

CENTRE UNIVERSITAIRE MOHAMED BOUDIAF M'SILA
INSTITUT DE GENIE CIVIL

THEME

**ANALYSE ELASTO-PLASTIQUE DES STRUCTURES PAR
ELEMENTS FINIS MEMBRANAIRES 2D**

Thèse présentée pour l'obtention du diplôme de Magister

EN : GENIE CIVIL

Par : OUNIS HADJ MOHAMED

Sous la direction de : M. ABDELHAMID CHARIF

Devant le jury composé de

Tahar	AYADAT	M.C	Président de Jury
Abdelhamid	CHARIF	Professeur	Rapporteur
Zine El Abidine	RAHMOUNI	C.C	Co-Rapporteur
Mohamed	BENCHEIKH	M.C	Examineur
Abdelkarim	KADID	C.C	Examineur
Mohamed	KHEMISSA	M.C	Examineur

ملخص

الهدف من هذا الموضوع هو دراسة صفائح ثنائية الأبعاد باستعمال طريقة الحساب بالعناصر المتناهية و التي من خصائصها أن تكون ذات أربع أو ثمانية أو تسعة عقد في مجال المرن المتلدن .
من خلال هذه الدراسة تمكنا من معرفة بدقة سلوكات الصفيحة ، المتمثلة في كل المناطق المتلدنة تحت تحميل متزايد و ذلك باستعمال كل قوانين اللدونة ، و قوانين التقارب و كذلك الطرق الحسابية غير الخطية

Résumé

La présente étude consiste en l'analyse élastoplastique d'une structure membranaire bidimensionnelle par éléments finis isoparamétriques dont l'objectif est de savoir le comportement réel de la structure, qui est la plastification des différentes zones sous un chargement incrémental pas à pas en utilisant une multitude de critères de plasticité, de convergence et ainsi de différentes méthodes non linéaires, en particulier la méthode dite « Arc Length ».

SOMMAIRE

CHAPITRE 1

INTRODUCTION GENERALE

1.1) Introduction	1
1.2) Rôle de la plasticité et ses capacités	2
1.3) Objectifs de l'étude	3
1.2) Présentation de la thèse	4

CHAPITRE 2

ELASTO-PLASTICITE

PARTIE 1 : ELASTOPLASTICITE CLASSIQUE

2.1) Elastoplasticité classique	5
2.1.1) Introduction	5
2.1.1.1) Définition de la plasticité	6
2.1.3) Origine de la déformation plastique	6
2.1.4) Essai de traction compression	6
2.1.4.A)	Effet Baushinger	7
2.1.4.B)	Ecrouisseage	8
2.1.5) Modèles Utilisés	8
2.1.6) Modélisation	9
2.1.7) Méthodes des rotules plastiques	10
2.1.8) Lois de la déformation plastique	15
2.1.9) Principe de travail plastique maximal	16
2.1.10) Mécanisme de ruine	16
2.1.11) Rotule plastique	16
2.1.12) Formation d'un mécanisme	17
2.1.13) Sections potentiellement critique	17
2.1.14) Notions de mécanismes indépendants	17
2.1.15) Détermination du nombre de mécanismes indépendants	18
2.1.16) Calcul à la limite – Bases théoriques	18
2.1.17) Méthode statique	19
2.1.18) Méthode cinématique	20
2.1.19) Méthode des centres instantanés de rotation	20
2.1.20) Méthode manuelle par combinaison de mécanisme	21

PARTIE 2 : ELASTOPLASTICITE MODERNE

2.2.1) Introduction et Généralités	22
2.2.2) Plasticité unidimensionnelle générale	23
2.2.2.1) Introduction	23
2.2.2.1.1) Critères de limite élastique ou d'épuisement	24
2.2.2.1.2) Règle d'écrouisseage	24
2.2.2.1.3) Règle d'écoulement	24
2.2.2.2) Critère d'épuisement	24
2.2.2.3) Règle d'écrouisseage	24
2.2.2.3.1) Ecrouisseage isotrope	24

2.2.2.3.2) Ecrouissage cinématique	26
2.2.2.3.3) Ecrouissage mixte	27
2.2.2.3.4) Règle de chargement	27
2.2.2.4) Règle d'écoulement	28
2.2.2.5) Résolution numérique et organigramme	30
2.2.3) Théorie générale de la plasticité multidimensionnelle	34
2.2.3.1) Critères de limite élastique et grandeurs effectives	34
2.2.3.1.1) Critère de Tresca	37
2.2.3.1.2) Critère de Von Mises (1913)	38
2.2.3.1.3) Critère de Mohr Coulomb.....	39
2.2.3.1.4) Critère de Drucker Prager	40
2.2.3.1.5) Critère de Hill	42
2.2.3.2) Règle d'écrouissage	43
2.2.3.2.1) Ecrouissage isotrope	43
2.2.3.2.2) Ecrouissage cinématique	44
2.2.3.2.3) Ecrouissage Mixte	46
2.2.3.3) Règle d'écoulement et potentiel plastique	46
2.2.4) Relations élastoplastiques incrémentales	47
2.2.4.1) Ecrouissage mixte	50
2.2.4.2) Critère de chargement	52
2.2.5) Gradient des critères	53
2.2.6) Points singuliers	55
2.2.6.1) Elastoplasticité associé au critère de Von Mises	57
2.2.7) Calcul des contraintes	58
2.2.8) Organigrammes plastique général	60

CHAPITRE 3 : LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

3.1) Introduction	64
3.2) Formulation des éléments finis	65
3.2.1) Disrétisation par éléments finis	65
3.2.2) Présentation de la méthode	66
3.3) Conclusion.....	68

CHAPITRE 4 : LES METHODES NUMERIQUES NON LINEAIRES

4.1) Introduction.....	69
4.2) Techniques numériques pour l'analyse non linéaire	71
4.2.1) Formulation de base	71
4.2.2) Méthode incrémentale	71
4.2.3) Méthode itérative	72
A) Evaluation des forces nodales non équilibrées	73
B) Méthode d'évaluation des éléments de la matrice de rigidité	74
B.1) Méthode de rigidité constante	74
B.2) Méthode de Rigidité variable	74
4.2.4) Méthode mixte	76
4.3) Méthode Arc Length	78
4.3.1) Introduction	78
4.3.2) Equations constitutives	78
4.3.3) Equation de contrainte	80

4.3.3.1) Equation de contrainte sphérique	80
4.3.3.2) Equation de contrainte du plan normal	82
4.3.3.3) Contrôle de la longueur de l'arc	83
4.3.3.5) Conclusion	84
4.4) La procédure utilisée dans ce travail	85
4.5) critère de convergence	85
4.6) Discussion générale sur le critère de convergence	87
4.7) Les étapes de base dans la méthode utilisée	88
4.8) Technique de la résolution du système non linéaire	89
4.10) Conclusion	90

CHAPITRE 5 : PRESENTATION DU LOGICIEL

5.1) Introduction	91
5.2) Structure générale du programme	91
5.2.1) Lecture et Organisation des données	91
5.2.2) Construction de la matrice de rigidité [K] et du vecteur force { F }	92
5.2.3) Résolution du système d'équations non linéaires	94
5.2.4) Impression des résultats	97
5.3) Organigramme de quelques sous-routines	99

CHAPITRE 6 : VALIDATION ET EXPERIMENTATION NUMERIQUE

6.1) Exposition théorique.....	115
6.1.1) Exposition d'un tube de mur épais	115
a) Gonflement élastique et écoulement	
initial	115
b) Expansion elasto-plastique	118
c) La théorie de Prandtl-Reuss pour déformation plane	123
d) Contraintes résiduelles	127
e) Influence du travail d'écroutissage	131
6.1.2) Plaque infinie avec trou circulaire	134
6.2) Validation et expérimentation	140
6.2.1) Cylindre en déformation planes	140
6.2.1.1) Hypothèse	140
6.2.1.2) Résultats de l'expérimentation numérique	141
a) Intégration réduite (2 x 2)	146
b) Intégration Totale (3 x 3)	146
6.2.1.3) Critères de plasticité	147
6.2.1.4) Algorithme de Résolution	148
a) Intégration Réduite (2 x 2) à 12 éléments	148
b) Intégration Totale (3 x 3) à 12 éléments	148
c) Intégration Réduite (2 x 2) à 24 éléments	148
d) Intégration Totale (3 x 3) à 24 éléments	149
6.2.2) Plaque trouée en contraintes planes	151
6.2.2.1) Hypothèse.....	151

6.2.2.1) Conclusion	152
---------------------------	-----

CHAPITRE 7 : CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

7.1) Conclusion.....	153
7.2) Recommandations	154

INTRODUCTION GENERALE

1.1 INTORDUCTION

Construire est une des activités premières de l'homme, et les vestiges les plus anciens révèlent que l'art de construire a de tous temps été poussé à très haut degré.

Les concepts actuels qui nous permettent, grâce à des notions abstraites telles que l'élasticité, plasticité, fragilité, d'aborder la réalité concrète n'ont été dégagés sous une forme précise que récemment. Néanmoins si le constructeur ancien ne disposait pas de ces concepts clairement exprimés, avait –il tout au moins une intuition qui lui permettait d'utiliser implicitement les qualités de la matière.

Le point de départ est né de cette observation : lorsque les déformations restent petites, celles-ci sont réversibles, c'est à dire que le corps déchargé reprend sa forme initiale, et que, sous chargement répété les déformations se reproduisent exactement de la même manière. La réversibilité des déformations a pour conséquence que l'on peut considérer un potentiel interne.

Ainsi est né le corps élastique parfait pour lequel on a crée la théorie de l'élasticité dont Saint Venant et Navier ont introduit les principes fondamentaux.

Cependant, bien que les règles de sécurité et bien que les calculs faits en application de ces règles fussent conduits sur cette image du corps élastique parfait, on s'est depuis longtemps rendu compte que la matière se comportait autrement, et qu'en fait ce que nous appelons la qualité plastique du matériau avait un rôle considérable pour la sécurité.

Dans la matière réelle, lorsque les déformations dépassent une certaine limite, elles cessent d'être réversibles, dans ce cas alors, après déchargement, le corps ne reprend pas sa forme initiale, on dit qu'il y a déformation permanente.

Une structure réelle est un corps très complexe avec un état de contrainte extrêmement compliqué.

Beaucoup de contraintes secondaires surviennent à cause de : fabrication, dressement et localisation.

La théorie de plasticité représente une extension nécessaire de la théorie de l'élasticité et est concernée par les analyses des contraintes et des déformations dans la structure aussi bien dans les marges élastiques que plastiques. Ceci fournit une estimation plus réaliste des capacités des charges portantes des structures et produit une meilleure compréhension de la réaction des éléments structuraux aux forces induites dans le matériau ;

Une compréhension du rôle des variables mécaniques respectives qui définit la réaction caractéristique du matériau à la force appliquée est donc essentielle à l'ingénieur planifiant les structures. Mieux compréhensive est cette connaissance, plus exacte est le plan et plus parfait est la structure.

S'il est vrai que pour les actions et chargements statiques, il est normalement toujours possible de dimensionner la structure de manière à limiter son comportement dans le domaine linéaire, il n'en est plus de même pour certains chargements dynamiques. Il est bien connu que sous des excitations sismiques d'intensité élevée, des excursions dans le domaine post-élastique sont inévitables et l'analyse non linéaire devient dans ces cas incontournables pour l'étude de la sécurité et de la ductilité de la structure.

Donc pour mieux utiliser la matière, il convient de faire appel à une nouvelle image plus proche de la réalité, d'où la notion de corps élasto-plastique.

Un compte complet de la théorie et application de plasticité doit s'occuper de deux aspects d'importance égale :

- 1) La technique générale utilisée dans le développement des relations contrainte-déformation pour les matériaux élasto-plastiques avec travail d'écrouissage aussi bien que déformation d'adoucissement et
- 2) La procédure de solution numérique générale pour résoudre le problème structural élasto-plastique sous l'action des charges ou des déplacements, chacun desquels varie de manière spécifiée.

1.2 -) ROLE DE LA PLASTICITE ET SES CAPACITES

La première tâche de la théorie de plasticité est d'établir les relations entre contrainte et déformation plastique observée. Ceci est une tâche difficile, cependant,

les règles déformationnelles pour les métaux qui, en général coïncident bien avec l'évidence expérimentale ont été fermement établies avec succès dans les applications d'ingénieur.

En plus, dans les années récentes, les méthodes de plasticité ont aussi été étendues et appliquées à l'étude de l'environnement déformationnel des matériaux géologiques ; tels que roches, sols et béton. L'extension de la théorie de plasticité aux matériaux non métalliques est probablement le sujet de recherche le plus actif dans le domaine de mécanique des matériaux qui ont été développés.

La seconde tâche de la théorie est de développer les techniques numériques pour l'implémentation de ces relations contrainte-déformation dans l'analyse des structures. A cause de la nature non linéaire des règles de déformations plastique ; résoudre les équations de base de mécanique du solide inévitablement, présente des difficultés considérables. Cependant dans les années récentes, le développement d'ordinateurs à grande capacité et les techniques modernes d'analyse par éléments finis a muni l'ingénieur d'un outil puissant pour la résolution en fait virtuellement de n'importe quel problème structural non linéaire. Ceci a provoqué les nouveaux développements et les applications les plus larges de la théorie classique de plasticité.

L'activité de recherche dans ce domaine a augmenté énormément durant la dernière décennie.

1.3) OBJECTIFS DE L'ETUDE

Dans cette présente étude, on va s'intéresser au comportement non linéaire des structures incluant la non linéarité matérielle : L'élasto-plasticité . Notre analyse reposera sur une discrétisation par éléments finis isoparamétriques membranaires des structures en utilisant des procédures numériques élaborées d'analyse non linéaire. L'objectif étant de pouvoir suivre la propagation de la plasticité pour différents pas de chargement.

Notre investigation a aboutit à l'élaboration d'un logiciel d'analyse élastoplastique des structures par éléments finis bidimensionnels.

Dans un second lieu, on passera à la partie pratique qui est la mise en œuvre informatique(Programme)

On va essayer d'examiner les réponses du cylindre en déformations planes et de la plaque trouée en contrainte plane. De nombreux exemples numériques seront traités pour évaluer la vitesse de convergence et la précision du programme que nous avons développé dans cette étude ainsi que l'effet de certains paramètres afin d'aboutir à des conclusions et recommandations.

1.4 PRESENTATION DE LA THESE

Cette thèse comporte sept chapitres :

- ❖ **Le chapitre 1** : Donne une description générale du problème et des objectifs de l'étude.
- ❖ **Le chapitre 2** : Est consacré à la présentation de l'élasto-plasticité classique et moderne.
- ❖ **Le chapitre 3** : Présente la modélisation des structures par éléments finis isoparamétriques.
- ❖ **Le chapitre 4** : Décrit les méthodes d'analyses non linéaires, ainsi que la technique utilisée dans cette étude et la description des critères de rupture pour l'analyse élasto-plastique.
 - ❖ **Le chapitre 5** : Description des différentes étapes de la structure du programme élaboré et sa validation.
- ❖ **Le chapitre 6** : Sont présentés et discutés les résultats obtenus en d'autres termes l'expérimentation numérique par l'utilisation du programme élaboré.
- ❖ **Le chapitre 7** : Conclusions et Recommandations pour des travaux de futurs.

INTRODUCTION GENERALE

Analyse Elastoplastique des structures En éléments finis membranaires isoparamétriques

1.1) INTRODUCTION

Les premiers travaux traitant la théorie de la plasticité se rapportent aux années soixante dix du XIX ème siècle et sont liés aux noms de Saint –Venant et M.Levy.

La plupart des matériaux structurels ont un comportement initial (élastique réversible, linéaire ou non) mais exhibent au delà d'un certain seuil (Appelé limite élastique ou seuil plastique) des déformations irréversible ou plastiques.

Au début du vingtième siècle, un critère de résistance a été proposé par VON MISES (1913) en plus de celui de TRESCA (1864) et qui sont employés encore de nos jours.

Le critère de plasticité est une relation $F(\sigma, C) = 0$ entre les composantes du tenseur des contraintes $\sigma_{(i,j)} = 0$ agissant sur un élément de matériau d'un ou plusieurs paramètres C définissant l'état actuel de cet élément (Ex écrouissage)

La possibilité de la formation des rotules plastiques dans les barres fléchies a été introduite en HONGRIE par KAZINZY (1914) qui arrive à la conclusion que la ruine ne se produisait pas avant que suffisamment de sections ne se soient plastifiées pour former un mécanisme de ruine (poutre bi-encastree), la même notion a été introduite en HOLLANDE par KIST (1917)

A partir des années vingt du vingtième siècle, la théorie de la plasticité s'est développée dans plusieurs pays, en particulier en ALLEMAGNE par MAIER – LEIBNITZ (1927), à la même époque on enregistre les premières recherches expérimentales réalisées sur des portiques, BAKER et RODERICK (entre 1936 et 1939) et la publication de

certaines principes théorique de calcul plastique, VAN DEN BROCK (1940).

D'autres travaux importants furent réalisés par des auteurs bien connus BACKER, HILL, HORN, HEYMAN, FOULKES et NEAL en GRANDE BRETAGNE. Il faut noter également les théorèmes fondamentaux en plasticité énoncés par GVOZDEC en URSS (1952). Cependant le développement rapide des techniques d'analyse moderne et la haute expédition digitale des ordinateurs ont doté les chercheurs d'un puissant outil pour une analyse élastoplastique complète des structures.

A partir des années soixante dix du siècle en cours des programmes de calcul par ordinateur pour l'analyse et le dimensionnement plastique des ont été établis par BROZZETTI et LESCOURIH (FRANCE).

Jusqu'à maintenant ou dans un passé récent la vérification des éléments structurels basée sur une charge linéaire élastique est utilisée dans la plupart des cas des principes de la R.D.M

Pour des éléments structuraux complexes tels que les poutres cloisons, les plaques, on ne disposait que de quelques. Il fallait donc recourir aux essais expérimentaux qui s'aboutissaient sur des formules empiriques. Une telle analyse ne fournit aucune indication sur la marge de la sécurité. La réponse ainsi obtenue et en particulier les déplacements les déformations sont loin de la réalité.

Dans notre cas, on s'intéresse à une analyse non-linéaire qui nous permet de mieux estimer la marge de sécurité des éléments structurels. Il s'agit de la vérification d'une section aux états limites ultimes.

L'apparition de la MEF dans les années 50 a permis les solutions des structures complexes en considérant les matériaux élastiques linéaires, mais particulièrement pour le B.A la validité de la linéarité est très limitée, ne couvrèrent même pas les charges de services à cause surtout de la fissuration et d'une façon secondaire du comportement du béton en compression. Par conséquent même sous faibles charges les

déformations obtenues sont loin de la réalité, dans ce cas sous un chargement élevé au voisinage de la capacité portante de la structure, la réponse recherchée ne peut être obtenue que par la méthode d'éléments finis qui prend en compte des phénomènes non linéaires.

L'utilisation de la M.E.F pour l'analyse des structures en B.A a été introduite pour la première fois par NGO et SCORDELIS en 1967. Durant ces dernières années, la M.E.F a connu une grande application dans l'analyse des structures, particulièrement dans la repense du comportement non linéaire de ces structures.

Le succès de l'application de la M.E.F au B.A est lié de près au développement de l'information quantitative et qualitative sur le comportement charge – déformation du béton. La formulation des relations charge-déformations est nécessaire dans la technique analytique. La M.E.F est la méthode la plus efficace pour reproduire le comportement complexe des structures.

Les éléments finis utilisés sont d'éléments isoparamétriques à 4,8,9 nœuds, qui sont des éléments généralement complexes et courbés et possède un ordre de réponse élevé. Leur avantages principaux, c'est qu'on utilise la même fonction forme pour approximer à la fois des éléments limites et la variation sur l'éléments, les fonctions de formes communément utilisées sont les formes linéaire, paraboliques et cubiques.

Les méthodes utilisées aux solutions non linéaires sont : la méthode de rigidité initiale, la méthode de Newton Raphson et de Newton Raphson modifiée. La méthode la plus adoptée à la solution non linéaire est celle de N.R.M en utilisant une succession d'approximations linéaires des lois constitutives et des conditions d'équilibre et de comptabilité sont satisfaites avec une erreur admissible.

L'essentiel de la technique est qu'à n'importe quelle itération, le système de forces nodales équivalent au niveau de la contrainte totale évaluée est comparé avec le système de chargement appliqué, la différence des deux résultats représentent les forces résiduelles qui peut être interprété et mesuré comme un manque d'équilibre. On assure l'équilibre du résidu appliqué à la structure et le problème est

résolu. Ce processus est répété jusqu'à ce que le résidu soit suffisamment petit.

1.2 PRESENTATION DE LA THESE

cette thèse comporte sept chapitres :

- Le chapitre 1 : Donne une description générale du problème et des objectifs de l'étude.
- Le chapitre 2 : Est consacré à la présentation de l'élastoplasticité classique et moderne.
- Le chapitre 3 : Présente la modélisation des structures par éléments finis isoparamétriques.
- Le chapitre 4 : Décrit les méthodes d'analyses non linéaires, ainsi que la technique utilisée dans cette étude et la description des critères de rupture pour l'analyse élastoplastique.
- Le chapitre 5 : Description des différentes étapes de la structure du programme élaboré et sa validation.
- Le chapitre 6 : Sont présentés et discutés les résultats obtenus en d'autres termes l'expérimentation numérique par l'utilisation du programme élaboré.
- Le chapitre 7 : Conclusion et recommandation pour des travaux de futurs.

ELASTO-PLASTICITE

2.1 ELASTO-PLASTICITE CLASSIQUE

2.1.1 INTRODUCTION

La Rhéologie est une branche de la physique qui étudie l'écoulement ou les déformations des corps sous l'effet des contraintes qui leurs sont appliquées, compte tenu de la vitesse d'application de ces contraintes ou plus généralement de leur variation en fonction du temps.

Pourquoi cette science ? Parce que, dans tous les procédés de formage ou de préparation des matériaux, qu'il s'agisse de métallurgie, de fabrication du verre ou du béton, on doit produire un écoulement de la matière et il est nécessaire de connaître les lois de l'écoulement, notamment pour préciser les forces à mettre en jeu. Ajoutons que, même si on ne s'intéresse pas aux déformations (Supposées petites), mais seulement aux contraintes, la rhéologie doit être utilisée, car la mécanique rationnelle à elle seule, ne donne pas le nombre suffisant d'équations. En d'autres termes, La rhéologie est une des bases de la mécanique des milieux continus, dont l'objet est de déterminer les contraintes et déformations en chaque point d'un milieu continu.

Cette étude a été baptisée en 1928 rhéologie (Science de l'écoulement)

La rhéologie comporte d'ailleurs trois sortes d'études :

- Expérimentales : Détermination expérimentale des relations de comportement,
- Structurales : Explication des relations observées à partir de la structure des matériaux,
- Théoriques : Etude des diverses formes possibles pour ces relations du point de vue macroscopique, c'est à dire indépendamment de la structure. En effet, certains principes très généraux limitent le nombre des formes possibles et fournissent le cadre mathématique dans lequel doivent s'inscrire ces relations.

Le comportement plastique est caractérisé par l'existence d'un seuil de contrainte au-dessous duquel il n'y a pas de déformation permanente. Cela

n'exige pas qu'au-dessous du seuil, les déformations soient parfaitement élastiques, mais seulement qu'après décharge, le corps reprennent progressivement, mais intégralement, pourvu qu'on attende assez longtemps, sa forme initiale. L'existence d'un tel seuil qui caractériserait un solide plastique est controversé et nous touchons là la difficulté de la distinction entre fluides et solides.

2.1.2 DEFINITION DE LA PLASTICITE

La plasticité est la propriété qu'ont certains corps de subir de grandes déformations sans se rompre. Les déformations plastiques apparaissent lorsque les contraintes dépassent un certain seuil dit limite d'écoulement ou seuil de plasticité.

En théorie de plasticité, du point de vue comportement (vitesse de déformation) le temps physique n'intervient pas

2.1.3 ORIGINE DE LA DEFORMATION PLASTIQUE

Le solide est un assemblage de grains cristallins. La déformation plastique est due soit :

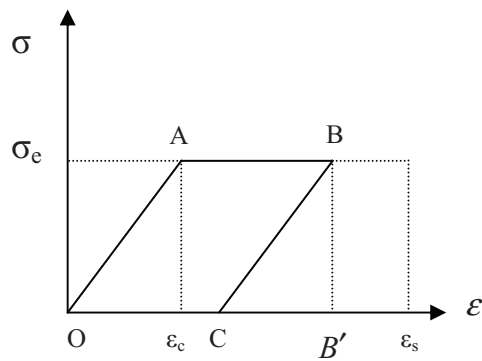
- Aux mouvements relatifs des grains (cas des terres), le frottement entre les grains explique l'irréversibilité des mouvements

- Aux déformations permanentes des grains : C'est le cas des métaux et des roches, du moins à la température ordinaire. Les déformations des grains sont dues principalement à des glissements dans une direction de rangée atomique suivant des plans parallèles du réseau cristallin. Le glissement résulte de la propagation d'un défaut (Dislocation) dans l'arrangement régulier du réseau (Glissement progressif).

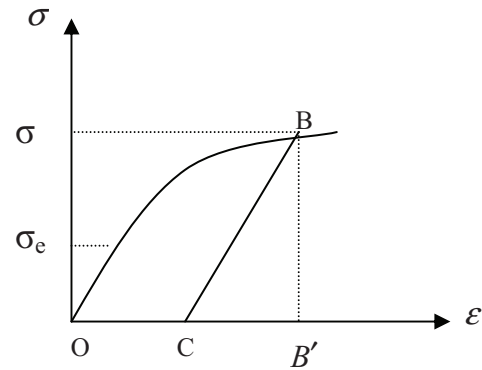
Pour les cristaux métalliques, la résistance au glissement ne dépend pratiquement pas de la contrainte normale au plan de glissement.

2.1.4 ESSAI DE TRACTION COMPRESSION

Lorsqu'on effectue un essai de traction avec plastification suivi d'un déchargement, le diagramme contrainte- déformation est comme indiqué aux figures ci-dessous pour respectivement l'acier doux et l'acier à haute résistance.



Graphe 2.1 : Acier doux



Graphe 2.2 : Acier à haute résistance

Dans les deux cas le comportement est réversible, donc élastique le long de OA mais aussi le long de BC, parallèle à OA.

Pour les deux aciers, au point B la déformation élastique est égale à la longueur du segment CB'. Cette partie réversible de la déformation s'annule en C lorsque la contrainte reprend la valeur zéro. La déformation plastique ne varie pas entre B et C et est égale à la longueur du segment OC.

En tout point du trajet OABC, la déformation totale est la somme de la déformation plastique et élastique.

$$OB' = OC + CB'$$

Lorsqu'on fait suivre le déchargement d'une compression, le diagramme est comme indiqué à la figure pour l'acier doux

Si la contrainte en compression

$$\sigma_{ec} = -\sigma_{et}, \text{ on dira que l'érouissage a été isotrope}$$

Si la contrainte en compression $\sigma_{ec} \neq -\sigma_{et}$ on dira qu'il y a «effet Baushinger». C'est un cas fréquent. Malgré cela la théorie de la plasticité s'est surtout développée dans le formalisme de l'érouissage isotrope.

2.1.4. A EFFET BAUSHINGER

L'érouissage est en général orienté. C'est pourquoi par suite de déformation plastique, le matériau acquiert ce que l'on appelle anisotropie de déformation. Une des manifestations de ce phénomène est l'effet Bauschinger qui consiste en ce que la déformation plastique préalable d'un signe diminue la résistance du matériau par rapport à la déformation plastique suivante du signe opposé

2.1.4.B ECROUISSAGE

En général la limite d'écoulement augmente avec la déformation plastique (Passage de A à B) : On dit qu'il y a écrouissage ou durcissement.

La déformation plastique commence dans les cristaux les plus favorablement orientés, elle se poursuit ensuite, mais plus difficilement, dans les autres. ;

Les dislocations sont bloquées aux frontières des grains.

Dans un sens plus général, le mot écrouissage désigne l'ensemble des modifications subies par les propriétés mécaniques du matériau par suite de déformation plastique

Deux d'entre elles sont importantes :

Une matière initialement isotrope devient anisotrope par suite de déformations qui deviennent importantes

Si la limite d'écoulement (Seuil de plasticité) se trouve augmentée pour une charge de même sens que celle qui a produit les déformations (Passage de σ_{ei} à σ_{ea}), en revanche, elle est en général diminuée en valeur pour une charge de sens opposé (Passage de σ_{ea} à σ_{ei}).

Ce phénomène est appelé effet Baushinger, qui est souvent important pour les petites déformations plastiques et s'atténue pour les grandes déformations.

2.1.5 MODELES UTILISES

On utilise souvent en pratique des modèles simplifiés

Le modèle élastique parfaitement plastique (sans écrouissage)

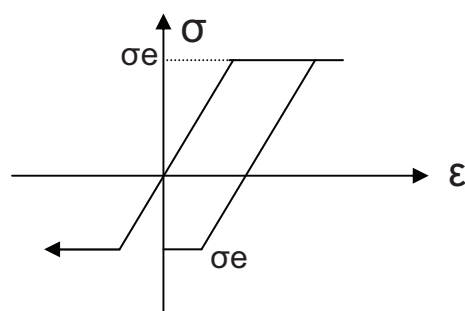


Figure 2.3

Dans lequel, les déformations augmentent beaucoup plus rapidement en fonction de la charge dans la phase plastique que dans la phase élastique

Le modèle rigide parfaitement plastique : Dans lequel, les déformations élastiques sont négligées vis- a- vis des déformations plastiques.

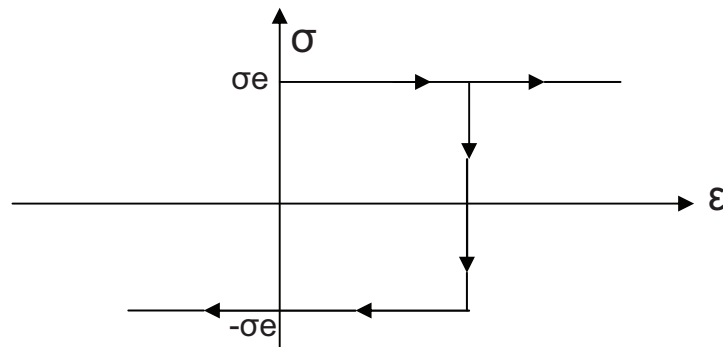


Figure 2.4

2.1.6 MODELISATION

Le comportement réel est modélisé soit par la courbe élasto-plastique parfaite sans effet Bauschinger (figure 2.5a) ou la courbe élasto-plastique avec un écrouissage (linéaire ou non) et donc un module élasto-plastique tangent E^{ep} (constant ou non , figure 2.5b) Ce dernier cas est général car pouvant représenter l'élasto-plasticité parfaite ($E^{ep} = 0$) , le durcissement ($E^{ep} > 0$) et l'adoucissement ($E^{ep} < 0$)

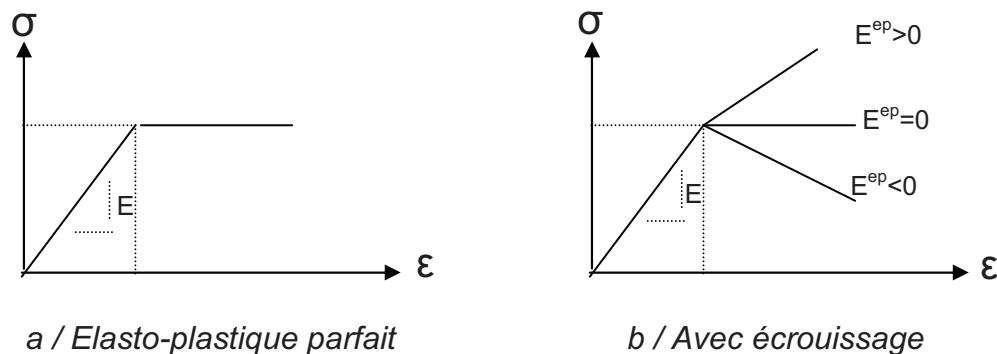
a / *Elasto-plastique parfait*b / *Avec écrouissage*

Figure 2.5 : Modélisation du comportement élastoplastique

L'écrouissage signifie que les déformations sont élastiques et plastiques à la fois. Dans le cas uniaxial, l'élasto-plasticité parfaite signifie qu'au delà de la limite élastique, le comportement réversible cesse et les déformations sont purement plastiques. Dans le cas multiaxial le problème est plus complexe car les vecteurs déformations et les contraintes ont six composantes chacun. En général après plastification le comportement est élastique et plastique à la fois.

Si l'écrouissage est positif la variation des contraintes sont élastiques et plastiques à la fois.

La plasticité est une extension logique de l'élasticité et le critère de limite élastique constitue la condition de plastification. Dans la théorie de l'élasto-plasticité les déformations sont indépendantes du temps.

2.1.7 METHODES DES ROTULES PLASTIQUES

Avant de présenter la théorie générale de l'élasto-plasticité, il est utile de rappeler la méthode des rotules plastiques pour son intérêt et sa simplicité. On suppose un comportement élasto-plastique parfait sans aucune dépendance de l'histoire de chargement. Avec l'hypothèse confirmée par l'expérience de planéité des déformations, les contraintes dans une section fléchie seront élastiques d'abord avant de se plastifier partiellement puis totalement (figure 2.6).

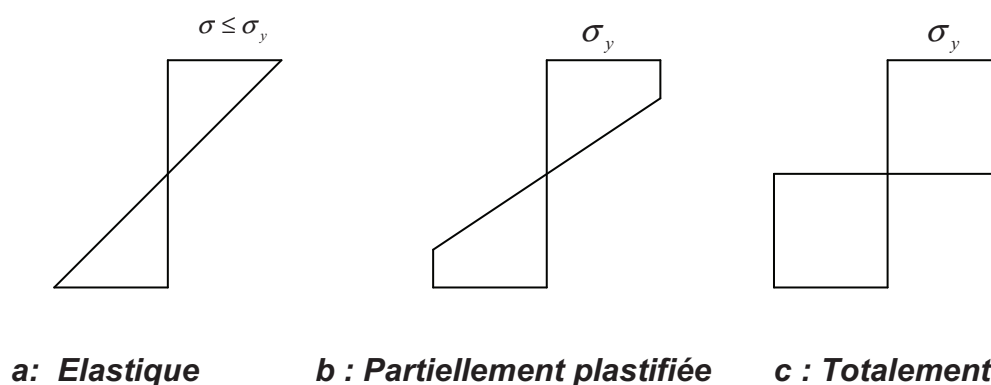


FIGURE 2.6 : Contrainte dans une section fléchie

Le moment plastique interne M_p développé par la section est supérieure au moment élastique M_e .

$$M_p = w M_e \quad (2.1)$$

Pour une section rectangulaire de section $b.h$

$$M_p = b \sigma_y h^2 / 4 \quad (2.2)$$

La section une fois plastifiée ne peut plus reprendre des moments supplémentaires et se comporte ultérieurement comme une rotule. Cette notion de rotule plastique a été très utilisée pour le calcul de la charge de ruine des structures en utilisant le théorème des travaux virtuels. Cependant

la technique la plus intéressante est celle qui consiste à suivre pas à pas la formation des rotules par des analyses élastiques successives. La charge de ruine dans une structure N fois hyperstatique sera atteinte quand se développera un mécanisme local ou général (Formation de N + 1 rotules).

Le procédé consiste à effectuer plusieurs analyses linéaires avec un chargement incrémental λF et en changeant à chaque fois la matrice de rigidité de l'élément rotulé (Figure 2.7)

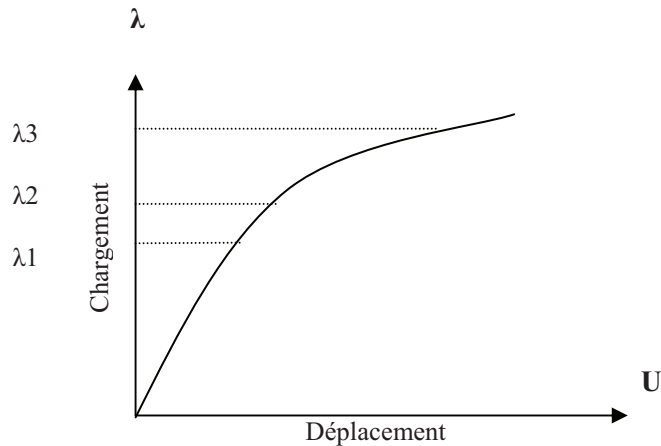
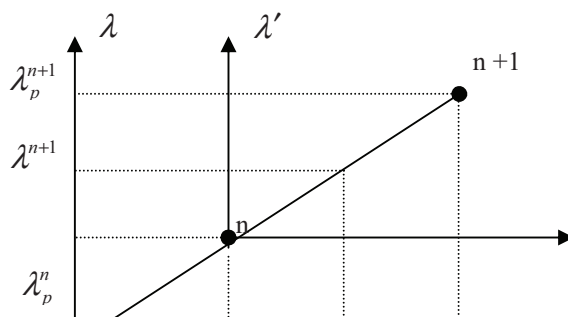


Figure 2.7 Analyse élasto-plastique pas à pas

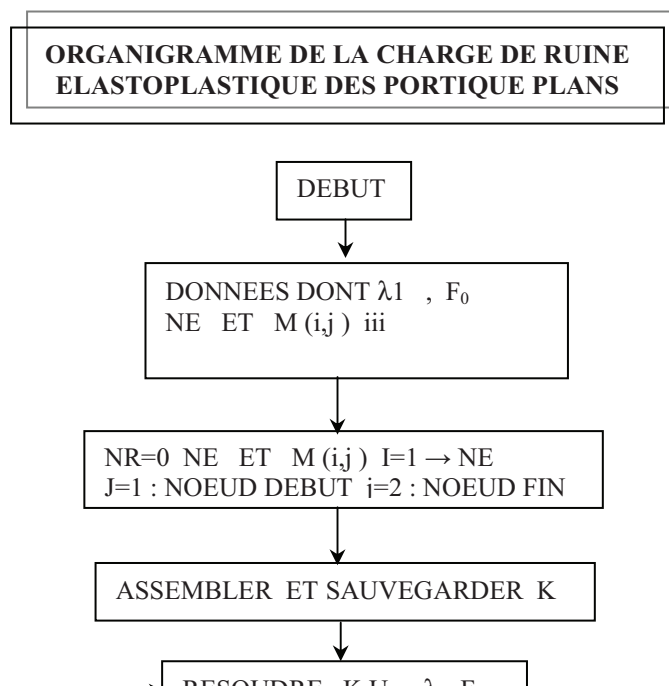
Il y a rotation quand $M = M_p$. Grâce à la linéarité du comportement entre deux rotules successives, il est possible de prévoir le point d'apparition de la prochaine rotule et de dimensionner l'incrément de charge de manière à tirer directement sur la rotule (figure 2.8).

La rotule apparaîtra dans le point (I,j) (extrémité $j=1$ ou $j=2$ de l'élément I) ou le rapport $\frac{M_{(i,j)}}{M_{p(i)}}$ est le plus grand.

Il suffit donc après chaque rotule n d'appliquer un incrément λ_i^{n+1} quelconque et de calculer par interpolation (ou extrapolation) le facteur de charge λ_p qui provoquera la rotule n+1.



L'organigramme de la méthode est exposé ci-dessous



Les moments plastiques $M_p(l)$ sont donnés pour chaque element l , les rapports M'/M'_p ne sont calculés que dans les points non rotulés. Cette technique est un cas particulier des méthodes de NEWTON-RAPHSON (Actualisation de la rigidité tangente après chaque rotulation). Les itérations

pour assurer l'équilibre ne sont pas nécessaires ici car le comportement entre deux rotules successives est linéaire et la taille des incréments est optimisée. La correction de la matrice de rigidité se fait en retranchant de la matrice précédemment assemblée et sauvegardée la rigidité de l'élément rotulé en le remplaçant par la nouvelle rigidité de cet élément. Il est possible d'utiliser un algorithme évitant les actualisations répétées de K (Méthode de transfert des contraintes ou contraintes initiales) mais l'optimisation des incréments et itérations ne serait plus possible. La charge de ruine est atteinte quand la rigidité de la structure est singulière.

Cet algorithme permet non seulement de déterminer la charge de ruine comme les méthodes basées sur l'analyse limite mais donne également des informations utiles sur la formation successive des rotules et l'histoire du chemin suivi. Le facteur de charge limite donné par cette méthode peut cependant être légèrement inférieur à la valeur théorique à cause des éventuels problèmes de conditionnement numérique dus à l'utilisation d'une matrice tangente. Une singularité peut donc apparaître avant la formation des $n+1$ rotules. Une application évidente est très intéressante est l'étude de la vulnérabilité de structures existantes, en détectant les points faibles, lieux de formations des premières rotules, afin de prévoir de renforcements éventuels. Le contrôle des déformations peut être effectué et les éventuelles ruptures par manque de ductilité peuvent ainsi être détectées alors que les méthodes d'analyse limite supposent que l'écoulement plastique est illimité.

Si on surdimensionne les poutres, on oriente l'apparition des rotules dans les poteaux qui ont un comportement fragile et dont les ruptures peuvent être fatales (notamment dans les structures en béton armé)

Si des charges réparties sont présentes, leur transformations en forces nodales équivalentes doit être refaite après chaque rotule mais la rotulation en travée ne peut être fatales (notamment dans les structures en béton armé)

Il y a lieu de rappeler néanmoins les limitations de cette méthode :

- 1- / Elle n'est applicable que pour les structures composées d'éléments poutres (portiques) soumis à des chargements monotones.

- 2- La plastification est supposée totale et concentrée aux niveaux des sections des nœuds sans s'étaler aux sections voisines.
- 3- Les effets de l'effort normal N et l'effort tranchant T sur le moment plastique sont négligés. L'effet de N en flexion composé est facile à ajouter (car causant des contraintes normales comme le moment). L'effet de T sur la flexion est pris en compte à travers le coefficient α mais son effet sur la plastification ne peut être inclus qu'avec des critères bi-axiaux de plastification.
- 4- Les chargements cycliques sont ignorés ainsi que l'érouissage. L'effet Bauschinger et les éventuels retours élastiques ne sont pas considérés.

2.1.8 LOIS DE LA DEFORMATION PLASTIQUE

Il n'y a pas de relation entre la déformation permanente totale (à partir de l'état neutre ou sans contrainte) et l'état de contrainte actuel. Supposons qu'on décharge une éprouvette de traction sur laquelle on a dépassé le seuil de plasticité, puis qu'on la recharge en torsion jusqu'à la limite d'écoulement nouvelle : on modifie complètement l'état de contrainte sans que change la déformation permanente.

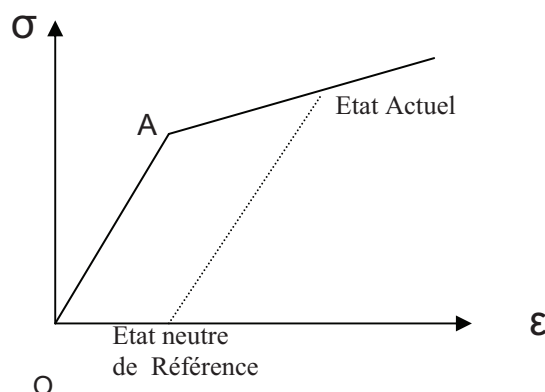


Figure 2.9

La déformation actuelle dépend essentiellement de l'histoire du chargement

(de l'ordre de succession des états de contraintes) ou plutôt du trajet de chargement, trajet suivi par le point $M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ entre l'état initial et l'état final

2.1.9 PRINCIPE DE TRAVAIL PLASTIQUE MAXIMAL. (R.HILL 1947)

Dans la déformation plastique réelle le travail des contraintes réelles est supérieur ou égal, à celui de tout autre tenseur de contrainte admissible (tel que $f(\sigma_{ij}^*) \leq 0$)

2.1.10 MECANISME DE RUINE

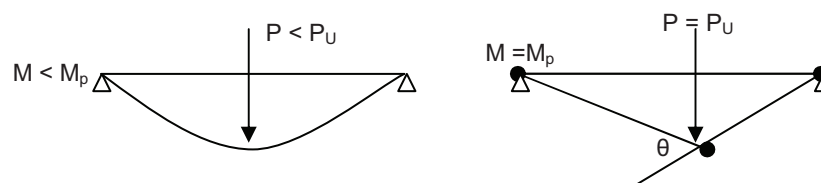
Un mécanisme est un ensemble de barres reliées par des rotules et formant un système déformable à un degré de liberté.

Ce système est statiquement instable, il s'effondre sous une charge constante. Cette charge (ou combinaison de charges) est la charge ultime de la structure.

2.1.11 ROTULE PLASTIQUE

Lorsque le moment dans une section d'une poutre atteint le moment plastique M_p , la courbure tend localement vers l'infini, la section se comporte comme une rotule plastique et permet une rotation relative des deux segments de poutre, par exemple, adjacents.

Il ne s'agit cependant pas d'une rotule au sens habituel du terme (rotule mécanique sans frottement) puisqu'elle continue à transmettre le moment plastique M_p : On parle d'une rotule plastique



Donc le fait d'ajouter une rotule à une structure diminue son degré d'hyperstaticité d'une unité.

La poutre statique de la figure ci-dessus se transforme en une structure statiquement instable lorsque la rotule plastique se forme : on dit qu'elle constitue un mécanisme

2.1.12 FORMATION D'UN MECANISME

Théoriquement, il existe une infinité de façons de placer des rotules pour transformer une structure stable en un mécanisme. Cependant, pour une combinaison de charge donnée, la ruine d'une structure se fera par la formation d'un mécanisme unique et bien précis.

2.1.13 SECTIONS POTENTIELLEMENT CRITIQUES

Pour le calcul de la charge limite d'une structure, le mécanisme réel est inconnu à priori et que l'on est obligé de faire un inventaire de mécanismes plausibles. Pour ce faire, nous serons amenés à rechercher les positions de formations possibles de rotules plastiques. Ce sont les sections où M/M_p peut présenter un extremum c'est à dire :

- 1-) Les points d'applications des charges concentrées
- 2-) Le points de cisaillements nul pour les barres soumises à des charges réparties
- 3-) Aux angles de cadres et aux intersections de plusieurs barres.
- 4-) A l'intersection de deux barres de moments plastiques différents
(Changement de section)

2.1.14 NOTIONS DE MECANISMES INDEPENDANTS

Le nombre de mécanismes possibles croit rapidement lorsque le nombre de sections potentiellement critiques augmente et il devient très difficile de relever tous ces mécanismes, sans risquer d'en émettre.

Il existe plusieurs systèmes de mécanismes indépendants dans une structure. Chaque système comprend $(n - h)$ mécanismes (n : nombre de section potentiellement critique et h : degré d'hyperstaticité de la structure)

On peut distinguer quatre types de mécanismes

1) Mécanisme de poutre

2) Mécanisme de panneau : déformation latérale parallélepédique d'un cadre

3) Mécanisme de portique : Affaissement et déformation latérale d'un cadre à deux versants.

4) Mécanisme de nœud : Rotation d'un nœud à trois branches ou plus.

2.1.15 DETERMINATION DU NOMBRE DE MECANISMES INDEPENDANTS

Il existe une relation entre le degré d'hyperstaticité h de la structure, le nombre de rotules plastiques possibles (Sections potentiellement critiques) n , et le nombre de mécanismes indépendants m

$$m = n - h \quad (2.3)$$

Le nombre de mécanismes combinés m_c est donné par le nombre de permutations possibles de mécanismes indépendants.

$$m_c = (2^m - 1) - m \quad (2.4)$$

(Remarque : Pendant l'opération de combinaison de mécanisme indépendant, pour trouver le mécanisme le plus défavorable (Mécanisme de ruine), il faut essayer de maximiser le travail extérieur W_e , tout en minimisant le travail intérieur W_i .

