



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière Mathématiques:

Option : Analyse Mathématique et Numérique

Par

FREIDJA Bochra

Sujet

Comparaison entre Euler et la méthode de Trapèze pour un problème initial

Devant le jury :

GASMI Abdelkader	Prof. Univ de M'sila	Président
Mostefa NADIR	Prof. Univ de M'sila	Encadreur
DJAIDJA Noui	MAA. Univ de Msila	Examineur

Promotion : 2018 / 2019

Remerciements

Je tiens à remercier, en premier lieu, **Mon Dieu** qui m'a donné la force de rédiger ce modeste travail.

Je tiens à remercier les membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de mémoire.

Je tiens à remercier Monsieur Mostefa.NADIR.directeur de mon mémoire, pour sa disponibilité et ses conseils judicieux tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier Monsieur Raid Mohamed NADIR pour son aide et ses conseils.

Je tiens à exprimer tout mes respects à ma famille qui m'a toujours encouragé.

Je remercie tous les professeurs du département de Mathématiques, sans oublier mes chers amis, ainsi tous ceux qui ont participé de loin ou de près à l'élaboration de ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

-A l'âme de ma chère grand mère

A mes parents ma mère et mon père.

-A ma chère tante qui m'a toujours motivé et encouragé

A mes soeurs mes frères

-A toute la famille.

-A toute mes amies.

En fin je dédie ce mémoire à

tous ceux qui me sont chers.

Table des matières

Introduction	1
1 Opérateurs Compacts	2
1.1 Opérateurs linéaires compacts	2
1.1.1 Ensembles relativement compacts	2
1.1.2 Noyau faiblement singulier	6
2 La résolution numérique d'un problème initial	8
2.1 Equation différentielle linéaire du premier et du second ordre . . .	8
2.2 Théorème d'existence et de l'unicité	9
2.3 La résolution d'un problème de valeur initiale du premier ordre	14
2.3.1 Un problème de valeur initiale du premier ordre:	14
2.3.2 La résolution numérique d'un problème de valeur initiale du premier ordre:	15
2.3.3 La méthode d'Euler :	15
2.4 Un problème de valeur initiale du second ordre	17
2.4.1 La résolution numérique d'un problème de valeur initiale du second ordre :	18
2.4.2 La réduction d'équations différentielles linéaire à un système du pre- mier ordre :	18
2.4.3 La méthode d'Euler	19
3 Transformation d'un problème initiale à une équation intégrale de Volterra:	21
3.1 L'équation intégrale de Volterra:	21

3.2	Transformation d'un problème initiale à une équation intégrale de Volterra: .	21
3.2.1	Approximation de la solution de l'équation intégrale de Volterra . . .	22
	Conclusion générale	25
	Bibliographie	27

Introduction

La plupart des problèmes mathématiques et physiques sont résolus par des équations différentielles; dont la majorité sont trop compliqués à résoudre analytiquement. Parfois on peut assurer l'existence et l'unicité de la solution mais on ne peut pas connaître la forme explicite de cette solution. Donc, nous présentons dans ce travail quelques méthodes qui permettent de résoudre numériquement un problème de valeur initiale. Sachant que notre travail se compose de trois chapitres.

Le premier chapitre: Aborde des notions et un rappel sur les opérateurs compacts.

Le deuxième chapitre: On donne le théorème qui assure que l'équation différentielle admet une solution unique. On ne peut pas résoudre un problème de valeur initiale (du premier ordre ou du deuxième ordre) analytiquement, alors on a besoin de chercher des méthodes pour la résolution numérique de ces problèmes, en se basant sur la méthode d'Euler.

On applique cette dernière sur les (**PVI**) du premier et du deuxième ordre.

Le troisième chapitre: On transforme un problème initial du premier et du deuxième ordre à une équation intégrale de Volterra. On applique la méthode des Trapèzes pour la résolution numérique de l'équation intégrale de Volterra.

On termine notre mémoire par une conclusion générale.

