\ddot{V}(t) + K(t)V(t) = F(t), \\ V(0) = (c_0(0), \dots, c_i(0))^t, \\ \dot{V}(0) = (c'_0(0), \dots, c'_i(0))^t. \end{cases} \quad (3.14)$$

ou M est la matrice de masse donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} T_0^*(x_1) & T_1^*(x_1) & \cdots & T_m^*(x_1) \\ T_0^*(x_2) & T_1^*(x_2) & \cdots & T_m^*(x_2) \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ T_0^*(x_{m-1}) & T_1^*(x_{m-1}) & \cdots & T_m^*(x_{m-1}) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

et $K(t)$ est la matrice de rigidité donnée par :

$$K(t) = \begin{pmatrix} S_0^*(x_1) & S_1^*(x_1) & \cdots & S_m^*(x_1) \\ S_0^*(x_2) & S_1^*(x_2) & \cdots & S_m^*(x_2) \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ S_0^*(x_{m-1}) & S_1^*(x_{m-1}) & \cdots & S_m^*(x_{m-1}) \\ 1 & -1 & \cdots & (-1)^i \\ 0 & 0 & \cdots & 2[T'_m(-1) - T'_m(1)] \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Pour résoudre le système les équations différentielle du second ordre, nous utilisons la méthode de Newmark.

3.1.4 Méthode de Newmark

Soit $T \geq 0$, pour $N \in \mathbb{N}^*$ donné, $\Delta t = T/N$ est le pas de la variable t . Nous définissons donc $t_j = j\Delta t$ dans lequel $j = 0, 1, \dots, N$, et nous introduisons les notations suivants

$$c_i(t_j) = c_i^j, \quad b(t_j) = b^j, \quad V^j = (c_0^j, \dots, c_i^j)^T, \quad F^j = (s(x_1, t_j), \dots, s(x_{m-1}, t_j), b(t_j), 0)^T.$$

En 1959 N.M,Newmark a proposé une méthode, qui relie les accélérations, les vitesses et les déplacements des nœuds à l'instance t_{j+1} et t_j comme suit :

$$V^{j+1} = V^j + \Delta t \dot{V}^j + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left[(1 - 2\theta) \ddot{V}^j + 2\theta \ddot{V}^{j+1} \right]. \quad (3.17)$$

$$\dot{V}^{j+1} = \dot{V}^j + \Delta t \left[(1 - \gamma) \ddot{V}^j + \gamma \ddot{V}^{j+1} \right]. \quad (3.18)$$

ou $0 \leq \theta \leq 1/2$ et $0 \leq \gamma \leq 1$, La méthode la plus couramment utilisée est la méthode de l'accélération moyenne pour $\theta = 1/4$, et $\gamma = 1/2$ On résoudre le système a l'instant $t_{j+1} = (j + 1)\Delta t$.

$$M\ddot{V}^{j+1} + K^{j+1}V^{j+1} = F^{j+1}, j = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (3.19)$$

En réarrangeant (3.17) pour une expression de \ddot{V}^{j+1} telle que

$$\ddot{V}^{j+1} = \frac{V^{j+1} - V^j}{\theta(\Delta t)^2} - \frac{\dot{V}^j}{\theta\Delta t} - \left(\frac{1}{2\theta} - 1 \right) \ddot{V}^j. \quad (3.20)$$

En substituant (3.17) et (3.20) dans (3.19), nous obtenons le système linéaire suivant :

$$A^{j+1}V^{j+1} = B^{j+1}, \quad (3.21)$$

ou

$$A^{j+1} = \frac{M}{\theta(\Delta t)^2} + K^{j+1}, \quad (3.22)$$

$$B^{j+1} = F^{j+1} + M \left[\frac{V^j}{\theta(\Delta t)^2} + \frac{\dot{V}^j}{\theta\Delta t} + \left(\frac{1}{2\theta} - 1 \right) \ddot{V}^j \right]. \quad (3.23)$$

L'algorithme complet utilisant de Newmark est suivant :

Algorithme 1 (Algorithme de Newmark)**1: Initialisations :**

1. Donner le terme sources $s(x, t)$, les conditions initiales $v_0(x)$ et $v_1(x)$
2. Donner $a(t)$
3. Donner le condition aux limite de Dirichlet $b(t)$
4. Donner les polynôme de Tchebychev $T_0^*(x), \dots, T_m^*(x)$
5. Donner les racines x_1, \dots, x_{m-1} de polynôme de Tchebychev décalé $T_{m-1}^*(x)$
6. Donner le pas de temps $\theta\Delta t$
7. On fixe $\theta = 1/4$ et $\gamma = 1/2$ et on donne les paramètre suivants :

$$b_0 = \frac{1}{\theta(\Delta t)^2}, \quad b_1 = \frac{1}{\theta\Delta t}, \quad b_2 = \frac{1}{2\theta} - 1, \quad b_3 = \Delta t(1 - \gamma), \quad b_4 = \gamma\Delta t;$$