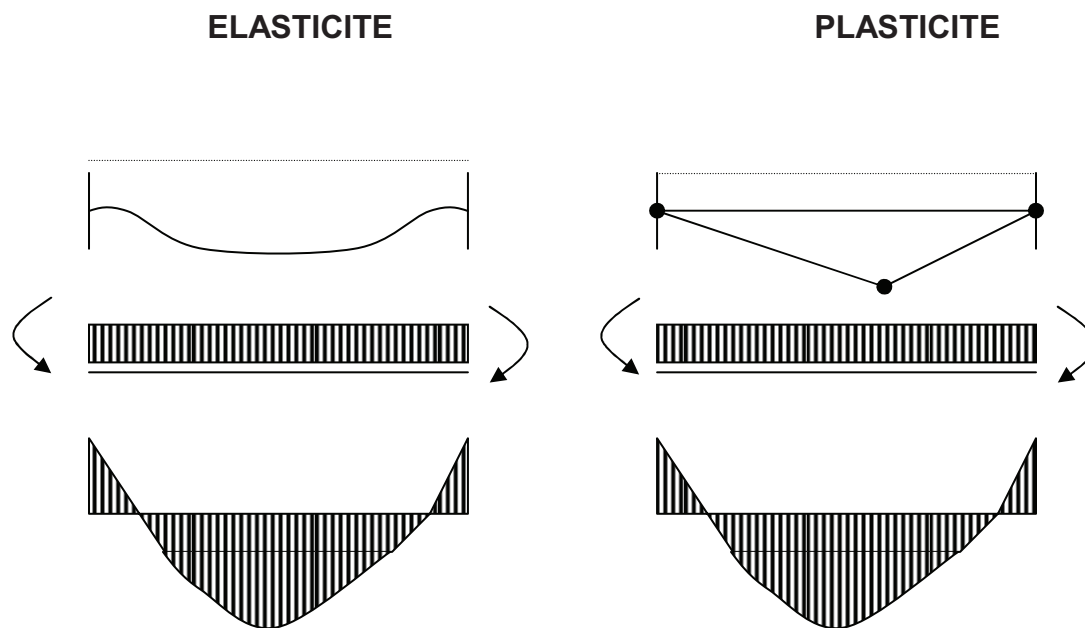
Pratiquement ceci s'obtient en faisant disparaître des rotules plastiques. Par exemples, deux rotations égales mais de sens opposées se compensent.

2.1.16 CALCUL A LA LIMITE – BASES THEORIQUES

Une structure calculée classiquement doit satisfaire à trois conditions :

- 1-) Compatibilité et continuité : La déformée de la structure doit être compatible avec les conditions d'appuis et elle ne doit présenter aucune discontinuité.
- 2-) Equilibre : Toutes les forces extérieures appliquées au système doivent s'équilibrer.
- 3-) Résistance : Les efforts intérieurs doivent être en tout point inférieurs à la résistance ultime.

En calcul plastique : Les deux dernières conditions restent les mêmes, mais la première est remplacée par la condition du mécanisme. Un nombre suffisant de rotules doivent se former pour que la structure puisse se transformer en un mécanisme.



2.1.17 METHODE STATIQUE

Pour calculer la charge ultime d'une structure, on est obligé de partir de deux des conditions énoncées précédemment, et de satisfaire la troisième par tâtonnement. Le but est de trouver un diagramme des moments statiquement admissible (On entend par diagramme des moments statiquement admissible un diagramme permettant d'équilibrer les forces extérieures appliquées à la structure tout en respectant la condition de résistance $M \leq M_p$, mais sans considérer la condition de compatibilité. Il existe une infinité de diagrammes possibles) qui transforme la structure en un mécanisme.

Pour cela, on procédera comme suit :

- 1-) Rendre la structure isostatique
- 2-) Tracer le diagramme des moments de la structure fondamentale isostatique chargée par les charges effectives.
- 3-) Tracer le diagramme des moments pour chaque grandeur hyperstatique (dont la valeur est encore inconnue)
- 4-) Combiner ces diagrammes des moments de telle façon à atteindre mais à ne pas dépasser, la valeur M_p le plus souvent possible.
- 5-) Soit déduire la valeur de la charge P_u en fonction de M_p dans le cas de l'analyse d'une structure, soit déterminer M_p nécessaire pour les charges données, si l'on effectue un dimensionnement.

6-) Vérifier que la structure sera transformée en un mécanisme, cette dernière vérification ne doit pas obligatoirement être effectuée à la fin, avec l'habitude elle peut être faite simultanément au point.

2.1.18 METHODE CINEMATIQUE :

La méthode cinématique de détermination de la charge limite consiste à envisager successivement tous les mécanismes de ruine possible. D'après le théorème cinématique, la véritable charge limite est la plus petite des charges trouvées. Nous pouvons appliquer le principe des travaux virtuels à un mécanisme qui se déforme sous charge constante.

Pour l'ensemble de la structure, l'équation s'écrit :

$$\sum_{j=1}^n \lambda P_{uj} \delta_j = \sum_{i=1}^m M_{pi} |\theta_i| \quad (2.5)$$

Cette équation est fondée sur les hypothèses suivantes :

- Les rotules sont ponctuelles de longueur négligeable elles ont un comportement élastique plastique idéalisé
- Une fois le mécanisme formé, seules les rotules plastiques fournissent un travail intérieur.
- Le travail fourni par l'effort normal et l'effort tranchant est négligé
- Les déplacements virtuels et angles de rotation des rotules sont infiniment faibles.

2.1.19 METHODE DES CENTRES INSTANTANES DE ROTATION

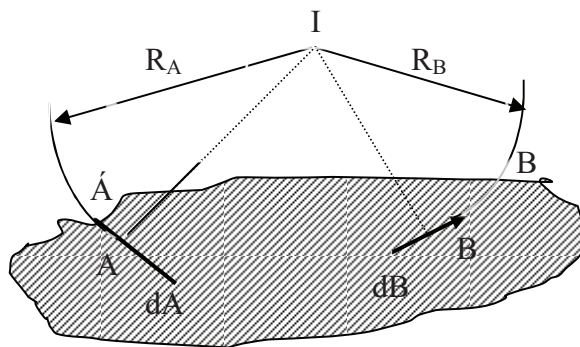
La méthode du centre instantané de rotation est utile pour déterminer les angles de rotation des barres et des rotules de certains mécanismes, notamment pour des portiques retroussés, dont le cinématique du mécanisme de ruine est plus complexe.

On considère une pièce rigide, figure ci-dessous, AB qui possède un degré de liberté dans son plan le point A se déplace sur la droite dA et le point b sur la droite dB, si l'on donne à la pièce un très petit déplacement, ce déplacement peut toujours être considéré comme une rotation autour d'un

certain point I du plan, il s'agit de trouver ce point qu'on appelle centre instantané de rotation

Supposons ce point trouvé, si nous donnons à la pièce une très petite rotation A et B viennent respectivement en A' et B' sur les arcs de cercle décrit de I comme centre avec AI et BI respectivement.

Ces tronçons doivent coïncider avec les droites dA et dB respectivement, d'où l'on voit que le centre instantané de rotation s'obtient en menant par A(B) la normale à dA (dB) et en cherchant leur point d'intersection.



2.1.20 METHODE MANUELLE PAR COMBINAISON DE MECANISME

Principe de la méthode

- 1 -) Relever les emplacements des sections potentiellement critiques
- 2 -) Choisir $(n - h)$ mécanismes indépendants et pour chacun calculer λ^k
- 3-) Rechercher par tâtonnement le mécanisme combiné qui donne la plus petite valeur de λ_k
- 4-) Lorsqu'on pense avoir ce mécanisme, vérifier si l'on peut trouver un système de moments fléchissants :

- En équilibre sous les charges $\lambda_k P_j$

- Et tel que $|M_i| \leq M_{pi} \quad (i=1, \dots, n) \quad (2.6)$

Lorsque la condition N°4 est vérifiée, on a une distribution d'effort statiquement et plastiquement admissible associés à un mécanisme. On peut alors affirmer que le multiplicateur λ correspondant est le multiplicateur ultime λ_r (Théorème combiné)

2.2 ELASTO-PLASTICITE MODERNE

2.2.1 INTRODUCTION ET GENERALITES

La plupart des matériaux structurels ont un comportement initial élastique (réversible, linéaire ou non) mais exhibent au-delà d'un certain stade (appelé limite élastique ou seuil plastique) des déformations irréversibles ou plastiques. Les déformations augmentent avec une petite variation de la résistance qui peut être soit positive (durcissement ou écrouissage positif, figure 2.8a),ou négative (adoucissement ou écrouissage négatif, figure 2.8b).

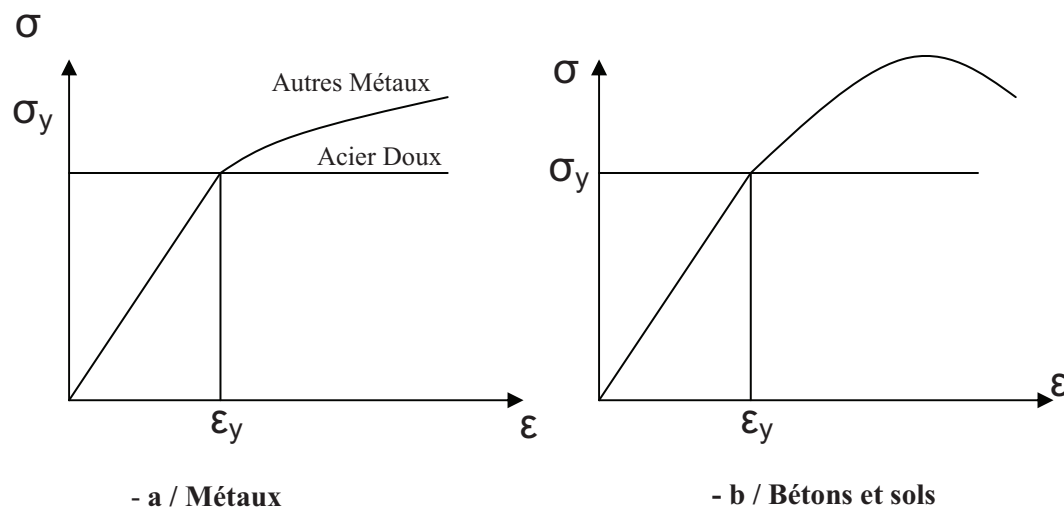


Figure 2.8 : COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE DES MATERIAUX

- Si on décharge complètement la structure après plastification, les déformations diminuent en suivant un chemin parallèle au tronçon élastique (Figure 2.8). Si on recharge à partir du point C. Le comportement sera élastique jusqu'au point B. La limite élastique change donc à cause de l'écrouissage. Le seuil plastique dépend de l'histoire du chargement (Load Path Dependent). σ_y limite élastique initiale et σ_b la limite élastique actuelle. Si on inverse le chargement (figure 2.10), on observe que la limite élastique dans un sens est réduite par la plastification antérieure dans l'autre sens : c'est l'effet Bauschinger, qui

est également lié à l'histoire des contraintes et qui induit donc une anisotropie dans un matériau initialement isotrope.

- Pour l'acier doux dont le comportement est pratiquement élasto-plastique parfait, les phénomènes d'écrouissages et de Bauschinger ne sont pas observés expérimentalement.

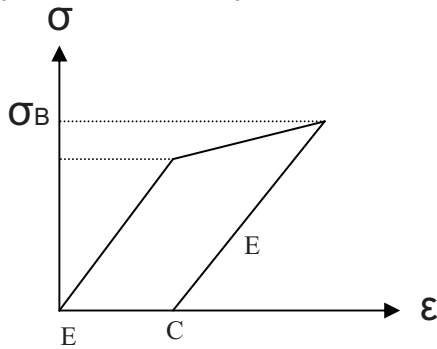


FIGURE 2.9 DECHARGE

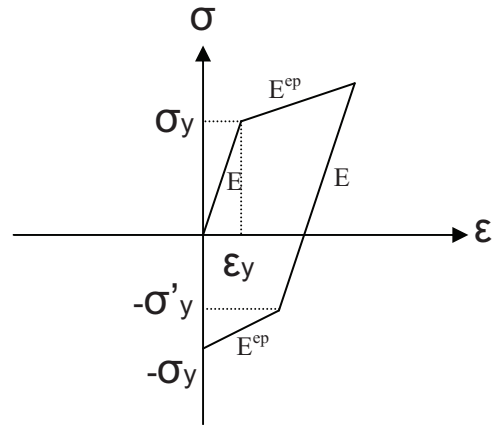


FIGURE 2.10 CHARGE INVERSEE

II.2.2 PLASTICITE UNIDIMENSIONNELLE GENERALE

II.2.2.1 INTRODUCTION

Avant d'exposer la théorie multiaxiale, il est préférable de présenter d'abord l'élasto-plasticité uniaxiale car elle est d'une part plus accessible et facilite la généralisation et d'autre part certaines grandeurs utilisées dans la théorie multiaxiale sont étalonnées sur des résultats expérimentaux uniaxiaux.

Dans un essai uniaxial comme la traction simple seule la contrainte principale $\sigma_1 = \sigma \neq 0$ et $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

$$(2.6)$$

On suppose que la courbe contrainte déformation est connue

Les différents phénomènes observés en pratique (Figure 2.10) sont pris en compte en définissant trois notions importantes :

2.2.2.1.1 CRITERES DE LIMITE ELASTIQUE OU D'ÉPUISEMENT :

Donnant les contraintes au début de l'écoulement plastique

2.2.2.1.2 REGLE D'ÉCROUISSAGE : Décrivant comment évolue la condition (critère) d'épuisement pendant l'écoulement plastique

2.2.2.1.3 REGLE D'ÉCOULEMENT : Liant l'incrément des déformations plastiques aux contraintes.

2.2.2.2 CRITERE D'ÉPUISEMENT

Dans le cas unidimensionnel le critère d'épuisement est quand σ atteint σ_y . On utilise les valeurs absolues pour accommoder la compression ou la traction ou les deux à la fois (charge inversée).

σ_y est la limite élastique initiale et est considérée positive, σ est la contrainte courante comptée algébriquement.

Le critère s'exprime par : $\sigma - \sigma_y = F(\sigma, \sigma_y) = 0$ (2.7)

2.2.2.3 REGLE D'ÉCROUISSAGE

Cette règle doit donner la limite élastique actuelle Y (positive) et décrire l'effet de Bauschinger éventuel . Plusieurs règles d'écrouissage existent. La plus simple est celle qui suppose que les limites élastiques en traction et en compression sont indépendantes. Cette règle est néanmoins en contradiction avec les observations expérimentales. Les écrouissages les plus utilisés sont de nature isotrope, cinématique ou combinée.

2.2.2.3.1 / ÉCROUISSAGE ISOTROPE

On suppose que les conditions d'épuisement sont affectées de la même manière (Figure 2.11) .

Si on décharge et on inverse le chargement à partir du point B, l'écoulement plastique dans l'autre sens commencera à la contrainte $(-\sigma)$. Il y a donc une symétrie par rapport à l'axe $\sigma = 0$. L'origine O est le milieu (centre) fixe du segment entre les points limites mais celui-ci subit une expansion isotrope symétrique (Voir Figure 2.11 b). Dans le cas tridimensionnel c'est une surface couvrant un volume. Cela s'exprime par :

$$F(\sigma, Y) = \sigma - Y = 0 \tag{2.8}$$

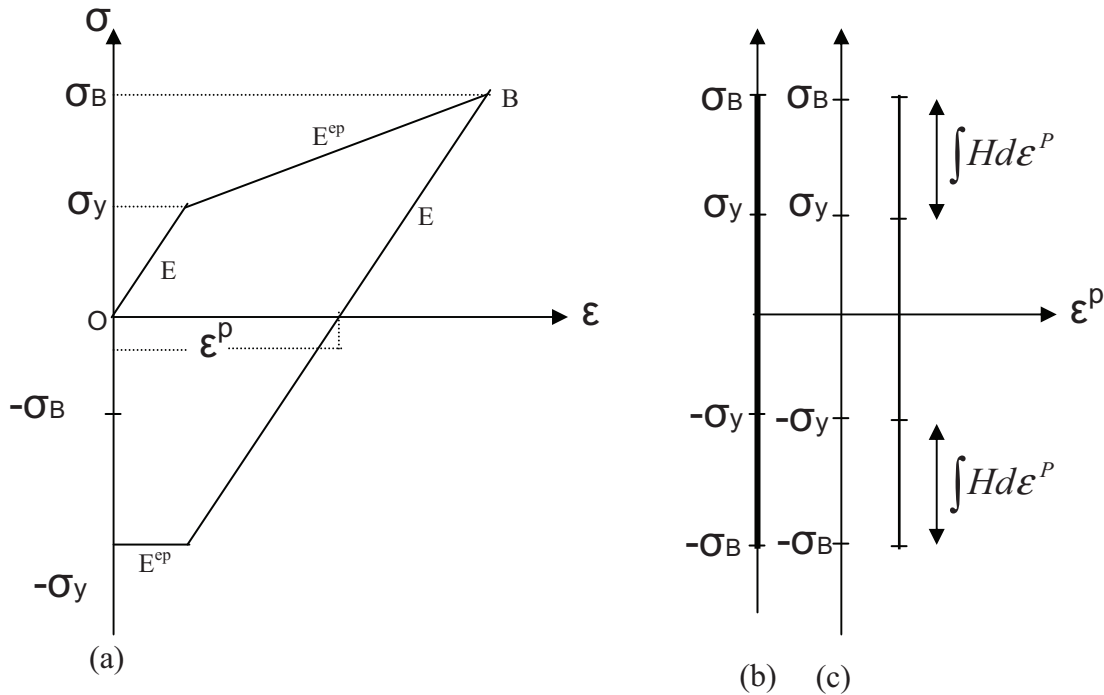


FIGURE 2.11 : ECROUISSAGE ISOTROPE

Y est l'actuel limite élastique toujours positive et dépend de la déformation plastique ϵ^p (Figure 2.11 c)

$$Y = \sigma_y + Hd \epsilon^p \tag{2.9}$$

H est une caractéristique du matériau (module d'écrouissage)

$$\text{Si } H \text{ est constant : } Y = \sigma_y + H \epsilon^p \tag{2.10}$$

$$\text{En élastoplasticité parfaite } Y = \sigma_y = \text{constante et } H = 0 \tag{2.11}$$

2.2.2.3.2 / ECROUISSAGE CINEMATIQUE

Dans ce cas on suppose que la même marge élastique de $2 \sigma_y$ est conservée quand le chargement est inversé (Figure 2.12). Cela signifie que le segment entre les points limites garde la même dimension mais subit une translation et son centre se déplace d'une distance (contrainte) α (Fig 2.12 b et 2.12c)

$$F(\sigma, \alpha, \sigma_y) = F(\sigma - \alpha, \sigma_y) = F(\bar{\sigma}, \sigma_y) = |\bar{\sigma}| - \sigma_y = 0 \tag{2.12}$$

- α est l'ordonnée du centre du segment.

$\bar{\sigma} = \sigma - \alpha$ est appelé contrainte réduite.

La détermination de l'ordonnée α peut se faire avec une des règles d'érouissage cinématique. Celle de Prager donne :

$$D\alpha = b d \epsilon^p \quad (2.13)$$

$$\text{donc } \alpha = b d \epsilon^p \quad (2.14)$$

B est une caractéristique du matériau égale à H si l'érouissage est purement cinématique (figure 2.12c)

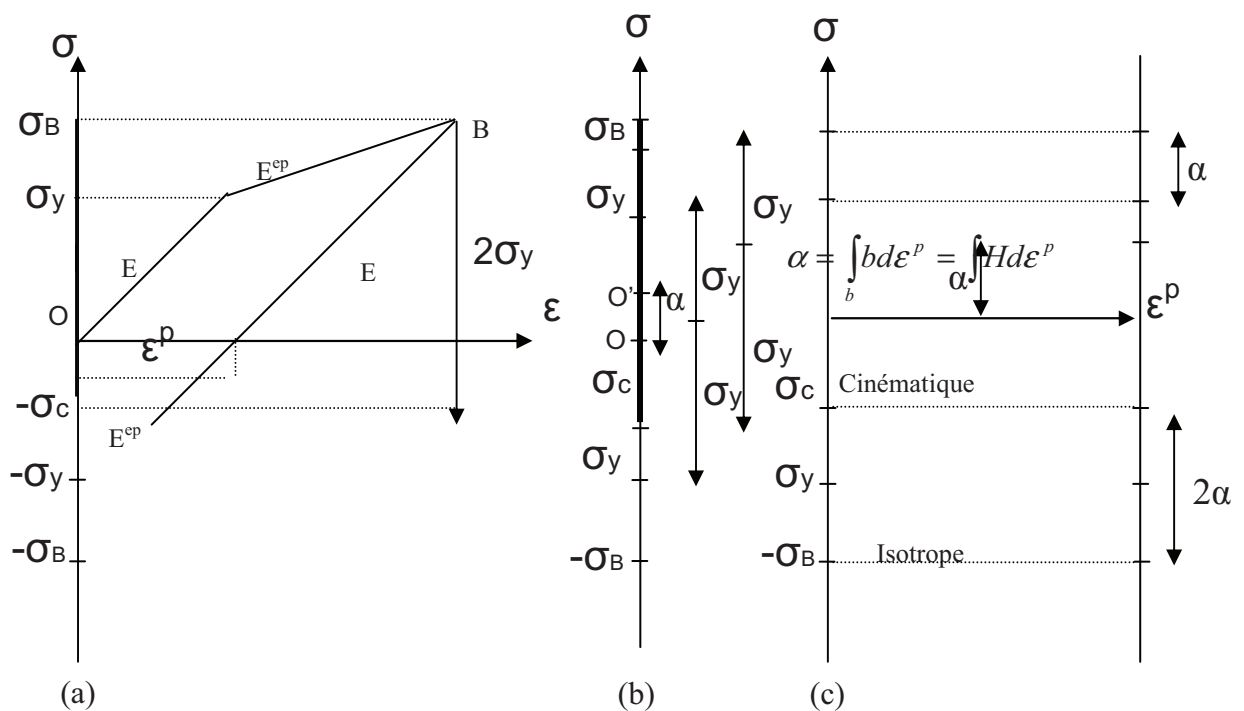


FIGURE 2.12 : EROUISSAGE CINEMATIQUE

2.2.2.3.3 / EROUISSAGE MIXTE

L'érouissage isotrope est adéquat pour un chargement monotone mais ignore complètement l'effet Bauschinger en cas de chargement inversé. Dans l'érouissage cinématique, cet effet est maximal car l'augmentation de la limite élastique par érouissage dans un sens est totalement perdue dans l'autre sens. Cela est en contradiction avec les observations expérimentales.

$$F(\sigma, \alpha, Y) = F(\bar{\sigma}, \bar{Y}) = |\bar{\sigma}| - Y = 0 \quad (2.15)$$

$$- \bar{\sigma} = \sigma - \alpha \quad (2.16)$$

L'incrément des déformations plastiques se décompose en une partie isotrope et une autre cinématique :

$$- d\varepsilon^p = d\varepsilon^{pi} + d\varepsilon^{pc} \quad (2.17)$$

$$\text{Avec } d\varepsilon^{pi} = M d\varepsilon^p \quad (2.18) \quad d\varepsilon^{pc} = (1 - M) d\varepsilon^p \quad (2.19)$$

M est le coefficient de mixité est donc similaire à l'écroûissage isotrope en remplaçant σ par sa valeur réduite $\bar{\sigma}$

Dans ce cas les modules d'écroûissages cinématique et isotrope sont différents :

$$b \neq H$$

2.2.2.3.4 / REGLE DE CHARGEMENT

Avec les règles d'écroûissages précédentes décrivant l'évolution du critère de plastification F, les règles de charge et décharge sont

Si $F < 0$: Domaine élastique

Si $F = 0$: Plastification

Si $F > 0$: Impossible

Quand $F = 0$, il y a chargement si $dF > 0$ et déchargement si $dF < 0$

2.2.2.4 REGLE D'ECOULEMENT

A cause de la dépendance de la réponse de l'histoire du chargement et du problème de non-unicité de la solution qui peut se poser, la loi constitutive élasto-plastique ne peut se formuler que de manière incrémentale. L'incrément total des déformations se compose en général de deux parties : un incrément élastique $d\varepsilon^{e1}$ et un incrément élasto-plastique $d\varepsilon^{ep}$ (figure 2.13). Ce dernier se décompose lui-même en une partie élastique $d\varepsilon^{e2}$ et une partie purement plastique $d\varepsilon^p$

$$-d\varepsilon = d\varepsilon^{e1} + d\varepsilon^{ep} = d\varepsilon^{e1} + d\varepsilon^{e2} + d\varepsilon^p \quad (2.20)$$

Dans le domaine élastique ou en cas de décharge, la composante plastique est nulle, dans le domaine plastique $d\varepsilon^{e1} = 0$.

L'incrément total des contraintes $d\sigma$ est dû aux déformations élastiques seulement (Figure 2.13)

$$-d\sigma = d\sigma^e + d\sigma^{ep} \quad (2.21)$$

La composante élasto-plastique $d\sigma^{ep}$ peut être liée aux déformations élasto-plastiques $d\varepsilon^p$ (figure 2.13 et 2.11c) par :

$$d\sigma^{ep} = E^{ep} d\varepsilon^{ep} \quad (2.22)$$

$$d\sigma^{ep} = H d\varepsilon^p \quad (2.24)$$

E^{ep} est le module tangent et H est le module d'écrouissage. Ils ne sont pas forcément constants.

$$\text{En élasto-plasticité parfaite } E^{ep} = H = 0 \quad (2.25)$$

$$\text{En substituant on trouve : } H = \frac{E^{ep}}{1 - \frac{E^{ep}}{E}} \quad (2.26)$$

$$\text{Et } E^{ep} = E \left[1 - \frac{E}{E + H} \right] \quad (2.27)$$

$$\text{Où } \frac{1}{E^{ep}} = \frac{1}{E} + \frac{1}{H} \quad (2.28)$$

Les modules E^{ep} et H sont liés mais l'utilisation de ce dernier est préférable car il est directement lié à la déformation plastique et sa généralisation aux problèmes multiaxiaux est plus facile.

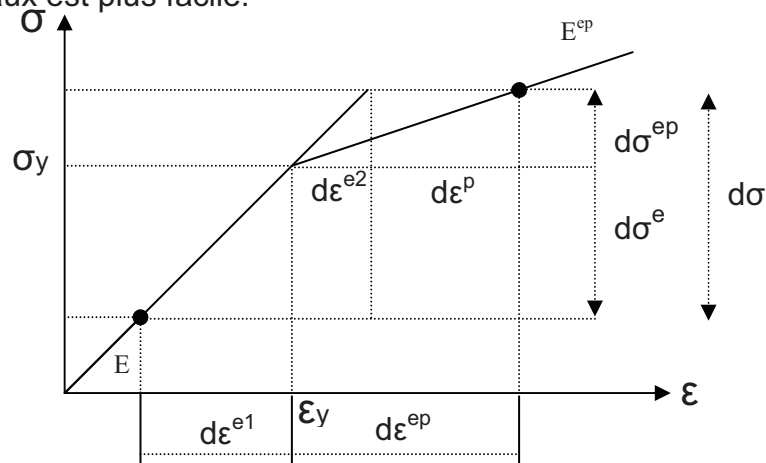


Figure 2.13 : Relations élasto-plastiques

La relation (2.22) est la règle d'écoulement plastique. La relation incrémentale générale est :

$$(2.29) \quad d\sigma = E_t d\varepsilon$$

$$(2.30) \quad \text{En posant } d\varepsilon^{e1} = r d\varepsilon \text{ et } d\varepsilon^{ep} = (1 - r) d\varepsilon \text{ avec } 0 \leq r \leq 1$$

$$(2.31) \quad d\sigma = E d\varepsilon^{e1} + E^{ep} d\varepsilon^{ep} = rE d\varepsilon + (1 - r) E^{ep} d\varepsilon = \{ rE + (1 - r) E^{ep} \} d\varepsilon$$

$$(2.32) \quad \text{Donc } E_t = rE + (1 - r) E^{ep}$$

- La matrice de rigidité tangente K_t d'un élément de treillis plan

$$(2.33) \quad \text{Est } k_t = \frac{E_t A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Après plastification cette matrice devient :

$$(2.34) \quad k^{ep} = \frac{E^{ep} A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \left[1 - \frac{E}{E + H} \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans l'espace la matrice sera 6x6

Le premier terme de (2.33) donne la rigidité élastique .Le second traduit la réduction de rigidité après plastification. En élasto-plasticité parfaite ($H=0$) la rigidité tangente s'annule après plastification et l'utilisation d'un algorithme basé sur la rigidité tangente tel que celui de Newton –Raphson peut poser des problèmes numériques.

2.2.2.5 RESOLUTION NUMERIQUE ET ORGANIGRAMME

La méthode utilisée est incrémentale / itérative avec une rigidité constante ou variable (tangente).

La méthode de la rigidité tangente est plus rapide mais peut poser des problèmes numériques en élasto-plasticités parfaite.

Les relations incrémentales infinitésimales précédentes se réécrivent en fonction des incréments finis $\Delta\varepsilon, \Delta\sigma, \Delta\alpha \dots\dots$

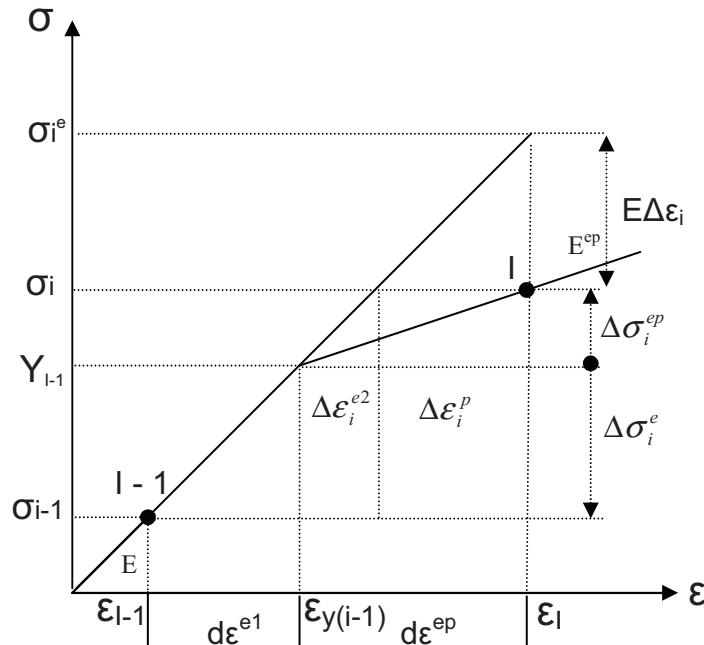


Figure 2.14 : Transition élasto-plastique

- σ_{i-1} et ε_{i-1} : Contrainte et déformation obtenues à l'itération ($i-1$) après convergence

Y_{i-1} et $\varepsilon_{y(i-1)}$: Contrainte et déformation de limite élastique à l'itération ($i-1$)

σ et ε : Contrainte et déformation à l'itération i (inconnue)

σ_{ie} : Contrainte fictive à l'itération i obtenue en supposant un comportement élastique

Entre deux itérations (ou incréments) successives ($i-1$) et i , quatre cas peuvent se présenter selon l'état de contrainte (élastiques ou plastiques) à chacune des deux itérations.

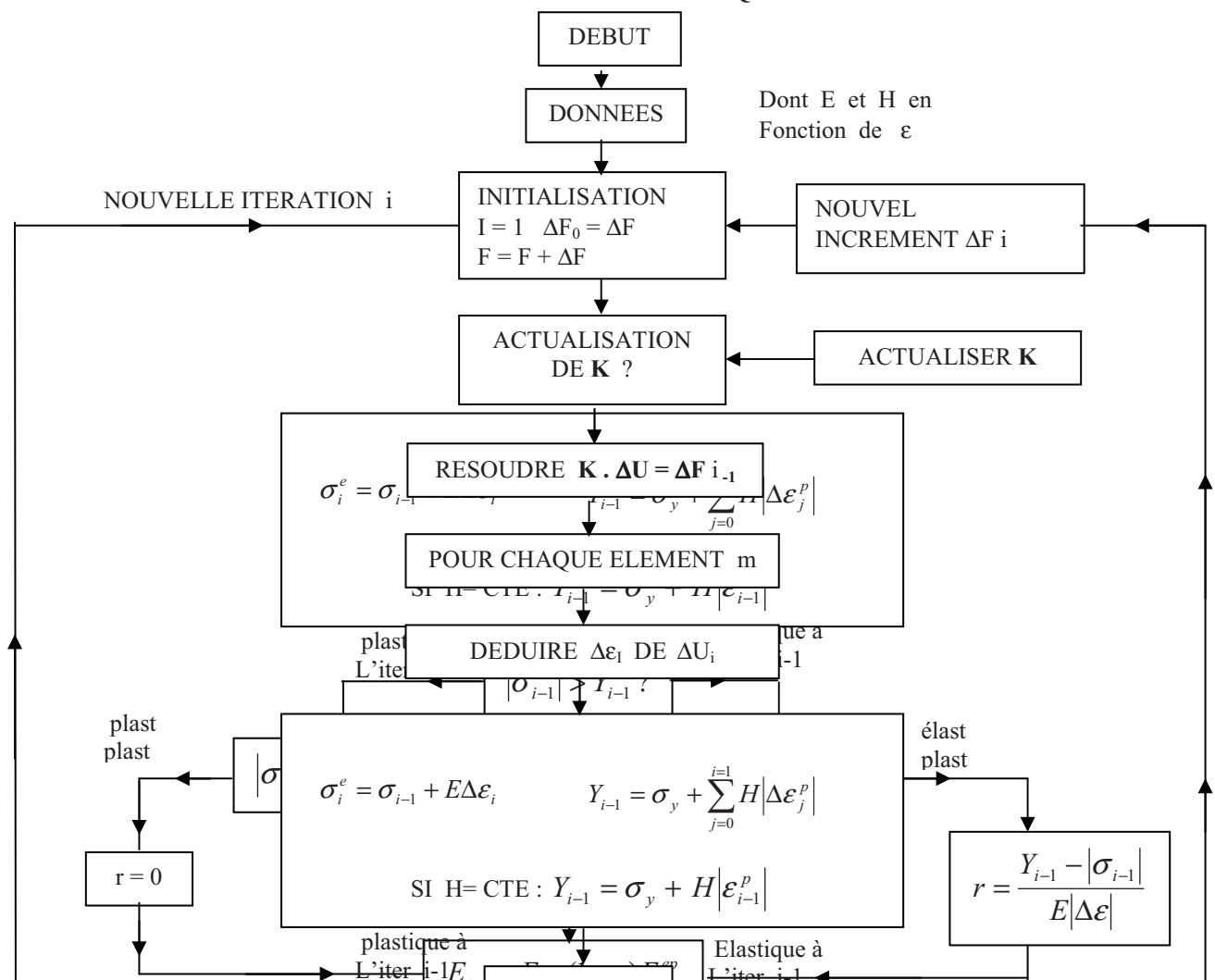
Plastique – Plastique : $E_t = E^{ep}$ ($r = 0$) (2.35)

Plastique - Elastique : $E_t = E$ (décharge) ($r = 1$) (2.36)

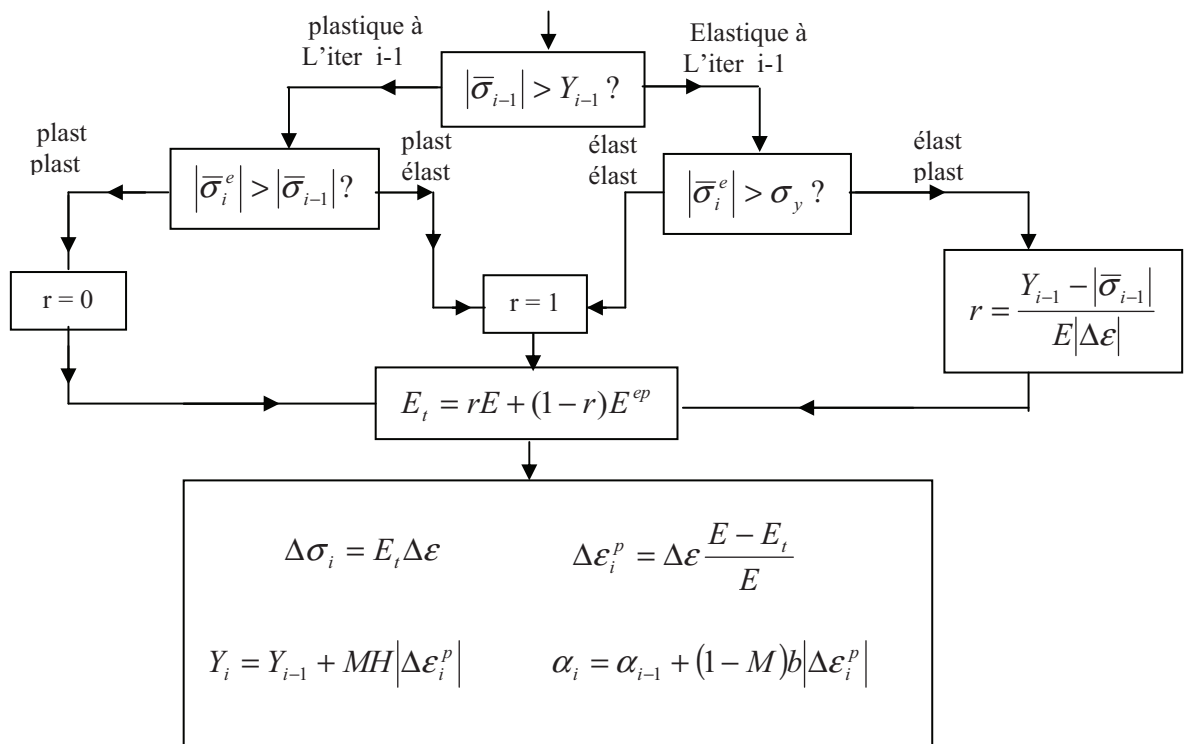
Elastique - Elastique : $E_t = E$ ($r = 1$) (2.37)

Elastique – Plastique : $E_t = rE + (1 - r) E^{ep}$ ($0 < r < 1$) (2.38)

ORGANIGRAMME ELASTO-PLASTIQUE UNIAxiaL



ORGANIGRAMME ELASTO-PLASTIQUE UNIAxiaL



Pour déterminer la valeur de r , il faut effectuer deux tests sur les contraintes aux itérations $(i-1)$ et i .

Les forces résiduelles sont : $F = F - F_i$ (2.39)

La convergence sera atteinte quand les forces résiduelles deviennent inférieures à une certaine tolérance.

Le chargement final peut être la charge de ruine déterminée par un test de singularité sur K ou simplement une valeur imposée. Dans le premier cas il est possible de dimensionner les incréments de manière à provoquer chacun la plastification dans l'élément le plus sollicité.

La singularité de K peut être étudiée par la méthode du déterminant ou celle de la plus petite valeur propre.

2.2.3 THEORIE GENERALE DE LA PLASTICITE MULTIDIMENSIONNELLE

La théorie tridimensionnelle est une généralisation des notions définies précédemment dans le cas uniaxial avec utilisation de grandeurs vectorielles, matricielles et tensorielles.

2.2.3.1 CRITERES DE LIMITE ELASTIQUE ET GRANDEURS EFFECTIVES

Le critère de limite élastique dans un cas multiaxial est fonction de l'état de contrainte σ et d'autres paramètres physiques k liés aux propriétés d'érouissage du matériau.

$$F(\sigma, k) = 0 \quad (2.40)$$

Pour les matériaux isotropes, la fonction de charge dépend des trois contraintes principales

$$- \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \quad (\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3)$$

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, k) = 0 \quad (2.41)$$

La fonction de charge F est en général une combinaison unidimensionnelle des différentes composantes des contraintes. Cette combinaison est appelée contrainte effective se réduisant à la contrainte uniaxiale pour un problème unidimensionnel, ainsi les résultats expérimentaux uniaxiaux serviront à l'étude des problèmes multidimensionnels.

$$F(\sigma) = \sigma_{ef} \quad (2.42)$$

Cette contrainte effective sera comparée à la limite élastique courante Y obtenue pour un essai uniaxial.

Le paramètre d'érouissage k dépend de la déformation plastique effective (il est égal au travail plastique).

$$- dk = \sigma^T d\varepsilon^p = Y d\tilde{\varepsilon}^p = \tilde{\sigma} d\tilde{\varepsilon}^p = F(\sigma) d\tilde{\varepsilon}^p \quad (2.43)$$

Donc le module d'érouissage obtenu par un essai uniaxial serait alors :

$$H = \frac{dY}{d\tilde{\varepsilon}^p} \quad (2.44)$$

Pour les métaux, l'expérience a montré que la limite élastique est indépendante de la pression hydrostatique de l'invariant I_1 . on peut donc exprimer les critères en fonction des invariants J_1 et J_3 du déviateur.

$$F(J_2 , J_3 , k) = 0 \quad (2.45)$$

Les critères de Von Mises et Tresca font partie de cette famille

Avec l'hypothèse d'incompressibilité de l'écoulement plastique ($\nu = 0.5$), et d'indépendance de la pression hydrostatique (L'écoulement plastique dépend des composantes des déviateurs), la définition de la déformation plastique effective est alors :

$$\bar{\varepsilon}^p = \left[\frac{2}{3} (e^p)^T (e^p) \right]^{1/2} \quad (2.46)$$

e est le tenseur déviateur des déformations.

Cette définition reproduit bien la valeur uniaxiale car :

$$\varepsilon^p = \left[\frac{2}{3} \left[\varepsilon^p - \frac{\varepsilon^p}{2} - \frac{\varepsilon^p}{2} \right] \left[\varepsilon^p - \frac{\varepsilon^p}{2} - \frac{\varepsilon^p}{2} \right]^T \right] \quad (2.47)$$

La définition correspondante de la contrainte effective devant conserver le travail : $\varepsilon^p \sigma = \tilde{\varepsilon}^p \tilde{\sigma}$ (2.48)

$$\tilde{\sigma} = \left[\frac{2}{3} (s)^T (s) \right] = \sqrt{3} \sqrt{J_2} \quad (2.49)$$

s est le tenseur déviateur de contrainte

Cependant pour certains matériaux frottants tels que les sols et bétons l'expérience a montré que des variations de volume apparaissent pendant l'écoulement plastique. Ceci signifie que les critères doivent dépendre en plus de l'invariant I_1 donnant la partie sphérique (critères de Mohr-Coulomb et Drucker-Prager)

Le critère s'exprime en général en fonction des trois invariants I_1 J_2 et J_3

$$F(I_1, J_2, J_3) = 0 \quad (2.50)$$

I_1 , J_2 et J_3 sont respectivement le premier invariant du tenseur des contraintes σ et les deuxièmes et troisièmes invariants du tenseur déviatoire. Les composantes de ce dernier en utilisant la notation indicielle (Somme sur l'indice répétée) sont :

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_{ij}/3 \quad (2.60)$$

δ_{ij} est le symbole de Kronecker

Les invariants s'expriment par rapport aux axes principaux 1,2,3 ou par rapport aux axes quelconques i,j,k (x,y,z) par

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (2.61)$$

$$J_2 = (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)/2 = (1/2) s_{ij} s_{ji} \quad (2.62)$$

$$J_3 = s_1 s_2 s_3 = (1/3) s_{ij} s_{jk} s_{ki} \quad (2.63)$$

Dans le cas multiaxial, les critères sont représentés par des surfaces, appelées surface de charge.

La surface de charge en élasto-plasticité parfaite est une surface limite tandis que dans le cas de l'érouissage, elle évolue. Le début de l'écoulement plastique signifie donc que la contrainte effective a atteint une certaine limite. Plusieurs critères de plastification existent. Ils ont été initialement établis comme limite élastique et dans le cas de l'élasto-plasticité parfaite. Ils peuvent cependant servir comme critère de première plastification et évolue ensuite avec un érouissage isotrope, cinématique ou mixte.

Les critères usuels s'expriment comme décrit précédemment en fonction des contraintes principales ou des invariants.

Les différentes expressions des critères usuels sont exposées dans les ouvrages des mécaniques des milieux continus. En élasto-plasticité, il est commode d'exprimer les critères en fonction de l'angle θ (Appelé angle de similitude) défini comme suit :

$$\theta = \frac{1}{3} \text{Arc sin} \left[-\frac{3J_3\sqrt{3}}{2(J_2)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad -\pi < \theta < \pi/6 \quad (2.64)$$

Ces critères étaient exprimés comme étant la condition de première plastification. On peut généraliser leurs expressions en introduisant les paramètres d'érouissage.

Les expressions des critères usuels sont :

2.2.3.1.1 CRITERE DE TRESCA

Plastification à une contrainte de cisaillement critique :

$$\text{Max} \left[\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} \right] = \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} = \frac{Y}{2} \quad (2.65)$$

Y est la contrainte d'épuisement courante en traction simple.

En fonction des invariants, le critère s'exprime par :

$$F(J_2, \theta) = 2\sqrt{J_2} \cos \theta - Y(k) = 0 \quad (2.66)$$

La représentation graphique de ce critère dans l'espace des contraintes principales est un prisme hexagonal (figure 2.15).

Les axes du prisme coïncident avec l'espace diagonal défini par les points : $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, et depuis chaque section normale du prisme et identique, (Une conséquence d'hypothèse qu'une contrainte hydrostatique n'aurait pas d'influence sur l'écoulement), il est commode de représenter la surface d'écoulement géométriquement par sa projection dans le plan π

Y(k) est l'actuelle contrainte de plastification uniaxiale liée au paramètre d'érouissage k, pour les critères de Tresca et de Von Mises

2.2.3.1.2 CRITERE DE VON MISES (1913)

Ce critère est basé sur le cisaillement octaédral ou l'énergie de distorsion critique :

$$F(J_2) = \sqrt{3J_2} - Y(k) = 0 \tag{2.67}$$

La représentation graphique dans l'espace des contraintes principales est un cylindre régulier (figure 2.16).

$Y(k)$ est l'actuelle contrainte de plastification uniaxiale liée au paramètre d'érouissage k pour les critères de Tresca et Von Mises.