Chapitre 1

Opérateurs Compacts

1.1 Opérateurs linéaires compacts

Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F , on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné G dans E à un ensemble relativement compact $A(G)$ dans F . Autrement dit la fermeture $\overline{A(G)}$ est compacte

1.1.1 Ensembles relativement compacts

Un ensemble $G \subset E$ est relativement compact si pour toutes suites $\{u_n\}$ de G , il existe une sous suite $\{u_{n(k)}\}$ qui converge dans F .

Théorème 1.1.1 (*critère de compacité*) *un opérateur linéaire $A : E \rightarrow F$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée φ_n de E , la suite $A\varphi_n$ contient une sous suite convergente de F*

Preuve. il suffit d'appliquer les définitions appropriées d'un ensemble borné et un ensemble relativement compact

Théorème 1.1.2 *une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact*

■

Preuve. Soit $\{\varphi_n\}$ une suite bornée de E et soit $\{A\varphi_n\}$ une suite de F , alors

$$A\varphi_n(x) = \alpha A_1\varphi_n(x) + \beta A_2\varphi_n(x) \text{ avec } \varphi_n \in E \text{ } n \in \mathbb{N}$$

A_1 et A_2 étant compacts, on peut extraire de $\{A_1\varphi_n\}$ et de $\{A_2\varphi_n\}$ deux sous suites convergentes qui donne par leur somme une sous suite convergente de $\{A\varphi_n\}$, donc A est compact

■

Théorème 1.1.3 *Le produit AB de deux opérateurs bornés A et B est compact si l'un des opérateurs A ou B est compact.*

Preuve. Soit $\{\varphi_n\}$ une suite bornée de E , alors si B est un opérateur borné la suite $B\varphi_n(x)$ est aussi bornée, et de la compacité de l'opérateur A il existe une sous suite $A(B\varphi_{n(k)}(x))$ qui converge, ce qui implique que AB est compact. D'autre part si B est compact, on peut extraire de la suite $B\varphi_n(x)$ une sous suite convergente $B\varphi_{n(k)}(x)$, et de la continuité de l'opérateur A car il est borné la suite $A(B\varphi_{n(k)}(x))$ converge, ce qui implique que AB est compact. ■

Théorème 1.1.4 *Soit E un espace normé et F un espace de Banach, et soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs compacts de E dans F , converge en norme vers l'opérateur linéaire A de E dans F*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$$

alors A est compact.

Preuve. Soit $\{\varphi_n\}$ une suite bornée de E , l'opérateur A_1 étant compact, on peut extraire de la suite $\{A_1\varphi_n\}$ une sous suite convergente, soit $\{\varphi_n^1\}$ une sous suite de $\{\varphi_n\}$ telle que, $\{A_1\varphi_n^1\}$ soit convergente. De la même façon, on peut extraire de la suite $\{A_2\varphi_n^1\}$ une sous suite convergente, car A_2 est compact, soit $\{\varphi_n^2\}$ une sous suite de $\{\varphi_n^1\}$ telle que la suite $\{A_2\varphi_n^2\}$ soit convergente. Remarquons que, la suite $\{A_1\varphi_n^2\}$ est une sous suite de la suite convergente $\{A_1\varphi_n^1\}$ qui à son tour converge. En raisonnant de la même façon, pour les opérateurs $A_1, A_2, \dots, A_p, \dots$, on détermine les suites $\{\varphi_n^1\}, \{\varphi_n^2\}, \dots, \{\varphi_n^p\}$. Il est à remarquer que la suite $\{\varphi_n^p\}$ est une sous suite de toutes les suites qui lui précèdent et que les suites $\{A_k\varphi_n^p\}$ sont convergentes pour $(k = 1, 2, \dots, p)$. Comme l'espace F est complet, pour la compacité de l'opérateur A il suffit de montrer que la suite $\{A\varphi_n^p\}$ est une suite de Cauchy,

alors

$$\|A\varphi_n^p - A\varphi_n^q\| \leq \|A\varphi_n^p - \|A\varphi_n^p - A\varphi_n^q\|\| + \|A_n\varphi_n^p - A_n\varphi_n^q\| + \|A_n\varphi_n^q - A\varphi_n^q\|$$