8. Calculer la matrice de masse M ;
9. Calculer $V^0, \dot{V}^0, \ddot{V}^0$

2: Pour chaque pas de temps :

1. Calculer la matrice K^{j+1}
2. Calculer la matrice $A^{j+1} = b_0M + K^{j+1}$
3. Calculer la matrice $B^{j+1} = F^{j+1} + M \left[b_0V^j + b_1\dot{V}^j + b_2\ddot{V}^j \right]$
4. Résoudre le système linéaire suivant :

$$A^{j+1}V^{j+1} = B^{j+1}$$

5. Calculer les vecteurs de vitesse et d'accélération :

$$\ddot{V}^{j+1} = b_0 (V^{j+1} - V^j) - b_1\dot{V}^j - b_2\ddot{V}^j$$

$$\dot{V}^{j+1} = \dot{V}^j + b_3\ddot{V}^j + b_4\ddot{V}^{j+1}$$

6. Poser $j = j + 1$ et aller à l'étape 2 :1.

Exemple 3.1. On considère le problème inverse (1)-(4), avec

$$s(x, t) = (2\pi x - (1 + 4\pi^2) \sin(2\pi x)) \exp(t) - (2\pi x - \sin(2\pi x)) \exp(-t),$$

$$v_0(x) = 2\pi x - \sin(2\pi x), \quad v_1(x) = 2\pi x - \sin(2\pi x),$$

$$b(t) = 0, r(t) = 2\pi \exp(t), x \in [0, 1], t \in [0, 1],$$

Il est facile de vérifier que la solution analytique du problème (1)-(4) est

$$\{a(t), v(x, t)\} = \{\exp(-2t), (2\pi x - \sin(2\pi x)) \exp(t)\}. \quad (3.24)$$