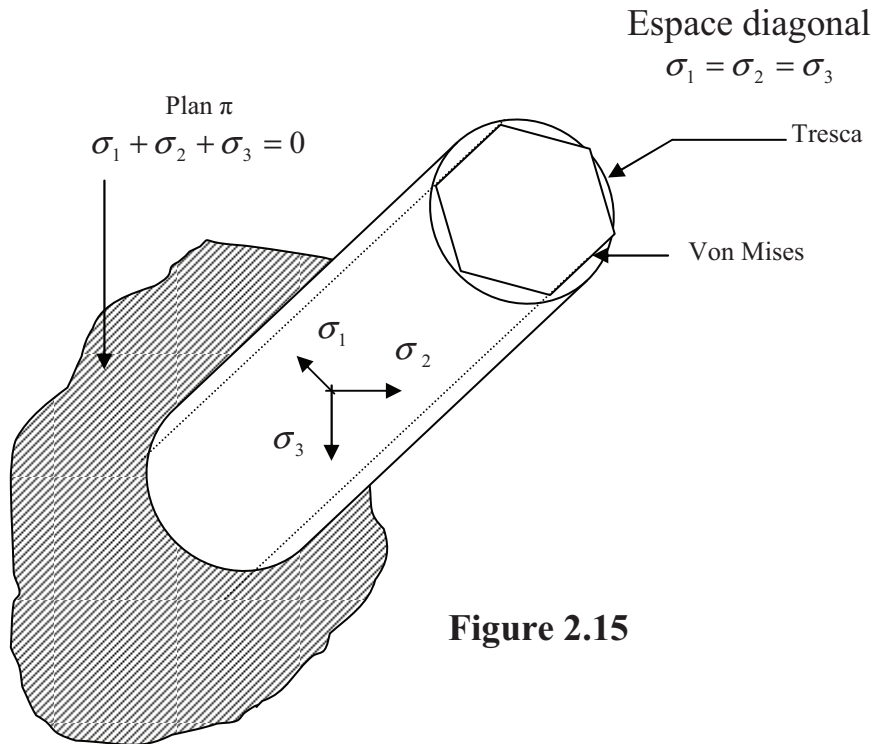
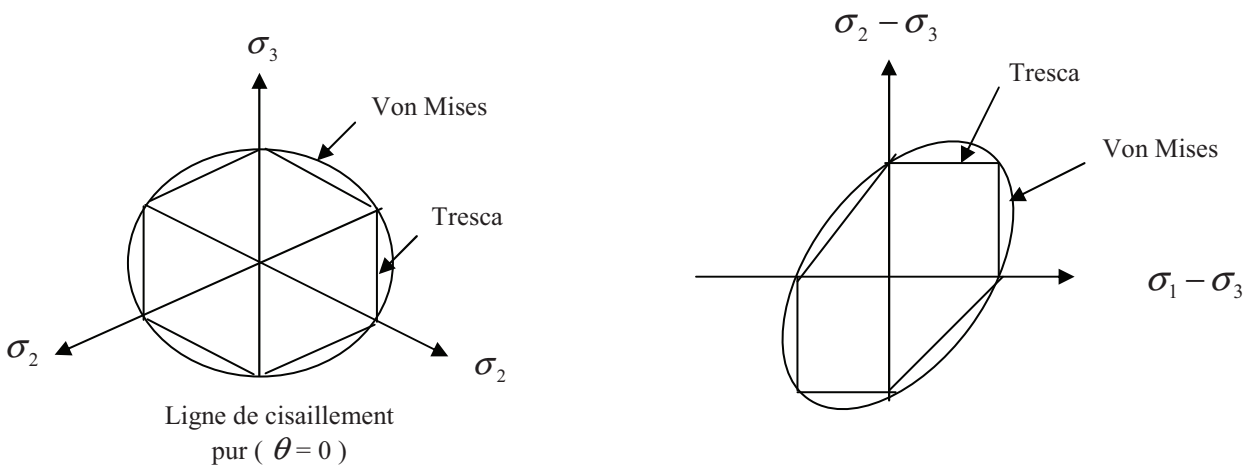


Figure 2.15

Représentation géométrique des surfaces d'écoulement de Von Mises et Tresca dans l'espace des contraintes principales



(a) Représentation dans le plan π

(b) Représentation conventionnelle d'ingénieur

Figure 2.16 Représentation bidimensionnelle du critère de rupture de Tresca et de Von Mises

II.2.3.1.3 CRITERE DE MOHR-COULOMB

Ce critère est une généralisation de celui de Tresca sauf que la contrainte critique de cisaillement n'est plus constante mais dépend de la contrainte normale (Figure 2.17). La plastification a lieu quand le rayon de plus grand cercle principal de Mohr est tangent à la courbe enveloppe de Coulomb :

$$|\tau| = c - \sigma \tan \phi \quad (2.68)$$

$$F(I_1, J_2, \theta) = \frac{I_1}{3} \sin \theta + \sqrt{J_2} \left[\cos \theta - \frac{\sin \phi \sin \theta}{\sqrt{3}} \right] - \cos \phi = 0 \quad (2.69)$$

c et Φ sont la cohésion et l'angle de frottement interne .

Si $\Phi = 0$, le critère se réduit à celui de Tresca et la contrainte intermédiaire σ_2 est généralement.

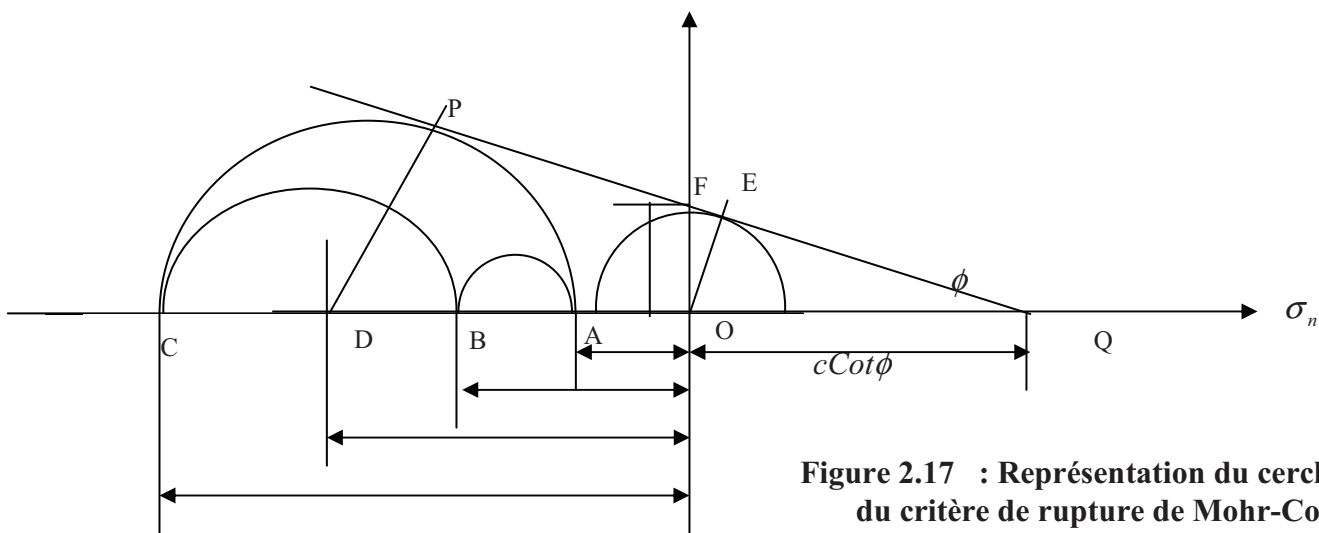


Figure 2.17 : Représentation du cercle de Mohr du critère de rupture de Mohr-Coulomb

II.2.3.1.4 CRITERE DE DRUCKER - PRAGER

C'est une extension de celui de Von Mises et de celui de Mohr-Coulomb en tenant compte de la composante hydrostatique des contraintes et donc de la contrainte intermédiaire σ_2).

$$F = (I_1, J_2) = \mu I_1 + \sqrt{J_2} - K = 0 \quad (2.70a)$$

$$\text{avec} \quad \mu = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (2.70) \quad \text{et} \quad K = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)}$$

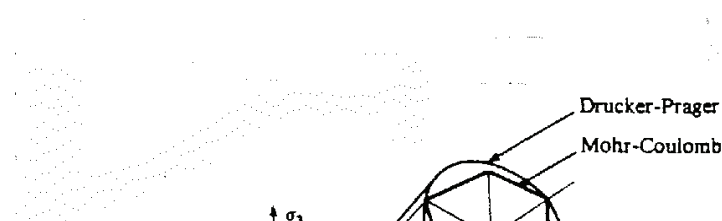
(2.71)

c et ϕ sont la cohésion et l'angle de frottement interne

Si $\phi = 0$, le critère se réduit à celui de Von Mises.

Pour les critères de Mohr-Coulomb et Drucker-Prager, c et ϕ sont la cohésion et l'angle de frottement interne qui varient avec les paramètres d'écroutissage (en général ϕ varie très peu)

Les grandeurs équivalentes à la limite élastique courante sont $c \cos \phi$ pour le critère de Mohr-Coulomb et K pour celui de Drucker-Prager. Les contraintes effectives sont dans ce cas donné par les deux premiers termes et sont différentes de la relation (2.15) car l'hypothèse d'incompressibilité a été levée.



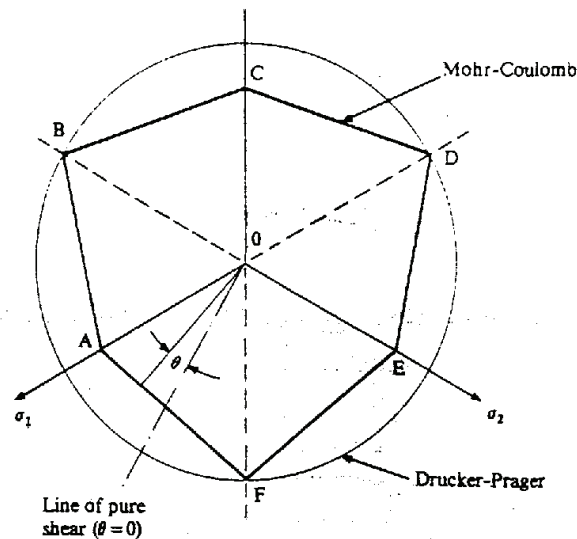


Fig 2.19 : Représentation bidirectionnelle du critère de Mohr Coulomb et Drucker

II.2.3.1.5 CRITERE DE HILL

C'est l'extension du critère de Von Mises à un matériau orthotrope

$$F(\sigma) = a_1(\sigma_y - \sigma_z)^2 + a_2(\sigma_z - \sigma_x)^2 + a_3(\sigma_x - \sigma_y)^2 + a_4 \tau_{yz}^2 + a_5 \tau_{zx}^2 + a_6 \tau_{xy}^2 - 1 = 0 \quad (2.72)$$

Les paramètres a_i sont déterminés à partir des résistances selon les directions x, y et z . On trouve :

$$2a_1 = \frac{1}{\sigma_y^2} + \frac{1}{\sigma_z^2} - \frac{1}{\sigma_x^2} \quad (2.73)$$

$$2a_2 = \frac{1}{\sigma_z^2} + \frac{1}{\sigma_x^2} - \frac{1}{\sigma_y^2} \quad (2.74)$$

$$2a_3 = \frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{1}{\sigma_y^2} - \frac{1}{\sigma_z^2} \quad (2.75)$$

$$a_4 = \frac{1}{\tau_{yz}^2} \quad a_5 = \frac{1}{\tau_{zx}^2} \quad a_6 = \frac{1}{\tau_{xy}^2} \quad (2.76)$$

$$\text{En cas d'isotropie : } 6a_1 = 6a_2 = 6a_3 = a_4 = a_5 = a_6 \quad (2.77)$$

Et on retrouve alors le critère de Von Mises.

Le chargement plastique a lieu quand $F = 0$ et $dF = 0$

La condition $dF = 0$ est appelée condition de consistance.

2.2.3.2 REGLES D'ECROUISSAGE

2.2.3.2.1 ECROUISSAGE ISOTROPE

L'écroissage isotrope est obtenu simplement en supposant que la surface de charge garde la même forme F et s'étend sans translation ni distorsion

(fig 2.18a) de manière isotrope. Son centre o ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) reste fixe et seule sa dimension change.

L'équation de la surface de charge est :

$$F(\sigma, k) = 0 \quad (2.78)$$

Le paramètre d'écroissage k est en général égal au travail plastique (work hardening) ou à la déformation plastique effective ϵ_{pef} (strain Hardening)

$$- dk = \sigma T d\epsilon^p \quad k = \int \sigma T d\epsilon^p \quad (2.79)$$

$$dk = \left[\frac{2}{3} \{d\epsilon^p\}^T \{d\epsilon^p\} \right]^{1/2} \quad (2.80)$$

La relation (2.79) du travail plastique est la plus utilisée.

La règle de chargement plastique $dF = 0$ donne alors :

$$dF = \sum \frac{\partial F}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial F}{\partial k} dk + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T d\sigma + \frac{\partial F}{\partial k} dk = 0 \quad (2.81)$$

L'écroissage isotrope est simple mais ne convient qu'au chargement monotone car il ne tient pas compte de l'effet Baushinger observé en pratique.

2.2.3.2.2 ECROISSAGE CINEMATIQUE

Le moyen le plus simple de prendre en compte l'effet Bauschinger est de considérer que la surface de charge se déplace par une translation de corps rigide (fig 2.18b).

L'équation de la surface de charge est dans ce cas :

$$F(\sigma, \alpha, k) = F(\sigma - \alpha, k) = F(\tilde{\sigma}, k) = 0 \quad (2.82)$$

- k est une constante et α est le vecteur des coordonnées du centre de la surface . $\tilde{\sigma}$ est appelé vecteur des contraintes réduites. Les règles d'écroissage cinématique consistent à déterminer les coordonnées α .
- La règle d'écroissage de Prager définit les coordonnées par un déplacement linéaire du centre de la surface :
- $-d\alpha = b d\varepsilon^p$ d'où $\alpha = \int b d\varepsilon^p$ (2.83)
- Dans le cas unidimensionnel $b=h$ (fig 2.14) .
- Dans la règle d'écroissage de Ziegler la translation de la surface de charge a lieu dans la direction du vecteur des contraintes réduites.

$$-d\alpha = a(\sigma - \alpha) d\varepsilon_{ef}^p \quad (2.84)$$

- La condition de consistance donne :

$$dF = \sum \frac{\partial F}{\partial \sigma_i} d\sigma_i + \sum \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} d\alpha_i = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T d\sigma + \frac{\partial F}{\partial \alpha} d\alpha = 0 \quad (2.85)$$

$$- \text{On voit d'après (2.85) que } \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\} = - \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \quad (2.86)$$

$$- \text{Donc } \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T d(\sigma - \alpha) = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T d\bar{\sigma} \quad (2.87)$$

- une caractéristique positive du matériau et ε_{ef}^p est la déformation plastique effective.
- Dans l'érouissage cinématique, l'effet Bauschinger est total et cela aussi est en contradiction avec l'expérience.

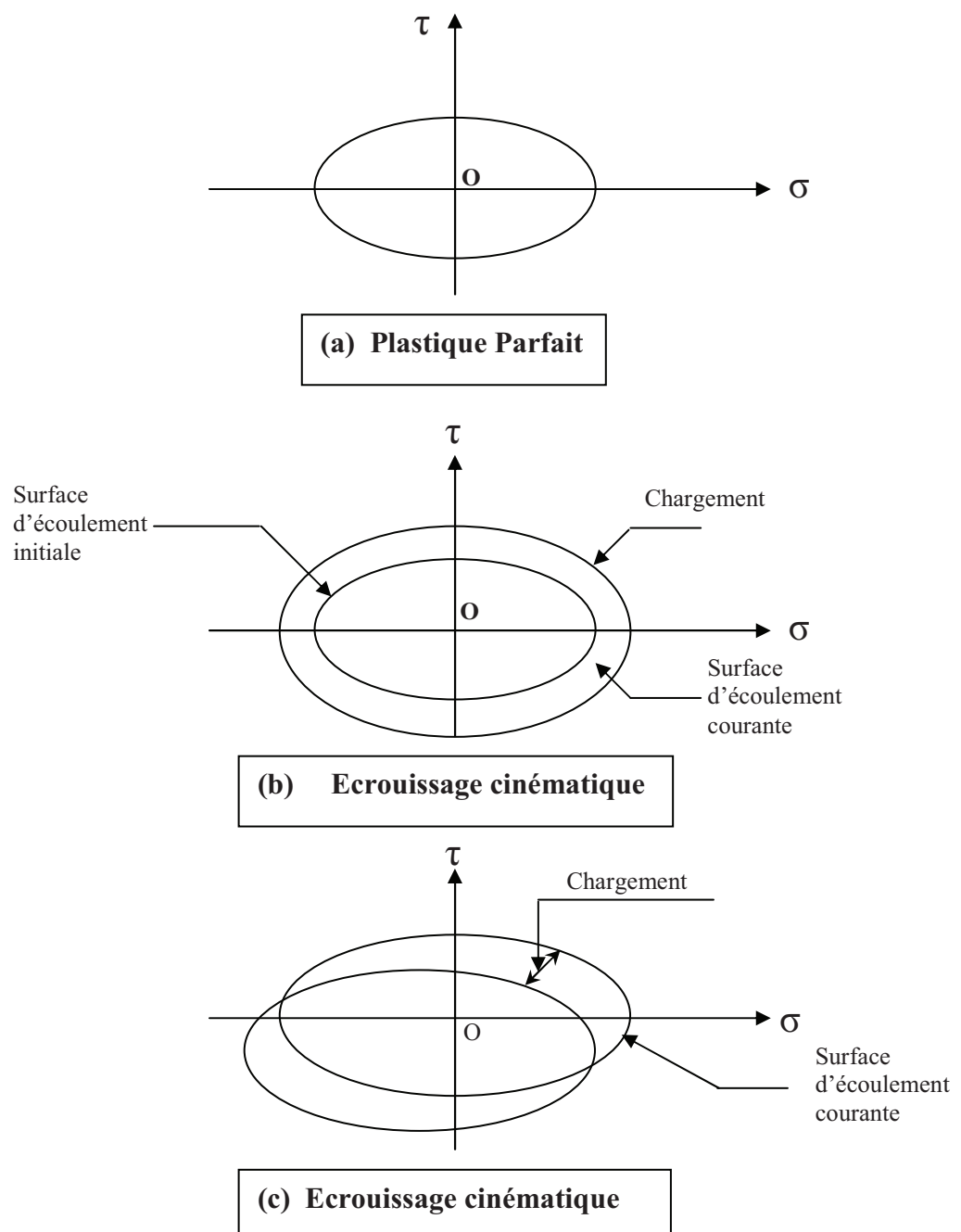


FIGURE 2.18 : Modèles Mathématiques de représentation

2.2.3.2.3 ECROUISSAGE MIXTE

- Une combinaison des écrouissages isotrope et cinématique peut simuler l'expansion et la translation de la surface de charge.
- L'équation de charge et donc :

$$F(\sigma, \alpha, k) = F(\sigma - \alpha, k) = F(\bar{\sigma}, k) = 0 \quad (2.88)$$

- Le centre de la surface subit une translation définie par les coordonnées α . La surface garde sa forme définie par F mais subit une expansion définie par k (A partir du centre de la surface)

$$dk = (\sigma - \alpha)d\varepsilon^p = \bar{\sigma}d\varepsilon^p \quad \text{d'ou} \quad k = \int \bar{\sigma}d\varepsilon^p \quad (2.89)$$

- **La règle de consistance donne :**

$$dF = \sum \frac{\partial F}{\partial \sigma_i} d\sigma_i + \sum \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} d\alpha_i + \frac{\partial F}{\partial k} dk = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T d\sigma + \frac{\partial F}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial F}{\partial k} dk = 0 \quad (2.90)$$

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T d\bar{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial k} dk = 0 \quad (2.91)$$

L'écrouissage mixte est le plus général et ressemble à l'écrouissage isotrope mais avec les valeurs réduites.

2.2.3.3 REGLE D'ECOULEMENT ET POTENTIEL PLASTIQUE

La notion de dérivation des déformations élastiques à partir d'une fonction potentielle élastique a été étendue au domaine plastique. On définit G une fonction scalaire élastique des contraintes σ appelée potentiel plastique telle que :

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma} \quad (2.92)$$

Cette relation appelée règle d'écoulement lie la fonction de charge à la loi constitutive σ - ε

$-d\lambda$ est un facteur scalaire de proportionnalité positif ou nul.

$-d\lambda$ n'est positif qu'en présence d'écoulement plastique.

Si la fonction potentielle plastique G est égale à la fonction de charge F , on dit que la plasticité est associée.

$$\text{Si } F = G \quad d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (2.93)$$

L'équation est appelée règle de plasticité associée ou règle de normalité car le vecteur $d\varepsilon^p$ est dans ce cas normal à la surface de charge.

On démontre que cette règle de normalité implique la convexité de la surface de charge et l'unicité de la solution aux frontières.

Ces deux propriétés sont également déduites du postulat de stabilité de Drucker.

Ce postulat exprime que le travail effectué par une action extérieure (faisant varier les contraintes de σ^* à σ puis à σ^*) est positif pour un matériau stable :

$$(\sigma - \sigma^*) \cdot d\varepsilon^p \geq 0 \quad (2.94)$$

On démontre que ce postulat constitue une condition suffisante mais n'est pas nécessaire pour établir les relations élasto-plastiques.

Si $F \neq G$ l'élasto-plasticité est dite non-associée.

2.2.4 RELATIONS ELASTO-PLASTIQUES INCREMENTALES

Nous traitons le cas d'un écrouissage isotrope et la généralisation au cas d'un écrouissage mixte seront plus facile.

L'incrément total des déformations se décompose comme suit :

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (2.95)$$

L'incrément des contraintes est élastique :

$$d\sigma = Dd\varepsilon^e = D(d\varepsilon - d\varepsilon^p) \quad (2.96)$$

En remplaçant $d\varepsilon^p$ par son expression (2.92), on obtient

$$d\sigma = Dd\varepsilon - D \frac{\partial F}{\partial \sigma} d\lambda \quad (2.97)$$

Posons $A = -\frac{1}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial k} dk$ (2.98)

- La relation (2.90) donne

$$dF = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T d\sigma - Ad\lambda = 0 \quad (2.99)$$

Remplaçons $d\sigma$ par l'expression de (2.97) , on obtient :

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \left(Dd\varepsilon - D \frac{\partial G}{\partial \sigma} d\lambda \right) - Ad\lambda = 0 \quad (2.100)$$

et $\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T Dd\varepsilon - d\lambda \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \frac{\partial G}{\partial \sigma} + A \right] = 0$ (2.101)

d'où
$$d\lambda = \frac{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \frac{\partial G}{\partial \sigma} + A} d\varepsilon$$
 (2.102)

En substituant dans l'équation (2.97) on tire :

$$d\sigma = \left[D - \frac{D \frac{\partial G}{\partial \sigma} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \frac{\partial G}{\partial \sigma} + A} \right] d\varepsilon = D^{ep} d\varepsilon \quad (2.103)$$

$$D^{ep} = \left[\begin{array}{c} D \frac{\partial G}{\partial \sigma} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \\ D - \frac{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \frac{\partial G}{\partial \sigma} + A}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \frac{\partial G}{\partial \sigma} + A} \end{array} \right] \quad (2.104)$$

Cette matrice D^{ep} est la généralisation du module E^{ep} de (2.27)

En élasto-plasticité parfaite $A = 0$ mais $D^{ep} \neq 0$ alors que dans le cas uniaxial E est nul en élasto-plasticité parfaite.

En élasto-plasticité non associée ($F \neq G$) D^{ep} est dissymétrique et l'utilisation de la matrice de rigidité tangente nécessite un algorithme de résolution de système avec matrices dissymétriques.

Signification de A :

$$\text{Pour un écrouissage isotrope } F(\sigma) - Y(k) = 0 \quad (2.105)$$

$$\text{Donc } \frac{\partial F}{\partial k} = -\frac{\partial Y}{\partial k} \quad (2.106)$$

$$\text{En combinant avec } \left(H = \frac{dY}{d\varepsilon_{ef}^p} \right) \text{ et } \left(dk = Y d\varepsilon_{ef}^p \right), \quad (2.107)$$

$$\text{on trouve : } \frac{\partial F}{\partial k} = -\frac{H}{Y} \quad (2.108)$$

$$\text{Donc } A = H \frac{d\varepsilon_{ef}^p}{d\lambda} = H \frac{\sigma^T d\varepsilon^p}{Y d\lambda} = H \frac{\sigma^T \frac{\partial G}{\partial k}}{Y} \quad (2.109)$$

$$\text{En vertu du théorème d'Euler } : \sigma^T \frac{\partial G}{\partial k} = Y \quad (2.110)$$

$$\text{On déduit que } A = H \quad (2.111)$$

$$\text{Donc : } D^{ep} = \left[\begin{array}{c} D \frac{\partial G}{\partial \sigma} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \\ D - \frac{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \frac{\partial G}{\partial \sigma} + H}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \frac{\partial G}{\partial \sigma} + H} \end{array} \right] \quad (2.112)$$

II.2.4.1 ECROUISSAGE MIXTE

Dans le cas d'un écrouissage mixte, la fonction de charge est donnée par la relation (2.88) : $F(\sigma - \alpha, k) = F(\bar{\sigma}, k) = 0$ (2.113)

L'incrément des déformations plastiques se décompose en deux :

$$-d\varepsilon^p = d\varepsilon^{pi} + d\varepsilon^{pc} \quad (2.114)$$

$d\varepsilon^{pi}$ et $d\varepsilon^{pc}$ sont les composantes dues à l'écrouissage isotrope et cinématique respectivement . on peut les exprimer sous la forme :

$$d\varepsilon^{pi} = M d\varepsilon^p \quad (2.115) \quad d\varepsilon^{pc} = (1 - M) d\varepsilon^p \quad (2.116)$$

$$M \text{ est le coefficient de « mixité » . } \quad 0 \leq M \leq 1 \quad (2.117)$$

En utilisant l'expression du travail plastique (2.79) pour le paramètre d'écrouissage isotrope k et la règle d'écrouissage cinématique de Prager (2.83), on obtient :

$$dk = \bar{\sigma}^{-T} d\varepsilon^{pi} = \bar{\sigma}^{-T} M d\varepsilon^p \quad (2.118)$$

$$d\alpha = b d\varepsilon^{pc} = (1 - M) b d\varepsilon^p \quad (2.119)$$

$$\text{Avec } \bar{\sigma} = \sigma - \alpha \quad (2.120)$$

Avec développement similaire, le paramètre A de (2.109) devient :

$$A = -\frac{1}{d\lambda} \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T (1 - M) b + \frac{\partial F}{\partial k} (\sigma - \alpha)^T M \right] d\varepsilon^p \quad (2.121)$$

En remplaçant $d\varepsilon^p$ par son expression (2.92)

$$A = (1 - M) b \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha} \right)^T \frac{\partial G}{\partial \sigma} (\sigma - \alpha)^T \frac{\partial G}{\partial \sigma} \quad (2.122)$$

La matrice élasto-plastique devient alors :

$$D^{ep} = D - \frac{D \frac{\partial G}{\partial \sigma} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \frac{\partial G}{\partial \sigma} - (1-M)b \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T \frac{\partial G}{\partial \sigma} - M \frac{\partial F}{\partial k} (\sigma - \alpha)^T \frac{\partial G}{\partial \sigma}} \quad (2.123)$$

$$D^{ep} = D - \frac{D \frac{\partial G}{\partial \sigma} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \frac{\partial G}{\partial \sigma} + (1-M)b \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T \frac{\partial G}{\partial \sigma} + MH} \quad (2.124)$$

La relation (2.123) donne la matrice élasto-plastique pour un écrouissage mixte en utilisant la règle de Prager pour l'écrouissage cinématique et le travail plastique pour l'écrouissage isotrope. Il suffit de prendre $M=1$ et $\alpha = 0$ pour retrouver la relation de l'écrouissage isotrope. L'écrouissage cinématique pur est obtenu en prenant $M = 0$ et $Y = \sigma_y$

On déduit la matrice de rigidité tangente avec :

$$K_t = \int B^T D_t B dv \quad (2.125)$$

Les matrices D^{ep} et D_t sont la généralisation des modules E^{ep} et E_t obtenus dans le cas uniaxial.

II.2.4.2 CRITERE DE CHARGEMENT

D'une manière générale, l'écoulement plastique n'a lieu que si le point se trouve sur la surface de charge et si en plus le vecteur d'incrément des contraintes est dirigé vers l'extérieur de la surface. S'il est tangent, il y a « chargement neutre ».

Il faut donc définir un vecteur NF normal à la surface et étudier le signe de la projection du vecteur contrainte sur cette normale. Cependant pour l'écrouissage négatif, en cas de chargement ou de déchargement, le vecteur des contraintes est dirigé vers l'intérieur de la surface. Il est donc préférable d'établir un critère en termes de déformations qui reste valable que l'écrouissage soit positif ou négatif et qui évite de faire appel à la normale NF.

En plus dans la méthode des éléments finis (Formulation en déplacements),
Les déformations sont connues avant les contraintes.

$$F < 0 \quad \text{Domaine élastique} \quad (2.126)$$

$$F > 0 \quad \text{Impossible} \quad (2.127)$$

$$F = 0 \quad \text{Sur la surface} \quad (2.128)$$

La condition de chargement peut être tirée de l'équation (2.100) :

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D d\varepsilon - d\lambda \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D \frac{\partial G}{\partial \sigma} + A \right] = 0 = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D d\varepsilon - h d\lambda = 0 \quad (2.129)$$

On démontre que $h d\lambda$ est toujours positif ou nul. $d\lambda$ est positif en cas de chargement plastique et nul autrement.

On déduit le critère de chargement et déchargement suivant.

$$F = 0 \quad \text{et} \quad \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D d\varepsilon \phi > 0 \quad \text{Chargement} \quad (2.130)$$

$$F = 0 \quad \text{et} \quad \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D d\varepsilon \pi < 0 \quad \text{Déchargement} \quad (2.131)$$

$$F = 0 \quad \text{et} \quad \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D d\varepsilon = 0 \quad \text{Chargement neutre} \quad (2.132)$$

Pendant le chargement les déformations élastiques et plastiques ont lieu simultanément et la surface de charge évolue.

Pendant le déchargement les déformations sont élastiques et le point devient à l'intérieur de la surface $F < 0$

Le chargement neutre est caractérisé par des déformations élastiques seulement tout en maintenant le point sur la surface. Le point glisse sur la surface et celle-ci n'évolue pas.

La notion de chargement neutre n'existe pas en élasto-plasticité unidimensionnelle car la surface se réduit à deux points ni en élasto-plasticité multiaxiale parfaite car la surface est limitée.

Avec les critères de charge et décharge précédents, on a :

$$\text{En cas de chargement plastique : } D_t = D^{\text{ep}} \quad (2.133)$$

$$\text{En cas de déchargement ou de chargement neutre ou élastique } D_t = D \quad (2.134)$$

II.2.5 GRADIENT DES CRITERES

On remarque que la matrice élasto-plasticité dépend du gradient de la fonction de charge $\frac{\partial F}{\partial \sigma}$

Quelque soit le critère utilisé, on peut toujours écrire :

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} \quad (2.135)$$

$\frac{\partial F}{\partial J_2}$ et $\frac{\partial F}{\partial J_3}$ dépendent de $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ car J_2 et J_3 sont liés à θ .

Par définition de l'angle θ on a :

$$\sin 3\theta = -\frac{3}{2} \sqrt{3} J_3 (J_2)^{\frac{3}{2}} \quad (2.136)$$

$$\text{On déduit : } \frac{\partial \theta}{\partial J_2} = -\frac{\text{tg}3\theta}{2J_2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \theta}{\partial J_3} = -\frac{\text{tg}3\theta}{3J_3} \quad (2.137)$$

On peut donc obtenir les dérivées des critères par rapport aux trois invariants I_1, J_2, J_3 . Les résultats sont résumés dans le tableau 2.1

CRITERE	$\frac{\partial F}{\partial I_1}$	$2\sqrt{J_2} \frac{\partial F}{\partial J_2}$	$J_3 \frac{\partial F}{\partial J_3}$
TRESCA	0	$2 \cos \theta (1 + \text{tg} \theta \text{tg} 3\theta)$	$\frac{\sqrt{3} \sin \theta}{\cos 3\theta}$

VON MISES	0	$\sqrt{3}$	0
MOHR – COULOMB	$\frac{\sin \theta}{3}$	$\cos \theta \left[\frac{1 + \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} 3\theta + \sin \phi (\operatorname{tg} 3\theta - \operatorname{tg} \theta) / \sqrt{3}}{\sin \phi (\operatorname{tg} 3\theta - \operatorname{tg} \theta) / \sqrt{3}} \right]$	$\frac{\sqrt{3} \sin \theta + \sin \phi \cos \theta}{2 \cos 3\theta}$
DRUCKER- PRAGER	μ	1	0

Ces dérivées peuvent être obtenues de la même manière pour n'importe quel autre critère.

En utilisant les expressions (2.62) des invariants, on peut obtenir leurs dérivées partielles par rapport aux différentes composantes du vecteur des contraintes:

$$\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]^T \quad (2.138)$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial \sigma} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad \frac{\partial J_2}{\partial \sigma} = [s_x, s_y, s_z, 2\tau_{xy}, 2\tau_{yz}, 2\tau_{zx}] \quad (2.139)$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \sigma} = \left[s_y s_z - \tau_{yz}^2 + \frac{J_2}{3} \mid s_x s_z - \tau_{xy}^2 + \frac{J_2}{3} \mid s_x s_y - \tau_{xy}^2 + \frac{J_2}{3} \mid 2(\tau_{xz} \tau_{xy} - s_x \tau_{xy}) \mid 2(\tau_{xy} \tau_{yz} - s_y \tau_{yz}) \mid 2(\tau_{yz} \tau_{zx} - s_z \tau_{zx}) \right] \quad (2.140)$$

II.2.6 POINTS SINGULIERS

Les critères de TRESCA et MOHR-COULOMB comportent des points singuliers ($\theta = \pm 30^\circ$) pour lesquels les gradients $\frac{\partial F}{\partial \sigma}$ ($\frac{\partial F}{\partial J_2}$ et $\frac{\partial F}{\partial J_3}$) sont

indéterminés. Pour contourner cette difficulté, il suffit de retourner aux expressions initiales des critères (8.) et (8.) en prenant ($\theta = \pm 30^\circ$)

[KOITER].

Pour le critère de TRESCA, l'expression donne une valeur égale à celle de Von Mises. Cela revient à remplacer les zones de coin par l'arc du cercle de Von Mises.

Pour le critère de Mohr-Coulomb, les dérivées ($\frac{\partial F}{\partial J_2}$ et $\frac{\partial F}{\partial J_3}$) deviennent

comme indiqué sur le tableau 2.2 :

Tableau 2.2 : Dérivées des critères aux points singuliers ($\theta = \pm 30^\circ$)

CRITERE	$\frac{\partial F}{\partial I_1}$	$2\sqrt{J_2} \frac{\partial F}{\partial J_2}$	$J_3 \frac{\partial F}{\partial J_3}$
TRESCA	0	$\sqrt{3}$	0
MOHR – COULOMB	$\frac{\sin \theta}{3}$	Si $\theta = +30^\circ \frac{1}{2} \left[\sqrt{3} - \frac{\sin \phi}{\sqrt{3}} \right]$ Si $\theta = -30^\circ \frac{1}{2} \left[\sqrt{3} - \frac{\sin \phi}{\sqrt{3}} \right]$	0

Le critère de Von Mises est le plus utilisé pour les métaux.

$$\text{On a : } \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{\partial F}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma} \quad (2.141)$$

$$\frac{\partial F}{\partial J_2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2Y} \quad \text{car } \sqrt{3J_2} = Y \quad (2.142)$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \sigma} = [\bar{s}_x, \bar{s}_y, \bar{s}_z, 2\bar{\tau}_{xy}, 2\bar{\tau}_{yz}, 2\bar{\tau}_{zx}]^T \quad (2.143)$$

On utilise le tableau 2.1 et les relations avec les contraintes réduites

$$\bar{\sigma} = \sigma - \alpha \quad (2.144)$$

Dans le cas de l'écoulement cinématique pur $Y = \sigma_y$

Si l'écoulement est purement isotrope $\alpha = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{3}{2Y} [\bar{s}_x, \bar{s}_y, \bar{s}_z, 2\bar{\tau}_{xy}, 2\bar{\tau}_{yz}, 2\bar{\tau}_{zx}]^T \quad (2.145)$$

II.2.6.1 ELASTOPLASTICITE ASSOCIEE AU CRITERE DE VON MISES

Le critère de Von Mises est le plus utilisé pour les métaux.

$$\text{On a : } \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{\partial F}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma} \quad (2.146)$$

$$\frac{\partial F}{\partial J_2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2Y} \quad \text{car } \sqrt{3J_2} = Y \quad (2.147)$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \sigma} = [\bar{s}_x, \bar{s}_y, \bar{s}_z, 2\bar{\tau}_{xy}, 2\bar{\tau}_{yz}, 2\bar{\tau}_{zx}]^T \quad (2.148)$$

On utilise le tableau 2.1 et les relations avec les contraintes réduites $\bar{\sigma} = \sigma - \alpha$

$$\text{Dans le cas de l'écouissage cinématique pur } Y = \sigma_y \quad (2.149)$$

Si l'écouissage est purement isotrope $\alpha = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{3}{2Y} [\bar{s}_x, \bar{s}_y, \bar{s}_z, 2\bar{\tau}_{xy}, 2\bar{\tau}_{yz}, 2\bar{\tau}_{zx}]^T \quad (2.150)$$

$$\text{Or } d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad \text{Il en résulte} \quad (2.151)$$

On retrouve les relations de Prandtl-Reuss :

$$[d\varepsilon_x^p, d\varepsilon_y^p, d\varepsilon_z^p, d\gamma_{xy}^p, d\gamma_{yz}^p, d\gamma_{zx}^p]^T = \frac{3d\lambda}{2Y} [\bar{s}_x, \bar{s}_y, \bar{s}_z, 2\bar{\tau}_{xy}, 2\bar{\tau}_{yz}, 2\bar{\tau}_{zx}]^T \quad (2.152)$$

$$\text{Avec } \bar{s}_i = s_i - \alpha_i \quad \text{et} \quad \bar{\tau}_{ij} = \tau_{ij} - \alpha_{ij} \quad (2.153)$$

$$\text{Dans le cas uniaxial : } s_i = \sigma_i - \alpha_i \quad \text{et} \quad s_2 = s_3 = 0.5\alpha_1 \quad (2.154)$$

$$\alpha_2 = \alpha_3 = -0.5\alpha_1 \quad \text{à cause de l'hypothèse d'incompressibilité} \quad (2.155)$$

$$\bar{\sigma}_{ef}^2 = 3\bar{J}_2 = (\sigma_1 - \frac{3}{2}\alpha_1)^2 \quad \text{et} \quad d\bar{\sigma}_{ef} = d\sigma_1 - \frac{3}{2}b(1-M)d\varepsilon_1^p \quad (2.156)$$

$$\text{Or} \quad d\sigma_1 = d\tilde{\sigma} \quad \text{et} \quad d\varepsilon_1^p = d\tilde{\varepsilon}^p \quad (2.157)$$

$$H = \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{p}} \quad \text{et} \quad \bar{H} = \frac{d\bar{\sigma}_{ef}}{\bar{p}} \quad (2.158)$$

$d\bar{\varepsilon}^p$ est la déformation plastique réduite relative à l'expansion isotrope.

$$\bar{H} = H \quad \text{et} \quad b = \frac{2}{3}H \quad (2.159)$$

En remplaçant la matrice constitutive élastique D par son expression (1.), la matrice élasto-plastique devient :

$$D_{ijkl}^{ep} = D - \frac{12G^2 \bar{s}_{ij} \bar{s}_{kl}}{(3G + \bar{H})J_2} \quad (2.160)$$

II.2.7 CALCUL DES CONTRAINTES ORGANIGRAMME ELASTO-PLASTIQUE GENERAL

En généralisant l'organigramme uniaxial de la section 2 , l'incrément de déformation dans le cas d'une transition élasto-plastique doit être décomposé en une partie élastique $r\Delta\varepsilon$ et une partie élasto-plastique $(1-r)\Delta\varepsilon$

$$\Delta\varepsilon = r\Delta\varepsilon + (1-r)\Delta\varepsilon \quad (2.161)$$

L'incrément des contraintes entre les itérations $(i-1)$ et i est :

$$\Delta\varepsilon = \int_{\varepsilon^{i-1}}^{\varepsilon^i} D(d\varepsilon - d\varepsilon^p) = \int_{\varepsilon^{i-1}}^{\varepsilon^{i-1}+r\Delta\varepsilon} D d\varepsilon + \int_{\varepsilon^{i-1}+r\Delta\varepsilon}^{\varepsilon^{i-1}+\Delta\varepsilon} D^{ep} d\varepsilon \quad (2.162)$$

$$\Delta\sigma = r\Delta\sigma^e + \int_{\varepsilon^{i-1}+r\Delta\varepsilon}^{\varepsilon^{i-1}+\Delta\varepsilon} D(d\varepsilon - d\varepsilon^p) + \int_{\varepsilon^{i-1}+r\Delta\varepsilon}^{\varepsilon^{i-1}+\Delta\varepsilon} D^{ep} d\varepsilon \quad (2.163)$$

Le facteur r doit être tel que le point revient sur la surface de charge :

$$F(\sigma + r\Delta\sigma^e) = 0 \quad (2.164)$$

L'expansion de Taylor donne [Nayak , Chen] une approximation d'ordre 1 :

$$r = \frac{-F(\sigma^i)}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma^i} \right\}^T \Delta\sigma^e} \quad (2.165)$$

On peut également calculer une valeur approchée de r comme dans le cas uniaxial en utilisant les grandeurs effectives.

$$r = \frac{Y_{i-1} - \tilde{\sigma}_{i-1}}{\tilde{\sigma}_i^e - \tilde{\sigma}_{i-1}} \tag{2.166}$$

$\tilde{\sigma}_i^e$ est la contrainte effective calculée élastiquement

La valeur de r pour les autres cas est :

Transition élastique – élastique : $r = 1$ (2.167)

Transition plastique – plastique : $r = 0$ (2.168)

Transition plastique – élastique : $r = 1$ (2.169)

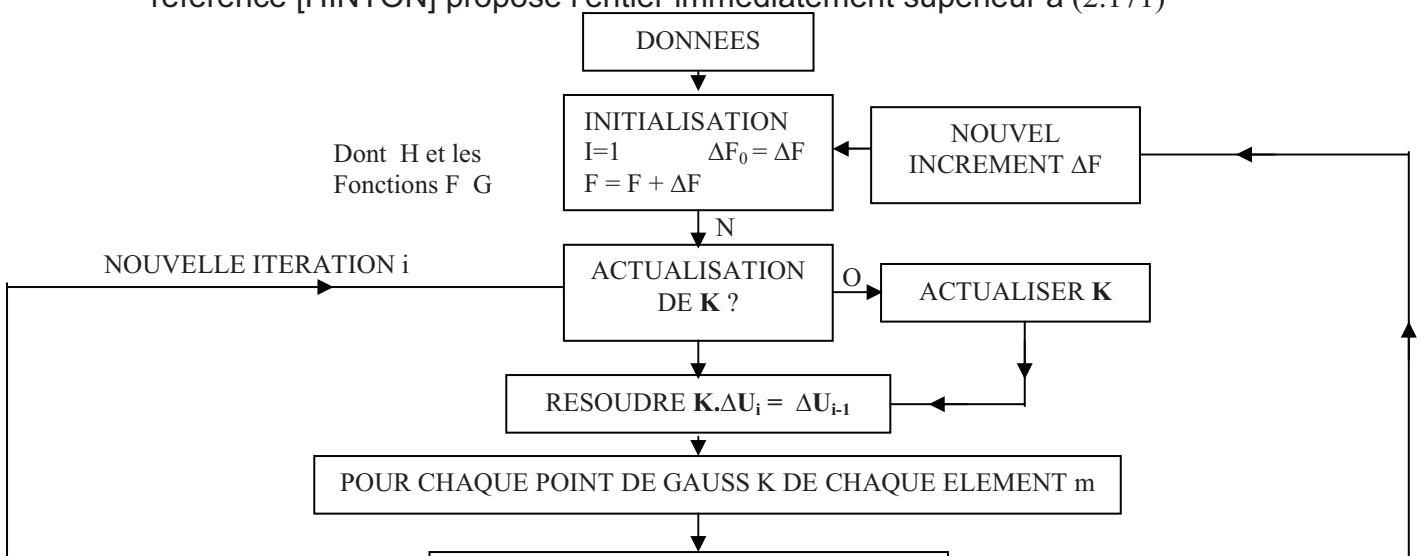
Pour les éléments en charge ($r \neq 1$), l'intégrale de l'équation (8.) est calculée numériquement par des algorithmes explicites ou implicites. Les premiers sont les plus utilisés (Méthode d'Euler et Runge-Kutta). Dans la méthode d'Euler explicite, l'intégrale est calculée par sous-incrémentation en m pas.

$$\int_{\varepsilon^{i-1} + r\Delta\varepsilon}^{\varepsilon^{i-1} + \Delta\varepsilon} D^{ep} d\varepsilon = \sum_{j=0} D_{j-1}^{ep} \frac{(1-r)\Delta\varepsilon}{m} \tag{2.170}$$

D_{j-1}^{ep} signifie que la matrice élasto-plasticité D^{ep} est calculée au sous incrément précédent.

Le nombre de sous incrément m doit être suffisant pour obtenir une bonne précision. La valeur idéale de m dépend de l'excès de contrainte. La référence [HINTON] propose l'entier immédiatement supérieur à (2.171)

ORGANIGRAMME ELASTOPLASTIQUE GENERAL



$$8(\tilde{\sigma}_i^e - Y_{i-1}) / \sigma_y \quad m = 8(\tilde{\sigma}_i^e - Y_{i-1}) / \sigma_y$$

Dans la méthode Runge-Kutta, la matrice tangente D^{ep} est déterminée au milieu de l'incrément avant d'être utilisée pour la totalité de l'incrément. Cela donne une meilleure précision et permet en plus d'apprécier l'erreur commise [Zien].

Ces intégrations aboutissent en général à des contraintes qui ne sont pas exactement sur la surface de charge et des corrections peuvent être effectuées par des réductions [Chen, Krieg].

Une des réductions simples consiste à multiplier les composantes du vecteur contrainte par le rapport des contraintes effectives.

$$\sigma_i = \sigma_i \frac{\sigma_y + H_i \tilde{\varepsilon}_i^p}{F(\sigma_i)} = \sigma_i \frac{Y_i}{F(\sigma_i)} \quad (2.172)$$

$\tilde{\varepsilon}^p$ est la déformation plastique effective.

Cette dernière réduction peut être effectuée à l'intérieur ou à l'extérieur de la boucle de sous-incrémentation.

Le calcul de toutes les composantes des déformations plastiques n'est pas indispensable. On se limite à la valeur effective.

II.2.8 ORGANIGRAMME ELASTO-PLASTICITE GENERAL

Dans le cas d'un écrouissage cinématique ou mixte, les mêmes corrections que celles de l'organigramme uniaxial doivent être portées.

Pour ces problèmes la matrice élastique D est donnée par la relation (1.) du chapitre un. Les gradients de la fonction de charge par rapport aux invariants deviennent :

$$\frac{\partial I_1}{\partial \sigma} = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 1] \quad (2.173)$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \sigma} = [s_x, s_y, 2\tau_{xy}, s_z]^T \quad (2.174)$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \sigma} = \left[s_y s_z + \frac{J_2}{3} \left| s_x s_z + \frac{J_2}{3} \right| - 2s_z \tau_{xy} \left| s_x s_y - \tau_{xy}^2 + \frac{J_2}{3} \right| \right]^T \quad (2.175)$$

$$\text{En notant } DF = \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} & \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} & \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} & \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \end{bmatrix} \quad (2.176)$$

$$\text{et } DDF = D \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (2.177)$$

$$DDF = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\nu} DF(1) + a \\ \frac{1}{1+\nu} DF(2) + a \\ \frac{1}{2(1+\nu)} DF(3) \\ \frac{1}{1+\nu} DF(4) + a \end{bmatrix} \quad (2.178)$$

$$\text{ou } a = \frac{E\nu[DF(1) + DF(2) + DF(3)]}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.179)$$

Le dénominateur de l'expression donnant la matrice élasto-plastique et le multiplicateur $d\lambda$ est :

$$DENOM = H + [DF]^T [DDF] \quad (2.180)$$

car $A = H$

$$\text{et } d\lambda = \frac{[DF]^T Dd\varepsilon}{DENOM} = \frac{[DF]^T d\sigma}{DENOM} \quad (2.181)$$

$$D^{ep} = D - \frac{[DDF]^T [DDF]}{DENOM} \quad (2.182)$$

$$d\tilde{\varepsilon}^p = \frac{d\lambda [\sigma]^T [DF]}{F(\sigma)} \quad (2.183)$$

LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

3.1 INTRODUCTION

Le concept de la méthode des éléments finis est originalement introduit pour l'analyse structurelle par Turner et Al [110], Argyris et Kelsey [5] au milieu des années 50. Le nom élément fini a été utilisé pour la première fois dans un article publié par Clough [36] en 1960.