Soit $\|\varphi_n\| \leq M$; choisissons n de sorte que l'on a $\|A - A_n\| < \frac{\varepsilon}{3M}$, ensuite choisissons N tel que pour tous les $p > N$ et $q > N$, on a la relation $\|A_n\varphi_n^p - A_n\varphi_n^q\| < \frac{\varepsilon}{3}$ car la suite $\{A_n\varphi_n^p\}$ est convergente. Dans ces conditions on aura pour tout p et q suffisamment grands

$$\|A\varphi_n^p - A\varphi_n^q\| < \varepsilon$$

■

Théorème 1.1.5 Soit A un opérateur borné de E dans F , à image $A(E)$ de dimension finie. Alors A est compact.

Preuve. En effet, car l'opérateur A transforme tout ensemble borné G de E à un ensemble borné $A(G)$ dans un espace de dimension finie $A(E)$ ce qui implique que $A(G)$ est précompact. ■

Lemme 1.1.1 Soit G un sous espace fermé d'un espace normé E tel que, $G \neq E$, alors il existe un élément $\varphi \in E$, avec $\|\varphi\| = 1$ tel que, pour tout $\phi \in G$, on a

$$\|\varphi - \phi\| \geq \alpha, \text{ avec } 0 < \alpha < 1$$

Preuve. En effet, soit f un élément de E tel que $f \notin G$ alors, on a

$$\inf_{\phi \in G} \|f - \phi\| = \beta > 0,$$

choisissons un élément $\psi \in G$ tel que

$$\beta \leq \|f - \psi\| \leq \frac{\beta}{\alpha}$$

soit φ le vecteur donné par

$$\varphi = \frac{f - \psi}{\|f - \psi\|},$$

alors le vecteur φ est de norme égale à l'unité ($\|\varphi\| = 1$). De plus, on a

$$\begin{aligned} \|\varphi - \phi\| &= \frac{1}{\|f - \psi\|} \|f - \{\psi + (\|f - \psi\| \phi)\}\| \\ &\geq \frac{\beta}{\|f - \psi\|} \geq \alpha \end{aligned}$$

■

Théorème 1.1.6 *L'opérateur identique I est compact de E dans E si et seulement si E est de dimension finie.*

Preuve. Soit φ_1 un élément de E , tel que $\|\varphi_1\| = 1$, alors $G_1 = \text{span}\{\varphi_1\}$ est un sous espace fermé de E car G_1 est de dimension finie. D'après le lemme précédent, il existe un élément $\varphi_2 \in E$ tel que $\|\varphi_2\| = 1$ et $\|\varphi_1 - \varphi_2\| > \frac{1}{2}$. Prenons une deuxième fois le sous espace fermé $G = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2\}$, il existe alors un élément $\varphi_3 \in E$ avec $\|\varphi_3\| = 1$, $\|\varphi_1 - \varphi_3\| > \frac{1}{2}$ et $\|\varphi_2 - \varphi_3\| > \frac{1}{2}$. On répète la même procédure jusqu'à l'obtention d'une suite $\{\varphi_n\}$ vérifiant $\|\varphi_n\| = 1$ et $\|\varphi_n - \varphi_m\| > \frac{1}{2}$, pour tout $m \neq n$. Il est à remarquer que cette suite $\{\varphi_n\}$ est bornée mais elle ne contient aucune sous suite convergente **C.Q.F.D.** ■

Corollaire 1.1.1 *La boule unité $B(0, 1)$ dans un espace de dimension infinie n'est pas compact. En effet, il suffit d'appliquer le théorème précédent, car la boule unité $B(0, 1)$ est sa propre image dans l'espace X de dimension infinie par l'opérateur identique*