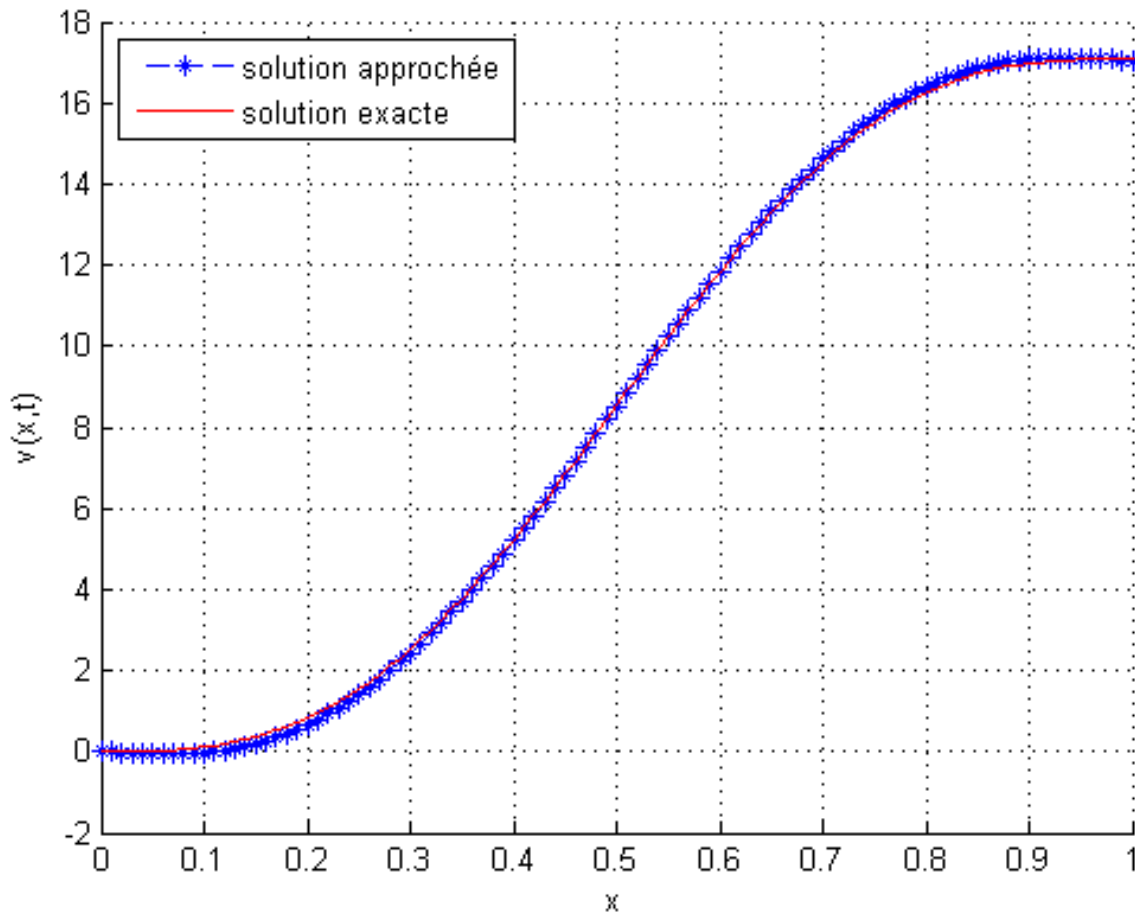
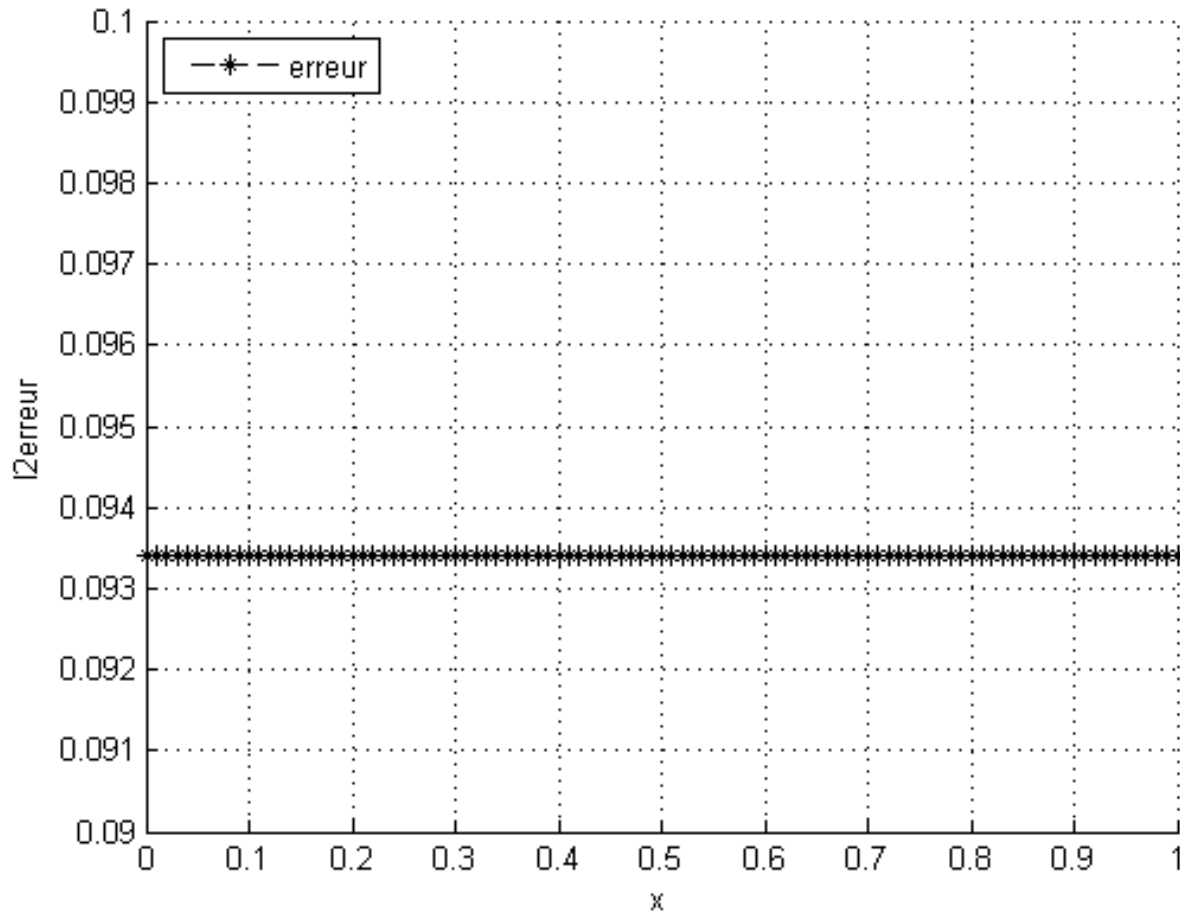


FIGURE 3.1 – solution exacte et approchée pour $T = 1$.

FIGURE 3.2 – l'erreur pour $T = 1$.

3.2 Problème inverse

3.2.1 position de problème

Si le potentiel $a(t)$ est inconnu, nous cherchons par des observations supplémentaires à $x = 1$, i.e,

$$v(1, t) = r(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.25)$$

Ainsi, un problème inverse est formulé par l'équation (1), la condition initiale et les conditions aux limites (2),(3)avec une condition supplémentaire.(4)

Pour la solution de ce problème inverse, supposons que la fonction a doit être paramétrée

sous la forme d'un polynôme de Tchebychev suivant :

$$a(t) = \sum_{i=0}^m d_i T_i^*(t). \quad (3.26)$$

Pour tout $a(t)$ une solution unique de problème direct correspondant, désigné par $v(1, t; a)$ peut être élaboré par la méthode de collocation de Tchebychev, la méthode de Newmark, alors $v(1, t; a)$ est obtenu.