La méthode des éléments finis a connu par la suite une progression générale rapide et elle est devenue maintenant la plus utilisée dans l'analyse structurelle. La famille des éléments isoparamétriques est introduite pour la première fois par Taig [107] et Irons [72]. L'élément est isoparamétrique parce que la même fonction d'interpolation utilisée pour définir la variation des déplacements dans l'élément. Dans ces types d'éléments, les déplacements ainsi que les coordonnées géométriques à l'intérieur de l'élément sont liés aux valeurs nodales par les mêmes fonctions d'interpolations.

Ces fonctions d'interpolations sont déterminées à partir d'un repère local avec les coordonnées addimensionnelles ξ , ν et ζ .

La procédure de base est d'exprimer les coordonnées et les déplacements de l'élément par des fonctions exprimées en termes de l'élément. A noter que les coordonnées naturelles en général ne sont pas orthogonales au système de coordonnées globales.

Toutes les intégrations se font d'une manière numérique (GAUSS-LEGENDRE).

La formulation isoparamétrique offre souvent l'avantage de suivre la non linéarité à l'intérieur de même de l'élément, car la fonction à intégrer numériquement peut varier d'un point de GAUSS à un autre.

Dans ce chapitre, la méthode des éléments finis est décrite pour l'analyse non linéaire élasto-plastique membranaire.

3.2 FORMULATION DES ELEMENTS FINIS

Comme la procédure standard d'analyse en éléments finis est bien connue [117], il n'est pas nécessaire de la décrire en détail. Cependant, quelques termes de la méthode sont présentés.

3.2.1 DISCRETISATION PAR ELEMENTS FINIS

Dans un milieu continu, le nombre de degrés de liberté est infini et à moins qu'une solution de forme fermée ne soit utilisée, une analyse exacte est impossible. Une solution approchée est adoptée par supposition que le comportement du milieu continu peut être représenté par un nombre fini d'inconnues. Dans la méthode des éléments finis, le milieu continu est divisé en une série d'éléments de forme géométrique simple qui sont connectés en un nombre de points nodaux, recouvrant le mieux possible la structure étudiée ainsi discrétisée sans qu'il y est de vide, ce processus est appelé discrétisation.

Aux frontière courbes, il n'est pas toujours évident de modéliser exactement et parfaitement, donc on retrouve les nœuds placés de façon à identifier cette frontière et parfois pour des raisons de déformations géométriques, il s'avère utile d'ajouter des nœuds particuliers appelés « **Nœuds Intermédiaires** ».

Dans la méthode des éléments finis des déplacements, le déplacement est supposé avoir des valeurs inconnues uniquement aux points nodaux et sa variation à l'intérieur des éléments est décrite en terme des valeurs nodales par moyens des fonctions d'interpolations. Ainsi :

$$\{\delta\} = [N]\{\delta^e\}$$

N est une matrice de fonction d'interpolation appelée les fonctions de forme et δ^e est le vecteur des déplacements nodaux de l'élément. Pour les applications structurelles, la dérivation des équations gouvernantes d'équilibre est communément basée sur le principe du travail virtuel donné par :

$$\int_v \delta \varepsilon^t \sigma dv - \int_A \delta u^t b dA - \int_A \delta u^t p dA = 0 \quad 3.2$$

Où $\varepsilon, \sigma, b, p$ et δ sont respectivement le vecteur déformation, le vecteur contrainte, les forces de volume, les tractions de surface et les déplacements virtuels.

Dans la représentation en éléments finis, si les relations déformations déplacements et les relations linéaires contraintes-déformations sont substituées dans l'expression du travail virtuel de l'équation (3.2), on peut obtenir le système d'équations suivant :

$$[K]\{\delta\} - \{F\} = 0 \quad (3.3)$$

Où la matrice de rigidité $[K]$ est donnée par :

$$K = \int_v B' DB dv$$

Le vecteur des forces nodales équivalentes est :

$$F = \int_v Nb dv + \int_a Np dA$$

Et b sont les forces par unité de volume.

P les tractions appliquées sur la surface (A).

B est la matrice déformation généralement composée des dérivées des fonctions de forme (N).

D est la matrice linéaire élastique ou élasto-plastique reliant les contraintes et les déformations.

3.2.2 PRESENTATION DE LA METHODE

Les méthodes matricielles d'analyse de structures peuvent être formulées de plusieurs manières selon les choix des inconnues. Ils existent trois formulations possibles

- Formulation en déplacement (méthode des déplacements)
- Formulation en contrainte
- Formulation mixte

a) Formulation en déplacement

Pour la première formulation, l'ingénieur établit d'abord les relations forces-déplacements pour chaque élément de la structure, puis assemble-le tout

selon une procédure bien définie où l'on écrit l'équilibre local en chaque nœud, au point de connexion de la structure.

A partir de ces équations on peut déterminer les déplacements inconnus. Cette formulation suppose que le champ de déplacements déjà défini, satisfait la compatibilité des déplacements à l'intérieur de l'élément, ceci en choisissant une fonction déplacement permettant l'état de déplacement d'une façon unique.

La formulation en déplacement est basée sur le principe de la minimisation de l'énergie potentielle globale du système en fonction du champ de déplacement.

b) Formulation en contrainte

La formulation consiste à définir un champ de contrainte de façon à assurer l'équilibre de l'élément, puis poser les équations de compatibilité des déplacements et les résoudre pour obtenir les forces (solutions en contraintes)

Dans ce cas, on utilise le principe de la stationnarité de l'énergie potentielle complémentaire (lorsqu'elle atteint un minimum)

c) Formulation mixte

Cette formulation englobe l'utilisation des deux formulations déjà mentionnées. Elle a pour principe l'utilisation de l'énergie de REISSNER, on note que l'utilisation de cette méthode est efficace dans la modélisation des éléments plaques et coques.

Conclusion : Pour notre cas on a opté pour la première formulation, car il est plus facile d'approcher des déplacements que des contraintes. Les déplacements sont donc les inconnues de base, on approchera le champ de déplacement réel, dans un élément par des fonctions d'interpolation ou fonction forme (généralement polynomiales) assurant la continuité des déplacements à l'interface de l'élément et aux nœuds. On choisira donc une fonction permettant de définir de manière unique le champ des déplacements à l'intérieur de chaque élément fini en fonction des déplacements des nœuds. Ces fonctions de déplacements définissent maintenant l'état des déformations à l'intérieur d'un élément en fonction des déplacements de ces nœuds. Ces

déplacements joints à d'éventuelles déformations initiales, et compte tenu des propriétés élastiques du matériau définissent l'état des contraintes en tout point de l'élément et par conséquent sur ses frontières.

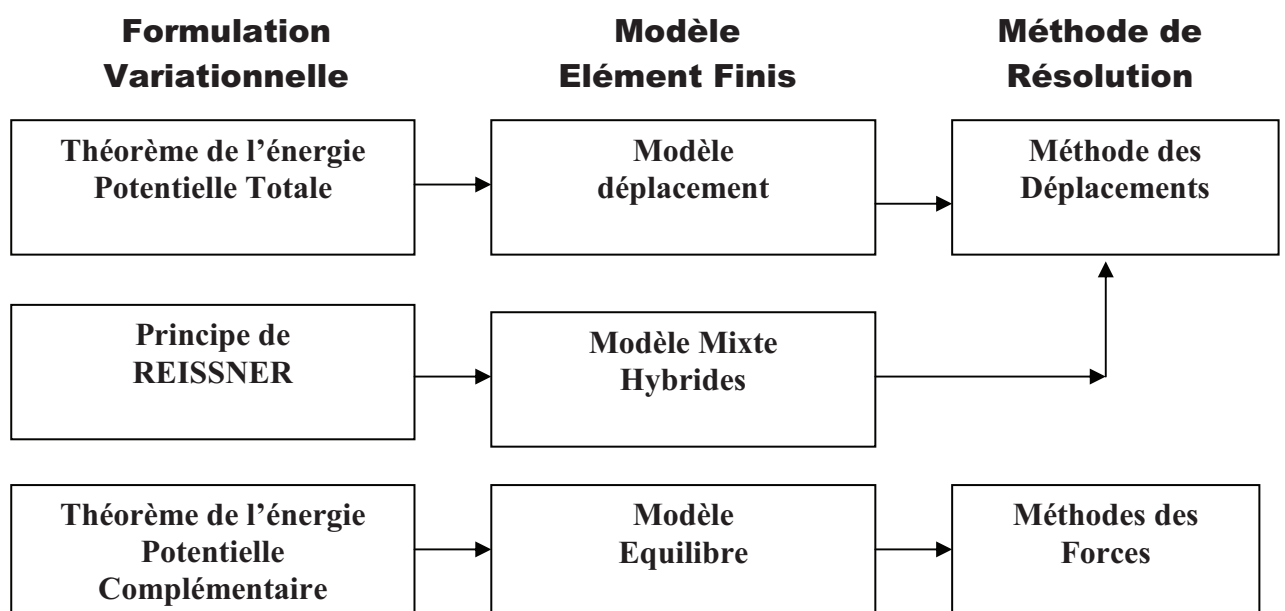
Il n'est pas toujours vrai de dire que les fonctions de déplacements choisies satisfassent aux conditions de continuité des déplacements entre élément adjacents bien qu'à l'intérieur de l'élément ces conditions doivent être satisfaites en raison de l'unicité des déplacements qui découle de leur représentation par une fonction.

Il faut noter également que la concentration des forces équivalentes aux nœuds, fait que les conditions d'équilibre ne sont satisfaites que globalement. Il se présente des violations locales des conditions d'équilibre à l'intérieur de chaque élément et à ses frontières. Pour chaque système donné, le choix de telle ou de telle fonction de déplacement est laissée à l'intuition et à l'habitude de l'ingénieur.

Si un tel champ est défini d'une manière convenable, alors la convergence vers la solution exacte est réalisée. On constate donc une certaine équivalence avec la méthode variationnelle de « Rayleigh-Ritz »

3.3 CONCLUSION

Les différentes options possibles pour le choix des formulations variationnelles, le modèle élémentaire et la méthode de résolution sont illustrés dans l'organigramme.



LES METHODES NUMERIQUES NON LINEAIRES

4.1 INTRODUCTION

La méthode des éléments finis s'est imposée comme un outil numérique très utile pour l'analyse d'une grande variété de problèmes. Durant ces dernières décennies, le développement prodigieux des ordinateurs, a rendu possible l'analyse de comportement mêmes fortement non linéaires. Ces sources de non linéarités peuvent être d'origine géométriques (grands déplacements) et/ou matérielles (plasticité, fissuration,.....etc.) et leur modélisation par éléments finis aboutit à un système d'équations non linéaires.

Ce chapitre présente les méthodes utilisées pour la résolution des problèmes non linéaires. Il n'existe pas de méthodes générales directes de résolution, les systèmes non linéaires sont toujours solutionnés par la résolution de plusieurs problèmes linéaires successifs où les conditions non linéaires sont respectées pour certaines tolérances. En mécanique des structures, un problème est non linéaire si la matrice de rigidité ou le vecteur chargement dépend des déplacements. Un problème structurel non linéaire doit vérifier les lois de base de la mécanique des milieux continus : Equilibre, compatibilité et lois constitutives de rhéologie. La compatibilité des déplacements est automatiquement vérifiée avec la méthode des éléments finis (formulation déplacement) qui conduit à une formulation discrétisée des problèmes non linéaires. Il suffit donc, de vérifier les lois rhéologiques tout en préservant l'équilibre de la structure. L'une des techniques les plus utilisées est de calculer les contraintes à partir du champ de déplacements et des lois constitutives. Ces contraintes sont statiquement équivalentes à un système de forces nodales internes qui doivent équilibrer les forces externes.

Généralement ces deux systèmes de forces ne sont pas égaux et la différence entre les deux est appelée forces résiduelles. Ces dernières doivent être annulées pour assurer l'équilibre.

En général pour un niveau particulier de chargement, un nombre de solutions linéaires successives est nécessaire pour éliminer les forces résiduelles à un degré de précision désiré. La méthode est évidemment itérative en nature et les résultats finaux dépendront des facteurs associés avec le processus itératif ; par exemple la grandeur de l'incrément, la précision désirée, la technique de la solution employée etc. Clairement, il est impossible d'obtenir une solution unique à un problème particulier à cause de ces facteurs.

Les relations contraintes-déformations sont une source majeure de la non linéarité. Celles-ci peuvent varier par les relations non linéaires à court terme entre les contraintes et les déformations telles que : Plasticité, fissuration, élasticité non linéaire etc.

Dans cette étude, seule la non linéarité causée par le comportement à court terme.

En général, la solution d'un problème non linéaire est très dépendante de ces lois matérielles. Une loi plus raffinée doit donner une solution meilleure. Mais comme mentionné auparavant, la solution peut aussi dépendre de la procédure non linéaire employée.

L'analyse dans le domaine pré-critique est en général suffisante pour les structures usuelles. Cependant la prédiction de la réponse post-élastique est essentielle pour déterminer la capacité de la structure à résister à de grandes charges pour des déplacements très larges

Les structures présentant des points limites peuvent avoir plusieurs chemins d'équilibre post-critique. Un chemin stable avec augmentation simultanée de la charge et des déplacements est possible. Un chemin instable dans lequel la charge diminue et les déplacements augmentent est aussi possible.

Plusieurs méthodes peuvent être utilisées (Méthode de contrôle en chargement, méthode de contrôle en déplacement et méthodes « Arc length ». La technique « Arc Length » assurant un contrôle en chargement et en déplacement semble être l'une des plus fiables.

Cette technique permet de suivre des chemins non linéaires complexes et d'étudier les comportements post-critiques.

4.2 TECHNIQUES NUMERIQUES POUR L'ANALYSE NON LINEAIRE

4.2.1 FORMULATION DE BASE

Les problèmes non linéaires dans la méthode des éléments finis sont usuellement résolus par l'une des trois techniques suivantes

- a- Incrémentale (Procédure pas à pas)
- b- Itérative
- c- Incrémentale / Itérative (Procédure mixte)

Pour les problèmes de non linéarité matérielle uniquement (petites déformation), la relation entre contrainte et déformations est supposée être de la forme :

$$f(\sigma, \varepsilon) = 0 \quad (4.1)$$

La matrice de rigidité élémentaire est fonction des propriétés matérielles et peut être écrite comme suit :

$$[K] = K(\sigma, \varepsilon) \quad (4.2)$$

Les forces nodales externes $\{F\}$ sont fonctions des déplacements nodaux $\{\delta\}$ à travers l'épaisseur de l'élément et peuvent être exprimées par :

$$\{F\} = [K]\{\delta\} \quad (4.3)$$

$$\text{D'où } \{\delta\} = [K]^{-1}\{F\} \quad (4.4a)$$

$$\text{Où } \{\delta\} = [K(\sigma, \varepsilon)]^{-1}\{F\} \quad (4.4b)$$

Cette dérivation explique la relation non linéaire de base entre $\{\delta\}$ et $\{F\}$, due à l'influence matérielle de $[K]$.

L'équation (4.3) est résolue par une succession d'approximations linéaires. Les différentes méthodes d'applications de ces chemins charge-déplacement influencent la solution finale. Ces méthodes sont expliquées en détail dans ce chapitre.

4.2.2 METHODE INCREMENTALE

Le principe de la méthode incrémentale est la subdivision du vecteur chargement en plusieurs incréments, pas forcément égaux. Durant chaque incrément de charge l'équation :

$$\{F\} = [K]\{\delta\}$$

est supposée être linéaire avec une valeur constante de K déduite des résultats de l'incrément précédent. Des déplacements nodaux sont obtenus pour chaque incrément et sont ajoutés aux déplacements cumulés précédemment. Le processus est répété jusqu'au chargement final. Il n'y a pas d'itération dans l'incrément pour restaurer l'équilibre et la précision dépend de la taille de l'incrément. La modification qui peut se faire est d'appliquer la moitié de l'incrément de charge et de calculer la nouvelle rigidité structurelle correspondant aux contraintes totales de cette valeur. La matrice de rigidité actualisée sera donc utilisée pour l'incrément de charge. La méthode incrémentale d'origine ou de forme modifiée ne prend pas en compte la distribution de force durant l'application de la charge incrémentale. L'analyse des méthodes incrémentales est la meilleure description du comportement force-déplacement. L'inconvénient majeur est la difficulté de la prédétermination des incréments nécessaires pour assurer une bonne précision

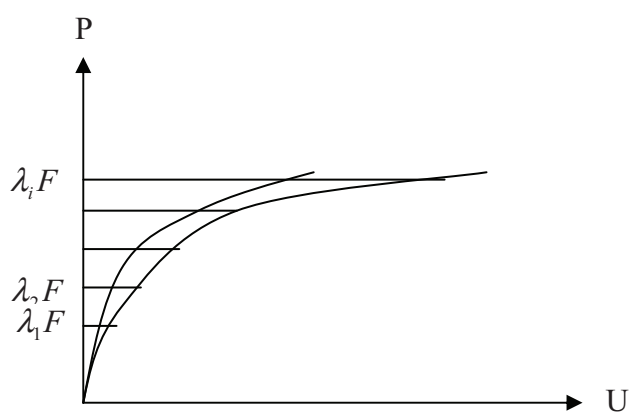


Fig 4.1 Présentation Graphique de la méthode incrémentale

4.2.3 METHODE ITERATIVE

Dans la méthode itérative, le chargement est appliqué en un seul incrément avec une certaine matrice de rigidité initiale, et on calcule les déplacements. Les contraintes sont déduites selon les lois constitutives et on déduit les forces nodales internes équivalentes qui n'équilibrent pas forcément les forces externes. Les forces résiduelles sont

appliquées à leurs tours et on déduit le nouveau déplacement qu'on doit ajouter au précédent. Ces déplacements cumulés donnent de nouvelles contraintes et de nouvelles forces résiduelles. Ce processus est répété jusqu'à élimination des forces résiduelles à une certaine tolérance. Plusieurs techniques itératives de calcul de la matrice de rigidité et des forces résiduelles existent.

A-EVALUATION DES FORCES NODALES NON EQUILIBREE

Les forces internes sont calculées comme des forces dues à des contraintes initiales [90]. Cette méthode peut être expliquée comme suit :

Evaluer les relations contrainte-déformations.

$$[\sigma] = [D]\{\varepsilon\} + \{\sigma_0\} \quad (4.5)$$

Où $\{\sigma_0\}$ est le vecteur des contraintes initiales et $[D]$ est la matrice d'élasticité.

Supposant initialement $\sigma_0 = 0$ l'équation (4.3) est résolue avec matrice D appropriée et une déformation ε_A , pour obtenir un certain niveau de contraintes ε_{A1} où.

$$\{\sigma_{A1}\} = [D]\{\varepsilon_A\}$$

La contrainte qui est produite est :

$$\{\sigma_{A2}\} = [D']\{\varepsilon_A\}$$

ou D' est la matrice d'élasticité instantanée . La différence entre les contraintes :

$$\sigma_0 = \{\sigma_{A2}\} - \{\sigma_{A1}\} \quad (4.6)$$

Est utilisée comme contrainte initiale dans l'équation (4.5), et les forces nodales non équilibrées équivalentes $\{F\}$ sont calculés par :

$$\{F\} = - \int_V B' \sigma_0 dv \quad (4.7)$$

Les forces sont éliminées en les appliquant à la structure pour obtenir une correction de δ . Ce processus est répété jusqu'à élimination de σ_0 .

B – METHODE D'EVALUATION DES ELEMENTS DE LA MATRICE DE RIGIDITE

Généralement, la matrice de rigidité peut rester constante, où bien varier durant le processus itératif.

B.1 – METHODE DE RIGIDITE CONSTANTE

Dans cette méthode, la rigidité initiale linéaire est utilisée pour chaque étape dans l'analyse. Cette méthode possède des avantages économiques parce que la matrice de rigidité est calculée uniquement une seule fois. Son inconvénient principal est qu'elle requiert usuellement un large nombre d'itérations.

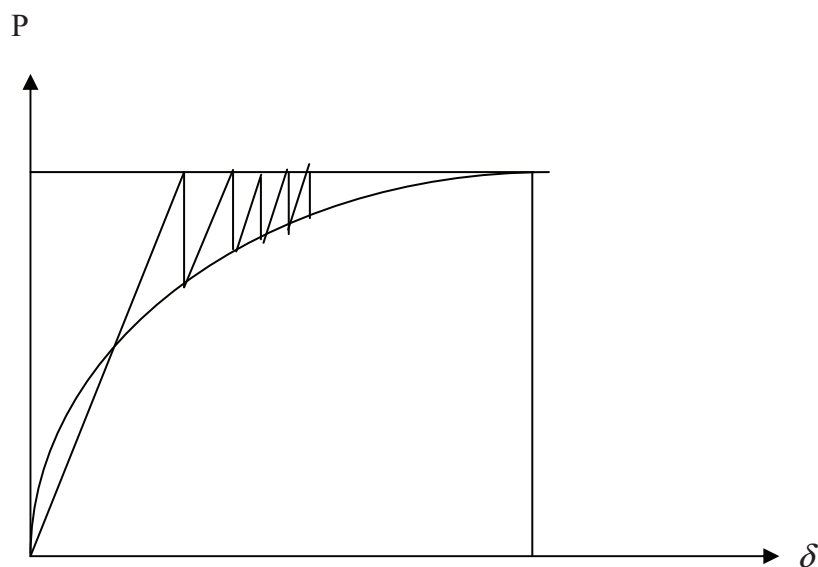


Fig 4.2 Méthode de Rigidité Constante

B.2 - METHODE DE RIGIDITE VARIABLE

Dans la méthode de rigidité variable, la méthode de Newton Raphson ou sa version modifiée est utilisée. Dans la méthode Newton-Raphson complète, la matrice de rigidité tangente est actualisée et un système complètement nouveau d'équations est résolu à chaque itération. Ce processus peut être particulièrement très cher si les incréments de charge relativement petits sont utilisés.

Pour remédier à cela, une modification dans l'algorithme total de Newton Raphson est recommandée par actualisation de la matrice de rigidité occasionnellement.

Le processus itératif est généralement plus rapide et la procédure d'itération est facile à incorporer dans un programme linéaire, l'inconvénient majeur est que les déplacements ne sont déterminés que pour un seul incrément. Si le problème réside dans l'étude d'un chargement variable avec le temps (dynamique, Fluage ...) ou si le chargement total est inconnu (Recherche de la charge d'instabilité ou de rupture) ou encore si les lois constitutives dépendent du chemin parcouru (Plasticité, Fluage ...) alors la méthode itérative est inutilisable.

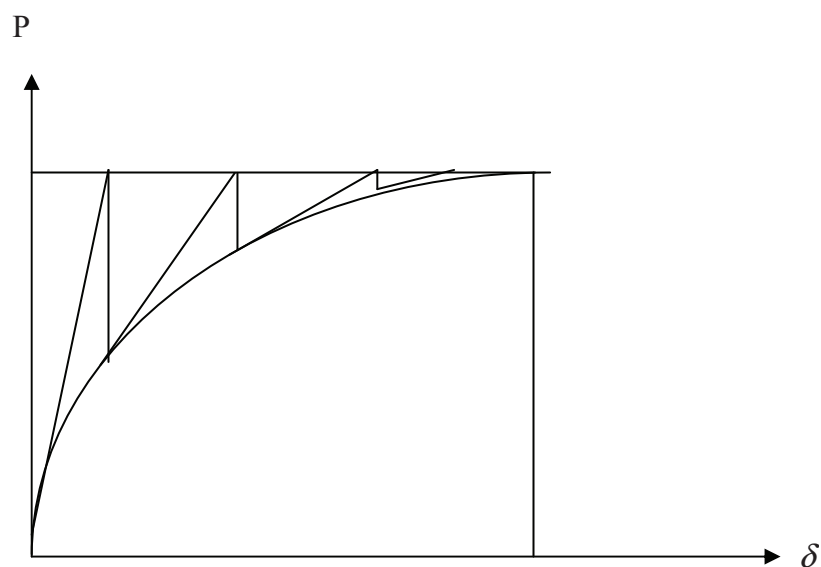


Fig 4.3 Méthode de Rigidité Variable
Approche du module tangent

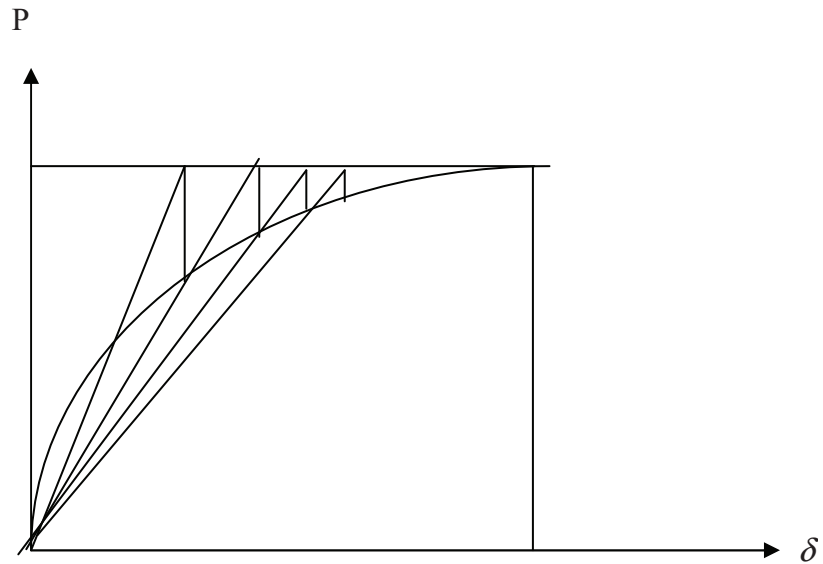


Fig 4.4 Méthode de Rigidité Variable
Approche du module sécant

4.2.4 METHODE MIXTE

Les méthodes mixtes sont une combinaison des deux méthodes citées précédemment. Le chargement est appliqué par incréments et la solution dans chaque étape du chargement est obtenue itérativement jusqu'à satisfaction de l'équilibre à une précision donnée. La méthode mixte combine les avantages des deux méthodes incrémentale et itérative et elle est la plus utilisée. La figure (4.5) montre les différentes méthodes de la procédure mixte.

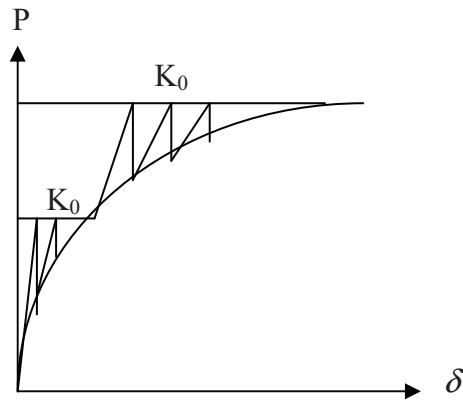


Fig 4.5.a Procédure de Rigidité constante

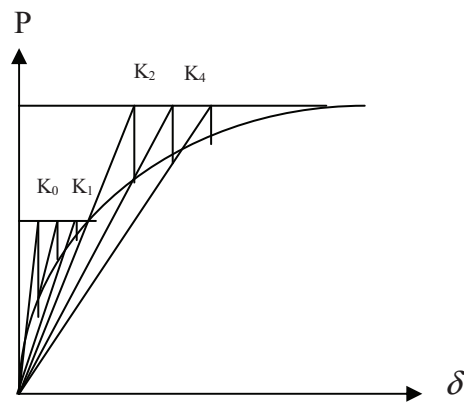


Fig 4.5.b Procédure de Rigidité Variable
(Approche du module sécant)

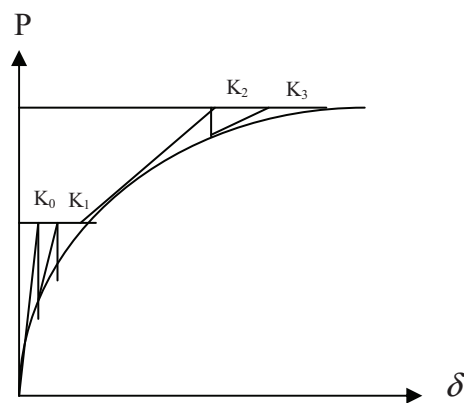


Fig 4.5.c Procédure de Rigidité variable
(approche du module tangent)

4.3 Méthodes « arc Length » de résolution des systèmes d'équations non linéaires en éléments finis

4.3.1 Introduction

Parmi les techniques proposées pour la résolution des systèmes d'équations non linéaires, la technique « arc length » qui a évolué depuis deux décennies s'est imposée comme un outil très efficace pour l'analyse non linéaire par éléments finis . De nombreuses variantes de cette méthode ont été proposées par différents auteurs.

Dans ce chapitre, on se propose de présenter les différentes variantes de la méthode « arc length » les plus utilisées et de comparer leurs performances.

4.3.2) Equations constitutives

En utilisant les notations de [10], les équations d'équilibre en éléments finis au temps $t+\Delta t$ sont :

$${}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F = 0 \quad (4.8)$$

où : ${}^{t+\Delta t}R$ est le vecteur des forces extérieures appliquées.

${}^{t+\Delta t}F$ est le vecteur des forces internes dues aux contraintes internes.

Si nous supposons que la structure est soumise à un chargement proportionnel, alors

l'équation (4.8) peut être écrite sous la forme :

$$\tau_{K \Delta U}(i) = (t+\Delta t)_{\lambda R} - (t+\Delta t)_{F}(i-1) \quad (4.9)$$

$$U(i) = U(i-1) + \Delta U(i) \quad (4.10)$$

où ${}^{(t+\Delta t)}\lambda$ est le facteur de chargement

Les équations (4.9) et (4.10) constituent la méthode de contrôle en chargement qui est basée sur les deux hypothèses suivantes :

1- Les facteurs de chargement sont imposés par l'analyste, ce qui peut présenter certaines difficultés sans la connaissance de la capacité portante de la structure ; En effet, de grands incréments de charge peuvent résulter en des divergences, alors que de petits incréments peuvent rendre la solution laborieuse inutilement.

2- La réponse jusqu'à la rupture est requise et par conséquent la réponse post-critique n'est pas possible à déterminer. C'est pourquoi Batoz et Dhatt [12] ont proposé pour remédier à ce problème la méthode de contrôle en déplacement qui consiste à imposer la valeur du déplacement en un point donné et à considérer le facteur de chargement comme une nouvelle variable à calculer en chaque itération. Pour cela, une équation supplémentaire de contrainte doit être ajoutée au système d'équations d'équilibre. Cependant pour préserver la symétrie de la matrice de rigidité, le système d'équations (4.9) est séparé en deux équations différentes comme suit :

$${}^{\tau}K \overline{\Delta U^{(i)}} = {}^{(t+\Delta t)}\lambda R - {}^{(t+\Delta t)}F^{(i-1)} \quad (4.11)$$

$$\overline{\overline{{}^{\tau}K \Delta U^{(i)}}} = R \quad (4.12)$$

et

$$\Delta U^{(i)} = \overline{\Delta U^{(i)}} \Delta \lambda^{(i)} + \overline{\overline{\Delta U^{(i)}}} \quad (4.13 a)$$

$${}^{t+\Delta t}U^{(i)} = {}^{t+\Delta t}U^{(i-1)} + \Delta U^{(i)} \quad (4.13 b)$$

$${}^{t+\Delta t}U^{(i)} = {}^{t+\Delta t}U^{(i-1)} + \Delta U^{(i)} \quad (4.13 \text{ c})$$

$${}^{t+\Delta t}\lambda^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\lambda^{(i-1)} + \Delta\lambda^{(i)} \quad (4.13 \text{ d})$$

Cependant, si la courbe chargement-déplacement présente un retour en arrière (Point c de la figure (4.6)), cette méthode divergera. Par ailleurs, le choix du ou des degrés de liberté à contrôler pose des problèmes.

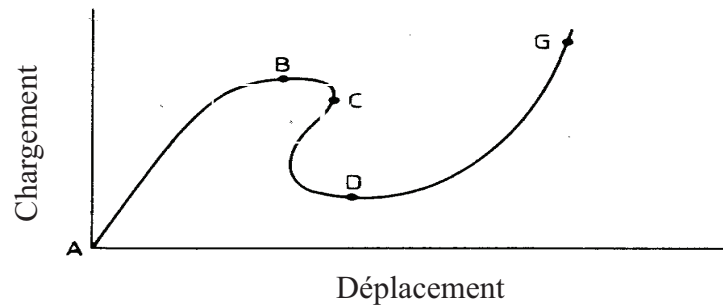


Fig 4.6

4.3.3 Equations de Contrainte

4.3.3.1) Equation de contrainte sphérique

Cette équation qui a été proposée par Crisfield [41] a la forme suivante :

$$U^{(i)T} U^{(i)} = \Delta L^2 \quad (4.14)$$

ou :

$$\left(U^{(i-1)} + \overline{\Delta U^{(i)}} \right)^T X \left(U^{(i-1)} + \overline{\Delta U^{(i)}} \Delta\lambda^{(i)} + \overline{\overline{\Delta U^{(i)}}} \right) = \Delta L^2 \quad (4.15)$$

En développant ce produit on obtient l'équation suivante :

$$A_1 (\Delta\lambda^{(i)})^2 + A_2 (\Delta\lambda^{(i)}) + A_3 = 0 \tag{4.16}$$

où

$$A_1 = \overline{\Delta U^{(i)T}} \overline{\Delta U^{(i)}} \tag{4.17 a}$$

$$A_2 = 2 \left(U^{(i-1)} + \overline{\Delta U^{(i)}} \right)^T \overline{\Delta U^{(i)}} \tag{4.17 b}$$

$$A_3 = \left(U^{(i-1)} + \overline{\Delta U^{(i)}} \right)^T \left(U^{(i-1)} + \overline{\Delta U^{(i)}} \right) - \Delta L^2 \tag{4.17 c}$$

Le choix de la racine pour $\Delta\lambda^{(i)}$ peut être fait en choisissant la valeur qui donnera un angle positif entre le vecteur incrémental précédent $U^{(i-1)}$ et le nouveau vecteur incrémental $U^{(i)}$. Si les deux angles sont de même signe, le plus proche de la solution linéaire sera choisi, c'est à dire :

$$\Delta\lambda^{(i)} = - \frac{A_3}{A_2} \tag{4.18}$$

La représentation graphique de cette méthode est illustrée sur la fig

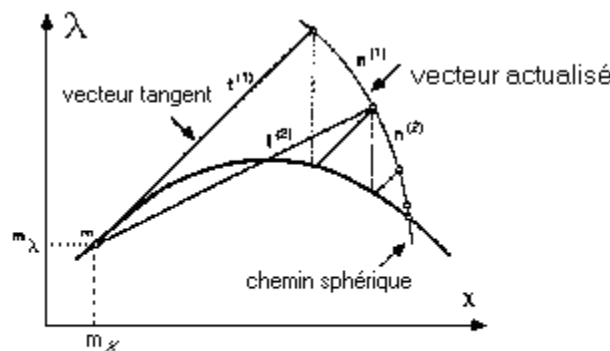


Fig 2. Méthode sphérique et méthode du plan normal actualisé

[4.7]

4.3.3.2) Equation de contrainte du plan normal

Cette équation a été proposée par Riks [104] et a la forme suivante :

$$\Delta \overline{\overline{\text{Fig 4.7}}} + \Delta \lambda^{(1)} \Delta \lambda^{(1)} = 0 \quad \text{pour } i=1 \quad (4.19 \text{ a})$$

$$\Delta U^{(1)} \Delta U^{(i)} + \Delta \lambda^{(1)} \Delta \lambda^{(i)} = 0 \quad \text{pour } i>1 \quad (4.19 \text{ b})$$

en tenant compte de l'équation (4.17a) on aura :

$$\Delta U^{(1)} \left[\overline{\Delta U^{(i)}} + \Delta \lambda^{(i)} \overline{\overline{\Delta U^{(i)}}} + \Delta \lambda^{(1)} \Delta \lambda^{(i)} = 0 \right] \quad (4.19 \text{ b})$$

ce qui détermine $\Delta \lambda^{(i)}$ à partir de la formule suivante :

$$\Delta \lambda^{(i)} = \frac{\Delta U^{(1)} \overline{\Delta U^{(i)}}}{\Delta U^{(1)} \overline{\overline{\Delta U^{(i)}}} + \Delta \lambda^{(1)}} \quad (4.20)$$

Ramm [102] a montré que le facteur $\Delta \lambda^{(1)}$ peut être négligé.

Ramm [102] a aussi proposé la méthode du plan normal actualisé qui consiste à actualiser le plan normal en chaque itération et l'équation de contrainte, illustrée sur la figure (4.7), prend la forme suivante :

$$U^{(i-1)} \Delta U^{(i)} + \Delta \lambda^{(i-1)} \Delta \lambda^{(i)} = 0 \quad \text{pour } i > 1 \quad (4.21)$$

et la formule donnant $\Delta \lambda^{(i)}$ prend une forme similaire à celle de l'équation (4.20) :

$$\Delta \lambda^{(i)} = \frac{U^{(i-1)} \overline{\Delta U^{(i)}}}{U^{(i-1)} \overline{\Delta U^{(i)}}}$$

(4.22)

4.3.3.3) Contrôle de la longueur de l'arc

Au début de chaque pas de charge, la nouvelle longueur de l'arc doit être déterminée car elle a une influence significative sur la performance de la méthode. Parmi les équations les plus utilisées on mentionnera :

1- l'équation proposée par Crisfield [41] est :

$${}^{t+\Delta t} \Delta L = {}^t \Delta L \left(\frac{N^*}{{}^t N} \right) \quad (4.23)$$

où : ${}^t \Delta L$ est la longueur de l'arc du pas précédent, N^* est le nombre d'itérations désirées et ${}^t N$ est le nombre d'itérations du pas précédent.

2- Celle proposée par Ramm [102]

$${}^{t+\Delta t} \Delta L = {}^t \Delta L \left(\frac{N^*}{{}^t N} \right)^{(\frac{1}{2})} \quad (4.24)$$

3- Bellini et al [16], ont proposé l'équation suivante :

$${}^{t+\Delta t}\Delta L = {}^t\Delta L \left(\frac{{}^tN}{N^*} \right)^{(\frac{1}{2})} \quad (4.25)$$

4.3.3.4) Comparaison des différentes équations de contrainte

Dans la rare littérature où certains chercheurs ont essayé de comparer les performances des différentes méthodes, Ford et al [14] ont montré que le nombre d'itérations est indépendant de la technique utilisée et que la méthode de Crisfield est la plus performante. Carrera [23], a fait une étude plus poussée où il a montré que globalement les équations de contrainte quadratiques sont supérieures aux équations linéaires, que la longueur de l'arc a une influence significative sur la performance globale de la méthode et que les causes de divergence peuvent être classées comme suit :

- l'équation de contrainte elle - même
- la linéarisation des équations d'équilibre
- la linéarisation des équations de contraintes
- précision des ordinateurs et/ou fiabilité des algorithmes numériques

Bellini et al [16] ont aussi montré que la méthode de Crisfield dépasse toutes ses rivales surtout pour l'analyse élasto-plastique.

4.3.3.5) Conclusions :

A travers le nombre conséquent d'équations de contraintes proposées, il ressort que ces méthodes sont très efficaces pour l'étude du comportement post-élastique des structures. Cependant pour les matériaux exhibant une branche descendante ou ayant une rupture localisée, ces méthodes peuvent diverger et dans [85], il est suggéré de considérer uniquement certains degrés de liberté dits dominants au lieu de tous les degrés de liberté de la structure.

La longueur de l'arc variable d'un pas de charge à un autre a une influence significative sur la performance globale de la méthode mais n'est pas cernée mathématiquement comme l'indique le caractère empirique des différentes formules. Mais selon certains auteurs, la valeur maximale de la

longueur d'arc dans un pas quelconque ne doit pas être supérieure à la longueur de l'arc initiale.

4.4 LA PROCEDURE UTILISEE DANS CE TRAVAIL

Une version de la procédure mixte est utilisée dans ce travail. L'approche Newton Raphson Modifiée [90] est utilisée pour évaluer la matrice de rigidité. La matrice de rigidité est utilisée pour toutes les itérations du premier incrément car les non-linéarités ne sont pas prononcées. Pour les incréments suivants la matrice de rigidité est actualisée après la première itération 2,5,8,11,15,20,25 et 30. Ainsi les effets non linéaires sont régulièrement pris en compte dans la matrice de rigidité. Comme la méthode Newton-Raphson modifiée nécessite moins de calculs de rigidité que la version complète, des économies numériques sont donc obtenues. Cependant, un large nombre d'itérations est requis pour la convergence, particulièrement s'il y a une perte significative de rigidité dans le système durant l'incrément de charge dû à la fissuration ou à l'écoulement des armatures.

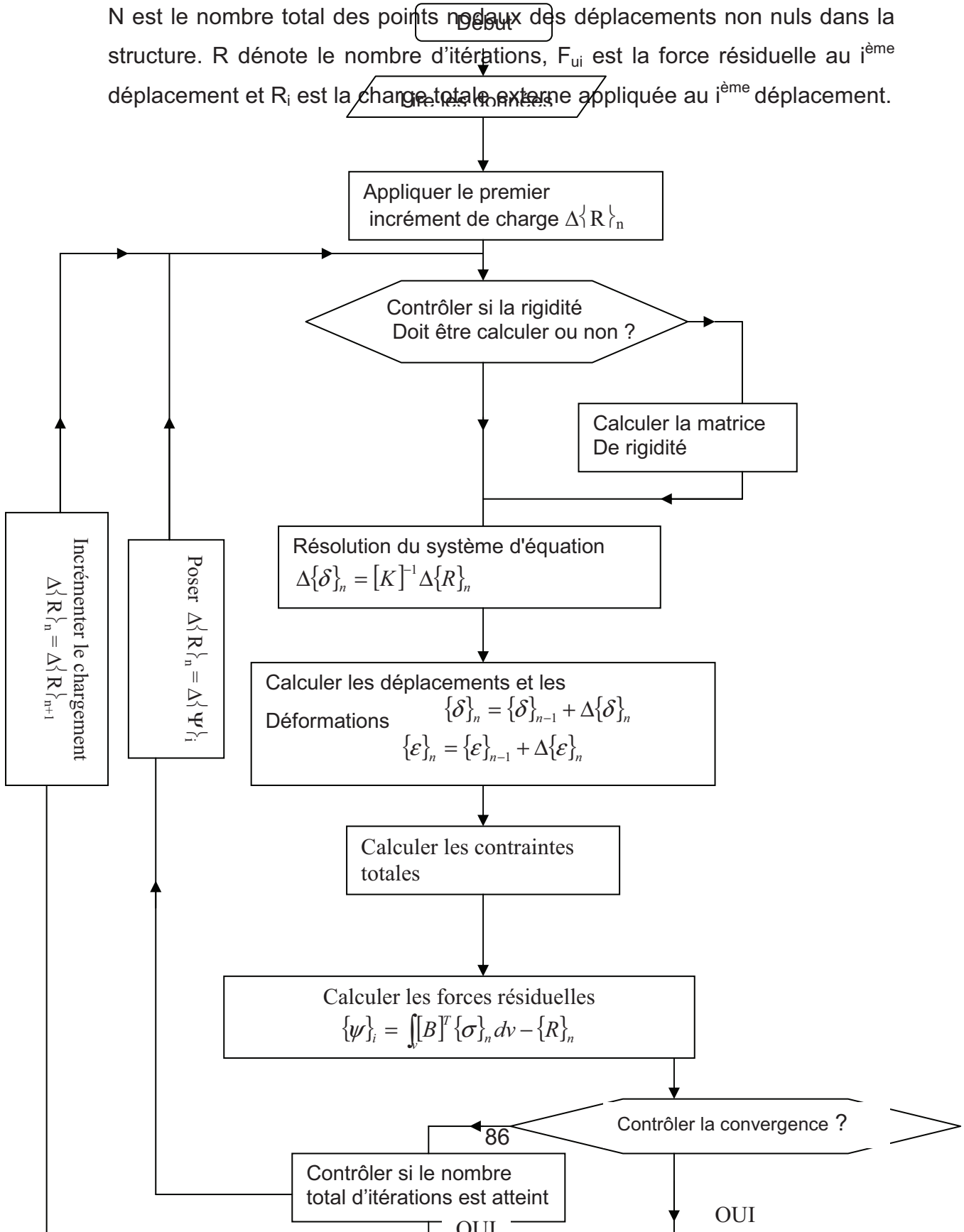
4.5 CRITERE DE CONVERGENCE

Dans la stratégie incrémentale itérative, il est important de contrôler la convergence de la solution obtenue à la fin de chaque itération. Le critère de convergence, usuellement utilisé pour l'analyse structurelle non linéaire est basée soit sur la norme des déplacements soit sur la norme des forces résiduelles et parfois sur l'énergie de déformation initiale. Dans la présente étude, la convergence est basée sur les normes des forces résiduelles parce qu'elles indiquent directement comment les exigences d'équilibre sont vérifiées [5]. Puisqu'il est difficile et cher de contrôler l'élimination des forces résiduelles pour

tous les degrés de liberté, une combinaison d'évaluation par usage des normes des forces est utilisée comme suit :

$$\frac{\left| \sum (F_{ui}^r)^2 \right|^{0.5}}{\left| \sum_{i=1}^N (R_i)^2 \right|^{0.5}} \times 100 \leq Tolerance \quad (4.26)$$

N est le nombre total des points nœuds des déplacements non nuls dans la structure. R dénote le nombre d'itérations, F_{ui} est la force résiduelle au $i^{\text{ème}}$ déplacement et R_i est la charge totale externe appliquée au $i^{\text{ème}}$ déplacement.



4.6 DISCUSSION GENERALE SUR LE CRITERE DE CONVERGENCE

La fonction principale du critère de convergence est de contrôler le nombre d'itérations dans un incrément. Le contrôle est exercé à travers le choix des tolérances de convergence et le type de normes. Un nombre maximum d'itérations est souvent recommandé afin d'éviter le déroulement indéfini du programme en cas de divergence. Le nombre d'itérations influence la forme finale de la courbe charge-déformations et la charge ultime. De la, il est important que les facteurs influençant le comportement de la convergence et la redistribution des forces soient bien cernés.

De bonnes tolérances sont théoriquement désirables, mais peuvent être très chères à obtenir parce qu'elles exigent souvent beaucoup d'itérations. Elles peuvent être particulièrement difficiles à atteindre là où les lois matérielles discontinues (comme la fissuration) forment une partie du comportement non linéaire. Les discontinuités de pente dans les lois matérielles peuvent causer de large forces résiduelles et ces dernières doivent être redistribués. Cependant, ces redistributions causent beaucoup de discontinuités et donc, d'autres forces résiduelles dans les itérations subséquentes. Dans de tels cas la vitesse d'accumulation des forces résiduelles peut être supérieure à la vitesse de leurs redistributions. Une autre situation se présente quand les forces résiduelles sont presque redistribuées lorsque une nouvelle discontinuité surgit causant une nouvelle augmentation des forces résiduelles et nécessitent un plus grand nombre d'itérations. Cela peut retarder considérablement la convergence. En pratique, l'initiation des

fissures particulières est sujet de quelques variations et il est discutable s'il est nécessaire d'attendre jusqu'à ce qu'une situation complètement stable de fissuration soit atteinte dans n'importe quel incrément par usage des tolérances très exigeantes. Un compromis est donc recommandé.

Dans cette étude le critère de convergence en forces est utilisé. Il contrôle directement l'équilibre. Le critère en déplacement peut quelques fois donner des résultats ne garantissant pas l'équilibre. Dans de telles circonstances, cette norme peut être petite et décroître alors que les forces résiduelles peuvent augmenter à cause du changement local dans la rigidité.