Par conséquent, obtenir le potentiel a équivaut à trouver un vecteur D , ce qui signifie que nous pouvons dire $v(1, t; a) = v(1, t; D)$.

Ou

$$D = (d_0, d_1, \dots, d_m)^t. \quad (3.27)$$

3.2.2 Problème de moindres carrés non linéaire

Pour résoudre le problème inverse on résoudre un problème de moindres carrés non linéaire suivant :

$$\min_D \Psi_\alpha(D), \quad (3.28)$$

Ou

$$\Psi(D) = \|v(1, t; D) - r(t)\|_2^2 \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.29)$$

Le problème (3.28) est mal posé de sorte que ce problème admet plusieurs. Pour l'unicité, en utilisant la régularisation de Tikhonov.

Régularisation de Tikhonov

([16]) On considère le problème régularisé suivant

$$\min_D \Psi_\alpha(D). \quad (3.30)$$

Ou

$$\Psi(D) = \|v(1, t; D) - r(t)\|_2^2 + \alpha \|D\|_2^2 \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.31)$$

tel que $\alpha \geq 0$ est le paramètre de régularisation.

Maintenant, pour obtenir D^j , on suppose que

$$a^{j+1} = a^j + \delta a^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Ou

j est le nombre d'itération,

δa^j désigne une perturbation de a^j .

D'après (3.26) nous avons

$$a^j(t) = \sum_{i=0}^m d_i^j T_i^*(t).$$

et

$$\delta a^j(t) = \sum_{i=0}^m \delta d_i^j T_i^*(t).$$

Ou δD^j désigne une perturbation pour D^j donné. Ainsi, pour obtenir D^{j+1} à partir de D^j donné il suffit d'obtenir une perturbation δD^j .

$$D^{j+1} = D^j + \delta D^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.32)$$

Ensuite, nous avons seulement besoin de déterminer un vecteur de perturbation

$$\delta D^j = (\delta d_0^j, \delta d_1^j, \dots, \delta d_m^j)^t. \quad (3.33)$$

Dans la suite, pour faciliter l'écriture, D^j et δD^j sont abrégés en D et δD , respectivement.

Problème linéaire

Nous avons la solution directe $v(1, t; D + \delta D)$ est dépend de D implicitement, donc avec le développement de Taylor à l'ordre un trouve :

$$v(1, t; D + \delta D) \approx v(1, t; D) + \nabla_D^t v(1, t; D) \cdot \delta D. \quad (3.34)$$

En utilisant (3.29) on obtient

$$\psi(D + \delta D) = \left\| \nabla_D^t v(1, t; D) \cdot \delta D - (r(t) - v(1, t; D)) \right\|_2^2$$

Avec (3.31), la fonction objectif de moindres carrés devient

$$F_\alpha(\delta D) = \left\| \nabla_D^t v(1, t; D) \cdot \delta D - (r(t) - v(1, t; D)) \right\|_2^2 + \alpha \|\delta D\|_2^2 \quad (3.35)$$

Nous discrétisons le domaine $[0, T]$ par $t_n (n = 1, 2, \dots, N)$ et $0 = t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_N = T$
Par la méthode de différence finie , nous avons

$$\nabla_D^t v(1, t_n; D) \cdot \delta D \approx \sum_{i=0}^m \frac{v(1, t_n; d_0, \dots, d_i + \tau, \dots, d_m) - v(1, t_n; D)}{\tau} \delta d_i \quad (3.36)$$

Pour $n = 1, 2, \dots, N$, ou τ et un pas différentiel numérique. D'où, on définit la matrice

$$H = (h_{ni})_{N \times (m+1)},$$

Ou

$$h_{ni} = \frac{v(1, t_n; d_0, \dots, d_i + \tau, \dots, d_m) - v(1, t_n; D)}{\tau},$$

Alors

$$H = \begin{pmatrix} h_{10} & h_{11} & \cdots & h_{1m} \\ h_{20} & h_{21} & \cdots & h_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N0} & h_{N1} & \cdots & h_{Nm} \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Soit

$$V = (v(1, t_1; D), v(1, t_2; D), \dots, v(1, t_N; D))^T, \quad (3.38)$$

$$R = (r(t_1), r(t_2), \dots, r(t_N))^T. \quad (3.39)$$

En utilisant (3.36),(3.37) et (3.38) on peut écrire (3.35) sous la forme suivante

$$F_\alpha(\delta D) = \|H\delta D - (R - V)\|_2^2 + \alpha \|\delta D\|_2^2. \quad (3.40)$$

Lemme 3.1. δD^α un minimum de F_α si et seulement si δD^α résout l'équation normale suivante

$$\alpha \delta D^\alpha + H^T H \delta D^\alpha = H^T (R - V). \quad (3.41)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
F_\alpha(\delta D) - F_\alpha(\delta D^\alpha) &= (\|H\delta D - (R - V)\|_2^2 + \alpha \|\delta D\|_2^2) - (\|H\delta D^\alpha - (R - V)\|_2^2 + \alpha \|\delta D^\alpha\|_2^2) \\
&= (\|H\delta D\|_2^2 + \|R - V\|_2^2 - 2\langle H\delta D, R - V \rangle + \alpha \|\delta D\|_2^2) \\
&\quad - (\|H\delta D^\alpha\|_2^2 + \|R - V\|_2^2 - 2\langle H\delta D^\alpha, R - V \rangle + \alpha \|\delta D^\alpha\|_2^2) \\
&= \|H(\delta D - \delta D^\alpha)\|_2^2 - 2\|H\delta D^\alpha\|_2^2 + 2\langle H\delta D, H\delta D^\alpha \rangle - 2\langle H\delta D, R - V \rangle \\
&\quad + 2\langle H\delta D^\alpha, R - V \rangle + \alpha \|\delta D - \delta D^\alpha\|_2^2 - 2\alpha \|\delta D^\alpha\|_2^2 + 2\alpha \langle \delta D, \delta D^\alpha \delta D^\alpha \rangle \\
&= 2\langle H\delta D^\alpha - (R - V), H(\delta D - \delta D^\alpha) \rangle + 2\langle \delta D^\alpha, \delta D - \delta D^\alpha \rangle \\
&\quad + \|H(\delta D - \delta D^\alpha)\|_2^2 + \alpha \|\delta D - \delta D^\alpha\|_2^2 \\
&= 2\langle H^T(H\delta D^\alpha - (R - V)) + \alpha\delta D^\alpha, \delta D - \delta D^\alpha \rangle + \|H(\delta D - \delta D^\alpha)\|_2^2 \\
&\quad + \alpha \|\delta D - \delta D^\alpha\|_2^2.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Pour tout $\delta D, \delta D^\alpha \in \mathbb{R}^{m+1}$. Si δD^α satisfait (3.41), puis $F_\alpha(\delta D) - F_\alpha(\delta D) \geq 0$, alors δD^α minimise(3.40)

D'autre part, si δD^α minimise(3.40), choisisons $\delta D = \delta D^\alpha + tZ$ pour tout $t \geq 0$ et $Z \in \mathbb{R}^{m+1}$. On a

$$F_\alpha(\delta D) - F_\alpha(\delta D^\alpha) \geq 0,$$

donc,

$$2t \langle H^T(H\delta D^\alpha - (R - V)) + \alpha\delta D^\alpha, Z \rangle + t^2 \|HZ\|_2^2 + \alpha t^2 \|Z\|_2^2 \geq 0,$$

diviser par $t > 0$ et quand $t \rightarrow 0$ on obtient

$$\langle H^T(H\delta D^\alpha - (R - V)) + \alpha\delta D^\alpha, Z \rangle \geq 0, \quad \text{pour tout } Z \in \mathbb{R}^{m+1},$$

si on choisit $Z = - (H^T(H\delta D^\alpha - (R - V)) + \alpha\delta D^\alpha)$, nous obtenons

$$\langle H^T(H\delta D^\alpha - (R - V)) + \alpha\delta D^\alpha, - (H^T(H\delta D^\alpha - (R - V)) + \alpha\delta D^\alpha) \rangle \geq 0$$

d'où

$$- \|H^T(H\delta D^\alpha - (R - V)) + \alpha\delta D^\alpha\|_2^2 \geq 0$$

donc

$$\|H^T(H\delta D^\alpha - (R - V)) + \alpha\delta D^\alpha\|_2^2 \leq 0$$

implique que

$$H^T(H\delta D^\alpha - (R - V)) + \alpha\delta D^\alpha = 0$$

ce que montre δD^α résout l'équation normale (3.41). \square

Existence

Théorème 3.2. *Il existe au moins $\delta D^\alpha \in \mathbb{R}^{m+1}$ point de minimum de la fonction F_α*

Démonstration. Soit $\delta D_n \in \mathbb{R}^{m+1}$ une suite minimisante, i.e,

$F_\alpha(\delta D_n) \rightarrow I = \inf_{\delta D \in \mathbb{R}^{m+1}} F_\alpha(\delta D)$ quand $n \rightarrow \infty$. On montre que (δD_n) est une suite de Cauchy.