Finalement la vitesse de convergence dépend de la méthode utilisée dans la solution. Il est bien connu que la rigidité constante conduit à une solution non économique [5]. Un processus d'accélération peut être inclus pour donner une convergence rapide, mais les problèmes peuvent être compliqués et ne donnent pas de garantie que la solution sera la même comme la solution non accélérée.

4.7 LES ETAPES DE BASE DANS LA METHODE UTILISEE

1. Appliquer un incrément de charge Δf_i et de calculer la première valeur du déplacement incrémental.

$$\Delta\{\delta_i\} = [K]^{-1} \Delta\{f_i\} \quad (4.27)$$

Où K peut être la rigidité élastique initiale ou la rigidité tangentielle basée sur les conditions prévalant au début de l'incrément.

2. Calculer les incréments des déformations et des contraintes

$$\Delta\{\varepsilon_i\} = [B]^T \Delta\{\delta_i\} \quad (4.28)$$

$$\Delta\{\sigma_i\} = [D] \Delta\{\varepsilon_i\} \quad (4.29)$$

3. Calculer les déplacements totaux, les déformations et les contraintes par additions des valeurs incrémentales aux valeurs précédentes.

$$\delta_i = \delta_{i-1} + \Delta\delta_i \quad (4.30)$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i-1} + \Delta\varepsilon_i \quad (4.31)$$

$$\sigma_i = \sigma_{i-1} + \Delta\sigma_i \quad (4.32)$$

4. Contrôler l'état de contraintes contre le critère d'écoulement intermédiaire ou final, Si un critère est violé, les contraintes sont conduites à la surface d'écoulement.

5. Trouver les forces nodales équivalentes dues à (σ_i) , qui sont à l'intérieur de la surface de rupture. Calculer la force non équilibrée.

$$\Delta f_{ui} = \int B \sigma_i dv - f_i \quad (4.33)$$

f_i est la charge totale externe.

Cette étape d'élimination des forces résiduelles.

6. Contrôler la norme des forces ou critère de convergence.

Si le critère de convergence est satisfait, donc appliquer un nouvel incrément de charge et répéter toutes les étapes précédentes de (1) à (6) .

Sinon, appliquer les forces résiduelles (Δf_{ui}) et calculer les déplacements correctifs $(\Delta\delta_i)$ causés par les forces résiduelles.

$$\Delta\delta_i = [K]^{-1} \Delta\{f_{ui}\} \quad (4.34)$$

Retourner à la 2^{ème} étape et répéter le processus jusqu'à ce que les conditions de convergence soient satisfaites.

4.9 TECHNIQUE DE LA RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE

La résolution simultanée des équations joue un rôle majeur dans l'efficacité d'un programme en éléments finis. Cela est particulièrement vrai dans un programme non linéaire en éléments finis parce qu'un grand nombre de procédures est utilisé dans la résolution des équations.

Durant le processus assemblage-élimination les éléments sont considérés chacun son tour selon un ordre retenu. Chaque fois qu'un nouvel élément est appelé, ces coefficients de rigidité sont lus par la machine et additionnés soit aux équations existantes si les nœuds sont déjà actifs, soit aux nouvelles équations qui sont déjà incluses dans le front si les nœuds sont activés pour la première fois. Si quelques nœuds sont apparus pour la dernière fois, les équations correspondantes peuvent être éliminées et stockées dans un fichier disque.

4.10 CONCLUSION

La procédure mixte est la mieux adoptée pour la résolution des problèmes non linéaires par la méthode des éléments finis parce qu'elle combine les avantages des deux méthodes incrémentale et itérative et la méthode Skyline (Ligne de ciel) est choisie pour la résolution du système linéaire.

PRESENTATION DU LOGICIEL

5.1 INTRODUCTION

Le programme a été développé par M. le professeur CHARIF Abdelhamid [27], notre intervention réside dans l'amélioration de certaines sous-routines et principalement l'introduction d'une nouvelle méthode non linéaire qui est la méthode Arc Length.

Cette partie est consacrée à l'étude détaillée de la structure générale du logiciel ainsi que certaines procédures qu'il adopte et dont on citera:

- L'assemblage de la matrice de rigidité globale,
- La prise en compte des conditions aux limites
- La résolution du système non linéaire $[K] \{U\} = \{F\}$

5.2 STRUCTURE GENERALE DU PROGRAMME

5.2.1) Lecture et Organisation des données

a) ENTETE

- 1- La présentation de l'entête ainsi que le titre de l'analyse entamée par le programme.
- 2- La lecture, l'écho et le contrôle des données générales
- 3- La lecture, l'écho des conditions aux limites et la numérotation des équations des degrés de liberté actif.

Elle porte essentiellement sur le fichier de données qui, en général, reflète l'état des nœuds : (Coordonnées, conditions aux limites, chargement, type de chargement, condition de chargement ...) et des éléments : (connectivités et les coefficients des propriétés physiques des matériaux).

Le fichier de données, quoiqu'il n'est pas inséré dans le programme général, reste indépendant, de telle sorte que l'on peut changer les valeurs de ce dernier (pour l'étude par exemple d'un autre état de structure) sans se préoccuper de changer les instructions du programme général.

Ce fichier de données, concerne pratiquement l'ensemble des informations utiles et nécessaires à la résolution du problème de la structure considérée, il

est nécessaire pour le bon déroulement de l'ensemble des sous routines existantes dans le programme général.

b) OPTION 1

1) Choix du type du problème à étudier

- a) Contrainte plane NPB=1
- b) Déformation Plane NPB=2
- c) Axisymétrique NPB=3

2) Choix du type d'éléments à utiliser et du nombre de points de Gauss

- a- Élément Linéaire : 4 Nds; GAUSS = 2.
- b- Élément SERENDIP : 8 Nds; GAUSS = 3.
- c- Élément LAGRANGE : 9 Nds; GAUSS = 3.

c) DATAGEN

Lecture, écho et contrôle des données générales de la structure.

d) EQUANUM

Lecture et prise en compte des conditions limites. Numérotation des DDL actifs dans le tableau NUM et Nombre total d'équations NEQ.

- Initialisation et lecture des données dans le tableau NUM (phase 1)
- Lecture et traitement des conditions d'appuis (DDL nuls non actifs)
- Lecture/traitement des éventuelles contraintes de diaphragme rigide.
- Formation finale du tableau NUM (phase 2 de numérotation)
- Contrôle du Nombre total d'équation vis-à-vis de la dimension prévue.

5.2.2 Construction de la matrice de rigidité [K] et du vecteur force { F }

- 1- Le repérage des adresses des éléments diagonaux de la matrice de rigidité globale de la structure pour l'assemblage en profil (profil 1).
- 2- La lecture, l'écho des données des forces et la construction du vecteur {F}.

Elle concerne la construction de la matrice de rigidité globale $[K]$ de la structure, ainsi que le vecteur force $\{F\}$.

Cette étape s'avère importante dans le programme, car c'est au cours de celle-ci que s'effectue l'ensemble des opérations importantes et utiles pour les phases des calculs préalables elle se résume en :

a) Détermination du profil de la matrice de rigidité

Pour chaque élément de la structure, la matrice de rigidité élémentaire puis assemblée selon le procédé de l'assemblage en profil dans la matrice de rigidité globale de la structure

b) Calcul du vecteur des forces

Formation du vecteur $\{F\}$ pour l'élément bidimensionnel avec prise en compte des conditions aux limites après lecture des données de forces

Assemblage des forces nodales.

Calcul des forces nodales équivalentes dans le repère global.

Assemblage des forces nodales équivalentes.

Les Sous Routines utilisées dans cette étape sont :

a) PROFIL2

Détermine les hauteurs des colonnes au dessus de la diagonale et les adresses des éléments diagonaux de la matrice en profil (2)

a.1 PROFIL1

Détermination de la hauteur de la demi-colonne de chaque DDL et repérage dans LOCDG des éléments diagonaux de AKS en profil (1)

a.2 EQULOC:

Détermine les numéros des équations des DDL de l'élément IE dans le vecteur LOCEQ à partir du tableau NUM.

b) KSP

Formation de la matrice de rigidité par assemblage en profil (2) des matrices d'éléments bidimensionnels formés par intégration numérique.

b.1 FORMD

Formation de la matrice élastique pour l'élément bidimensionnels

b.2 GAUSSQ:

Positions et pondération des points d'intégration de GAUSS-LEGENDRE (Intégration 1x1, 2x2, 3x3 uniquement)

b.3 FFORM2D:

Construction des fonctions de forme et leurs dérivées pour les éléments isoparamétriques 2D à 4, 8, ou 9 Nœuds.

- FORM(I,J) sont les fonctions de forme:

* Standard si KFORM = 0.

* Hiérarchique si KFORM≠0.

- FORM(1,J) et FORM(2,J) sont les dérivées:

* Naturelles si KDER = 0.

* Cartésiennes si KDER ≠ 0.

b.4 FORMB

Formation de la matrice B liant les déformations et les déplacements pour l'élément bidimensionnels

b.5 EQULOC

Détermine les numéros des équations des **(D.D.L)** de l'élément **IE** dans le vecteur **LOCEQ** à partir du tableau **NUM**, (Création du vecteur **LOCEQ**).

b.6 ASSEMKSP2

Assemblage de la matrice de rigidité compacte (en vecteur) **AKEV** dans la matrice globale **AKS** en profil (2).

c) FORCE 2D

Lecture/écho des données des forces et formation du vecteur **F** pour les structures en éléments finis bidimensionnels.

5.2.3 Résolution du système d'équations non linéaires

1- La résolution en analyse non linéaire

- 2- La procédure des boucles sur les itérations et le test d'actualisation
- 3- L'assemblage de la matrice de rigidité globale de la structure.
- 4- La Factorisation éventuelle de la matrice.
- 5- Les calculs des forces internes et Résiduelles
- 6- Le test de Convergence

C'est la plus importante étape de calcul dans le programme, car c'est dans celle-ci que l'ensemble de toutes les opérations nécessaires s'effectuent pour l'analyse non linéaire et ceci pour aboutir à un résultat « une solution » qui converge et qui soit précis.

Ces opérations sont les suivantes :

- a) Lecture et écho des données de l'analyse non linéaire.
- b) Insertion du procédé incrémental / itératif plus celui de l'actualisation de la matrice de rigidité [K], utile pour l'analyse non linéaire.
- c) Assemblage éventuel de la matrice globale de l'élément bidimensionnel plan en tenant compte de la partie non linéaire déjà considérée, c'est à dire l'introduction de la phase plastique du matériau dans les éléments globaux de la matrice de rigidité pour pouvoir faire assemblage des éléments de la structure
- d) Factorisation et substitution de la matrice en profil par le procédé de CHOLESKY, avec la décomposition ($K=L, L^T$), on rappelle que cette méthode ne s'applique qu'aux matrices symétriques définies positives.

La décomposition se fait en deux matrices triangulaires, pour faciliter les opérations de résolution, on rappelle aussi que dans cette sous étape, on tient compte des déplacements imposés non nuls avant la factorisation de la matrice.

On doit d'abord faire la réduction du vecteur force {F}, pour passer enfin à la substitution à rebours de la matrice de rigidité assemblée en profil.

- e) Résolution et calcul des forces internes et résiduelles puis passage au test de convergence de celui-ci.

Les Sous routines concernées sont :

a.1 FORNOD

Lecture et assemblage des forces nodales dans le vecteur F

a.2 GAUSSQ

a.3 FFORM2D

a.4 DEPIMP

Lecture et prise en compte des déplacements imposés non nuls dans F en mémorisant les localisations pour la prise en compte ultérieure dans la matrice de rigidité.

b) TEST

Test d'actualisation de AKS selon l'algorithme non linéaire NALG

c) FACTKSPCR

Factorisation de CROUT de la matrice en profil $K = L * D * LT$

- KOD = 0: Analyse linéaire unique ou non linéaire avec une matrice AKS actualisée à chaque itération (NEWTON-RAPHSON).

- KOD = 1: Première des analyses linéaire avec plusieurs cas de chargement.

- KOD = 2: Analyses linéaires ultérieures avec des déplacements imposés et donc une nouvelle réduction de AKS.

- KOD = 3: Analyses linéaires ultérieures ou non linéaires sans nouvelle réduction de AKS(NEWTON-RAPHSON modifiée).

c.1 LIMKSPRS:

Prise en compte des déplacements élastiques dans AKS en profil.

c.2 LIMKSPDP:

Prise en compte des déplacements imposés non nuls dans AKS en profil

d) SUBKSPCR

Réduction du vecteur force et substitution à rebours d'une matrice en profil factorisée par la méthode de CROUT $K = L * D * LT$

e) INTER2D

Correction des contraintes à la surface d'écoulement et calcul des forces nodales internes pour les éléments finis 2D

f) CONVER

Test de convergence du processus itératif selon le code KONV

KONV=1	Convergence des normes des forces
KONV=2	Convergence des normes de déplacements
KONV=3	Convergence des normes des forces et déplacements
KVER=0	Convergence atteinte
KVER=1	Convergence non atteinte

5.2.4 Impression des Résultats

1- L'impression des résultats de la première itération (et des résultats de l'incrément).

2- Le test optionnel en cas de non convergence

Une description plus détaillée des différentes étapes sera présentée ultérieurement.

Après avoir effectué l'ensemble de toutes les opérations nécessaires et utiles pour la résolution du système d'équation non linéaires, on récupère les résultats des déplacements de chaque nœud ainsi que les contraintes et les déformations plastiques respectives à chaque élément dans un fichier résultat crée de façon indépendante du programme principal et dans lequel figurent les valeurs de l'incrément primaire ainsi que les incréments et les itérations effectuées pour chaque état de structure, il est à noter que dans cette étape et exceptionnellement, il existe un test de convergence de façon à provoquer l'arrêt systématique des calculs et des impressions des résultats exécutés au moment où la condition proposée est satisfaite.

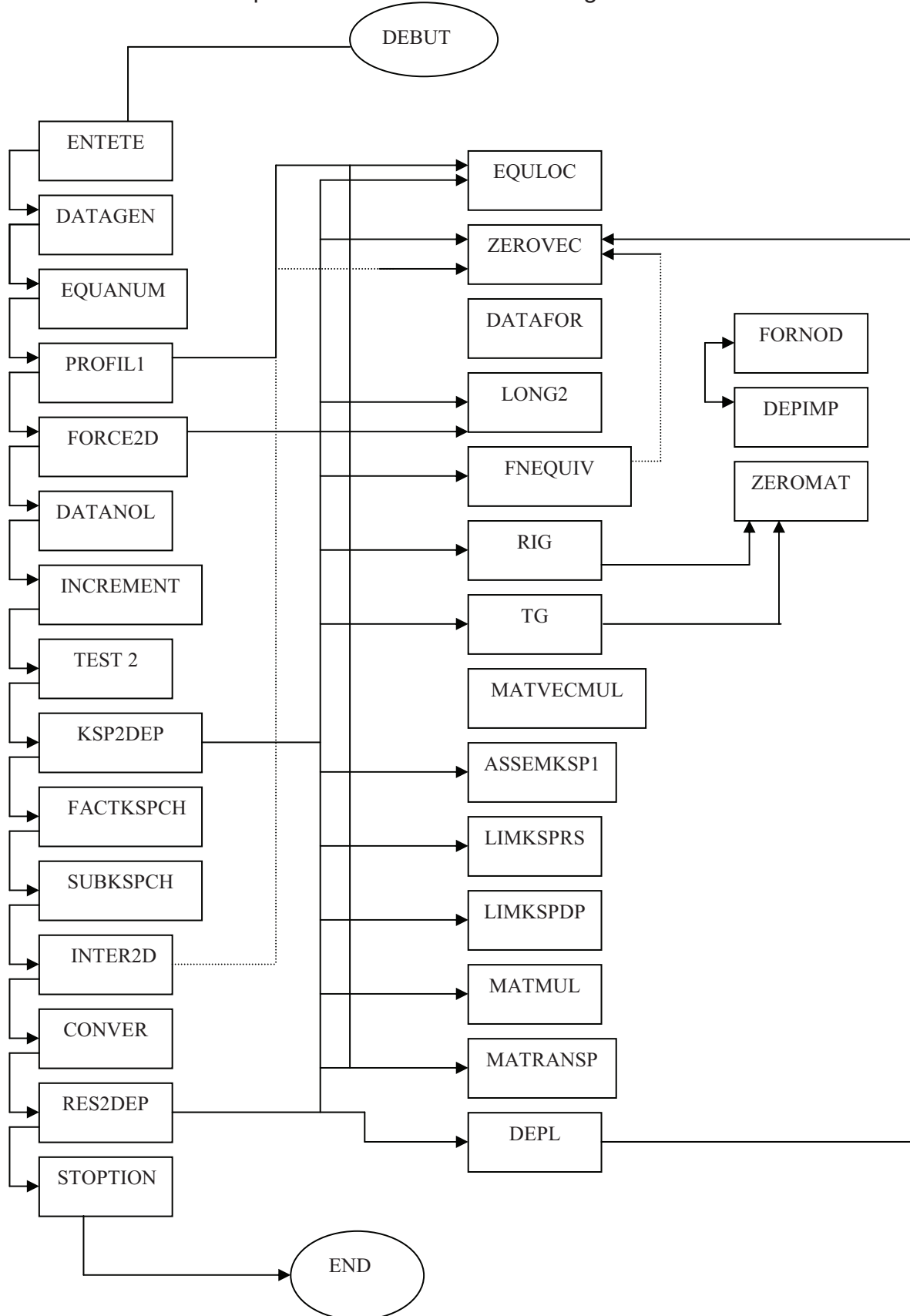
Les Sous Routines gouvernant ces instructions sont :

a) RES2DEP

Calcul et impression des résultats pour les structures

b) STOPTION

Visant le test optionnel en cas de non convergence des solutions



Organisation de la structure du programme

5.7- ORGANIGRAMME DE QUELQUES SUBROUTINES :

Les appels aux différents sous-programmes sont nécessaires pour effectuer les opérations intermédiaires.

Dans ce qui suit, nous allons représenter les organigrammes de quelques sous-programmes :

SUBROUTINE DATANOL (NINC, MITER, TOL, NAL, KONV)

Elle permet la lecture, écho des données d'une analyse non- linéaire.

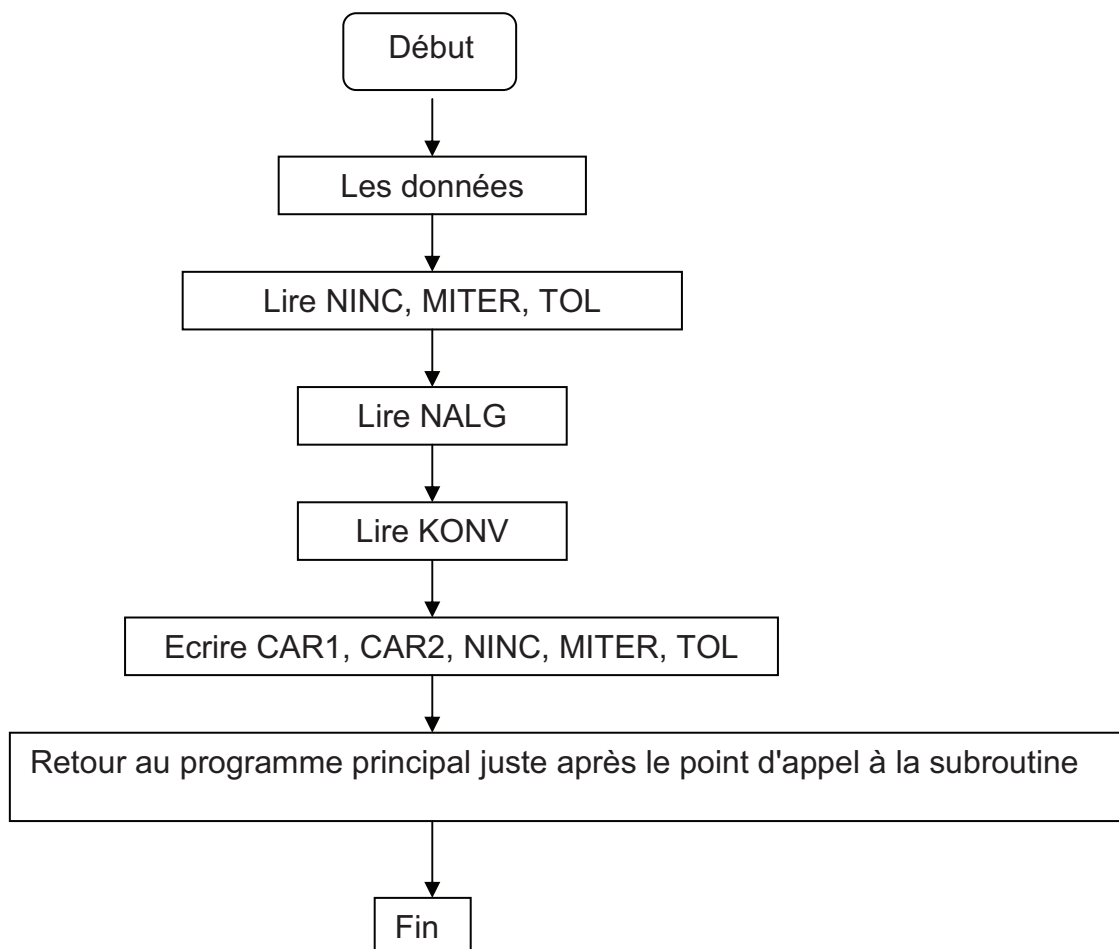
Nombre d'incrément NINC, Nombre maximal d'itérations par incrément MITER, Tolérance TOL, Codes de l'algorithme non- linéaire NALG et du critère de convergence KONV (Lecture interactive de NALG et KONV).

NALG = 1/2/3 : Méthode de rigidité initiale / Newton-Raphson modifiée.

KONV = 1/2/3 : Convergence des normes des déplacements / Forces / Forces et Déplacements.

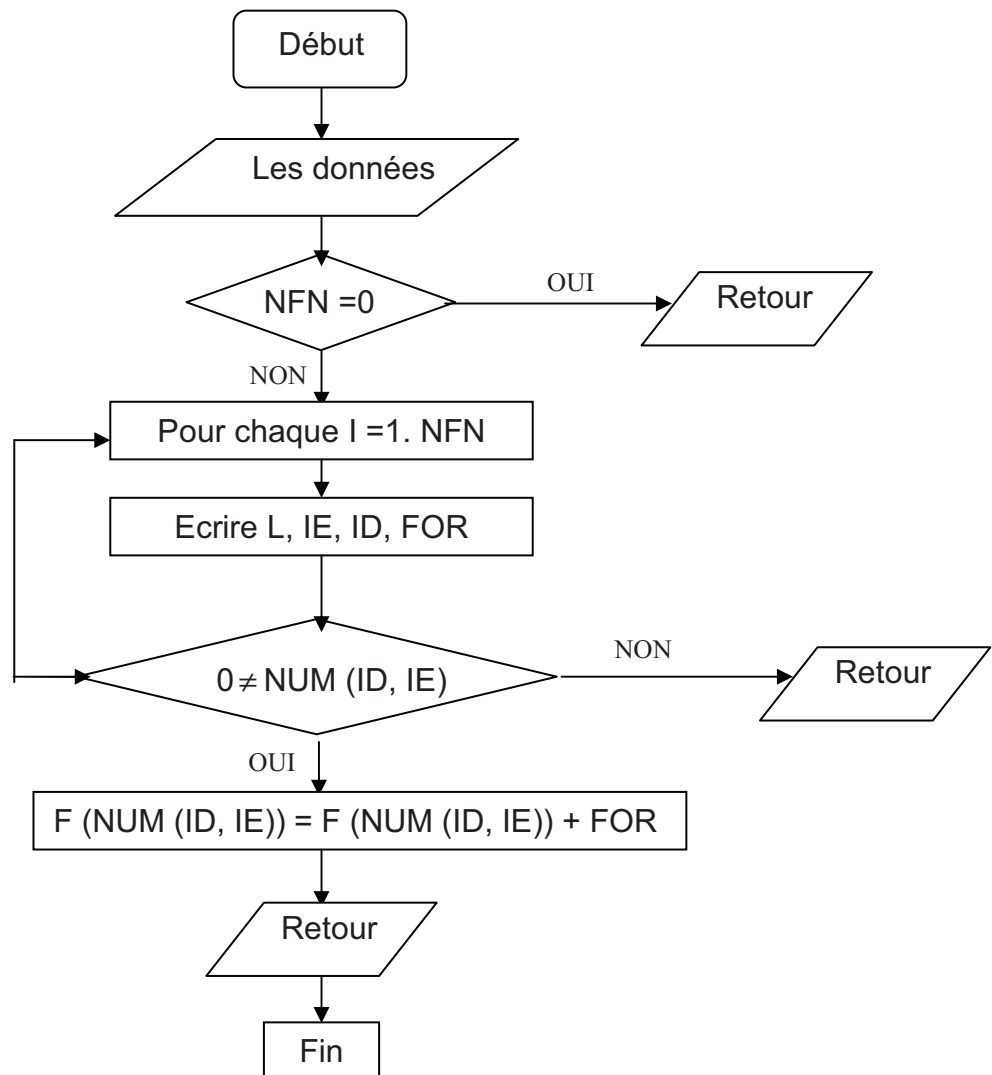
CAR 1 : L'algorithme non- linéaire.

CAR2 : Critère de convergence.



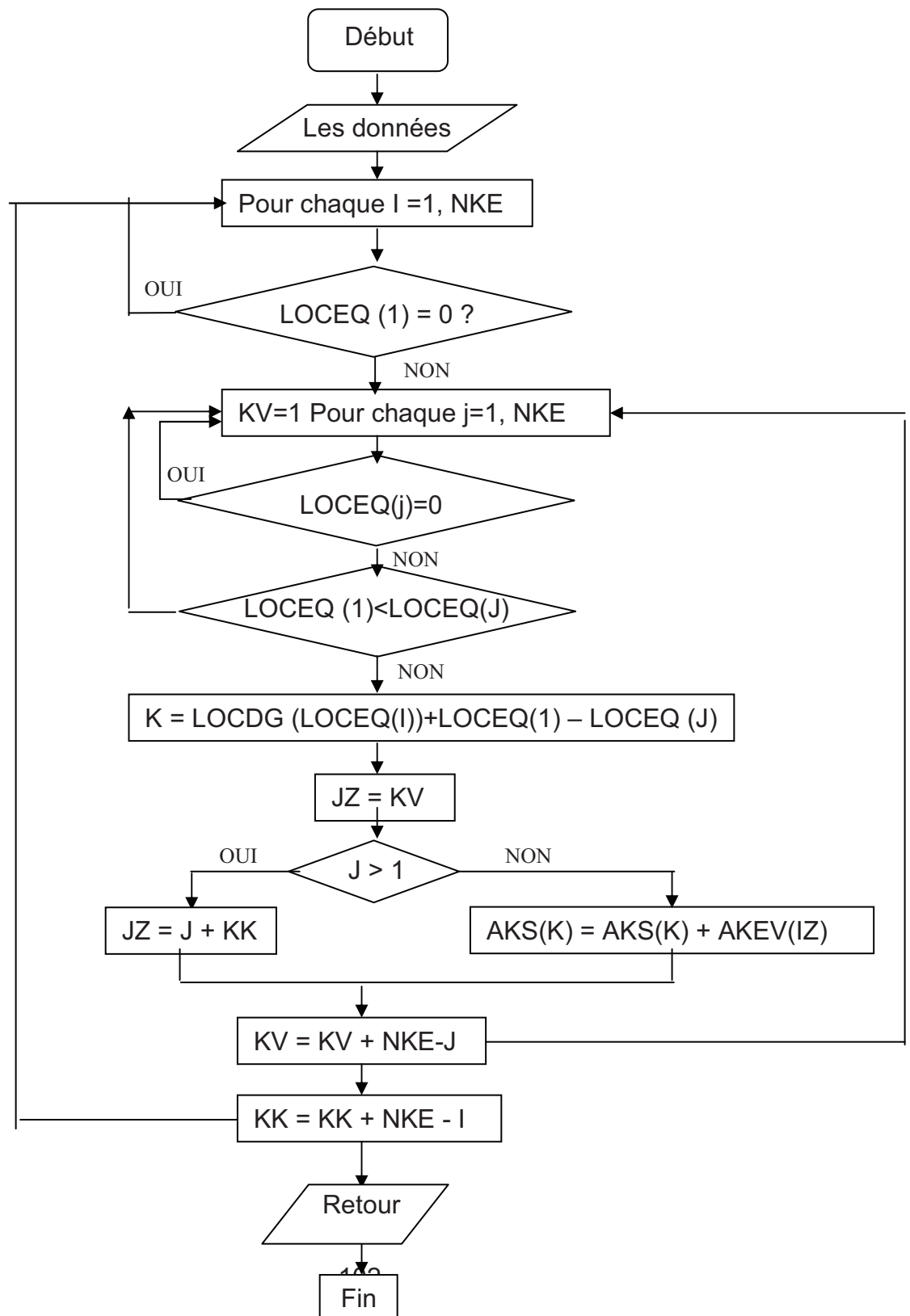
SUBROUTINE FORNOD : (NFN, F, NUM, NDDL)

Elle assure la lecture/Assemblage des forces nodales dans le vecteur F.



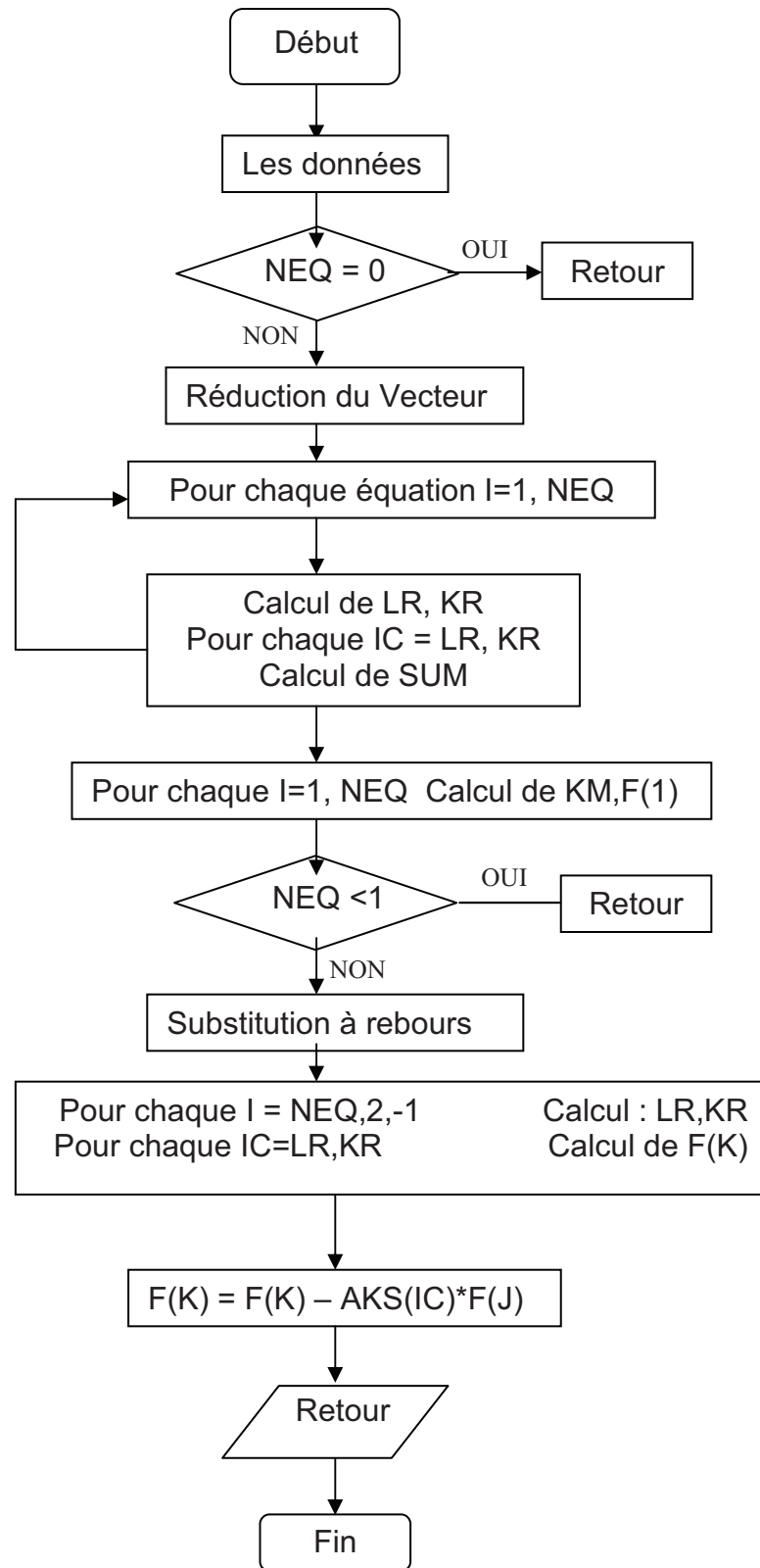
SUBROUTINE ASSEMKSP2 : (AKS, AKEV, LOCEQ, LOCDG, NKE)

Elle assure l'assemblage de la matrice de rigidité compactée (en vecteur) AKEV dans la matrice globale AKS en profil (2).



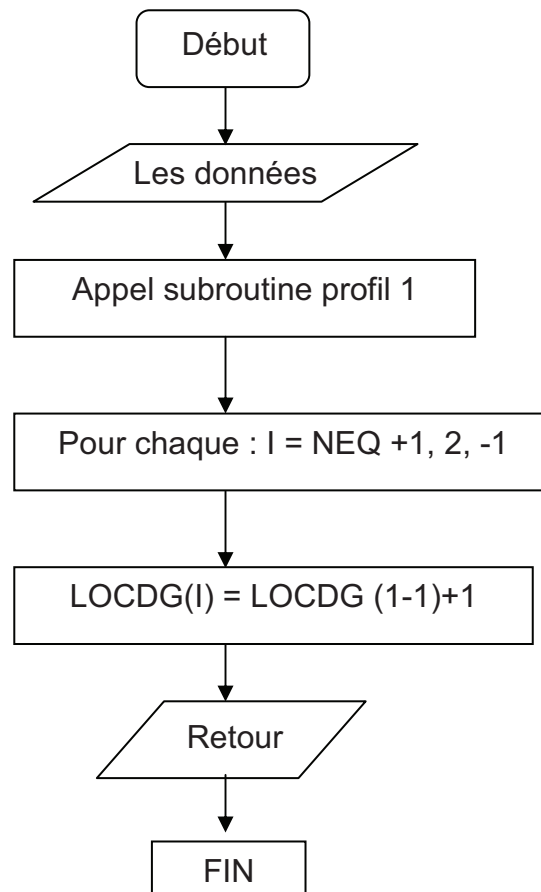
SUBROUTINE SUBKSPCR : (AKS, F, NEQ, LOCDG)

Elle assure la rédaction du vecteur Force et substitution à rebours d'une matrice en profil factorisée par la méthode de CROUT $K = L * D * LT$.



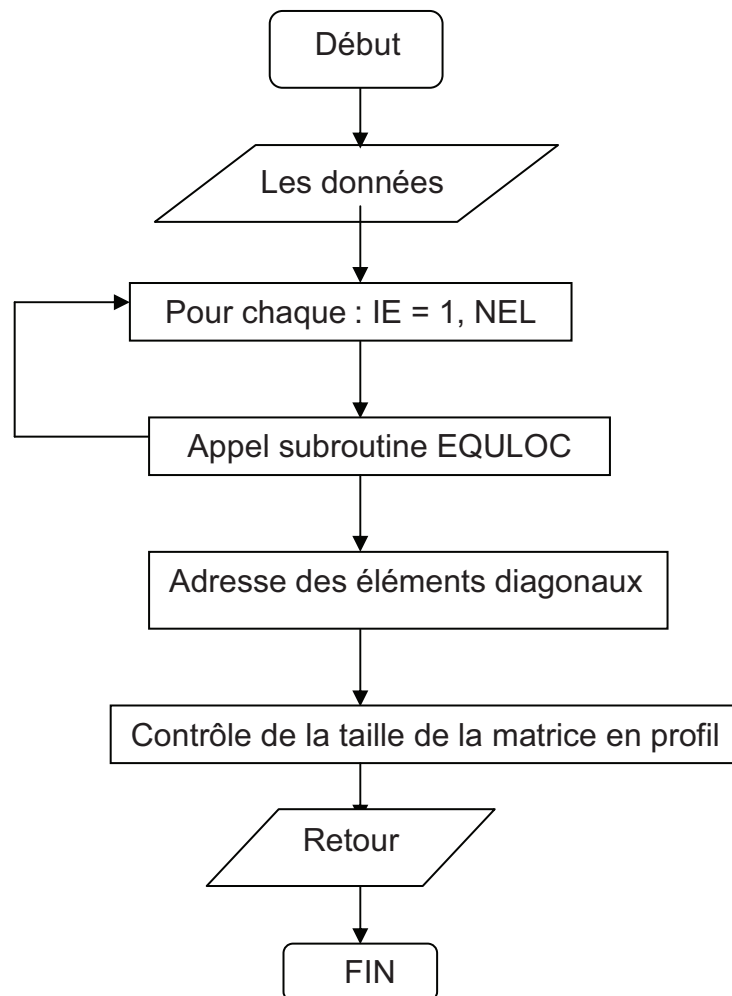
SUBROUTINE PROFIL 2 : (LOCDG, NEL, LOCEQ, LOCEL, NUM, NEQ, NDDL, NDEL, MKS, MDEL)

Elle assure la détermination des hauteurs des colonnes au-dessus de la diagonale et les adresses des éléments diagonaux de la matrice en profil (2).



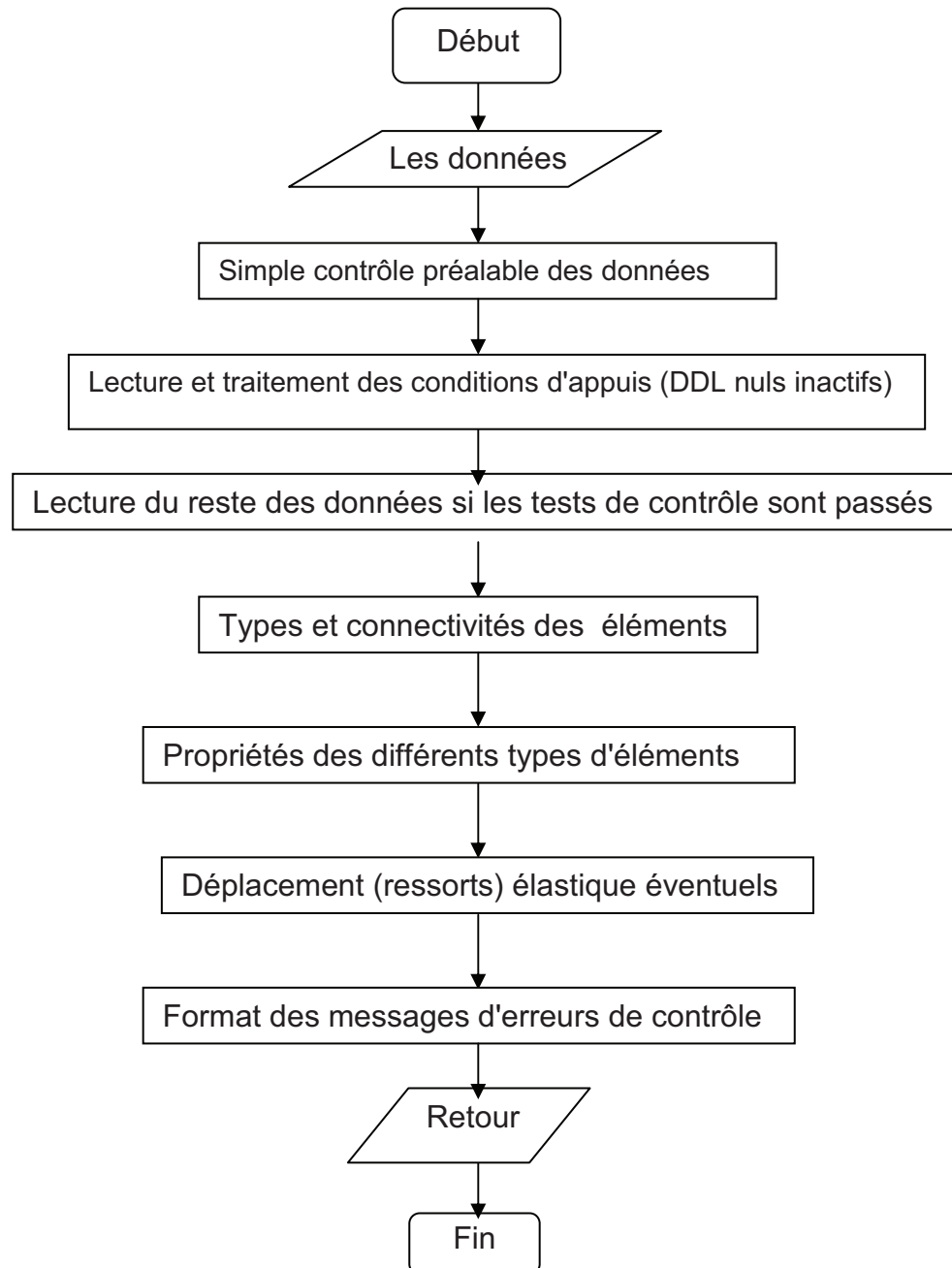
SUBROUTINE PROFIL 1 : (LOCDG, NEL, LOCEQ, LOCEL, NUM, NEQ, NDDL, NDEL, MKS, MDEL)

Elle assure la détermination de la demi-colonne de chaque DDL et repérage dans LOCDG des éléments diagonaux en profil (1).



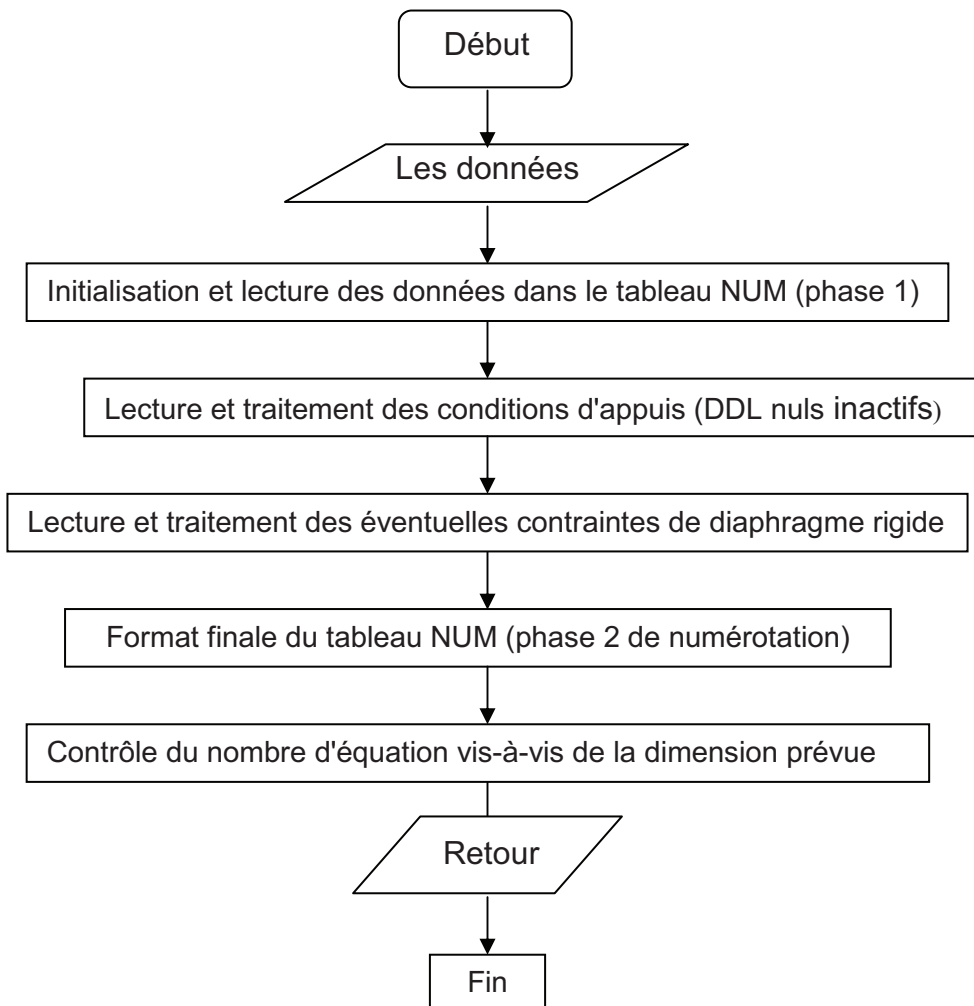
SUBROUTINE DATAGEN : (NEL, NTYP, NND, NRS, NAPP, NDR, NCH, LOCEL, MAT, PROP, COOR, RAID, LOCRS, NDDL, NDIM, NDEL, MDEL, NPROP, CHAR, CHAR1, CHAR2, MEL, MND, MTYP, MRS)

Elle permet la lecture, écho et contrôle des données générales de la structure.



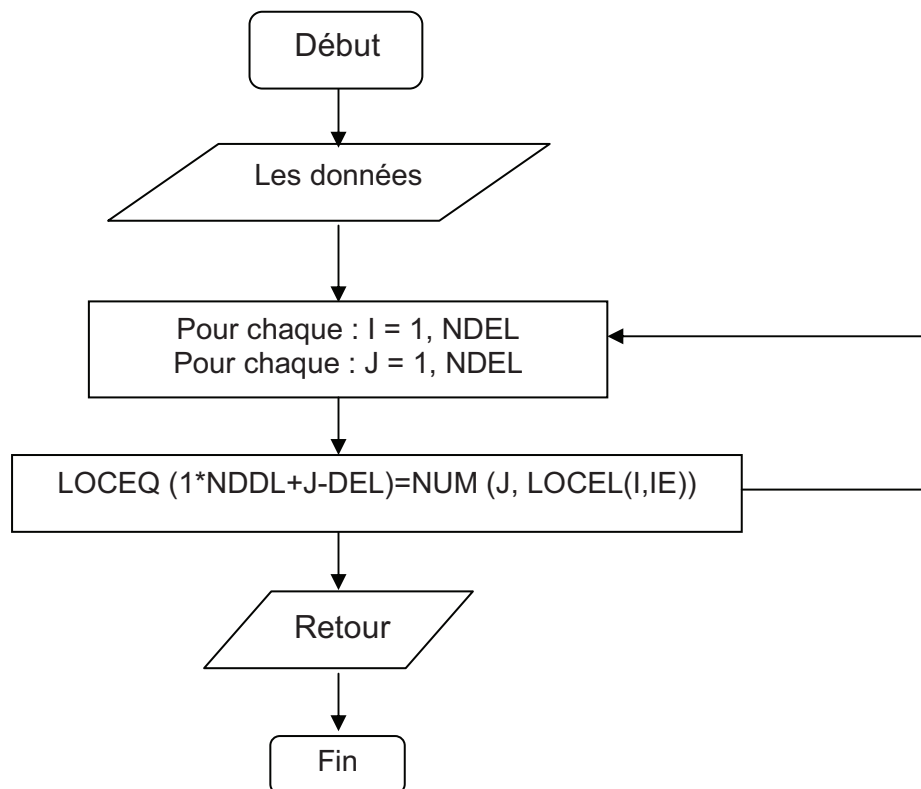
SUBROUTINE EQUANUM : (NND, NAPP, NDDL, NUM, NEQ, MEQ)

Elle permet la lecture et la prise en compte des conditions limites, numérotation des DDL actifs dans le tableau NUM et nombre total d'équations NEQ.