$$\begin{aligned}
F_\alpha(\delta D_n) + F_\alpha(\delta D_m) &= (\|H\delta D_n - (R - V)\|_2^2 + \alpha \|\delta D_n\|_2^2) + (\|H\delta D_m - (R - V)\|_2^2 + \alpha \|\delta D_m\|_2^2) \\
&= \|H\delta D_n\|_2^2 + \|R - V\|_2^2 - 2 \langle H\delta D_n, R - V \rangle + \alpha \|\delta D_n\|_2^2 \\
&\quad + \|H\delta D_m\|_2^2 + \|R - V\|_2^2 - 2 \langle H\delta D_m, R - V \rangle + \alpha \|\delta D_m\|_2^2 \\
&= \|H\delta D_n\|_2^2 + 2 \|R - V\|_2^2 - 2 \langle H(\delta D_n + \delta D_m), R - V \rangle + \alpha \|\delta D_n\|_2^2 \\
&\quad + \|H\delta D_m\|_2^2 + \alpha \|\delta D_m\|_2^2,
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Nous avons

$$\|H\delta D_n\|_2^2 + \|H\delta D_m\|_2^2 = \frac{1}{2} (\|H(\delta D_n + \delta D_m)\|_2^2 + \|H(\delta D_n - \delta D_m)\|_2^2),$$

et

$$\alpha (\|\delta D_n\|_2^2 + \|\delta D_m\|_2^2) = \frac{1}{2} (\|\delta D_n + \delta D_m\|_2^2 + \|\delta D_n - \delta D_m\|_2^2),$$

D'où

$$\begin{aligned}
F_\alpha(\delta D_n) + F_\alpha(\delta D_m) &= \frac{1}{2} \|\delta D_n + \delta D_m\|_2^2 + 2 \|R - V\|_2^2 - 2 \langle H(\delta D_n + \delta D_m), R - V \rangle \\
&\quad + \frac{\alpha}{2} \|\delta D_n + \delta D_m\|_2^2 + \frac{1}{2} \|H(\delta D_n - \delta D_m)\|_2^2 + \frac{\alpha}{2} \|\delta D_n - \delta D_m\|_2^2,
\end{aligned} \tag{3.44}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
2F_\alpha \left(\frac{1}{2}(\delta D_n + \delta D_m) \right) &= 2 \left\| H \frac{1}{2}(\delta D_n + \delta D_m) - (R - V) \right\|_2^2 + 2\alpha \left\| \frac{1}{2}(\delta D_n + \delta D_m) \right\|_2^2 \\
&= \frac{1}{2} \|H(\delta D_n + \delta D_m) - 2(R - V)\|_2^2 + \frac{\alpha}{2} \|\delta D_n + \delta D_m\|_2^2 \\
&= \frac{1}{2} (\|\delta D_n + \delta D_m\|_2^2 + 4 \|R - V\|_2^2 - 4 \langle H(\delta D_n + \delta D_m), R - V \rangle) \\
&\quad + \frac{\alpha}{2} \|\delta D_n + \delta D_m\|_2^2 \\
&= \frac{1}{2} \|\delta D_n + \delta D_m\|_2^2 + 2 \|R - V\|_2^2 - 2 \langle H(\delta D_n + \delta D_m), R - V \rangle \\
&\quad + \frac{\alpha}{2} \|\delta D_n + \delta D_m\|_2^2,
\end{aligned} \tag{3.45}$$

En remplaçant (3.44) dans (3.45) on obtient

$$\begin{aligned} F_\alpha(\delta D_n) + F_\alpha(\delta D_m) &= 2F_\alpha\left(\frac{1}{2}(\delta D_n + \delta D_m)\right) + \frac{1}{2}\|\delta D_n - \delta D_m\|_2^2 + \frac{\alpha}{2}\|\delta D_n - \delta D_m\|_2^2 \\ &\geq 2I + \frac{\alpha}{2}\|\delta D_n - \delta D_m\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.46)$$

On a $F_\alpha(\delta D_n) + F_\alpha(\delta D_m) \rightarrow 2I$ quant n, m tend vers l'infini

$$\|\delta D_n - \delta D_m\|_2^2 \leq 0.$$

Ceci montre que (δD_n) est une suite de Cauchy et donc convergente puisque l'espace euclidien est un espace de Hilbert. $\delta D^\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \delta D_n$, nous avons $\delta D^\alpha \in \mathbb{R}^{m+1}$, et de la continuité de F_α , nous concluons que $F_\alpha(\delta D_n) \rightarrow F_\alpha(\delta D^\alpha)$, alors $F_\alpha(\delta D^\alpha) = I$. Cela prouve l'existence d'un minimum de F_α . \square

Unicité

F_α admet un minimum unique $\delta D^\alpha \in \mathbb{R}^{m+1}$. Ce minimum δD^α est la solution unique de l'équation normale

$$\alpha \delta D^\alpha + H^T H \delta D^\alpha = H^T (R - V),$$

Démonstration. Il suffit de montrer que l'équation normale admet une solution unique parce que nous avons une équivalence entre (3.41) et (3.40)

Nous avons l'équation normale

$$(\alpha I + H^T H) \delta D^\alpha = H^T (R - V),$$

pour montrer que cette équation admet une solution unique, il doit montrer que la matrice $(\alpha I + H^T H)$ est définie positive.

Alors, $\forall \delta D \neq 0$

$$\begin{aligned} \langle (\alpha I + H^T H) \delta D^\alpha, \delta D^\alpha \rangle &= \langle \alpha \delta D^\alpha, \delta D^\alpha \rangle + \langle H^T H \delta D^\alpha, \delta D^\alpha \rangle \\ &= \alpha \|\delta D^\alpha\|_2^2 + \|H \delta D^\alpha\|_2^2, \end{aligned} \quad (3.47)$$

On a

$$\|H \delta D^\alpha\|_2^2 > 0,$$

et

$$\|\delta D^\alpha\|_2^2 > 0,$$

donc

$$\alpha \|\delta D^\alpha\|_2^2 + \|H \delta D^\alpha\|_2^2 > 0,$$

alors

$$\langle (\alpha I + H^T H) \delta D^\alpha, \delta D^\alpha \rangle > 0.$$

Cela prouve que la matrice $(\alpha I + H^T H)$ est définie positive donc inversible implique que l'équation (3.40) admet une solution unique, alors, nous concluons que F_α admet un minimum unique.

Par conséquent, une perturbation peut être déterminée par (3.40)

$$\alpha D^\alpha = (\alpha I + H^T H)^{-1} H^T (R - V). \quad (3.48)$$

Ainsi, une solution optimale peut être approchée par la procédure d'itération (3.32) tant que le normale d'itérations est atteint, ou que la perturbation satisfait à une précision convergente prescrite donné par

$$\|\delta D^\alpha\|_2 \leq \epsilon$$

Ou ϵ est une précision convergente donné. □

Algorithme 2 (Algorithme d'inverse)

- 1: Donner l'itération initiale D , et le pas différentiel numérique τ , et la précision convergente ϵ , et la condition supplémentaire $r(t)$.
 - 2: Résoudre le problème direct par le système linéaire, obtenir $v(1, t_n; D)$ et $v(1, t_n; (d_0, \dots, d_i + \tau, \dots, d_m))$, pour $n = 1, 2, \dots, N$ et $i = 0, 1, \dots, m$, puis obtenir le vecteur V et la matrice H par la formule (3.37)
 - 3: Choisir un paramètre de régularisation approprié $\alpha \geq 0$, et obtenir un vecteur perturbation δD^α en utilisant la formule (3.48) puis obtenir δa^α
 - 4: S'il y a $\|\delta D^\alpha\|_2 \leq \epsilon$, alors l'algorithme d'inverse est terminé, et $a + \delta a^\alpha$ est considéré la solution que nous voulons juste déterminer. Si non, passez à l'étape (2) en remplaçant D par $D + \delta D$.
-

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème inverse pour une équation hyperbolique linéaire du second ordre avec des conditions aux limites non locales et une condition supplémentaire sur le côté $x = 1$. Ce travail se déroule en deux étapes :

- ✓ **Étude théorique** : Avec des hypothèses sur les données du problème inverse et le temps suffisamment petit, nous avons prouvé l'existence et l'unicité de la solution par le théorème de point fixe.
- ✓ **Étude numérique** : nous avons proposé un algorithme pour calculer la solution numérique de ce problème inverse. Cet algorithme basé sur la méthode de collocation de Tchebychev, la méthode de Newmark et la méthode des moindres carrés avec régularisation de Tikhonov. Des exemples numériques sont présentés pour valider l'efficacité de cet algorithme.

Comme perspectives, nous avons prévu le sujet de recherche suivant :

- ☞ Problème inverse pour une équation des ondes avec condition au limite non locale :

$$u_{tt}(x, t) = a(t) u_{xx}(x, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0, t) = b(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$u(1, t) = E(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

où $\Omega_T = \{(x, t) : 0 < X < 1, 0 < t \leq T\}$ et $f(x, t), \varphi(x), \psi(x), b(t)$ et $E(t)$ sont des fonctions données.