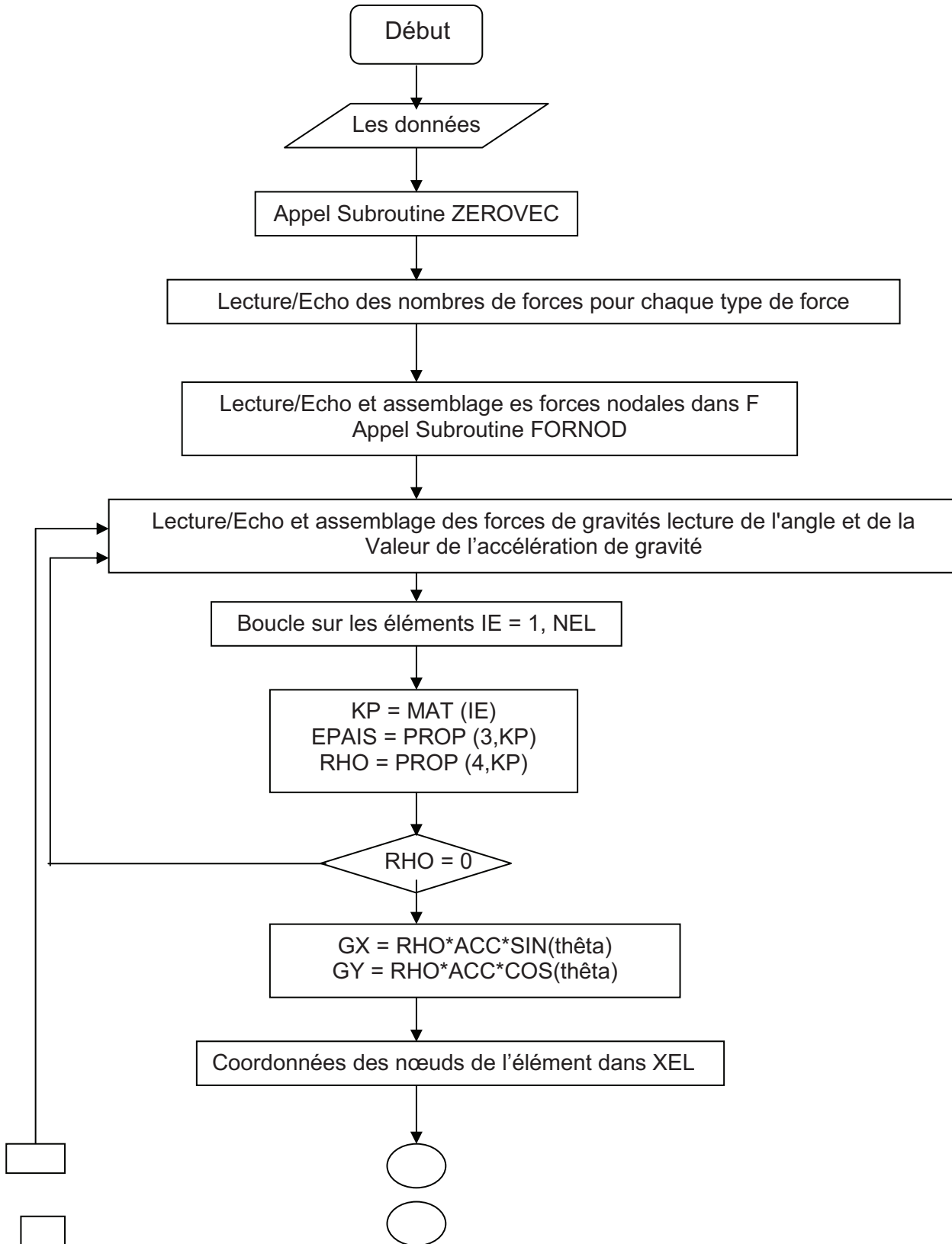
SUBROUTINE EQULOC : (IE, LOCEL, NUM, LOCEQ, NDDL, NDEL, MDEL)

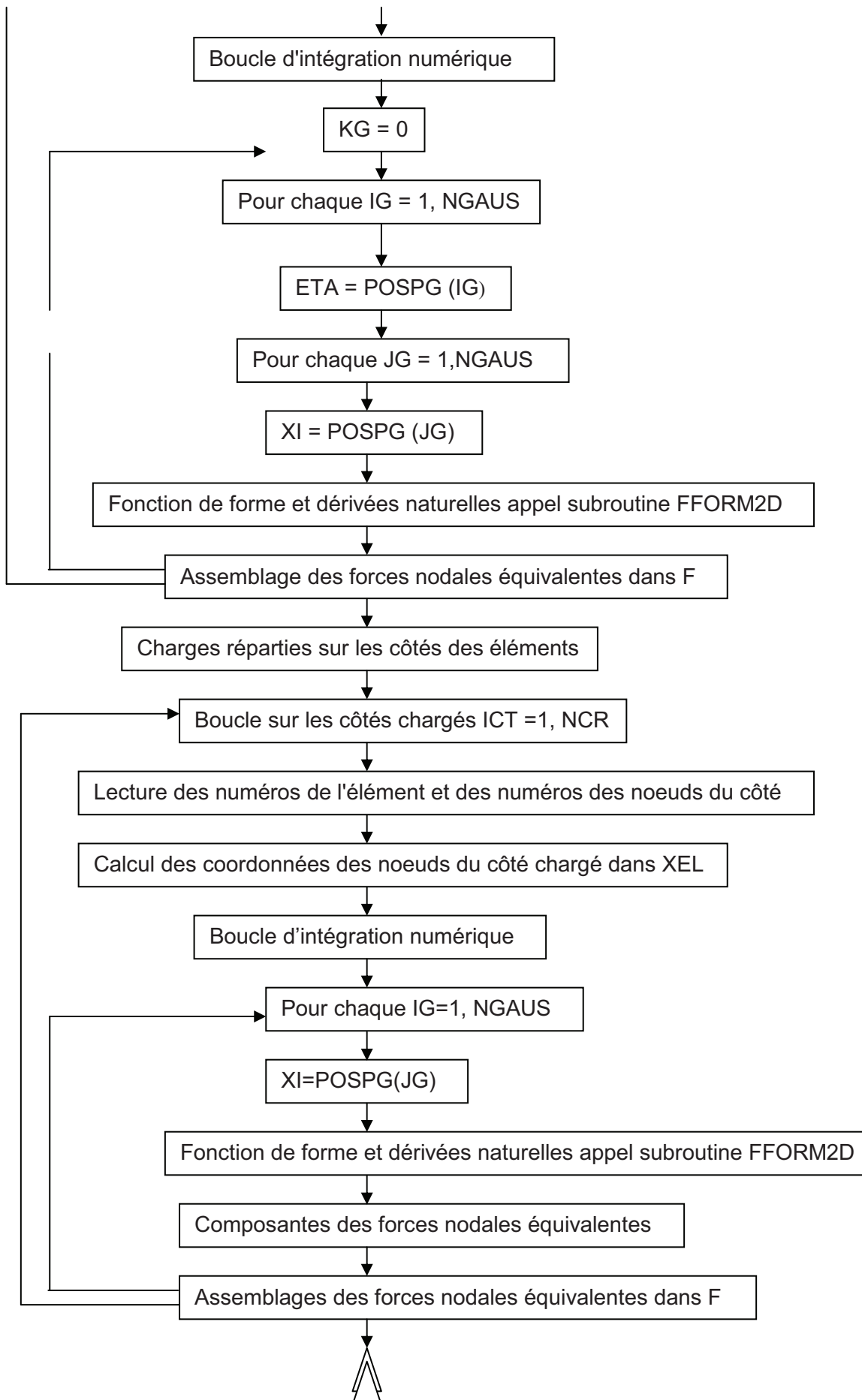
Elle détermine des numéros des équations des DDL de l'élément IE dans le vecteur LOCEQ à partir du tableau NUM.

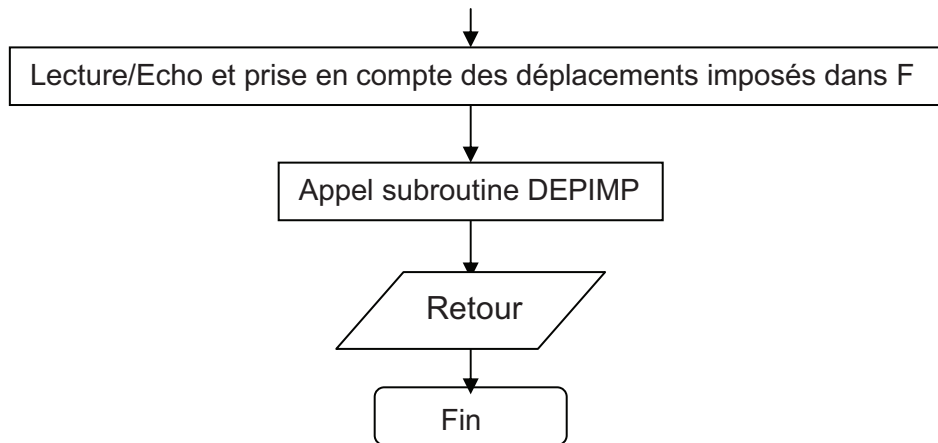


SUBROUTINE FORCE 2D : (COOR, PROP, LOCEL, MAT, NEL, NGAUS, NDEL, NPB, POSPG, POND, NUM, NEQ, F, LOCDP, NPROP)

Elle assure la lecture/Echo des données des forces et formations du vecteur F pour les structures en éléments finis bi-dimensionnels.







B/ Les autres sousroutines :

- ENTETE (PROG, TITRE)
Entête et ouverture des fichiers données et résultats.
- FORMB2D (B, NDEL, FORM, XPG, NPB, KG)
Formation de la matrice B liant les déplacements et les déformations pour les éléments finis bidimensionnels.
- FORMD2D (D, EY, XNU, NPB)
Calcul de la matrice D(4*4) pour les éléments finis 2D.
- LIMMKSPRS (AKS, NNDP, LOCDP, LOCDG, NUM, NDDL)
Prise en compte des déplacements imposés non nuls dans AKS en profil.
- MATRANSP : (A, AT, M, N)
Transposée AT (N,M) d'une matrice A(M,N)
- TEST : (1, NCH, NDP, NDP1, KOD)
Détermination du code KOD avant la factorisation éventuelle.
- ELAST : (FORM, D, DU, NDEL, NCONT, NPB, CONT, KG, XPG, XNU)
Calcul des déformations et contraintes linéaires.
- ZEROVEC : (V, N)
Initialisation à zéro d'un vecteur V(N).
- ZEROMAT : (A, M, N)
Initialisation à zéro des éléments d'une matrice A(M,N).

- MATVECMUL : (A, M, N, V, Y)
Multiplication d'une matrice par un vecteur $Y(N) = A(M,N)*V(N)$.
- MATMUL : (A, KA, B, KB, C, KC, L, M, N)
Produit de deux matrices $C(L,N) = A(L,M)*B(M,N)$.
- KSP2DEP : (AKS, COOR, LOCEL, MAT, NEL, NGAUS, NEQ, NDEL, NCONT, POSPG, POND, PROP, NPB, LOCDG, NUM, LOCEQ, INC, ITER)
Assure la formation de la matrice e rigidité par assemblage en profil(2) des matrices de rigidités élémentaires pour les structures élasto-plastiques en éléments finis 2D de 4, 8 ou 9 noeuds.
- FFROM2D : (SS, TT, FORM, DETJ, NDEL, KDER, IE, KG, XPG, KFORM)
Construction des fonctions de formes et leurs dérivées pour les éléments Isoparamétriques 2D à 4, 8 ou 9 noeuds.
FORM(3,J) sont les fonctions de forme standards si KFORM = 0 et hiérarchiques si KFORM dif 0.
FORM(1,J) et FORM(2,J) sont les dérivées naturelles si KDER = 0 et catésiennes si KDER dif 0.
- DEIMP : (NDP, F, NUM, NDDL, LOCDP)
Lecture et prise en compte des déplacements imposés non nuls dans F en mémorisant les localisations pour la prise en compte ultérieure dans la matrice de rigidité.
- PRINCIP : (CONT, CONTP, PHI)
Calcul des contraintes principales et de l'angle PHI en degrés.
- PLAST : (A, DP, DEV, NCRIT, XJ2, RJ2, THETA , NPB, EY, XNU, ECR, FROT, DENOM)
Evaluation des vecteurs d'écoulement plastique A et DP pour les éléments 2D et pour les 4 critères usuels.
- INVAR : (DEV, NCRIT, RJ2, CONT, THETA, XJ2, FEC, FROT)
Calcul des invariants et de la fonction d'écoulement.
- STOPTION : (MITER1, ITER, KITER)
Arrêt optionnel du programme en cas de non-convergence après MITER itérations.

- CONVER : (ITER, KVER, UT, F, FI, FT, TOL, NEQ, KONV).
Test de convergence du processus itératif selon le code KONV.
KONV = 1/2/3 : (Convergence des normes des déplacements / Forces / Forces et Déplacements.
KVER = 0/1 : Convergence atteinte / non atteinte.
- TEST2 : (INC, ITER, MITER1, KACT, KDECH)
Test d'actualisation de AKS selon l'algorithme non linéaireNALG
KACT = 0/3 : Actualisation / pas d'actualisation de la matrice K.
Actualisation systématique à la première itération du premier incrément (INC=ITER=1) et pour la méthode de Newton- Raphson modifiée (NALG=3), il y a une actualisation périodique toutes les 5 itérations (à partir de la deuxième) ou en cas de déchargement (KDECH=1)
- CRITERE : (NCRIT)
Choix du critère elasto-plastique à étudier.
NCRIT = 1/2/3/4 : critère de Tresca / Von Mises / Mohr Coulomb / Drucker Prager.
- OPTION1 : (NPB, NDEL, NGAUS)
Choix du type de problème à étudier, du type d'élément et du nombre de points de Gauss à utiliser.
NPB = 1/2/3 : Contraintes planes / Déformations planes / Axisymétrie.
NDEL = 4/8/9 : Elément linéaire à 4 noeuds / 8 noeuds (Serendip) / 9 noeuds (Lagrange).
NGAUS = 2/3 : Intégration 2*2 / Intégration 3*3.
- GAUSS : (NGAUS, POSPG, POND)
Positions et pondérations des points d'intégration de GAUSS-LEGENDRE
(Intégration 1*1, 2*2, 3*3 uniquement).
- INTERN2D : (F, COOR, FI, LOCEL, NEQ, MAT, NEL, NGAUS, NDEL, NPB, POSPG, POND, PROP, NCONT, NCRIT, KDECH, NUM, INC, ITER)

- Correction des contraintes à la surface d'écoulement et calcul des forces nodales internes pour les éléments finis 2D.
- RES2DEP : (NEL, NUM, UT, NND, NPB, NGAUS)
Assure le calcul / impression des résultats pour les structures élasto-plastique en éléments finis 2D.
 - DEPL : (IOUT, NND, F, NUM, NDDL, U)
Calcul et impression des déplacements nodaux.

 - FACTKSPCR (AKS, NEQ, LOCDG, NUM, NDDL, NRS, RAID , LOCDP, LOCRS, KOD)
Factorisation de CROUT de la matrice en profil $K=L*D*LT$
 - INCREMENT : (F, F0, FT, INC, IMP, TFACT, NEQ)
 - Données et incrémentation du chargement.
 - IMP : Code d'impression.
 - Si IMP=1 : Il y a impression des résultats de la première itération de l'incrément.

VALIDATION / EXPERIMENTATION NUMERIQUE

EXPOSITION THEORIQUE

Expansion d'un tube de mur épais

a) Gonflement élastique et écoulement initial :

Un important problème pratique survient dans le gonflement du tube cylindrique de mur épais sous une pression interne p et une force interne P . Les rayons (i) interne et externe du tube sont a et b respectivement. Dans le procédé d'autofrettage, le tube est soit fermé sur les deux extrémités par tampon (Bouchons) rigides, ou bien munis de pistons flottants qui permettent des contractions axiales libres.

Le tube est supposé assez large que les sections planes transversales restent planes durant le gonflement. Ceci signifie que les déformations longitudinales ε_z est indépendante du rayon de l'élément. Les contraintes et les déformations suffisamment loin des extrémités ne varient pas le long de la longueur du tube, et l'équation de l'équilibre est :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} \quad 6.1$$

L'axe z des coordonnées cylindriques (r, θ, z) est pris le long de l'axe du tube. Tant que le tube est entièrement élastique la contrainte longitudinale peut être écrite à partir de la loi de HOOKE, comme suit :

$$\sigma_z = E\varepsilon_z + \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) \quad 6.2$$

Où E est le module de young et ν le coefficient de poisson. Désignons le déplacement radial par U . la déformation radiale ε_r et la déformation circonférentielle ε_θ pouvant être écrites comme :

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = -\nu\varepsilon_z + \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_r - \nu\sigma_\theta] \quad 6.3$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{U}{r} = -\nu\varepsilon_z + \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r]$$

Puisque \mathcal{E}_z est indépendante de r , l'élimination de U des équations ci-dessus et la substitution de $\sigma_\theta - \sigma_r$ de (6.1) donne l'équation de compatibilité :

$$\frac{\partial}{\partial r}(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0$$

Ceci montre que $\sigma_\theta - \sigma_r$ et σ_z ont des valeurs constantes à chaque état de l'expansion élastique. Ecrivant $\sigma_\theta - \sigma_r = 2A$, l'équation de l'équilibre peut être intégrée pour obtenir la solution de LAME.

$$\sigma_r = A + \frac{B}{r^2} \qquad \sigma_\theta = A - \frac{B}{r^2}$$

Où A et B sont les constantes obtenues à partir des conditions aux limites $\sigma_r = 0$ à $r=b$ et $\sigma_r = -P$ à $r = a$. Donc les contraintes deviennent :

$$\sigma_r = -P \left(\frac{\frac{b^2}{r^2} - 1}{\frac{b^2}{a^2} - 1} \right) \qquad \sigma_\theta = -P \left(\frac{\frac{b^2}{r^2} + 1}{\frac{b^2}{a^2} - 1} \right) \qquad 6.4$$

Si la charge longitudinale résultante est désignée par P , la contrainte axiale σ_z est $P/\pi(b^2 - a^2)$. Puisque cette contrainte est constante à travers la section. En particulier, $P=0$ pour la condition d'extrémité libre et $P = \pi a^2 p$ pour la condition d'extrémité fermée (bloquée).

La condition de déformation plane ($\mathcal{E}_z = 0$), quelque fois considérée pour sa simplicité, donne σ_z directement de (6.2) et (6.4). D'où

$$\sigma_z = \begin{cases} \frac{P}{\pi \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right)} & \text{Extrémité Fermée} \\ 0 & \text{Extrémité Libre} \\ \frac{2\nu p}{\pi \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right)} & \text{Déformation Plane} \end{cases} \qquad 6.5$$

Le déplacement radial est obtenu à partir de l'équation contrainte-déformation \mathcal{E}_θ . En substituant de (6.4) et (6.5), on obtient :

$$u = \frac{p}{E} \frac{\alpha r + (1 + \nu) \frac{b^2}{r}}{\frac{b^2}{a^2} - 1} \qquad 6.6$$

où α a la valeur : $1-2\nu$ pour la condition d'extrémité fermée.

$1-\nu$ pour la condition d'extrémité libre.

Et $(1+\nu)(1-2\nu)$ pour la condition de déformation plane

La déformation axiale est obtenue à partir de (6.2) et (6.5) comme :

$$E\varepsilon_z = \begin{cases} \frac{(1-2\nu)p}{b^2/a^2 - 1} \dots\dots\dots \text{Extrémité Fermée} \\ 0 \dots\dots\dots \text{Extrémité Libre} \\ \frac{2\nu p}{b^2/a^2 - 1} \dots\dots\dots \text{Déformation Plane} \end{cases} \quad 6.7$$

Dans tous les trois cas σ_z est la contrainte intermédiaire. Pour la condition extrémité fermée, σ_z est exactement la moyenne des deux autres contraintes principales.

Si le critère d'écoulement de TRESCA est adopté, le début d'écoulement est donné par $\sigma_\theta - \sigma_r = 2k$, Où k est la contrainte d'écoulement au cisaillement pur.

Ceci donne à partir de (6.4) que :

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \frac{2pb^2/r^2}{b^2/a^2 - 1}$$

qui montre que la différence de contrainte a sa plus grande magnitude à $r = a$. par conséquent, l'écoulement commence au rayon interne quand la

$$\text{pression appliquée devient } P_e = k\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \quad 6.8$$

Indépendamment des conditions limites, si de l'autre côté, le matériau s'écoule selon le critère de Von Mises, la condition limite influe la pression d'écoulement. Il est convenable d'exprimer le critère de Von Mises sous la forme :

$$\frac{1}{2}(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + \frac{2}{3}\left(\sigma_z - \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2}\right)^2 = 2k^2$$

Puisque le second terme de la partie gauche est indépendant de r , la fonction d'écoulement a encore la valeur la plus grande à $r = a$ et la pression P_e qui cause l'écoulement à $r = a$ est donnée par :

$$\left(\frac{b^2 p_e}{b^2 - a^2}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\sigma_z - \frac{a^2 p_e}{b^2 - a^2}\right)^2 = k^2$$

La substitution de (6.7) montre que P_e est identique à (6.8) pour la condition d'extrémité fermée. La pression d'écoulement pour les deux autres conditions

$$\text{d'extrémités étant : } P_e = k \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \left\{ 1 + (1 - 2\beta)^2 \frac{a^4}{3b^4} \right\}^{-1/2} \quad 6.9$$

où $\beta=0$ pour les extrémités ouvertes et $\beta=v$ pour déformations planes. Les valeurs de P_e pour les trois conditions d'extrémités diffèrent sensiblement l'une de l'autre pour valeurs usuelles de v , la basse pression étant celle correspondant aux extrémités ouvertes.

Quand une pression uniforme p est appliquée extérieurement à un tube de mur épais de rapport mur b/a , la distribution élastique de σ_r et σ_θ est obtenue à partir de (6.4) en inter-changeant a et b . Dans ce cas, aussi les contraintes sont négatives, σ_θ étant plus compressive que σ_r , le critère de TRESCA nécessite que $\sigma_\theta = -2k$ à $r = a$ pour que l'écoulement commence, et la pression initiale d'écoulement P_e est fournie à être la même que (6.8).

Si un tube de mur épais, qui est déjà sous une pression externe $p_2 < p_e$, est soumis à une pression interne augmente quand $p_1 > p_2$.

L'écoulement commence à la surface interne quand P_1 dépasse P_2 par un montant égal à P_e . La distribution élastique de contrainte dans un tel tube est obtenue par la superposition de celles dues à P_1 et P_2 séparément à $r = a$ et $r = b$ respectivement. [88,43].

B/Expansion elasto-plastique :

Quand la pression interne dépasse P_e , une zone plastique se propage du rayon interne, la limite élasto-plastique à n'importe quel état de rayon c .

Dans la région élastique ($c \leq r \leq b$), les contraintes radiale et circonférentielle sont obtenues à partir des équations de LAME, en utilisant les conditions aux limites $\sigma_r = 0$ à $r = b$ et le fait que le matériau à $r = c$ est contrainte au point d'écoulement. Adoptons le critère d'écoulement de TRESCA dans la forme

$\sigma_\theta - \sigma_r = 2k$, la distribution de contraintes dans la région élastique est facilement montrée à être :

$$\sigma_\theta = \frac{kc^2}{b^2} \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right), \quad \sigma_r = -\frac{kc^2}{b^2} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right). \quad (6.10)$$

$$\sigma_z = -E\varepsilon_z + 2\nu k \frac{c^2}{b^2}, \quad c \leq r \leq b$$

où ε_z dépend des conditions aux limites et ne pas être déterminées à moins que la région plastique soit considérée. Excepté dans le cas dans le cas de déformation plane où ε_z est zéro. le déplacement radial dans la région élastique est obtenu de (6.3) et (6.10) comme :

$$U = -\nu r \varepsilon_z + (1 + \nu) \frac{kc^2}{Eb^2} \left\{ (1 - 2\nu)r + \frac{b^2}{r} \right\} \quad c < r < b \quad (6.11)$$

Il est supposé que σ_z continue à être la contrainte principale intermédiaire partout dans la région plastique, le critère d'écoulement de TRESCA ensuite fourni l'équation :

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2k \quad a \leq r \leq c$$

Ou le matériau est supposé non écrouissable. En insérant dans l'équation d'équilibre (6.1) et en intégrant, on obtient :

$$\sigma_r = -k \left(1 - \frac{c^2}{b^2} + \ln \frac{c^2}{b^2} \right), \quad \sigma_\theta = k \left(1 + \frac{c^2}{b^2} - \ln \frac{c^2}{b^2} \right) \quad a \leq r \leq c \quad (6.12)$$

En utilisant la contrainte de σ_r à travers $r = c$, les expressions de σ_r et σ_θ sont ainsi indépendantes des conditions limites, la pression interne est [111] :

$$p = k \left(1 - \frac{c^2}{b^2} + \ln \frac{c^2}{b^2} \right) \quad (6.13)$$

La distribution de σ_r et σ_θ est illustrée dans la (figure VI.1) pour $b/a = 2$. La magnitude de σ_r diminue régulièrement (constamment) avec le rayon, tandis que σ_θ a sa plus grande valeur à la limite élasto-plastique. Supposons la règle d'écoulement associée de TRESCA, les incréments de déformation plastique peuvent être écrite comme suit :

$$d\varepsilon_\theta^p = -d\varepsilon_r^p > 0 \quad d\varepsilon_z^p = 0$$

Puisque la partie plastique de ε_z est zéro, la déformation axiale est entièrement élastique, ce qui signifie que (6.2) tient dans toutes les deux régions élastique et plastique, d'où :

$$\sigma_z = E\varepsilon_z + 2\nu k \left(\frac{c^2}{b^2} - \ln \frac{c^2}{r^2} \right) \quad a \leq r \leq c$$

Les solutions basées sur la théorie de PRANDTL-REUSS indiquent que σ_z approche la moyenne des deux autres contraintes principales avec augmentation d'expansion quand $\varepsilon_z = 0$.

Pour déterminer la déformation axiale σ_z pour condition limite donnée, il est nécessaire de considérer l'équation de l'équilibre longitudinal. La force longitudinale résultante affectant le tube est :

$$P = 2\pi \int_a^b r \sigma_z dr = \pi E \varepsilon_z (b^2 - a^2) + 2\pi \nu \int_a^b r (\sigma_r + \sigma_\theta) dr$$

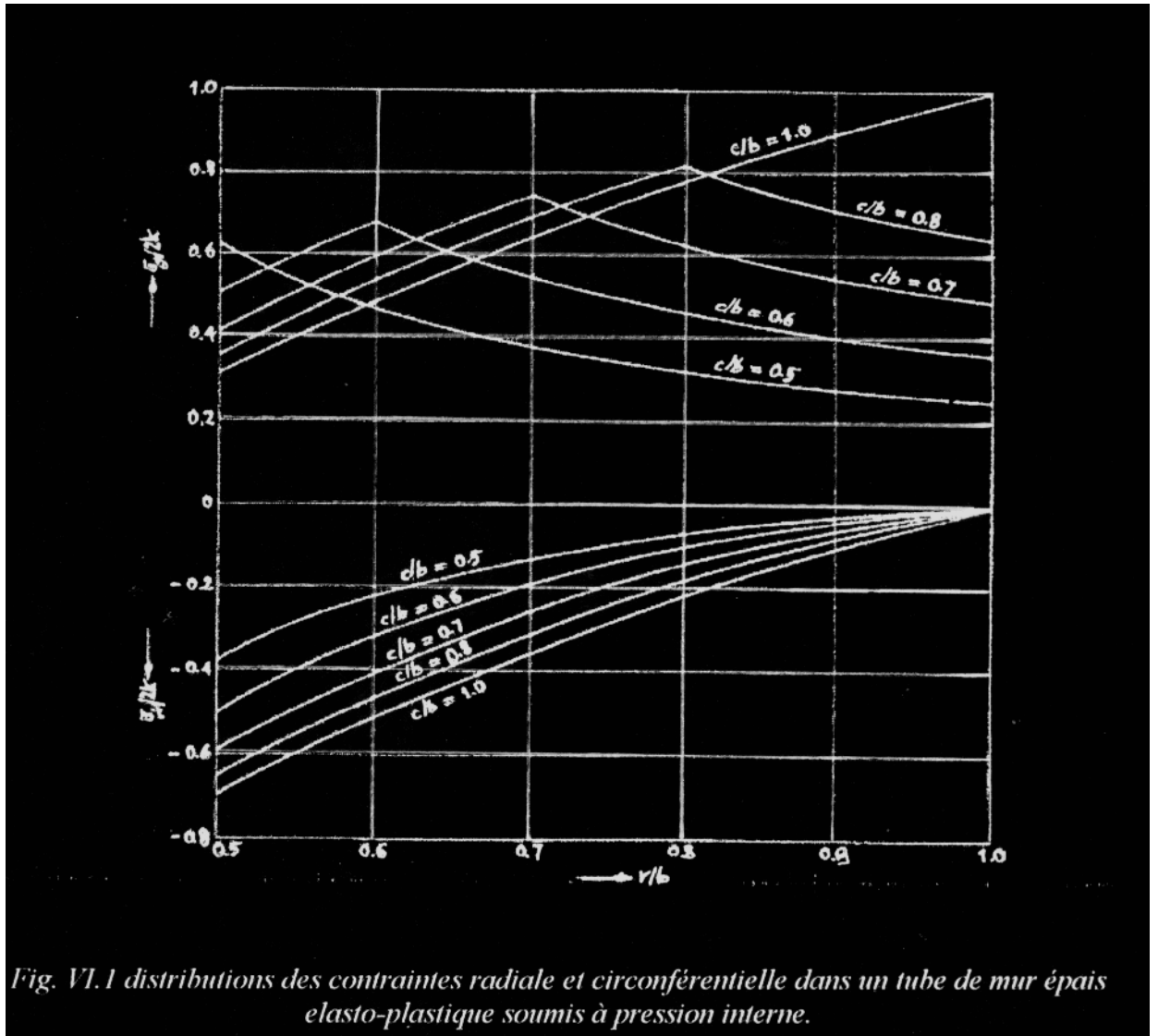


Fig. VI.1 distributions des contraintes radiale et circonférentielle dans un tube de mur épais elasto-plastique soumis à pression interne.

En vu de (6.2). Puisque $r(\sigma_r + \sigma_\theta) = \partial(r^2 \sigma_r) / \partial r$

Par l'équation d'équilibre (6.1), on obtient : $P = \pi[(b^2 - a^2)E\varepsilon_z + 2\nu a^2 p]$

En utilisant les conditions limites pour σ_r , ceci donne que ε_z est donné par (6.7) même quand le tube est partiellement plastique. La condition de déformation plane coïncide avec la condition d'extrémité fermée seulement quand le matériau est incompressible.

Quand le sont petites aussi longtemps que le tube reste partiellement plastique, et les changements de position peuvent donc être négligés.

Puisque $\varepsilon_r^b + \varepsilon_\theta^p = 0$ en vu de forme intégrale de la règle d'écoulement

associée, on a : $\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = \varepsilon_r^e + \varepsilon_\theta^e = \frac{1}{E} \{(1 - \nu)(\sigma_r + \sigma_\theta) - 2\nu\sigma_z\}$

La substitution de ε_z de (6.2) et l'utilisation de l'équation d'équilibre (6.1), l'équation ci-dessus peut être écrite comme :

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = -2\nu\varepsilon_e + \frac{1-2\nu}{2Gr} \frac{\partial}{\partial r} (r^2\sigma_r)$$

Où G est le module de cisaillement !

Il est important de noter que l'équation différentielle tient dans toutes les deux régions élastique et plastique. L'équation est justement intégrée et la constante d'intégration déterminée par comparaison avec (6.11) à $r = b$, où

$$\sigma_r = 0 \text{ ceci donne : } \frac{u}{r} = -\nu\varepsilon_z + (1-\nu) \frac{kc^2}{Gr^2} + (1-2\nu) \frac{\sigma_r}{2G} \quad (6.14)$$

Qui tient à travers le tube. De (6.7), (6.12) et (6.14), le déplacement dans la région plastique $a \leq r \leq c$ peut être obtenu pour n'importe quelle condition limite donnée, en particulier, le déplacement au rayon interne pour les extrémités fermées du tube est :

$$u_a = (1-\nu) \frac{kc^2}{Ga} - (1-2\nu) \frac{pa}{2G} \left\{ 1 + \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right)^{-1} \right\}$$

Où p est donnée par (6.13). Expressions similaires peuvent être écrites ci-dessous, les deux autres conditions (limites) d'extrémités.

Une importante caractéristique de la condition de déformation plane ($\varepsilon_z = 0$) est que la solution pour n'importe quel rapport mur b/a aussi fourni les solutions pour tous les plus petits rapports mur. Ceci est physiquement évident du fait que la contrainte et la déformation dans un anneau extérieur du tube dépend seulement de la pression radiale transmise à travers l'interface commune indépendamment de la position où cette pression est appliquée.

Les analyses ont été basées sur l'hypothèse que σ_z est la contrainte principale intermédiaire d'un bout à l'autre de la région plastique.

En vu de (6.2) la condition $\sigma_r \leq \sigma_z \leq \sigma_\theta$ est équivalente à :

$$\sigma_r \leq E\varepsilon_z + \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) \leq \sigma_\theta$$

En utilisant le critère d'écoulement, $\sigma_\theta - \sigma_r = 2k$, les inégalités peuvent être écrites comme : $(1-2\nu)\sigma_r \leq E\varepsilon_z + 2\nu k$

$$E\varepsilon_z - (1 - 2\nu)\sigma_r \leq 2k(1 - \nu)$$

La première inégalité est identiquement satisfaite, puisque la partie droite de cette inégalité est toujours positive en vu de (6.7). La seconde inégalité va être satisfaite pour toutes les conditions limites si : $E\varepsilon_z + (1 - 2\nu)p \leq 2k(1 - \nu)$

En substituant de (6.7), la condition de validité de la solution peut être exprimée comme : [80]

$$\frac{P}{2k} \leq \begin{cases} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) & \text{Extrémité Fermée} \\ 1-\nu & \text{Déformation Plane} \\ \frac{(1-\nu)(1 - \frac{a^2}{b^2})}{(1-2\nu - \frac{a^2}{b^2})} & \text{Extrémité Libre} \end{cases}$$

La marge de rapports murs pour la quelle la solution va être validée pour toutes les expansions elasto-plastiques est obtenue en posons $\frac{p}{2k} = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ quand $\nu = 0.3$, le rapport mur limite est obtenu à être 6.19 pour la condition d'extrémité fermée. Et 5.43 pour la condition d'extrémité libre. Pour valeur toujours plus grande de $\frac{b}{a}$, la solution va être validée aussi-longtemps que la pression interne ne dépasse pas la valeur critique donnée par (6.15), quand la pression critique est atteinte, σ_z devient égale à σ_θ , à la surface interne du tube. Une extension de la solution à des pressions plus grandes, sans tenir compte des changements géométriques, peut être à peine considérée comme réaliste.

C/ La théorie de Prandtl-Reuss pour déformation plane :

Quand le matériau s'écoule selon le critère de VON MISES, aucune composante de contraintes dans la région plastique ne peut être déterminée sans recours au déplacement.

Sous conditions de déformations planes, la pression radiale q à travers la limite elasto-plastique $r = c$ est donnée par la partie droite de (6.9) avec $\beta = \nu$ et a remplacée par c . les contraintes et déplacement dans la région élastique

sont évidemment donnés par (6.4) et (6.6) avec q et c écrits pour p et a respectivement ; par conséquent :

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -kN\left(\frac{b^2}{r^2} - 1\right) & \sigma_\theta &= kN\left(\frac{b^2}{r^2} + 1\right) \\ \sigma_z &= 2k\nu N & c \leq r \leq b & \\ \varepsilon_r &= \frac{kN}{2G}\left(1 - 2\nu - \frac{b^2}{r^2}\right) & \varepsilon_\theta &= \frac{kN}{2G}\left(1 - 2\nu + \frac{b^2}{r^2}\right) \end{aligned} \quad (6.16)$$

Où N est un paramètre de dimension donné par :

$$N = \left[\frac{1}{3}(1 - 2\nu)^2 + \frac{b^4}{c^4} \right]^{1/2}$$

En vu de la considération de la condition de déformation plane, la déformation hydrostatique est égale à $(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)/3$ dans le tube entier.

Si S_r et S_θ désignent les composantes radiale et circonférentielle du déviateur de contraintes alors :

$$\begin{aligned} \sigma_r &= S_r + K(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) & \sigma_\theta &= S_\theta + K(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta), \\ \sigma_z &= -(S_r + S_\theta) + K(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) \end{aligned}$$

Dans toutes les deux régions élastique et plastique où K est le module volumique égal à $E/3(1 - 2\nu)$.

Le déviateur de contrainte dans la région plastique doit satisfaire le critère d'écoulement de VON MISES.

$$S_r^2 + S_r S_\theta + S_\theta^2 = k^2 \quad \text{ou} \quad S_\theta = \frac{1}{2}(-S_r + \sqrt{4k^2 - 3S_r^2})$$

Deux équations de base nécessaires pour la résolution du problème élasto-plastique est l'équation de compatibilité de déformation

$$\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} = \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_\theta}{r} \quad (6.17)$$

obtenue en éliminant U entre les relations déformation-déplacement $\varepsilon_r = \partial u / \partial r$ et $\varepsilon_\theta = u / r$, et l'équation d'équilibre de contrainte (6.1) qui devient :

$$\frac{\partial S_r}{\partial r} + k \frac{\partial}{\partial r}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) = \frac{1}{2r}(-3S_r + \sqrt{4k^2 - 2S_r^2}), \quad a \leq r \leq c \quad (6.18)$$

puisque les déviateurs des contraintes principales sont $(2\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)/3$ et $(2\varepsilon_\theta - \varepsilon_r)/3$, les équations de PRANDLT-REUSS pour petites déformations peuvent être écrites comme :

$$\frac{2}{3}G \frac{\partial}{\partial c}(2\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) = \frac{\partial S_r}{\partial c} + 2G\lambda S_r$$

$$\frac{2}{3}G \frac{\partial}{\partial c}(2\varepsilon_\theta - \varepsilon_r) = \frac{\partial S_\theta}{\partial c} + 2G\lambda S_\theta$$

ou λ est un scalaire positif. L'élimination de λ entre toutes les relations fournies :

$$S_\theta \frac{\partial S_r}{\partial c} - S_r \frac{\partial S_\theta}{\partial c} = \frac{2}{3}G \left[(2S_\theta + S_r) \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial c} - (2S_r + S_\theta) \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial c} \right]$$

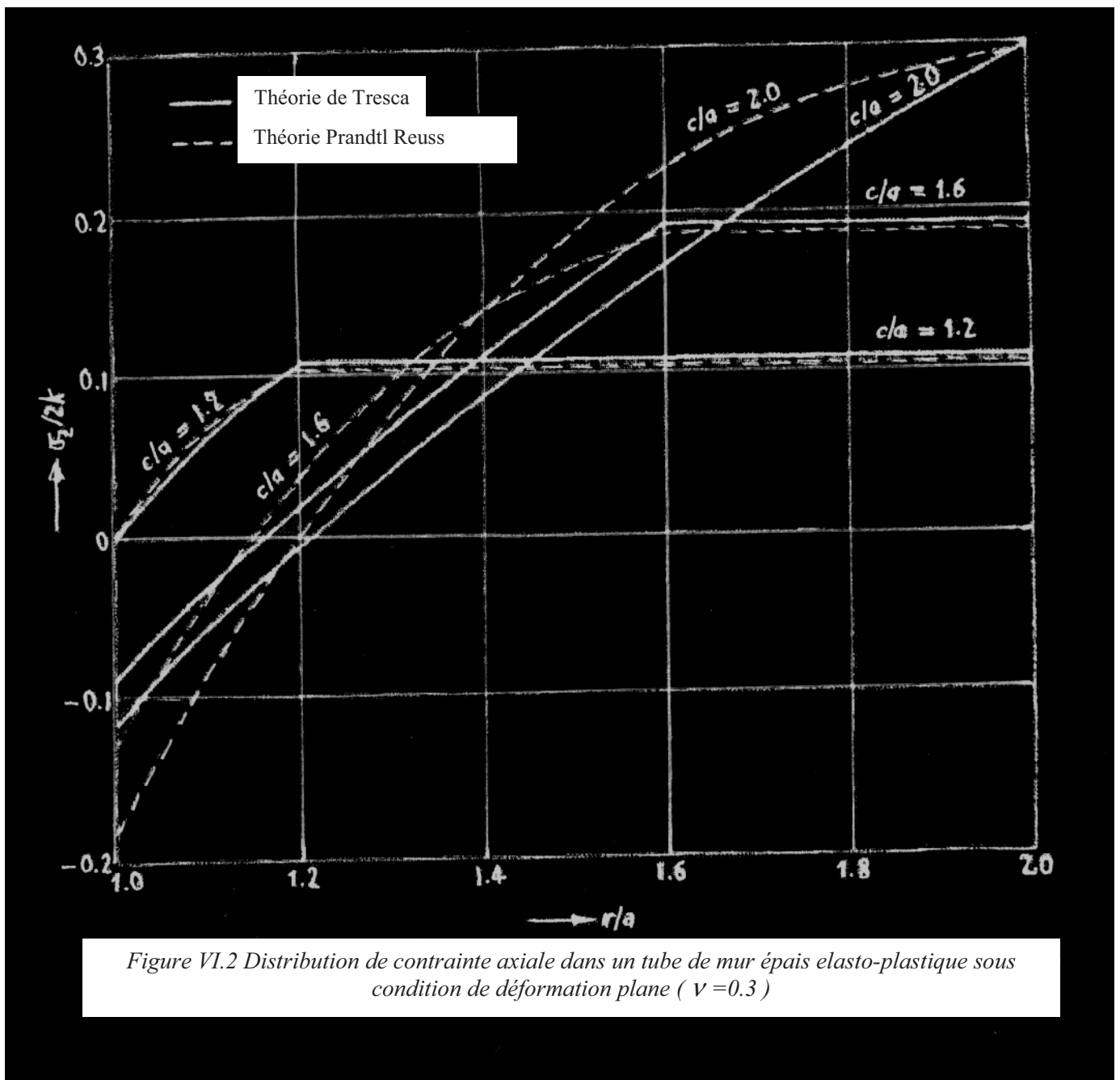
multipliant cette relation par $2S_\theta + S_r$, et utilisant le critère d'écoulement, l'équation différentielle est facilement réduite à :

$$\frac{\partial S_r}{\partial S_\theta} = G \left\{ \left(\frac{4}{3} - \frac{S_r^2}{k^2} \right) \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial c} - \left(\frac{2}{3} + \frac{S_r S_\theta}{k^2} \right) \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial c} \right\} \quad a \leq r \leq c \quad (6.19)$$

Les équations (6.17), (6.18) et (6.19) doivent être résolues pour ε_r , ε_θ et S_r dans le domaine $a \leq r \leq c$ et $b \leq c \leq a$, les valeurs de ces quantités dans la limite $r = c$ étant obtenues de (6.16) la solution peut être transportée dehors numériquement en exprimant les équations dans la forme des différences finies et en commençant de la limite elasto-plastique à chaque état de l'expansion.[69,87,65,99].

Les contraintes radiale et circonférentielle prédites par la théorie de PRANDLT-REUSS, pour n'importe quelle position donnée de la limite elasto-plastique sont obtenues à être en extrême agrément avec celles données par la théorie de TRESCA à la base de contrainte d'écoulement de cisaillement k . Cependant, les distributions de contraintes axiales dans les deux solutions diffèrent appréciablement l'une de l'autre, comme indiqué par la présentation graphique dans Fig. VI.2 qui correspond à $\nu = 0.3$ et $b/a = 2$. Puisque la

contrainte axiale est relativement petite en comparaison aux deux autres contraintes. La divergence n'est pas importante du point de vu pratique. Les déplacements radiaux aux surface interne et externe du tube sont représentés contre c/a dans Fig. VI.3 qui montre la fermeté d'agrément entre les deux solutions.[45,86,93].



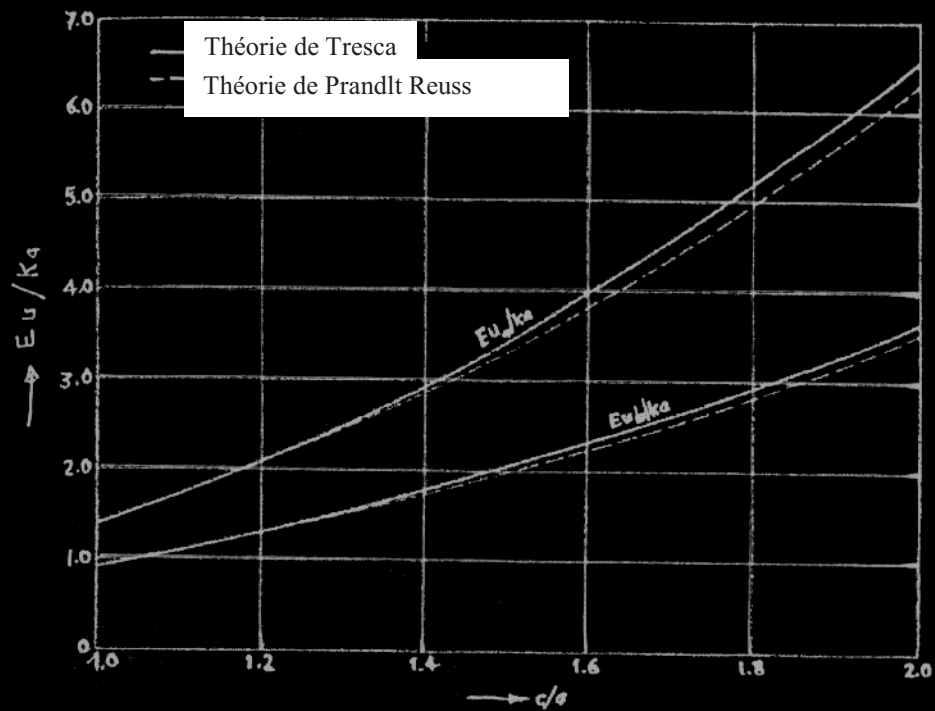


Figure VI.3 Déplacements des surfaces interne et externe durant l'expansion elasto-plastique d'un tube en déformation plane ($\nu = 0.3$)

D/Contraintes résiduelles :

On suppose qu'un tube de mur épais est rendu partiellement plastique par l'application d'une pression interne p est complètement déchargé en annulant la pression.

Pour valeurs suffisamment petites de p , le procédé de déchargement est entièrement élastique.

Les contraintes résiduelles sont ensuite obtenues par soustraction de (6.4) de (6.10) et (6.12), si le critère d'écoulement de TRESCA est adopté, le résultat étant :

$$\sigma_r = -k \left(\frac{c^2}{a^2} - \frac{p}{p_e} \right) \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{a^2}{b^2} \right)$$

$$c \leq r \leq b \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta} &= k \left(\frac{c^2}{a^2} - \frac{p}{p^2} \right) \left(\frac{a^2}{r^2} + \frac{a^2}{b^2} \right) \\ \sigma_r &= -k \left[\frac{p}{p_e} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - \ln \frac{r^2}{a^2} \right] \\ a &\leq r \leq c \\ \sigma_{\theta} &= -k \left[\frac{p}{p_e} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} - \left(2 + \ln \frac{r^2}{a^2} \right) \right) \right]\end{aligned}\tag{6.21}$$

En vue de (6.8) et (6.13). Ceci donne que la contrainte résiduelle σ_z est partout compressive avec la valeur numérique maximum apparaît à un rayon $r = a\sqrt{p/p_e}$, qui est plus petit que c . la contrainte résiduelle σ_{θ} est une traction dans la partie externe et une compression dans la partie interne du tube disparaît à un rayon entre $r = a$ et $r = c$.