Bibliographie

- [1] S. Abdelkebir. *Étude de quelques problèmes d'évolution pour des équations aux dérivées fractionnaires*. PhD thesis, Université de M'sila, Algérie, 2022.
- [2] I. Aouina. Problème inverse pour une équation de diffusion avec une condition au limite non locale. Master's thesis, Université de M'sila, Algérie, Juin 2021.
- [3] R. Heraiz. *Analyse fonctionnelle*. Algérie, 2021.
- [4] O. Imanuvilov and M. Yamamoto. Global uniqueness and stability in determining coefficients of wave equations. *Comm. Part. Diff. Equat.*, 26 :1409–1425, 2001.
- [5] V. Isakov. *Inverse problems for partial differential equations. Applied mathematical sciences*. New York (NY) : Springer, 2006.
- [6] F. Laaiadi. Le théorème de point fixe de krasnoselskii et ses applications aux equation différentielle impulsive. Master's thesis, Université d'Adrar, Algérie, 23 avril 2020.
- [7] Z. Lin and R.P. Gilbert. Numerical algorithm based on transmutation for solving inverse wave equation. *Mathematical and computer modelling*, 39(13) :1467–1476, 2004.
- [8] J.C. MASON and D.C. HANDSCOMB. *CHEBYSHEV POLYNOMIALS*. A CRC Press Company, Boca Raton London New York Washington, D.C., 2003.
- [9] Y. Megraliev. Inverse boundary value problem for a second-order elliptic equation with integral condition. *Baku State University, Ac. Zahid Khalilov Str., 23, Baku, AZ 114, Azerbaijan Republic*, 1(26) :42–47, 2012.
- [10] Y.T. Megraliev and Q.N. Isgenderova. Inverse boundary value problem for a second-order hyperbolic equation with integral condition of the first kind. *Baku State University*, 1(26) :42–47, 2016.
- [11] G.K. Nazarov. *Inverse Problems of the Theory of Equations of Mathematical Physics*. Baku, Azerbaijan, 1984.
- [12] A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, and I.A. Vasin. *Methods for solving inverse problems in mathematical physics : Vol. 231, Pure and Applied Mathematics*. New York (NY) : Marcel Dekker, 2000.
- [13] V.G. Romanov. *Inverse Problems of Mathematical Physics*. VNU Science Press BV, Utrecht, Netherlands, 1987.

-
- [14] I. Tekin. Existence and uniqueness of an inverse problem for a second order hyperbolic equation. *Universal Journal of Mathematics and Applications*, 1(3) :17–185, 2018.
- [15] I. Tekin, Y.T. Mehraliyev, and M.I. Ismailov. Existence and uniqueness of an inverse problem for nonlinear klein-gordon equation. *Math Meth Appl Sci*, 1(3) :17–185, 2019.
- [16] A. Ziane. Étude d'un problème inverse pour une équation de diffusion fractionnaire. Master's thesis, Université de M'sila, Algérie, Juin 2018.

ملخص: في هذه المذكرة، درسنا مسألة عكسية لتحديد معامل الجهد كدالة للوقت t وإزاحة الموجة عند الموضع x وفي الوقت t في معادلة خطية زاندية من الدرجة الثانية مع شروط حدية غير محلية وشرط إضافي على الجانب $x = 1$. في الوقت الذي يكون فيه T صغيرًا بدرجة كافية ومع افتراضات حول معطيات المسألة، أثبتنا وجود الحل ووحدانيته من خلال نظرية النقطة الثابتة. ثم اقترحنا خوارزمية لحساب الحل العددي لهذه المسألة العكسية. تعتمد هذه الخوارزمية على طريقة التجميع لتشيبيشاف وطريقة نيومارك وطريقة التربيعات المصغرة مع تسوية تخينوف. تم تقديم أمثلة عديدة للتحقق من كفاءة هذه الخوارزمية.

كلمات مفتاحية: نظرية النقطة الثابتة، مسألة غير ذاتية، طريقة نيو مارك، التربيعات المصغرة، كثيرات حدود تشيبيشاف، تسوية تخينوف.

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème inverse pour déterminer un coefficient de potentiel en fonction du temps t et le déplacement d'onde à la position x et au temps t dans une équation hyperbolique linéaire du second ordre avec des conditions aux limites non locales et une condition supplémentaire sur le côté $x = 1$. Pour le temps T est suffisamment petit et avec des hypothèses sur les données du problème, nous avons prouvé l'existence et l'unicité de la solution par le théorème de point fixe. Ensuite, nous avons proposé un algorithme pour calculer la solution numérique de ce problème inverse. Cet algorithme basé sur la méthode de collocation de Tchebychev, la méthode de Newmark et la méthode des moindres carrés avec régularisation de Tikhonov. Des exemples numériques sont présentés pour valider l'efficacité de cet algorithme.

Mots-Clés : Théorème de point fixe , Problème non auto-adjoint, Méthode de Newmark, Moindres carrés, Polynômes de Tchebychev, Régularisation de Tikhonov.

In this memoir, we studied an inverse problem to determine a coefficient of potential as a function of time t and the wave displacement at position x and at time t in a second-order linear hyperbolic equation with non-local boundary conditions and an additional condition on the side $x = 1$. For the time T is small enough and with assumptions on the data of the problem, we proved the existence and uniqueness of the solution by the fixed point theorem. Then, we proposed an algorithm to calculate the numerical solution of this inverse problem. This algorithm based on Chebyshev's collocation method, Newmark's method and the least squares method with Tikhonov regularization. Numerical examples are presented to validate the efficiency of this algorithm.

Keywords : Fixed point theorem, Non self-adjoint problem, Newmark method, Least squares, Chebyshev polynomials, Tikhonov regularization.