Puisque la déformation axiale est purement élastique selon la règle d'écoulement associée de TRESCA, il est complètement enlevé en déchargement, donnant la contrainte axiale résiduelle.

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_{\theta}).$$

La contrainte résiduelle σ_z est compressive à l'intérieur du rayon $r = a \exp\left[\frac{1}{2}(p/p_e - 1)\right]$, qui est aussi inférieur à c . Pour chercher la validité de l'hypothèse de déchargement élastique, il est nécessaire d'examiner la magnitude de $\sigma_{\theta} - \sigma_r$. De (6.20) et (6.21), on a :

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta} - \sigma_r &= 2k \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{c^2}{a^2} - \frac{p}{p^2} \right), & c \leq r \leq b \\ \sigma_{\theta} - \sigma_r &= 2k \left(1 - \frac{pa^2}{p_e r^2} \right), & a \leq r \leq c\end{aligned}$$

La différence de contrainte $\sigma_{\theta} - \sigma_r$ a sa plus grande magnitude à la surface interne, où l'écoulement va se refaire (recommencer) si $p = 2p_e$, un effet BAUSCHINGER possible étant négligé. Le plus petit rapport mur pour lequel l'écoulement secondaire peut apparaître en déchargement est donné par :

$$\ln \frac{b}{a} = 1 - \frac{a^2}{b^2}$$

Qui est obtenu en posant $p = p_0 = 2k \ln(b/a)$.

Par conséquent, le rapport mur critique est $b/a \cong 2.22$, et la pression entièrement plastique correspondante est $p_0 \cong 1.59k$.

Pour $p \leq 2p_e$, un rechargement subséquent du tube par pression interne inférieur à p résulte seulement des chargements élastiques en déformation, quelque soit le rapport mur. Le tube est donc fortifié par une haute déformation initiale, le procédé d'achèvement de ceci est connu comme autofrettage. Ceci donne du dessus qu'un tube non écrouissable ne peut pas fortifié dans ce chemin par plus qu'un facteur de deux. La figure VI.4 montre les contraintes résiduelles dans un tube de mur épais de rapport mur 2.0, quand $c/a = 1.4$ et $\nu = 0.3$.

Quand $b/a \phi 2.22$ et $2p_e \leq p \leq p_0$, l'écoulement apparaît dans le sens réservé à l'intérieur d'un rayon $p < c$ en déchargement complet à partir de l'étape élasto-plastique.

La distribution de contrainte résiduelle est un résultat de superposition d'un système de contrainte additionnelle désigné par éléments qui produit par le chargement. Puisque $\sigma_\theta - \sigma_r$ change de $2k$ à $-2k$ dans chaque élément de la région $a \leq p \leq c$ durant le procédé de déchargement, $\sigma'_\theta - \sigma'_r$ dans cette région doit être égale à $-4k$. Dans le restant du tube, seuls les changements élastiques dans les contraintes sont impliqués.

Par analogie avec (6.10) et (6.12), les contraintes principales peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma'_r &= 2k \frac{p^2}{b^2} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right), & \sigma'_\theta &= -2k \frac{p^2}{b^2} \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right), \quad p \leq r \leq b \\ \sigma'_r &= 2k \left(1 - \frac{p^2}{b^2} + \ln \frac{p^2}{r^2} \right), & \sigma'_\theta &= -2k \left(1 + \frac{p^2}{b^2} - \ln \frac{p^2}{r^2} \right), \quad a \leq r \leq p \end{aligned}$$

Les contraintes résiduelles σ'_r et σ'_θ sont obtenues par l'addition des contraintes ci-dessus à celles données par (6.10) et (6.12). Le rayon p est déterminé de la condition limite $\sigma'_r = p$ à $r = a$, la relation entre c et p étant :

$$2\left(\frac{p^2}{b^2} - \ln \frac{p^2}{ac}\right) - \frac{c^2}{b^2} = 1 \quad (6.22)$$

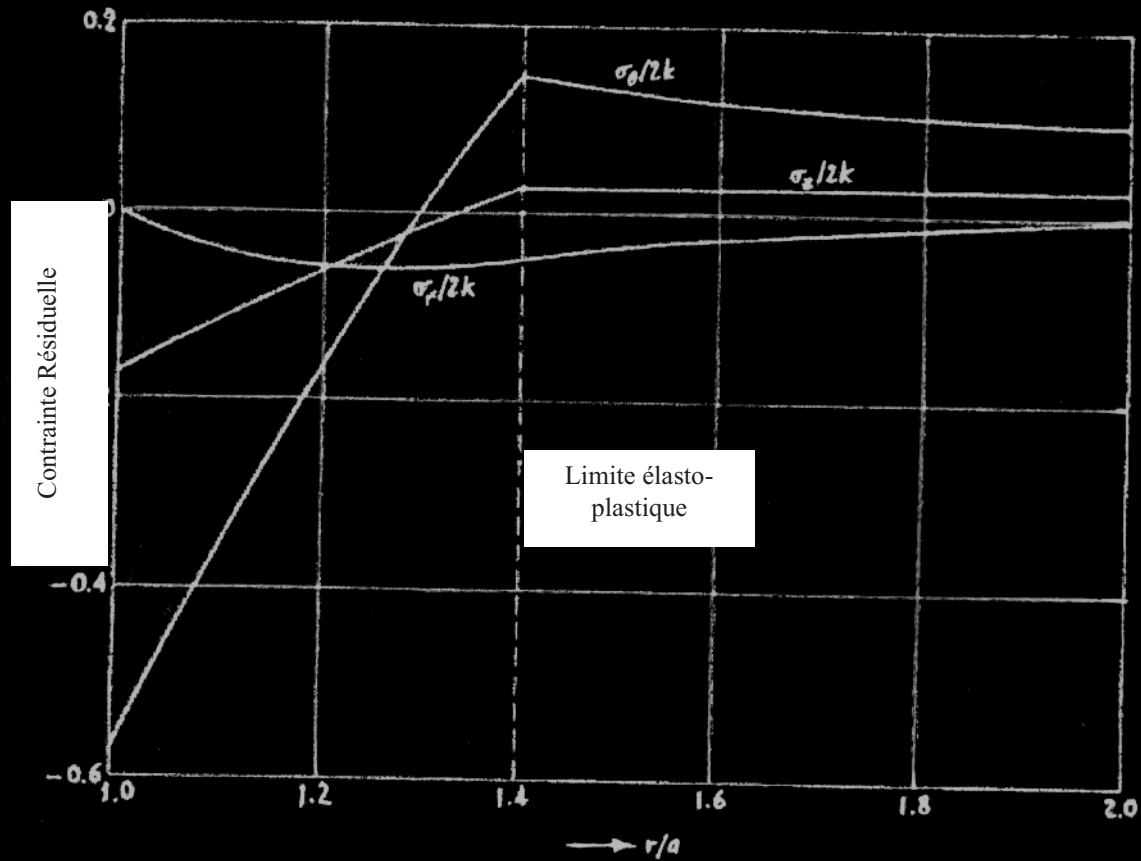


Figure VI.4 Distribution des contraintes résiduelles dans un tube de mur épais ($b/a = 2$) déchargé d'une étape élasto-plastique

Par exemple, quand $b/a = 4$ et $c = b$, on trouve $p/a \approx 1.28$. la contrainte résiduelle circonférentielle diminue de $-2k$ à $r = a$, à $-2.49k$ à $r = p$, et ensuite diminue régulièrement (constamment) à $1.59k$ à $r = b$. l'absence de cycle continu de déformation plastique connue sous instabilité elasto-plastique, est important pour éviter la fissuration de pression de vaisseaux (tubes) par écoulement incrémental. [44]. La condition d'instabilité elasto-plastique pour un tube de mur épais, qui est chargé de manière répétée et

déchargé, est que la pression interne doit être inférieure à p_0 quand $b/a \leq 2.22$ et inférieure à $2p_e$ quand $b/a \geq 2.22$.

E/Influence du travail d'écrouissage :

Quand le matériau est en écrouissage, le critère d'écoulement de TRESCA peut être écrit comme $\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma$ où σ est la contrainte d'écoulement en traction ou compression uniaxiale. Il est supposé que σ dépend seulement du travail plastique total par unité de volume de n'importe quel élément donné. Puisque $d\varepsilon_r^p = -d\varepsilon_\theta^p$ et $d\varepsilon_z^p = 0$ selon la règle d'écoulement, l'incrément de travail plastique par unité de volume est $(\sigma_\theta - \sigma_r)d\varepsilon_\theta^p = \sigma d\varepsilon_\theta^p$. Ceci montre que σ est la même fonction de ε_θ^p comme la contrainte est celle de déformation plastique dans la traction uniaxiale. Donc le critère d'écoulement devient :

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma = F(\varepsilon_\theta^p), \quad a \leq r \leq c.$$

Où la fonction F définit la courbe uniaxiale contrainte-déformation plastique.

La déformation circonférentielle totale est aussi donnée par (6.14), où K est la moitié de la contrainte initiale d'écoulement Y en traction simple. La soustraction de (6.14) de la déformation circonférentielle élastique donnée par la seconde équation de (6.3), on a :

$$\varepsilon_\theta^p = (1 - \nu^2) \left(\frac{Yc^2}{Er^2} - \frac{\sigma}{E} \right) = -\varepsilon_r^p, \quad a \leq r \leq c. \quad (6.23)$$

En vu du critère d'écoulement. La différentiation de (6.23) par rapport à r, et élimination de Yc^2/Er^2 par le moyen de (6.23), on obtient :

$$\frac{\partial \varepsilon_\theta^p}{\partial r} = -\frac{2}{r} \left\{ \frac{\varepsilon_\theta^p + (1 - \nu^2)\sigma/E}{1 + (1 - \nu^2)H/E} \right\} \quad \text{où} \quad H = F'(\varepsilon_\theta^p)$$

La dernière équation peut être utilisée pour changer la variable indépendante de (6.1) à partir de r à ε_θ^p . L'intégration de l'équation des contraintes résultantes fournie ensuite [17,42,52] :

$$p = \frac{Y}{2} \left(1 - \frac{c^2}{b^2} \right) + \frac{1}{2} \int_0^{\varepsilon_\theta^p} \left\{ \frac{1 + (1 - \nu^2)H/E}{\varepsilon_\theta^p + (1 - \nu^2)\sigma/E} \right\} \sigma d\varepsilon_\theta^p \quad (6.24)$$

Où ε_{θ}^p est désignée par ε_{θ}^p à $r = a$. l'intégrale de la partie droite de (6.24) peut être évaluée numériquement pour n'importe quelle valeur supposée de ε_{θ}^p . Puisque la valeur correspondante de c^2/a^2 est obtenue de (6.23), la pression peut être calculée de (6.24) de manière directe.

Une solution explicite peut être trouvée dans le cas de travail d'écoulement linéaire où H a une valeur constante. Ensuite $\sigma = Y + H\varepsilon_{\theta}^p$ qui peut être utilisée pour éliminer ε_{θ}^p de (6.23).

Donc le critère d'écoulement devient :

$$\sigma_{\theta} - \sigma_r = Y \left[1 + (1-\nu^2) \frac{Hc^2}{Er^2} \right] / \left[1 + (1-\nu^2) \frac{H}{E} \right].$$

L'insertion dans (6.1), des contraintes radiale et circonférentielle dans la région plastique($a \leq r \leq c$.) sont obtenues comme :

$$\left[1 + (1-\nu^2) \frac{H}{E} \right] \sigma_r = -\frac{Y}{2} \left\{ 1 - \frac{c^2}{b^2} + \ln \frac{c^2}{r^2} + (1-\nu^2) \frac{H}{E} \left(\frac{c^2}{r^2} - \frac{c^2}{b^2} \right) \right\} \quad (6.25)$$

$$\left[1 + (1-\nu^2) \frac{H}{E} \right] \sigma_{\theta} = \frac{Y}{2} \left\{ 1 + \frac{c^2}{b^2} + \ln \frac{c^2}{r^2} + (1-\nu^2) \frac{H}{E} \left(\frac{c^2}{r^2} - \frac{c^2}{b^2} \right) \right\}$$

Vu la continuité de σ_r , à travers $r = c$. la contrainte axiale σ_z pour la condition limite appropriée ensuite montre de (6.1) à (6.7). La pression interne pour le tube de travail d'écoulement dépasse celle du tube non écoulement d'un montant de :

$$\Delta P = \frac{Y}{2} \left(\frac{c^2}{a^2} - \ln \frac{c^2}{a^2} - 1 \right) / \left(1 + \frac{E/H}{1-\nu^2} \right) \quad (6.26)$$

L'effet du travail d'écoulement est donc d'augmenter la magnitude des contraintes dans la région plastique pour un rayon donné de la limite elasto-plastique. La pression interne augmente régulièrement durant l'expansion elasto-plastique sans atteindre un maximum.

L'hypothèse que σ_z est la contrainte principale intermédiaire peut être montrée à être valide pour assez larges rapports murs que pour ceux non écoulements.[42]

L'écoulement ne va pas redémarrer au support au déchargement d'une étape elasto-plastique aussi longtemps que le rapport P/P_e soit inférieur à $2\sigma_0/Y$ où σ_0 est la contrainte d'écoulement à $r=a$. les courbes pression-expansion pour $H = 0$ et $H = 0.1E$ sont représentées graphiquement dans Fig.VI.5 en supposant $b/a = 2$.

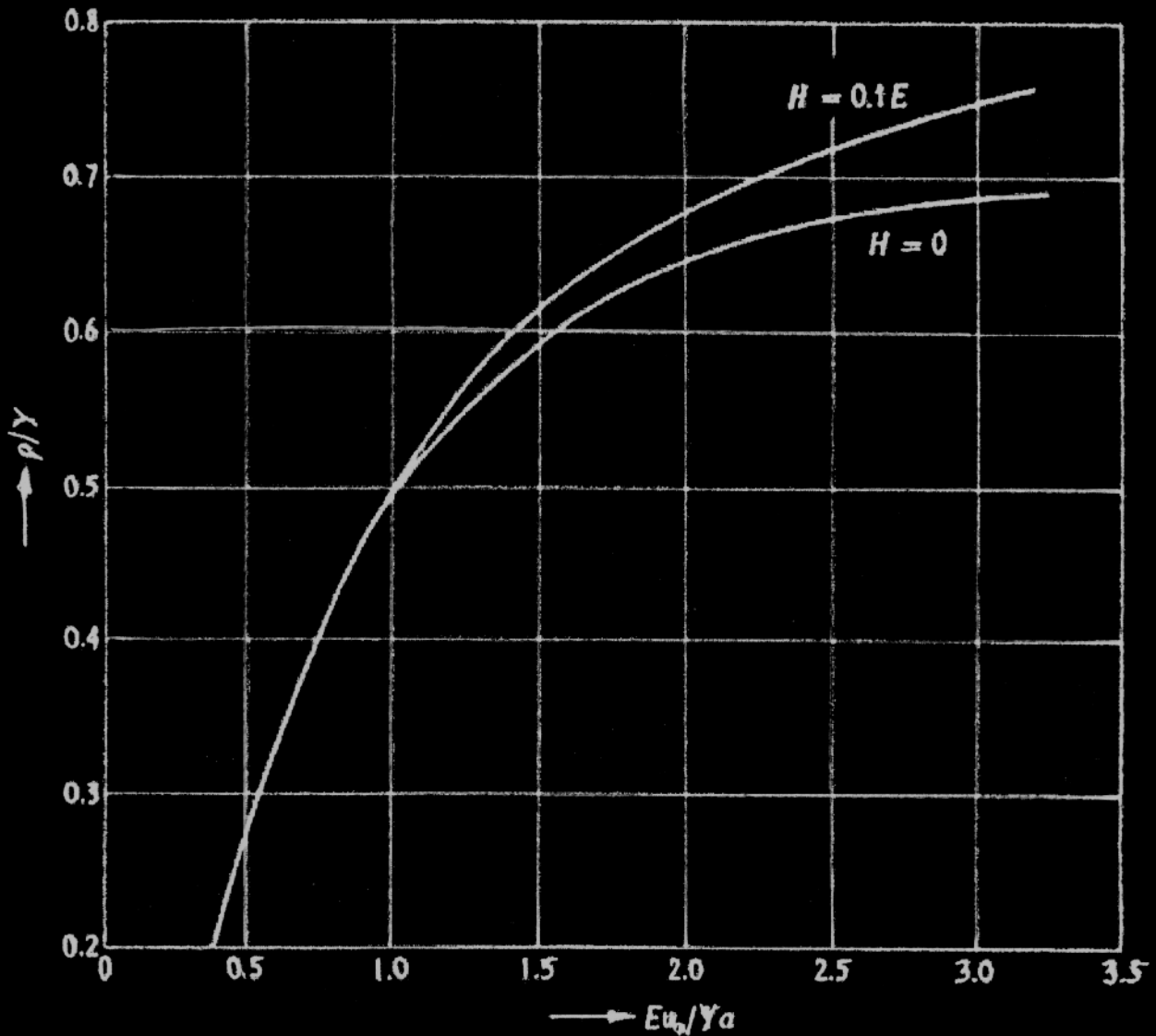


Figure VI.5 Courbes pression expansion pour tube à extrémités fermées non travail d'écrasement quand $b/a = 2$ et v

V.I.1.2-Plaque infinie avec trou circulaire :

Plaque sous traction radiale uniforme :

Une plaque plate large contenant un petit trou circulaire est soumise à une étape de contrainte biaxiale balancée σ . La présence du trou va causer de large contraintes additionnelles dans le voisinage immédiat du trou, mais ses effets seront négligeables à une distance de quelques peu diamètres de son côté théoriquement vont disparaître à l'infini.

Dan la formulation mathématique du problème, on considère donc une plaque infiniment tendue. Les composantes non nulles des contraintes σ_r et

$$\sigma_\theta \text{ doivent satisfaire l'équation d'équilibre : } \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} \quad (6.27)$$

Où l'origine est prise au centre du trou. Les composantes correspondantes de déformation ε_r et ε_θ supposées à être petites, satisfaisons l'équation de compatibilité :

$$\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} = \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_\theta}{r} \quad (6.28)$$

qui est entièrement obtenue des équations déformation-déplacement.

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

laissons le rayon du trou désigné par a . Aussi longtemps que la plaque est complètement élastique, la distribution de contrainte est obtenue à partir de la solution de LAME comme :

$$\sigma_r = \sigma \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \quad \sigma_\theta = \sigma \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

La contrainte circonférentielle est σ à côté du trou, indiquant qu'il y a un facteur de concentration de contrainte de 2 dans la marge élastique.

L'écoulement apparaît en traction circonférentielle à côté du trou quand $\sigma = Y/2$, quel que soit le critère d'écoulement.

Pour quelques valeurs de σ supérieures à $Y/2$, la plaque sera plastique à l'intérieur du rayon c .

Le matériau est supposé être incompressible et Déformation-Ecrouissage selon la loi généralisée contrainte-déformation.[69].

$$\frac{\bar{\sigma}}{Y} = \left(\frac{E\bar{\varepsilon}}{Y} \right)^n \quad \bar{\sigma} \geq Y \quad (6.29)$$

Où n est une constante du matériau. Il est aussi supposé que les déformations sont assez petites pour justifier la négligence des changements de géométrie. La distribution dans la plaque des contraintes ne sera pas influée largement par la négligence de la compressibilité élastique. [21].

Considérons d'abord, le critère de TRESCA, $\sigma_\theta = Y$ à la limite elasto-plastique et les contraintes dans la région élastique ($r \geq c$) sont trouvées à être :

$$\sigma_r = \sigma - (Y - \sigma) \frac{c^2}{r^2} \quad \sigma_\theta = \sigma + (Y - \sigma) \frac{c^2}{r^2} \quad r \geq c \quad (6.30)$$

dans la région plastique ($r \leq c$), le critère de TRESCA peut être écrit comme : $\sigma_\theta = \bar{\sigma}$.

Adoptons la relation contrainte-déformation de HENKY, et désignons le rapport de contrainte σ_r / σ_θ par s , on a :

$$\varepsilon_r = \bar{\varepsilon} \left(s - \frac{1}{2} \right), \quad \varepsilon_\theta = \bar{\varepsilon} \left(1 - \frac{s}{2} \right), \quad r \leq c$$

l'insertion dans l'équation de compatibilité de déformation (168), et l'utilisation de la loi de déformation-écrouissage (169), on a :

$$\frac{1}{\bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial r} = \frac{n}{2-s} \frac{\partial s}{\partial r} - \frac{3n}{r} \left(\frac{1-s}{2-s} \right) \quad (6.31a)$$

la substitution de $\sigma_\theta = \bar{\sigma}$ et $\sigma_r = s\bar{\sigma}$ dans l'équation d'équilibre (167) donne :

$$\frac{1}{\bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial r} = -\frac{1}{s} \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{1-s}{rs} \quad (6.31b)$$

l'élimination de $\bar{\sigma}$ entre les deux dernières équations fournit :

$$r \frac{\partial s}{\partial r} = (1-s) \left[\frac{2 - (1-3n)s}{2 - (1-n)s} \right].$$

Puisque le côté du trou est contrainte libre, $s = 0$ à $r = a$. l'intégration de toute équation sous cette condition limite donne :

$$\frac{a}{r} = (1-s)^{(1+n)/(1+3n)} \left[1 - (1-3n) \frac{s}{2} \right]^{4n/(1-9n^2)} \quad (6.32)$$

Qui indique que s dépend seulement de r pour un matériau donné.

A la limite elasto-plastique $r = c$, $s = 2\sigma/Y - 1$ en vu de (6.30), par

$$\text{conséquence : } \frac{a}{c} = \left[2 \left(1 - \frac{\sigma}{Y} \right) \right]^{(1+n)/(1+3n)} \left[\frac{3}{2} (1-n) - (1-3n) \frac{\sigma}{Y} \right]^{4n/(1-9n^2)}$$

Qui relie, dans une certaine mesure, la zone plastique à la magnitude de la contrainte appliquée. Evidemment, la plaque entière devient plastique ($c = \infty$) quand $\sigma = Y$, quelle que soit la valeur de n . éliminons r de l'équation

$$(6.31), \text{ on a : } \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial s} = - \frac{2n}{2 - (1-3n)s}.$$

A côté du trou, $s = 0$ et $\bar{\sigma} = \lambda \sigma$ où λ est le facteur de concentration elasto-plastique de contrainte. A la limite elasto-plastique, $s = 2\sigma/Y - 1$ et $\bar{\sigma} = Y$.

L'intégration de toute l'équation fournie donc :

$$\bar{\sigma} = \lambda \sigma \left[1 - (1-3n) \frac{s}{2} \right]^{2n/(1-3n)}$$

$$\text{où} \quad (6.33)$$

$$\lambda = \frac{Y}{\sigma} \left[\frac{3}{2} (1-n) - (1-3n) \frac{\sigma}{Y} \right]^{-2n/(1-3n)}$$

Pour un matériau non écrouissable, le facteur de concentration est Y/σ quel que soit le critère d'écoulement. Quand $n = \frac{1}{3}$, les parties droites de toutes les équations deviennent indéterminées, mais l'intégration directe des équations différentielles pour s et $\bar{\sigma}$ donne :

$$\frac{r}{a} = e^{s/3} (1-s)^{-2/3} \quad \bar{\sigma} = \lambda \sigma e^{-s/3}$$

$$\lambda = \frac{Y}{\sigma} \exp \left[\frac{1}{3} \left(\frac{2\sigma}{Y} - 1 \right) \right] \quad (6.34)$$

Comme σ est augmentée de $Y/2$ à Y , le facteur de concentration de contrainte diminue de 2 à une valeur limite λ^* . Avec $\lambda^* = 1.35$ pour $n = \frac{1}{3}$

Et $\lambda = \left[\frac{2}{1+3n} \right]^{2n/(1-3n)}$ pour les autres valeurs de n . La déformation

circonférentielle au bord (égale à $\bar{\varepsilon}/2$) est encore comparable à celle à l'écoulement initial. Pour $\sigma = Y$, la limite elasto-plastique disparaît et la

condition limite extérieur devient $s = 1$ à $r = \infty$. Les contraintes sont ensuite directement proportionnelles à σ , assez longtemps que la déformation reste petite et que le facteur de concentration de contrainte ait une valeur constante égale à λ^* .

Si le critère d'écoulement de VON MISES est adopté, les contraintes à la limite elasto-plastique doivent satisfaire l'équation : $\sigma_r^2 - \sigma_r\sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = Y^2$. La distribution de contrainte dans la région élastique ($r \geq c$) est donc trouvée comme :

$$\sigma_r = \sigma - \frac{Yc^2}{\sqrt{3}r^2} \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{Y^2}}, \quad \sigma_\theta = \sigma + \frac{Yc^2}{\sqrt{3}r^2} \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{Y^2}}, \quad r \geq c \quad (6.35)$$

dans la région plastique ($r \leq c$), le critère de MISES est identiquement satisfait en écrivant :

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\sigma} \sin \phi, \quad \sigma_\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\sigma} \cos \left(\frac{\pi}{6} - \phi \right), \quad r \leq c \quad (6.36)$$

Où ϕ est un angle auxiliaire. A côte du trou $r=a$, la condition limite nécessite $\phi=0$, tandis qu'à la limite plastique $r=c$, la continuité des contraintes nécessite

$$\phi \text{ à avoir la valeur } \phi_c = \sin^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{3}\sigma}{2Y} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{Y^2}} \right\} \quad (6.37)$$

Ceci peut être désigné par le fait que $\phi - \frac{\pi}{6}$ soit égal à l'angle déviateur mesuré à partir de la direction relevant de cisaillement pur. (Fig.VI.6)

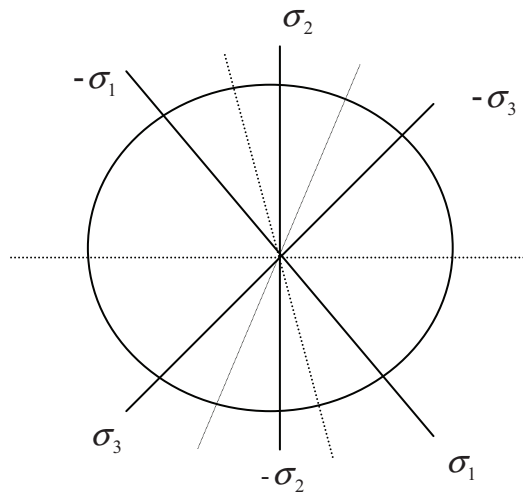


Fig VI.6 Apparence du déviateur général géométrique d'écoulement ayant six axes de symétrie

Les équations de HENCKY pour un matériau incompressible obéissant au critère de VON MISES peuvent être exprimées comme :

$$\varepsilon_r = \bar{\varepsilon} \sin\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right), \quad \varepsilon_\theta = \bar{\varepsilon} \cos\phi, \quad r \leq c \quad (6.38)$$

Où $\bar{\varepsilon}$ est relié à $\bar{\sigma}$ par la loi déformation- écrouissage (6.29). La distribution pour les contraintes et les déformations dans (6.27) et (6.28) devient ensuite :

$$\frac{1}{\bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial r} \tan\phi + \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{2r} (\sqrt{3} - \tan\phi) \quad (6.39)$$

$$\frac{1}{\bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial r} - n \tan\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{\sqrt{3}n}{2r} (\sqrt{3} - \tan\phi)$$

De laquelle $\bar{\sigma}$ peut être éliminée pour obtenir l'équation différentielle :

$$r \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{(\sqrt{3} - \tan\phi)(1 + \sqrt{3}n \tan\phi)}{2(1 + n \tan^2\phi)}$$

vu la condition limite $\phi=0$ à $r=a$, l'intégration de l'équation précédente donne:

$$\frac{a^2}{r^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \phi\right) (\cos\phi + \sqrt{3}n \sin\phi)^{-4n/(1+3n^2)} \exp\left[-\sqrt{3} \left(\frac{1-n^2}{1+3n^2}\right) \phi\right] \quad (6.40)$$

Ainsi que ϕ est la fonction de r seulement pour un n donné. La position de la limite elasto-plastique pour n'importe quelle σ donnée peut être trouvée en laissant $r=c$ et $\phi=\phi_c$ dans (6.40). L'élimination de r de (6.39) donne :

$$\frac{1}{\bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \phi} = -n \left(\frac{\sqrt{3} - \tan\phi}{1 + \sqrt{3}n \tan\phi} \right)$$

Qui est intégrée sous la condition limite $\bar{\sigma} = \lambda\sigma$ à $r=a$ pour obtenir :

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma} = \lambda (\cos\phi + \sqrt{3}n \sin\phi)^{-n(1+3n)/(1+3n^2)} \exp\left[-\sqrt{3} \frac{n(1-n)}{1+3n^2} \phi\right] \quad (6.41)$$

Le facteur de concentration de contrainte λ est finalement obtenu à partir du fait que $\bar{\sigma} = Y$ à la limite elasto-plastique où $\phi=\phi_c$. Ainsi, à partir de (6.37) et (6.41), on a [25,21,73]

$$\lambda = \frac{Y}{\sigma} \left\{ (1+3n) \frac{\sigma}{2Y} + \frac{\sqrt{3}(1-n)}{2} \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{Y^2}} \right\}^{n(1+3n)/(1+3n^2)} \exp\left[\sqrt{3} \frac{n(1-n)}{1+3n^2} \phi_c\right] \quad (6.42)$$

Quand λ a été trouvée pour une contrainte σ donnée, la distribution spatiale de $\bar{\sigma}$ trouvée de (180) et (181). La valeur limite de λ est :

$$\lambda^* = \left(\frac{1+3n}{2} \right)^{n(1+3n)/1+3n^2} \exp \left[\frac{\pi n(1-n)}{\sqrt{3}(1+3n^2)} \right] \text{ Correspondant à } \sigma = Y \text{ et } \phi_c = \frac{\pi}{3}.$$

La plaque étant ensuite juste entièrement plastique. Pour n'importe quelle diminution supplémentaire dans σ , le facteur de concentration de contrainte reste constant aussi longtemps que les changements de géométrie soient négligeables.

Il s'ensuit de toutes les deux équations (6.32) et (6.40) que le rapport de contrainte reste constant à n'importe quel rayon donné au début que l'écoulement devient plastique.

Les solutions ci-dessus seront donc identiques à celles basées sur les équations de PRANDLT-REUSS. Les résultats pour le facteur de concentration de contrainte sont montrés graphiquement sur figure VI.7 pour

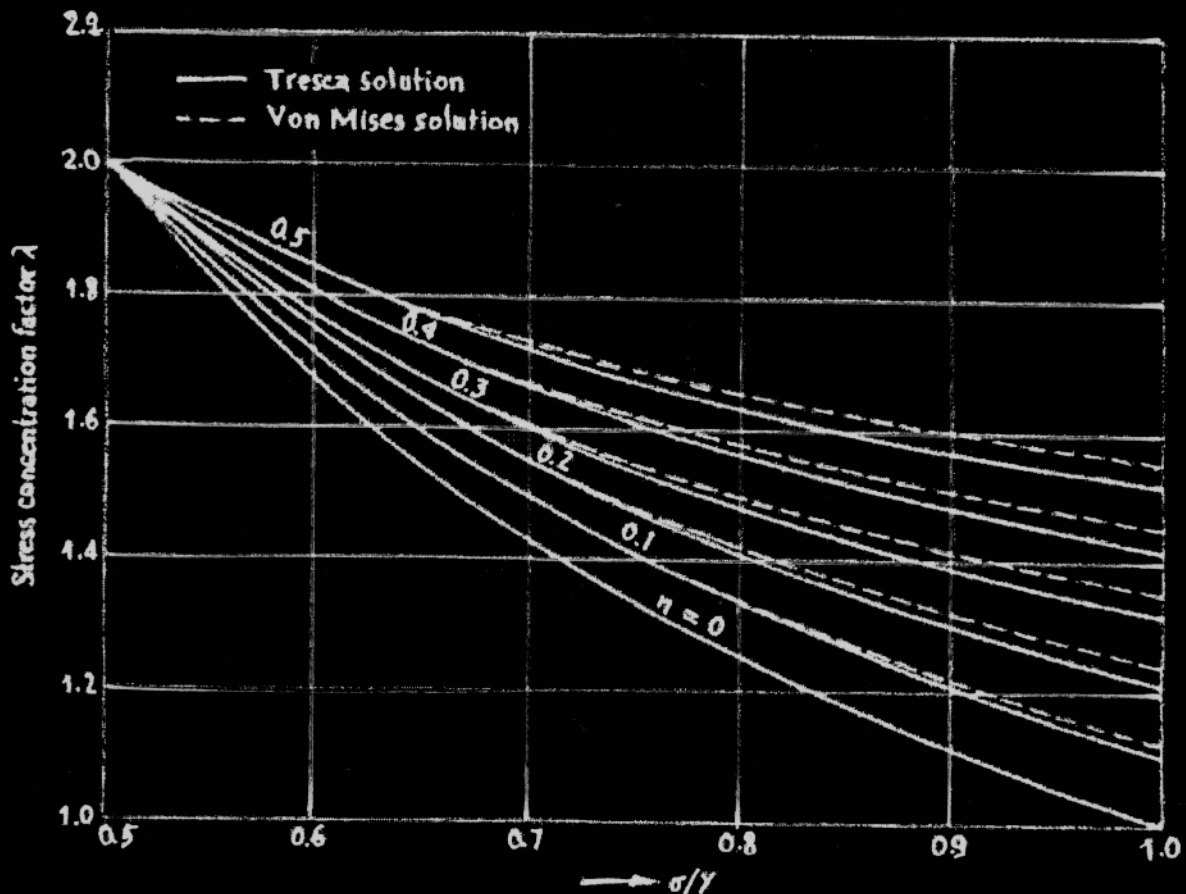


Figure VI.7 Variation du facteur de concentration de contrainte elasto-plastique avec la tension radiale appliquée.

valeur variée de n . il est évident que la solution de TRESCA donne des résultats plus simples sans perte significative dans la précision (l'exactitude).

6.2) VALIDATION ET EXPERIMENTATION

L'estimation de la fiabilité des programmes de calcul en général, et ceux préparés pour les analyses non linéaires en particulier est d'importance primordiale. Le plus haut degré de fiabilité d'un programme peut être atteint à travers son application aux problèmes remarquables devant être sélectionnés tels que :

- Un) Problèmes avec solutions analytiques et / ou expérimentales

Deux) Dans leurs analyses toutes les options du programme sont prises en compte

La fiabilité du présent logiciel est vérifiée à travers l'analyse des exemples suivants :

6.2) VALIDATION ET EXPERIMENTATION

L'estimation de la fiabilité des programmes de calcul en général, et ceux préparés pour les analyses non linéaires

6.2.1) CYLINDRE EN DEFORMATION PLANES

6.2.1.1) Hypothèse

Le programme a été validé en considérant l'exemple traité par de nombreux chercheurs qui est celui d'un cylindre en déformations planes dont le rayon interne $a=100$ mm, le rayon externe $b=200$ mm

- Module élastique , $E = 21000$ KN/mm²
- Rapport de poisson , $\nu = 0.3$
- La limite de plastification , $Y=24$ KN/mm²
- Paramètre d'écroutissement , $H = 0$
- Le critère de plasticité utilisé et celui de Von Mises
- La tolérance , $TOL = 10^{-3}$
- Procédure de résolution : Méthode de Newton Raphson

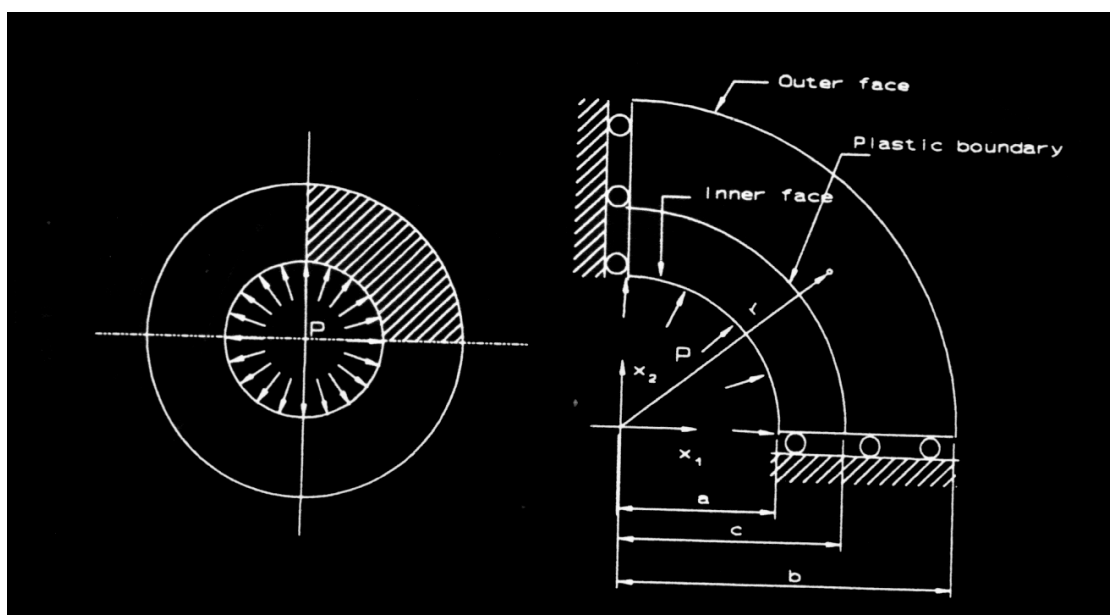


Fig 6.5 Dimension d'un cylindre en déformation plane

6.2.1.2) Résultats de l'expérimentation numérique

On s'intéresse à l'étude d'un quart de la section du cylindre vue la symétrie

Celle -ci est modélisée avec douze éléments isoparamétriques à huit nœuds.

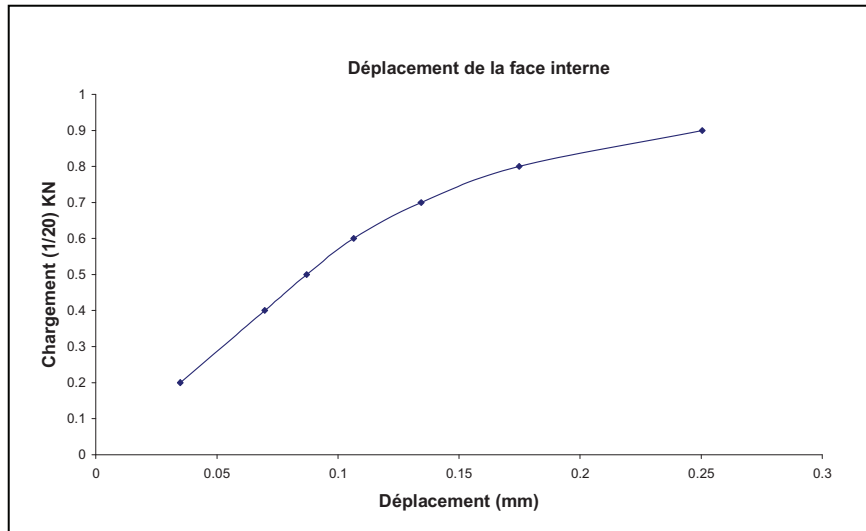
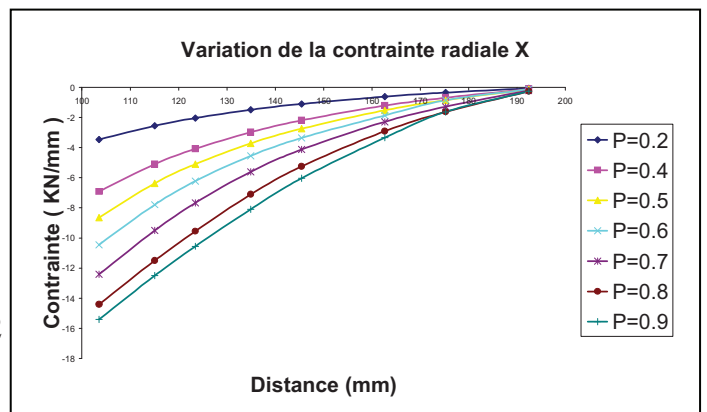
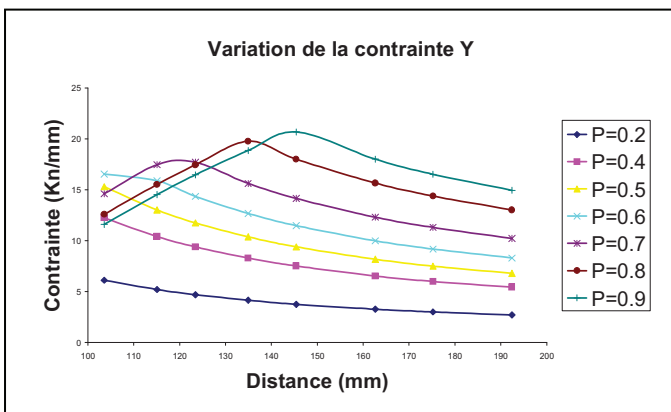


Fig 6.6 Déplacement de la Face interne

* Le déplacement de la face interne en fonction de la pression est illustré dans la figure 6.6, on constate qu'on about a de très résultats, en comparant avec la solution analytique, et d'autre expérimentation numérique proposé par des chercheurs tels que (RANJBARAN ET PHIPPS).

* La variation des contraintes radiales et circonférentielles le long du rayon est illustrée dans la figure 6.7 pour une structure membranaire à 12 éléments.

a) Intégration réduite (2 x 2)



Intégration totale (3 x 3)

b) Intégration Totale (3 x 3)

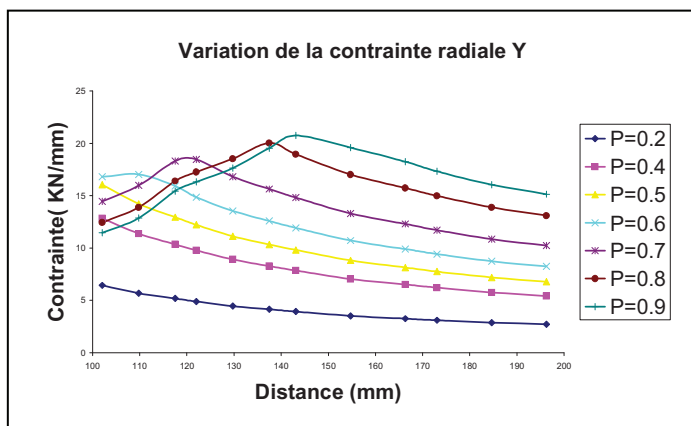


Fig 6.7.c Variation de la contrainte circonférentielle

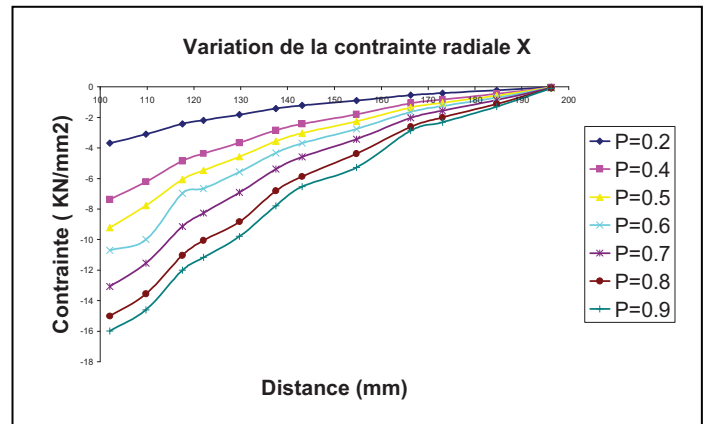


Fig 6.7.d Variation de la contrainte Radiale

La contrainte axiale théorique est donnée par

$$\sigma_z = \frac{2\nu P}{b^2/a^2 - 1} \quad : \text{Déformation plane}$$

6.2.1.3) Critères de plasticité

La simulation numérique tient compte des différents critères de plasticités mentionnés ci-dessous

- Von Mises
- Tresca
- Mohr-Coulomb
- Drucker-Prager

6.2.1.4) Algorithme de Résolution

Un) Intégration Réduite (2 x 2) à 12 éléments

	Rigidité Initiale	Newton Raphson	Newton Raph - Modifié
TRESCA	76		54
VON MISES	45	12	25

MOHR-COULOMB	7	7	7
DRUCKER – VON MISES	7	7	7

Deux) Intégration Totale (3 x 3) à 12 éléments

	Rigidité Initiale	Newton Raphson	Newton Raph - Modifié
TRESCA	79		56
VON MISES	42	12	26
MOHR-COULOMB	7	7	7
DRUCKER – VON MISES	7	7	7

Trois) Intégration Réduite (2 x 2) à 24 éléments

	Rigidité Initiale	Newton Raphson	Newton Raph - Modifié
TRESCA	73		53
VON MISES	44	12	24
MOHR-COULOMB	7	7	7
DRUCKER – VON MISES	7	7	7

Quatre) Intégration Totale (3 x 3) à 24 éléments

	Rigidité Initiale	Newton Raphson	Newton Raph - Modifié
TRESCA	75		55
VON MISES	40	11	24
MOHR-COULOMB	7	7	7
DRUCKER – VON MISES	7	7	7

Pression de plastification de Tresca

D'après l'équation (6.8) $P_e = k(1 - \frac{a^2}{b^2})$

$K=Y/2$ $k=12 \text{ KN/mm}^2$ $P_e = 0.75 k$

$P_e = 0.75 \times 12$ alors $P_e = 9 \text{ KN/mm}^2$

D'après la simulation numérique la plastification aura lieu à l'incrément N°3
d'où $P=0.5 \times 20$ alors $P=10 \text{ KN/mm}^2$ pour 12 éléments

Pour le meme nombre d'éléments et en diminuant les facteurs des
incréments, on obtient

$P=0.49 \times 20$ $P= 9.8 \text{ Kn/mm}^2$

En augmentant le nombre d'éléments , on aura

*** 96 éléments à 329 Nœuds**

$P = 0.48 \times 20$ $P = 9.6 \text{ KN/ mm}^2$

*** 192 éléments à 641 Nœuds**

$P = 0.48 \times 20$ $P = 9.6 \text{ KN/ mm}^2$

*** 384 éléments à 1233 Nœuds**

$P = 0.47 \times 20$ $P = 9.4 \text{ KN/ mm}^2$

Par conséquent plus qu'on augmente le nombre d'éléments plus que se
rapproche de la solution donnée par théorie.

Pression de plastification de Von Mises

La pression de plastification est donnée par l'équation (6.9)

$$P_e = k \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \left\{1 + (1 - 2\beta)^2 \frac{a^4}{3b^4}\right\}^{-1/2}$$

avec $\beta = \nu = 0.3$ pour déformation plane

en introduisant les valeurs des paramètres de l'équation nous aurons la relation suivante ; :

$$P_e = 0.748753116 k$$

K pour le critère de Von Mises

$$k = \frac{Y}{\sqrt{3}} \quad k = \frac{24}{\sqrt{3}} \quad k = 13.85640646$$

finalement $P_e = 10.375 \text{ KN}$

D'après le fichier résultat on aura la plastification à l'incrément N°4 d'ou $P = 0.6 \times 20$ $P = 12 \text{ KN/ mm}^2$

*** 384 éléments à 1233 Noeuds**

$$P = 0.55 \times 20 \quad P = 11 \text{ KN/ mm}^2$$

Par conséquent plus qu'en raffinant le maillage plus que se rapproche à la solution numérique donnée par la théorie

6.2.2) Plaque trouée en contraintes planes

Analyse en contrainte plane d'une plaque avec un trou circulaire central

La géométrie de la plaque est montrée sur la figure 6.2 dans laquelle

- $a=50$ mm $b=100$ mm $L=400$ mm et $t=1$ mm

Les propriétés du matériau sont

- Module élastique , $E=7000$ KN/mm²
- Coefficient de Poisson , $\nu =0.2$
- La limite d'écoulement $Y = 24$ KN/mm²
- Module Plastique , $E_t = 220$ KN/mm² (Déformation de durcissement linéaire)

L'étude est consacrée uniquement à un quart de la plaque vue la symétrie dans les deux sens

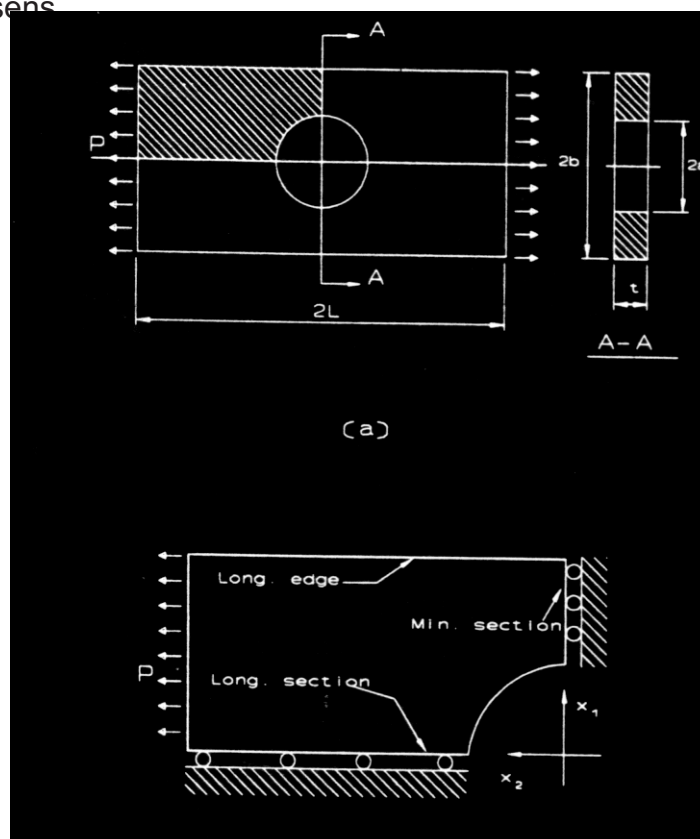


Fig 6.8 Géométrie de la plaque trouée

6.2.2.1) Hypothèse

Les paramètres de l'étude sont :

- Critère d'écoulement : Tresca
- Critère de convergence : Forces
- Tolérance, TOL = 10^{-3}
- Analyse non linéaire : Méthode de rigidité initiale

La courbe du déplacement longitudinal d'une extrémité lointaine de la plaque en fonction chargement est montré dans la figure 6.9

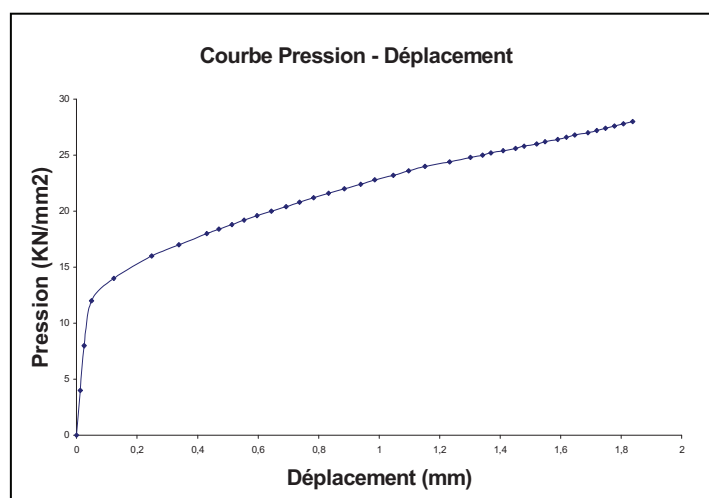


Fig 6.9 Courbe Pression Déplacement

6.2.2.2) CONCLUSION

Cette étude nous a permis d'analyser profondément le comportement de la structure pour différent chargement et de localiser exactement la propagation de la plastification dans les différentes zones de cette structure

Le déplacement longitudinal d'une extrémité lointaine de la plaque varie entre [0.1 - 1.0 mm]

Finalement on peut dire qu'on a aboutit à des résultats très excellents en le comparant à la solution analytique

6.2.1) CYLINDRE EN DEFORMATION PLANES

6.2.1.1) Hypothèse

Le programme a été validé en considérant l'exemple traité par de nombreux chercheurs qui est celui d'un cylindre en déformations planes dont le rayon interne $a=100$ mm, le rayon externe $b=200$ mm

- Module élastique , $E = 21000$ KN/mm²
- Rapport de poisson , $\nu = 0.3$
- La limite de plastification , $Y=24$ KN/mm²
- Paramètre d'érouissage , $H = 0$
- Le critère de plasticité utilisé et celui de Von Mises
- La tolérance , $TOL = 10^{-3}$
- Procédure de résolution : Méthode de Newton Raphson

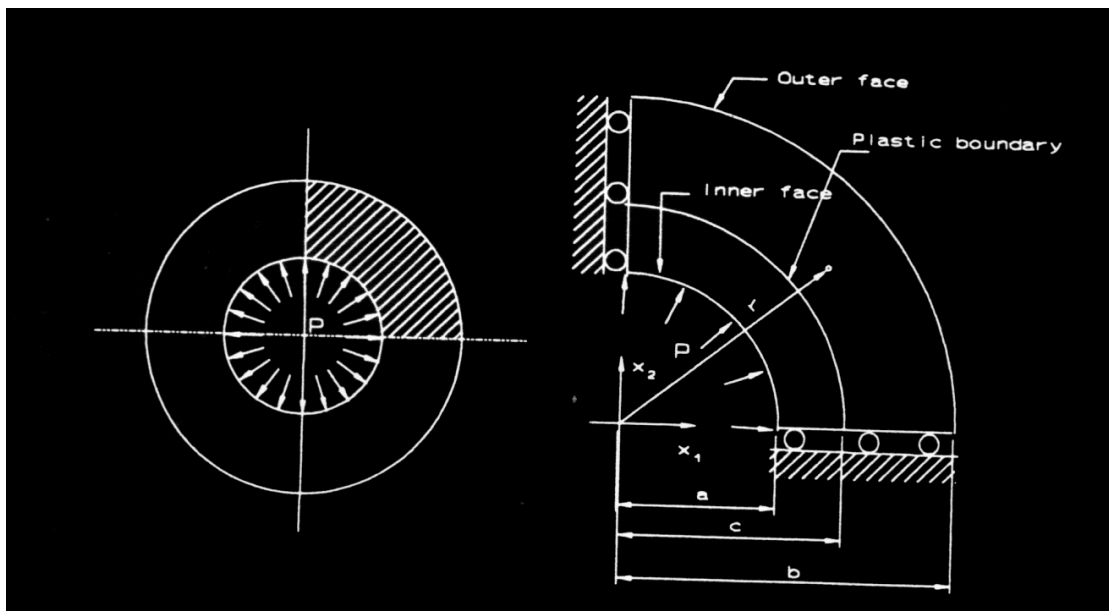


Fig 6.5 Dimension d'un cylindre en déformation plane

6.2.1.2) Résultats de l'expérimentation numérique

On s'intéresse à l'étude d'un quart de la section du cylindre vue la symétrie

Celle –ci est modélisée avec douze éléments isoparamétriques à huit nœuds.

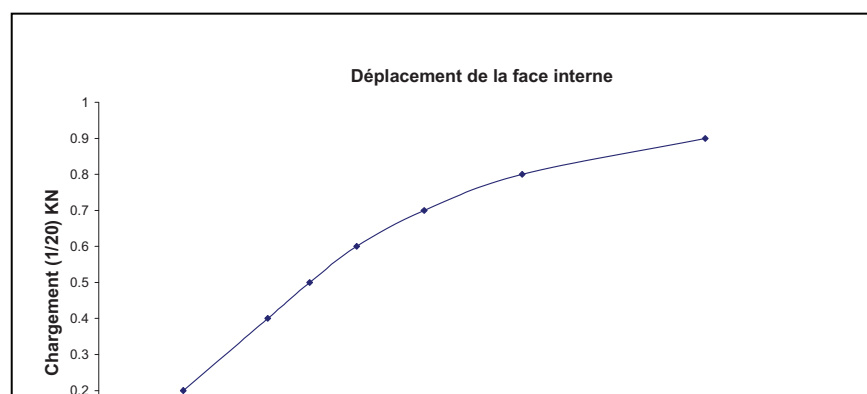


Fig 6.6 Déplacement de la Face interne

* Le déplacement de la face interne en fonction de la pression est illustré dans la figure 6.6, on constate qu'on about a de très résultats, en comparant avec la solution analytique, et d'autre expérimentation numérique proposé par des chercheurs tels que (RANJBARAN ET PHIPPS).

* La variation des contraintes radiales et circonférentielles le long du rayon est illustrée dans la figure 6.7 pour une structure membranaire à 12 éléments.

a) Intégration réduite (2 x 2)

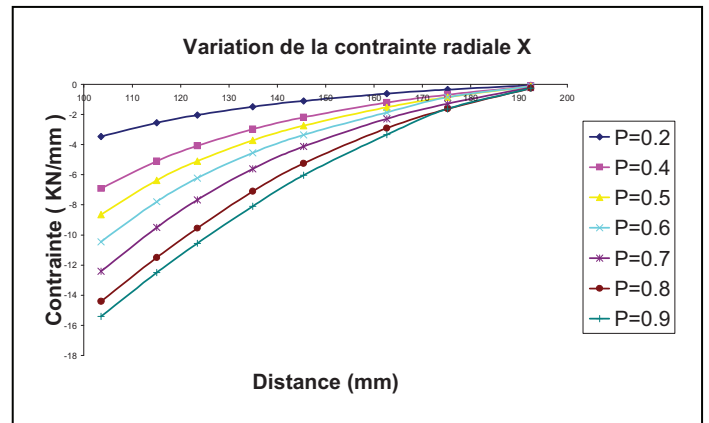
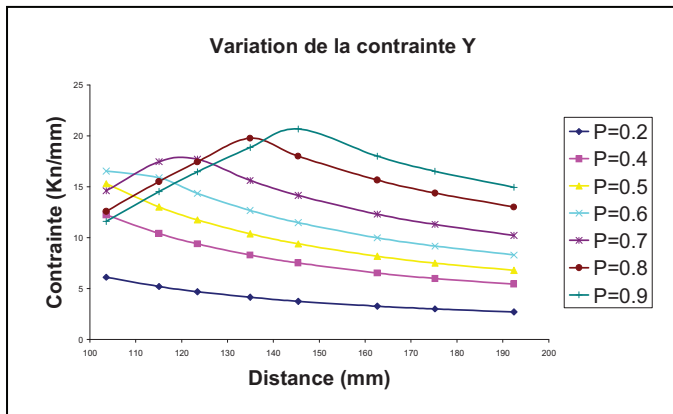


Fig 6.7.a Variation de la contrainte circonférentielle

Fig 6.7.b Variation de la contrainte Radiale

b) Intégration Totale (3 x 3)

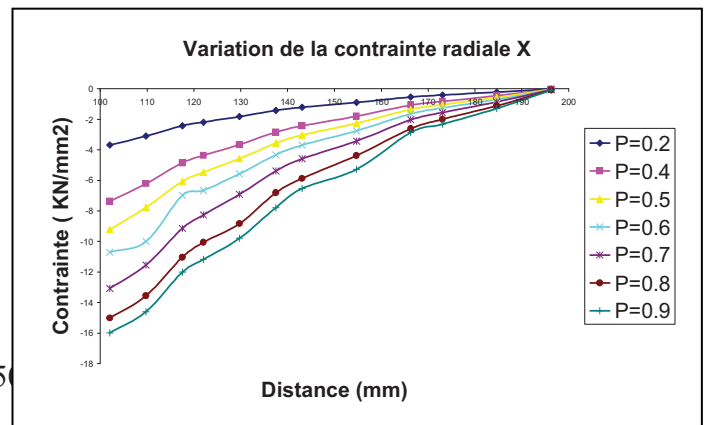
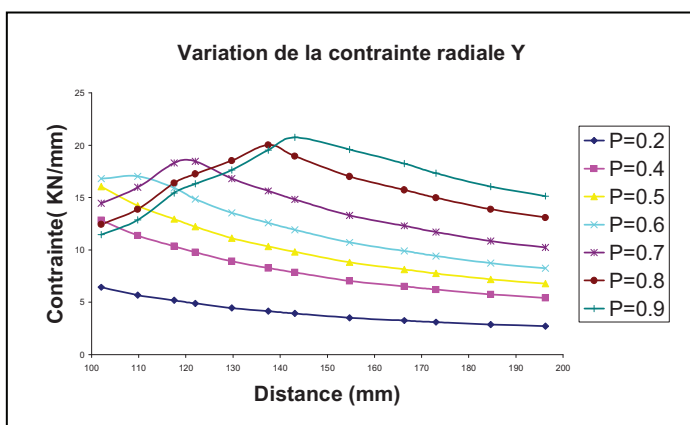


Fig 6.7.c Variation de la contrainte circonférentielle

Fig 6.7.d Variation de la contrainte Radiale

La contrainte axiale théorique est donnée par

$$\sigma_z = \frac{2\nu P}{b^2/a^2 - 1} \quad : \text{Déformation plane}$$

6.2.1.3) Critères de plasticité

La simulation numérique tient compte des différents critères de plasticités mentionnés ci-dessous

- **Von Mises**
- **Tresca**
- **Mohr-Coulomb**
- **Drucker-Prager**

6.2.1.4) Algorithme de Résolution

Cinq) Intégration Réduite (2 x 2) à 12 éléments

	Rigidité Initiale	Newton Raphson	Newton Raph - Modifié
TRESCA	76		54
VON MISES	45	12	25
MOHR-COULOMB	7	7	7
DRUCKER – VON MISES	7	7	7

Six) Intégration Totale (3 x 3) à 12 éléments

	Rigidité Initiale	Newton Raphson	Newton Raph - Modifié

TRESCA	79		56
VON MISES	42	12	26
MOHR-COULOMB	7	7	7
DRUCKER – VON MISES	7	7	7

Sept) Intégration Réduite (2 x 2) à 24 éléments

	Rigidité Initiale	Newton Raphson	Newton Raph - Modifié
TRESCA	73		53
VON MISES	44	12	24
MOHR-COULOMB	7	7	7
DRUCKER – VON MISES	7	7	7

Huit) Intégration Totale (3 x 3) à 24 éléments

	Rigidité Initiale	Newton Raphson	Newton Raph - Modifié

TRESCA	75		55
VON MISES	40	11	24
MOHR-COULOMB	7	7	7
DRUCKER – VON MISES	7	7	7

Pression de plastification de Tresca

D'après l'équation (6.8) $P_e = k(1 - \frac{a^2}{b^2})$

$$K=Y/2 \quad k=12 \text{ KN/mm}^2 \quad P_e = 0.75 k$$

$$P_e = 0.75 \times 12 \quad \text{alors } P_e = 9 \text{ KN/mm}^2$$

D'après la simulation numérique la plastification aura lieu à l'incrément N°3 d'ou $P=0.5 \times 20$ alors $P=10 \text{ KN/mm}^2$ pour 12 éléments

Pour le meme nombre d'éléments et en diminuant les facteurs des incréments, on obtient

$$P=0.49 \times 20 \quad P= 9.8 \text{ Kn/mm}^2$$

En augmentant le nombre d'éléments , on aura

* 96 éléments à 329 Nœuds

$$P = 0.48 \times 20 \quad P = 9.6 \text{ KN/ mm}^2$$

* 192 éléments à 641 Nœuds

$$P = 0.48 \times 20 \quad P = 9.6 \text{ KN/ mm}^2$$

* 384 éléments à 1233 Nœuds

$$P = 0.47 \times 20 \quad P = 9.4 \text{ KN/ mm}^2$$

Par conséquent plus qu'on augmente le nombre d'éléments plus que se rapproche de la solution donnée par théorie.

Pression de plastification de Von Mises

La pression de plastification est donnée par l'équation (6.9)

$$P_e = k(1 - \frac{a^2}{b^2}) \left\{ 1 + (1 - 2\beta)^2 \frac{a^4}{3b^4} \right\}^{-1/2}$$

avec $\beta = \nu = 0.3$ pour déformation plane

en introduisant les valeurs des paramètres de l'équation nous aurons la relation suivante ; :

$$P_e = 0.748753116 k$$

K pour le critère de Von Mises

$$k = \frac{Y}{\sqrt{3}} \quad k = \frac{24}{\sqrt{3}} \quad k = 13.85640646$$

finalement $P_e = 10.375 \text{ KN}$

D'après le fichier résultat on aura la plastification à l'incrément N°4 d'ou $P = 0.6 \times 20$ $P = 12 \text{ KN/ mm}^2$

*** 384 éléments à 1233 Noeuds**

$$P = 0.55 \times 20 \quad P = 11 \text{ KN/ mm}^2$$

Par conséquent plus qu'en raffinant le maillage plus que se rapproche à la solution numérique donnée par la théorie

6.2.2) Plaque trouée en contraintes planes

Analyse en contrainte plane d'une plaque avec un trou circulaire central

La géométrie de la plaque est montrée sur la figure 6.2 dans laquelle

$$- a=50 \text{ mm} \quad b=100 \text{ mm} \quad L=400 \text{ mm} \quad \text{et} \quad t=1 \text{ mm}$$

Les propriétés du matériau sont

- Module élastique , $E=7000 \text{ KN/mm}^2$
- Coefficient de Poisson , $\nu =0.2$
- La limite d'écoulement $Y = 24 \text{ KN/mm}^2$
- Module Plastique , $E_t = 220 \text{ KN/mm}^2$ (Déformation de durcissement linéaire)

L'étude est consacrée uniquement à un quart de la plaque vue la symétrie dans les deux sens

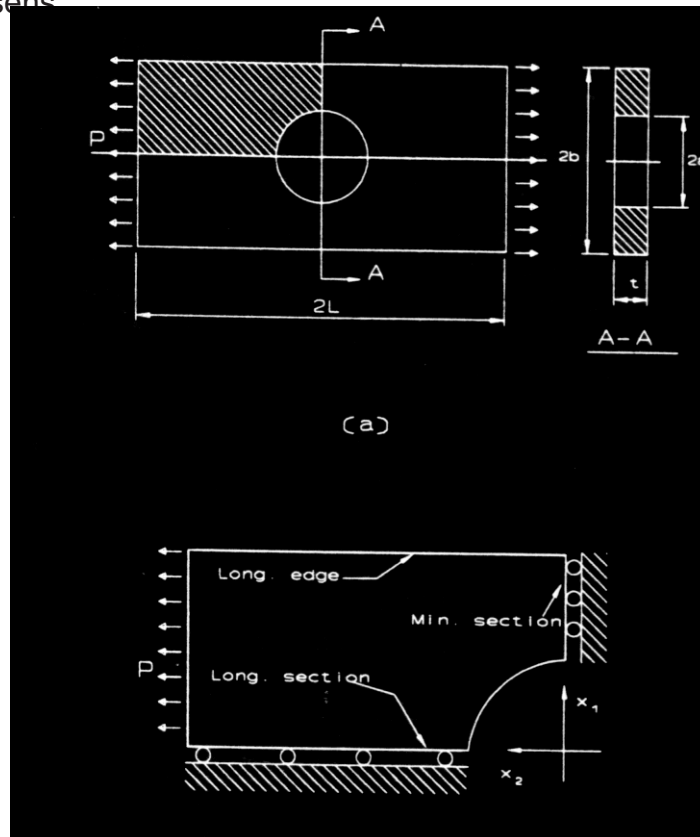


Fig 6.8 Géométrie de la plaque trouée

6.2.2.1) Hypothèse

Les paramètres de l'étude sont :

- Critère d'écoulement : Tresca
- Critère de convergence : Forces
- Tolérance, $TOL = 10^{-3}$
- Analyse non linéaire : Méthode de rigidité initiale

La courbe du déplacement longitudinal d'une extrémité lointaine de la plaque en fonction chargement est montré dans la figure 6.9

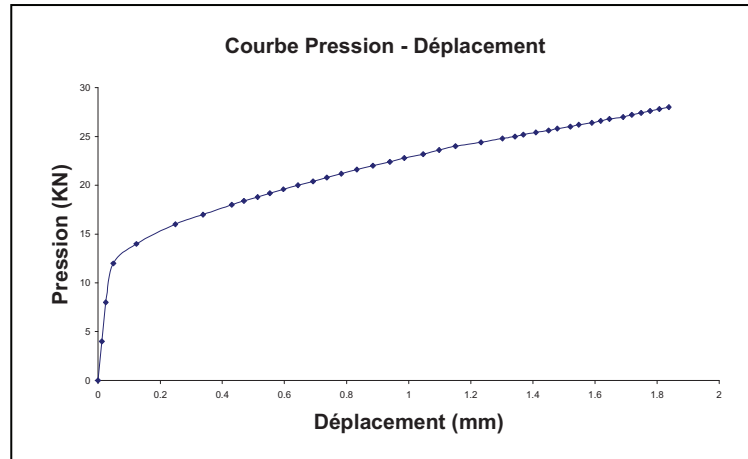


Fig 6.9 Courbe Pression Déplacement

6.2.2.2) CONCLUSION

Cette étude nous a permis d'analyser profondément le comportement de la structure pour différent chargement et de localiser exactement la propagation de la plastification dans les différentes zones de cette structure

Le déplacement longitudinal d'une extrémité lointaine de la plaque varie entre [0.1 - 1.0 mm]

Finalement on peut dire qu'on a aboutit à des résultats très excellents en le comparant à la solution analytique

CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

7.1) Conclusions :

L'outil développé s'est avéré fiable et les résultats obtenus sont comparables à ceux des références [67] [103].

- ❖ L'analyse non linéaire permet de déterminer la charge ultime de la structure et par conséquent les coûts peuvent être réduits et la sécurité améliorée.
- ❖ Les éléments quadratiques sont plus performants que les éléments linéaires.
- ❖ L'utilisation de la formulation isoparamétrique permet de suivre la non linéarité même à l'intérieur de l'élément.
- ❖ Le processus incrémental et itératif permet de tracer le comportement non linéaire et de suivre la propagation de la plastification et la technique **Arc-Length** qui permet de suivre des comportements post-critiques complexes et qui détermine l'incrément du chargement pour chaque itération est très intéressante et dans l'exemple du cylindre en déformations planes, elle a permis la détermination de la charge ultime avec une plus grande précision par rapport à la technique de contrôle en chargement et ceci est en accord avec la référence [8] .
- ❖ La méthode de la rigidité initiale bien qu'ayant une vitesse de convergence lente, elle permet d'éviter les divergences qui peuvent résulter de la singularité de la matrice de rigidité lors de la plastification totale de la section.
L'intégration réduite en élasto-plasticité est bénéfique.
- ❖ Le programme que nous avons élaboré a permis de mettre en œuvre la théorie incrémentale moderne de l'élastoplasticité avec prise en compte des phénomènes suivants tels que
 - ❖ Ecouissage
 - ❖ Effet Bauschinger

- ❖ Plastification Graduelle de la structure

7.2) Recommandations

- ❖ Utilisation d'autres types d'éléments (éléments hybrides, éléments membranaires avec rotations)
- ❖ Prise en considération des non linéarités géométriques.
- ❖ Introduction de l'étude dynamique

NOTATIONS

σ_{ij}	Tenseur de contraintes
ε_{ij}	Tenseur de déformations.
C_{ijkl}	Tenseur des composantes élastiques.
λ, μ	Coefficients de Lamé.
U_i	Champs déplacements.
$\frac{\partial}{\partial x}$	Dérivée partielle.
$[]^r$	Transposée d'une matrice.
C^{-1}	Inverse d'une matrice.
σ_y	Limite élastique.
σ_B	Limite élastique actuelle
M_p	Moment plastique.
M_e	Moment élastique.
λ_i	Facteur de charge
$[k]^e$	Matrice de rigidité élémentaire.
N	Effort normal
T	Effort tranchant
E^{eP}	Module elasto-plastique tangent
σ	Contrainte courante
Y	Limite élastique actuelle
ε^p	Déformation plastique
H	Paramètre d'écrouissage
α	L'ordonnée du centre du segment
$\bar{\sigma} = \sigma - \alpha$	Contrainte réduite
$d\varepsilon^{Pi}$	Incrément de déformation plastique isotrope
$d\varepsilon^{Pc}$	Incrément de déformation plastique cinématique
M	Coefficient de mixité
$d\varepsilon^{el}$	Incrément élastique

K_T	Matrice tangente
σ_i^e	Contrainte fictive à l'itération i
F_i	Forces internes
$\Delta F = F - F_i$	Forces résiduelles
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Contraintes principales
k	Paramètre d'écroutissage
ε^P	Déformation plastique effective
e	Tenseur déviateur des déformations
S	Tenseur déviateur des contraintes
J_1	Premier invariant du tenseur des contraintes
J_2, J_3	Deuxième et troisième invariant du tenseur déviateur S
δ_{ij}	Kronecker Delta
1,2,3	Axes principaux
i,j,k (x,y,z)	Axes quelconques
a	Caractéristique positive du matériau
ε_{ef}^P	Déformation plastique effective
$d\lambda$	Facteur scalaire de proportionnalité positif ou nul
F	Fonction de charge
D^{eP}	Matrice elasto-plastique (généralisation du module E_{eP})
D_t	Matrice tangente (généralisation du module E_t)
σ_i^e	Contrainte effective
m	Nombre de sous incréments
θ	Angle de similitude
Y	Contrainte d'épuisement courante en traction simple
Y(k)	Contrainte actuelle de plastification uniaxiale liée au paramètre d'écroutissage k
τ_{oct}	Contrainte de cisaillement octaédral
τ	Magnitude de la contrainte de cisaillement
σ_n	Contrainte normale
c	Cohésion

ϕ	Angle de frottement interne
$\{U\}^e$	Vecteur des déplacements en un point de l'élément e.
[N]	Matrice des fonctions de forme (fonction de la géométrie)
$\{q\}^e$	Vecteur des déplacements nodaux de l'élément
$\{\mathcal{E}\}^e$	Vecteur élémentaire des déformations.
$[\partial]$	Opérateur différentiel
[H]	Matrice des constantes élastiques
$\{b\}^e$	Vecteur élémentaires des forces de volume
$\{P\}^e$	Vecteur élémentaires des forces de surface
π	Energie potentielle totale
n	Nombre total d'éléments
$\{q\}$	Vecteur global des déplacements nodaux
[K]	Matrice de rigidité globale
$\{F\}$	Vecteur global des charges
J_{ij}	Eléments du Jacobien
nsd	Dimension de l'espace
P_n	Pression
P_t	Cisaillement
r	Coordonnée intrinsèque ($-1 \leq r \leq 1$)
t_k	Composante tangente extérieure du vecteur unité
n_k	Composante normale extérieure du vecteur unité
\mathcal{E}_{3km}	Tenseur de permutation
n_{en}	Nombre de nœuds du coté
G	Module de cisaillement
δd^*	Déplacement virtuel arbitraire
$\delta \mathcal{E}^*$	Déformation compatible
W_{ext}	Travail des forces extérieures
F	Force
W_{int}	Travail des forces intérieures (énergie de déformation)

δU^*	Déplacement interne
[B]	Matrice des déformations élastiques
ψ	Vecteur de forces résiduelles (Résidu)
$[K^*]$	Polynôme ou fraction rationnelle compliquée
ξ_i	Coordonnées de r point d'intégration
W_i	Coefficients de pondération
D	Matrice statique
σ_0	Contrainte initiale
ε_0	Déformation initiale
T_f	Tolérance en forces
T_D	Tolérance en déplacement
T_E	Tolérance en énergie
M.E.F	Méthode des éléments finis
P	Pression interne
P	Force longitudinale
a	Rayon interne
b	Rayon externe
ε_z	Déformation longitudinale (axiale)
ε_θ	Déformation circonférentielle
ε_r	Déformation radiale
(r, θ, z)	Coordonnées cylindriques
ε^{eP}	Déformation elasto-plastique
$d\varepsilon$	Incrément des déformations
$d\sigma$	Incrément des contraintes
E	Module de Young
v	Coefficient de Poisson
G	Module de cisaillement
U	Déplacement radial
σ_z	Contrainte axiale
k	Contrainte d'écoulement au cisaillement pur

N	Paramètre de dimension
K	Module volumique égal à
\mathcal{K}	Scalaire positif
r	Rayon
σ	Contrainte courante d'écoulement en traction ou compression uniaxiale
σ_0	Contrainte d'écoulement à $r=a$
λ	Facteur de concentration elasto-plastique
Y	Contrainte initiale d'écoulement en traction simple
n	Constante du matériau
ϕ	Angle auxiliaire
H'	Paramètre d'écrouissage

BIBLIOGRAPHIE

- [1]- **Abdel-Hafez, L. M.** « Direct design of reinforced concrete skew slabs ». Ph.D Thesis, Dept. of Civ. Eng, University of Glasgow, oct. 1986.
- [2]- **Abdel Rahman, H. H. and Hinton, E.** «Non linear finite element analysis of reinforced concrete stiffened and cellular slabs ». Computers and structures, Vol.23, N°3, 1986, PP.333-350.
- [3]- **Abdel Rahman, H. H., Hinton, E. and Zienkiewicz, O. C.** « computational models for reinforced concrete systems ». In advanced mechanics of reinforced concrete. Final report. IABSE colloquium, Delft 1981, PP 303-313.
- [4]- **Al-Manaseer, A. A.** « A nonlinear finite element study of reinforced concrete beams ». Ph.D. Thesis, 1983 Glasgow University.
- [5]- **Argyris, J. H. and Kelsey, G.** «Energy theorems and structural analysis ». Butterworth, 1960. (Collection of papers published in Aircraft Eng. In 1954 and 1955).
- [6]- **J.F.AUBOIN**, calcul des structures et informatique, EDITIONS EYROLLES (1983).
- [7]- **Bashur, F. K. and Darwin, D.** «Nonlinear model for reinforced concrete slabs ». Journal of the structural division, ASCE, sti, jan. 1978, PP 157-170.
- [8]- **K.J.BATHE.** Finite element procedures in engineering analysis, prentice Hill (1982).
- [9]- **Bathe, K. J., Walczak, J., Welch, A. and Mistry, N.** «Nonlinear analysis of concrete structures ». Computers and structures, vol.32, N°.79, June 1972, PP 63-70.
- [10]- **K. J. Bathe and E.Dvorkin,** ‘On the automatic solution of non linear finite element equations’ Comput. Struct. 17, 871-879
- [11]- **J.L.BATOZ, GOURI DHATT,** Modélisation des structures par éléments finis, EDITIONS HERMES PARIS (1990).
- [12]- **J.L. Batoz and G. Dhatt** ‘Incremental Displacement Algorithm for non linear problems’. Int. J. Numer. Meth. Engng 14, 1262-1267 (1979)
- [13]- **Behr, B. A., Minor, J. E., Linden, M. P. and Vallabhan, C. V. G.** «Laminated glass units under uniform lateral pressure ». Jourlan of structural Eng. Vol.111, N°. 5, May 1985, PP 1037-1050.
- [14]- **Bruce. W. R.** Forde and Siegfried. F. Stierner ‘Improved Arc Length Orthogonality Methods For Non Linear Finite Element Analysis’, Comput. Struct., 27, pp 625-630 (1987)

- [15]- **Bell, J. C. and Elms, D. G.** « Nonlinear analysis of reinforced concrete slabs ». Magazine of concrete research, vol.24, N°. 79, june 1972, PP 63-70.
- [16]- **P.X. Bellini and A.Chulya,** ‘An improved automatic incremental algorithm for the efficient solution of non linear finite element equations’, Comput. Struct. 26, 99-110 (1987)
- [17]- **D.R. BLAND, J.MECH.** Phys. Solids, 4 : 209 (1956).
- [18]- **Benradouane, M.** « Direct design of reinforced concrete slabs using non elastic stress fields ». Master of science, Dept. of Civil Eng. University of Glasgow, oct.1988.
- [19]- **M.BOUMAH RAT, A.GOURDIN,** Méthodes numériques appliquées.
- [20]- **Buyukozturk, O.** « Nonlinear analysis of reinforced concrete structures ». Computers and structures, vol.7, feb. 1977, PP 149-156.
- [21]- **B.BUDIANSKY, Q.** APPL. MATH. 16 :307 (1958).
- [22]- **B.BUDIAONSKY and O.L Mangasarian,** J Appl. Mech. 27 :59 (1960).
- [23]- **E. Carrera** A Study On Arc-Length-Type Methods and Their Operation Failures Illustrated By a Simple Model, Compt. Struct., 50, 217-229 (1994)
- [24]- **J.CHAKRABARTY,** theory of plasticity. Mc Graw Hill, (1987).
- [25]- **J.CHAKRABARTY,** Unpublished work (1976).
- [26]- **A.CHARIF,** cours d’analyse matricielle des structures discrètes. Université de Batna.
- [27]- **A.CHARIF,** cours d’analyse non linéaire des structures et Programmation. Université de Batna.
- [28]- **Cervenka, V. and Gerstle, K. H.** « Inelastic analysis of reinforced concrete panels ». Pubs. Int. Ass. Bridge structural Eng. 1972, 32-11, PP 25-39.
- [29]- **Chang, T. Y., Taniguchi, H. and Chen, W. F.** « Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete panels ». Jnl. Of str. Engineering, ASCE, vol.133, N°.1, jan.1987, PP 122-140.
- [30]- **Chen, W. F.** « Plasticity in reinforced concrete ». McGraw-Hill book company, 1982.
- [31]- **Chen, W. F. and Han, D. J.** « Plasticity for structural engineers ». Springer-Verlag New-York 1988.
- [32]- **Chen, W. F. and Saleeb, A. F.** « Constitutive equations for engineering materials ». volume 1 : Elasticity and modeling. Wiley- interscience

- publication, 1981.
- [33]- **Chen, W. F. and Ting, E. C.** « constitutive models for concrete ». journal of the Eng. Mechanics Division, ASCE, vol, 106, N°.EM1, feb. 1979, PP 1-19.
- [34]- **Cheung, Y. K.** « Finite strip method in structural analysis ». Pergamon press, 1976.
- [35]- **Cheung, Y. K. and Yieo, M. F.** « A practical introduction to the finite element analysis ». North American editorial office, 1979.
- [36]- **Clough, R. W.** « the finite element method in plane stress analysis ». Proc. 2nd conf. On electronic computation, ASCE, New-York 1960, PP 345-377.
- [37]- **Cook, R. D., Malkus, D. S. and Plesha, M. E.** « concepts and applications of finite element analysis ». Third edition, Madison, 1989.
- [38]- **Cope, R. J.** « Flexural shear failure of reinforced concrete slabs bridges ». Proc. Inst. Civ. Engrs. Vol.79, sep. 1985, PP 559-583.
- [39]- **Cope, R. J. and Clark, L. A.** « concrete slabs analysis and design ». Elsevier applied science publishers Ltd. 1984.
- [40]- **Cope, R. J. and Rao, P. V.** « Nonlinear finite element analysis of concrete slab structures ». Proc. Inst. Civ. Engrs. Part 2, N°.63, March 1977, PP 159-179.
- [41]- **M.A Crisfield**, 'A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through'. Compt. Struct. 13, 55-62 (1981)
- [42]- **B.CROSSLAND and D.J. BURNS**, proc. Inst. Mech. Eng, 175, 1083 (1961).
- [43]- **B.CROSSLAND and J.A. BONES**, Proc. Inst. Mech. Eng, 172 :777 (1958).
- [44]- **T.E. DAVIDSON and D.P. KENDALL**, Mechanical Behavior of materials under pressure (Ed.H.L.I.D. Pugh) P.54 Elsevier Amsterdam (1970).
- [45]- **D.N De G. ALLEN and D.G. SOPWITH. PROC.R.SOC.,A.,205 :69 (1951).**
- [46]- **Dhatt, G. et Touzot, G.** « Une présentation de la méthode des éléments finis ». 2me éditions, Maloine S.A. Editeur paris 1984.
- [47]- **D.J.DAWE**, Matrix and finite element displacement analysis of structures.
- [48]- **Divakar, M. P., Fafitis, A. and shah, S. P.** « Constitutive model for shear transfer in cracked concrete ». Jnl. Of struct. Eng. Vol. 133, N°.5, may 1987, PP 1046-1062.
- [49]- **Dotreppe, J. C., Schnobrich, W. C. and Perknold, D. A.** « Layered finite element procedure for inelastic analysis of reinforced concrete slabs ». publications of the Int. association for Bridges on Str. Engrs., vol.33, N°.2, 1973, PP 53-68.

- [50]- **Ergatoudis, J. G., Irons, B. M. and Zinkiewicz, O. C.** « curved isoparametric quadrilateral elements for finite element analysis ». int. jnl. Of solids and structures, vol. 4, 1986, PP 31-42.
- [51]- **Frantzeskakis, C. and Theillout, J. N.** « Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete structures with a particular strategy following the cracking process ». computers and structures, vol.31, N°.3, 1989, PP 395-412.
- [52]- **G.J. FRANKLIN and J.L.M MORRISON.** Ibid, 174 :947 (1960).
- [53]- **Gajar, G. and Dux, P. F.** « crack band based model for finite element methode analysis of concrete structures ». jnl. Of str. Eng. Vol.116, N°.6, june 1990, PP 1696-1714.
- [54]- **Gajar, G. and Dux, P. F.** « simplified nohorthogonal crack model for concrete ». jnl. Of str. Eng. Vol. 117, N°.1, jan.1991, PP 149-164.
- [55]- **R.H.GHALLAGHER,** Finite element analysis-fundamentals. PRENTICE HALL, NEW JERSY (1975).
- [56]- **Gorji, M.** « Nonlinear analysis of plates with plastic orthotropy ». jnl. Of str. Engineering, ASCE, vol.111, N°.10, oct.1985, PP 2214-2226.
- [57]- **Gilbert, R. I. and Warner, R. F.** « Tension stiffening in reinforced concrete slabs ». jnl. of the str. Division, ASCE, 104, N°. st12, dec.1978, PP 1885-1900.
- [58]- **Gordaninejad, F.** « A finite element model for the composite plates ». computers and structures, vol.31, N°.6, 1989, PP 907-912.
- [59]- **GOURI DHATT, GILBERT THOUZOT,** une présentation de la méthode des éléments finis, presse de l'université LAVAL.QUEBEC , Canada (1981).
- [60]- **Grayson, R and Stevens, L. K.** « Nonlinear analysis of the third int. conf. In Australia on finite element methods, july 1979, the University of south wales, PP 179-196.
- [61]- **B.GROSSLAND and R.HILL,** J.MECH, phys solids 2 :27 (1953).
- [62]- **Gupta, A. K. and Akbar, H.** « Cracking in reinforced concrete analysis ». jnl. Of str. Engineering, vol.110, N°.8, Aug. 1984, PP 1735-1747.
- [63]- **Gupta, A. K. and Maestrini, S. R.** « Post-cracking behavior of membrane reinforced concrete elements including tension stiffening ». jnl. of str. Engineering, vol.115, N°.4, apr.1989, PP 957-976.
- [64]- **Gupta, A. K. and Sen, S.** « design of flexural reinforcement in concrete slabs ». jnl. of the str. Division, apr.1977, st4, PP 793-805.
- [65]- **R. HILL, E.H Lee and S.J TUPPER,** Proc. R. Soc.,a.191 : 278 (1947).

- [66]- **Hinton, E and Owen, D. R. J.** « finite elements in plasticity ». (theory and practice), pineridge press, 1980.
- [67]- **Hinton, E and Owen, D. R. J.** « finite element programming ». academic press 1977.
- [68]- **Hinton, E and Owen, D. R. J.** « finite element software for plates and shells ». pineridge press, 1984.
- [69]- **P.G. HODGE, JR, AND G.N. WHITE,** J.APPL : Mech, 17 : 180 (1950).
- [70]- **P.G. HODGE, JR,J.** APPL. MECH, 20 :530 (1953).
- [71]- **Hseih, S. S., Ting, E. C. and Chen, W. F.** « Applications of a plastic-fracture model to concrete structures ». computers and structures, vol.28, N°. 3, 1988, PP 373-394.
- [72]- **Irons, B. M.** « Engineering application of numerical integration in stiffness method ». J.A.I.A.A., vol.14, 1966, PP 2035-2037.
- [73]- **H. ISHILKAWA, Z.** Angew. Math. Mech, 55 :171 (1975).
- [74]- **Jain, S. C. and Kennedy, J. B.** « Yield criterion for reinforced concrete slabs ». journal of the str. Division, ASCE, march 1974, st3, PP 631-644.
- [75]- **Jenq, Y. S. and Shah, S. P.** « Crack propagation in fiber reinforced concrete ». jnl. of str. Engineering, vol.112, N°.1, jan. 1986, PP 19-34.
- [76]- **Jofriet, J. C. and McNeice, G. M.** « Finite element analysis of reinforced concrete slabs ». journal of the structural division, march 1971, st3, PP 785-805.
- [77]- **Discussion of ref. [54] by cardenas, A. E. and Branson, D. E.** « finite element analysis of reinforced concrete slabs ». jnl. of str. Division, st12, dec.1971, PP 2905-2911.
- [78]- **J.F.IMBERT,** Analyse des structures par élément finis, CEPADVES EDITION (1979).
- [79]- **Kemp, K. O.** « the yield criterion for orthotropically reinforced concrete slabs ». Int. jnl. mech. Science, vol.7, 1965, PP 737-746.
- [80]- **W.T. KOITER, BIEZENO** Anniversary volume, STRAN, HAARLEM, P232 (1953).
- [81]- **Kupfer, H., Hilsdorf, H. K. and Rusch, H.** « Behavior of concrete under biaxial stresses ». ACI Journal, Aug.1969, PP 656-666.
- [82]- **M.LEMAIRE, J.M.REUNOUARD, R.M.COURTADE,** Application du calcul automatique à l'étude des structures « Méthode des éléments finis », juin

1976. 4GCU

- [83]- **Limaitre, J. and Chaboche, J. L.** « Mécanique des matériaux solides ». 2me édition Dunod 1988.
- [84]- **Lin, C. S. and Scordelis, A. C.** « Nonlinear analysis of reinforced concrete shells of general form ». jnl. str. Division, ASCE, vol.101, st3, march 1975, PP 523-538.
- [85]- **Ma, S. Y. A. and May, I. M.** « the Newton-Raphson method used in the non-linear analysis concrete structures ». computers and structures, vol.24, N°2, 1986, PP 177-185.
- [86]- **C.W. Mac Gregor, C.F. Coffin and J.C. Fisher, J.Franklin.** inst, 26 :245 (1948).
- [87]- **P.V.MARCAL,** INT. J.Mech.Sci , 7 : 229. And 841 (1965).
- [88]- **W.R.D.MANNING,** Engineering, 163 : 349 (1947).
- [89]- **MARC THENOZ,** calcul des structures par éléments finis.
- [90]- **Mathies, H. and Strang, G.** « the solution of nonlinear finite element equations ». int. jnl. for numerical methods in engineering, vol.14, 1979, PP 1613-1626.
- [91]- **I. M. May and Y. Duan** 'A Local Arc-Length Procedure For Strain Softening', Comput. Struct., 64, pp 297-303 (1997)
- [92]- **Mirza, S. A. and McGregor, J. G.** « variability of mechanical properties of reinforcing bars ». jou. of the str. Division, ASCE, vol.105, N°. st5, may 1979, PP 921-937.
- [93]- **A.NADAI,** theory of flow and fracture of solids, chaps 30-32, McGraw-Hill book New-york (1950).
- [94]- **Nawy, E. G. and Orenstein, G. S.** « crack width control in reinforced concrete two-way slabs ». jnl. of the str. division ASCE, march 1970, st3, PP 701-721.
- [95]- **Nilson, A. H.** « nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method ». ACI Journal, sep. 1968, PP 757-766.
- [96]- **PATRICE LIGNELET,** Fortran77, MASSON paris Milan Barcelone Bonn (1991).
- [97]- **PATRICE LIGNELET,** la pratique du Fortran 77, MASSON Paris Milan Barcelone Bonn (1991).
- [98]- **Phillips, D. V. and Zienkiewicz, O. C.** « finite element nonlinear analysis of concrete structures ». proc. Instn. Civ. Engrs. Part 2, 61, march 1976, PP 59-88.
- [99]- **Proc. First U.S. Nat : congr. Appl. Mech.,**561 (1951).

- [100]- **O.RAHMANI, S.KEBAANI**, Introduction à la méthode des éléments finis pour les ingénieurs, OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES ALGER (1988).
- [101]- **Rajasekaran, S. and Murray, M. D. W.** « Incremental finite element matrices ». jnl. of the str. division, ASCE, dec.1973, st12, PP 2423-10231.
- [102]- **E.Ramm** 'Strategies for tracing non linear responses near limit points'. In non linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics (Edit by Wunderlich et al) pp 63-89 Springer-Verlag, Nwe-York (1981)
- [103]- **A.RANJBARN and M.E.PHIPPS.DENA** : A finite element program for the non-linear stress analysis of two-dimensional, metallic and reinforced concrete structures (1992).
- [104]- **E.Riks**, 'An Incremtnal approach to the solution of snapping and buckling problems'. Int. J. Solids Structs. 15, 529-551 (1979)
- [105]- **C.T.F.ROSS**, computer analysis of skeletal structures.
- [106]- **M.C. STEELE, J**, Appl. Mech, 19 : 133 (1952).
- [107]- **Taig, I. G.** « structural analysis by the matrix displacement method ». eng. Elastic aviation repport N°. so17, 1961.
- [108]- **N.S.TAIBI** Fortran77 cours et exercices.
- [109]- **Taylor, R., Maher, D. R. H. and Hayes, B.** « effect of the arrangement of reinforcement on the bahavior of reinforced concrete slabs ». Magazine of concrete reseach, vol.18, N°.55, june 1966, PP 85-93.
- [110]- **Turner, M. J., Clough, R. W., Marlin, H. C. and Topp, L. J.** « stiffness and deflection analysis of complex structures ». jnl. Aero. Sci., vol.23, 1956, PP 805-823.
- [111]- **L.B.TURNER**, TRANS. CAMB.PHIL, Soc,21 : 377 (1909).
Engineering, 92 :115 (1911).
- [112]- **Valliappan, S. and Doolan, J. F.** « nonlinear stress analysis of reinforced concrete ». jnl. of the str. division ASCE, vol.98, N°.st4, proc. Paper 8815, apr.1972, PP 885-898.
- [113]- **Vecchio, F. and Collins, M. P.** « stress-strain caractéristiques of reinforced concrete in pure shear ». advanced mechanics of reinforced concrete IABSE rapport, vol.31, Delft, the Nether Land, 1981, PP 35-42.
- [114]- **Wanchoo, M. K. and May, G. W.** « Cracking analysis of reinforced concrete plates ». jnl. of the str. division, ASCE, jan.1974, st1, PP 201-215.

- [115]- **Wegmuller, A. W.** « Elastic-plastic finite element analysis of plates ». Proc. Instrn. Civil Engrs., part 2, vol.57, sep.1974, PP 535-543.
- [116]- **Wu, Z., Yoshikawa, H. and Tanabe, T.** « Tension stiffness model for cracked reinforced concrete ». jnl. of str. engineering, vol.117, N°.3, march 1991, PP 715-731.
- [117]- **Zienkiewicz, O. C.** « La méthode des éléments finis ». 3me édition, Mc Graw-Hill inc., Paris 1979.
- [118]- **Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L.** « the finite element method » 4th Edition Mc. Graw-Hill 1989 (Tome 1), 1991 (Tome 2).
- [119]- **Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. Too, J. M.** « Reduced integration technique in general analysis of plates and shells ». int. jnl. for Numerical method in Engineering, vol.3, 1971, PP 275-290.