Théorème 1.1.7 *Un opérateur compact est un opérateur borné. La réciproque est fausse*

Preuve. En effet, si on désigne par

$$B(0, 1) = \{x \in X, \|x\| \leq 1\}$$

La boule fermée de rayon de l'unité, alors l'ensemble $\overline{A(B(0, 1))}$ est compact, donc borné, c'est à dire

$$\|Ax\| < \infty \text{ et par conséquent, } \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| < \infty$$

ce qui signifie que l'opérateur A est borné. Réciproquement, l'opérateur identique I de E dans E est borné mais il n'est pas compact ■

Théorème 1.1.8 *L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau continu est un opérateur compact*

Preuve. Soit E un ensemble borné de $C(G)$ alors, on a

$$\|\varphi\| \leq M \text{ pour tout } \varphi \in E$$

De plus,

$$|A\varphi(x)| \leq M |G| \max_{x, y \in G} |K(x, y)|, \forall x \in G, \forall \varphi \in E,$$

cela veut dire que $A(E)$ est borné. L'opérateur K est uniformément continu sur le compact $G \times G$, d'où

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y, z \in G, |x - y| < \delta \Rightarrow |K(x, z) - K(y, z)| < \frac{\epsilon}{M|G|}$$

d'où

$$|A\varphi(x) - A\varphi(y)| < \epsilon \text{ pour tout } \varphi \in E \text{ et } x, y \in G, \text{ avec } |x - y| < \delta$$

Ceci exprime que l'ensemble $A(E)$ est équicontinu, d'où $A(E)$ est relativement compact d'après le théorème d'Arzela-Ascoli. Alors A est compact ■

1.1.2 Noyau faiblement singulier

On appelle noyau faiblement singulier la fonction K continue sur $G \times G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sauf peut être aux points $x = y$ et telle que

$$\forall x, y \in G, x \neq y, \exists M > 0, |K(x, y)| < \frac{M}{|x - y|^{n-\alpha}}, 0 < \alpha \leq n$$

Théorème 1.1.9 L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau faiblement singulier est un opérateur compact

Preuve. Il est à remarquer que l'opérateur

$$A\varphi(x) = \int_G k(x, y)\varphi(y)dy, x, y \in G$$

existe comme une intégrale impropre, car

$$|K(x, y)\varphi(x)| \leq M \|\varphi\| |x - y|^{\alpha-n}$$

De plus, on a

$$\int_G |x - y|^{\alpha-n} dy \leq \omega_n \int_0^d \rho^{\alpha-n} \rho^{n-1} d\rho = \frac{\omega_n}{\alpha} d^\alpha,$$

où ω_n désigne la surface de la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$, et d le diamètre de l'ensemble G . Construisons maintenant une suite d'opérateurs compacts A_p , convergente vers l'opérateur A et telle que, on a

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|A - A_p\| = 0$$

Soit h une fonction continue par morceau, définie sur $[0, \infty[$ à valeur dans $\mathbb{R}$, par

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2t - 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq t \leq \infty \end{cases}$$

le noyau K_p défini sur $G \times G$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, par

$$K_p(x, y) = \begin{cases} h(p|x - y|) & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

est un noyau continu pour tout $p \in \mathbb{N}$ et par conséquent, les opérateurs intégraux A_p sont compacts. De plus,

$$\begin{aligned} |A\varphi(x) - A_p\varphi(x)| &= \left| \int_{G \cap |x-y| < \frac{1}{p}} \{1 - h(p|x - y|)\} K(x, y) \varphi(y) dy \right| \\ &\leq M \|\varphi\| \omega_n \int_0^{\frac{1}{p}} \rho^{\alpha-n} \rho^{n-1} d\rho \\ &\leq M \|\varphi\| \frac{\omega_n}{\alpha p^\alpha}, x \in G \end{aligned}$$

Il est aisé de remarquer que la suite des opérateurs $A_p\varphi$ converge uniformément vers $A\varphi$ quand $p \rightarrow \infty$, d'où l'opérateur $A\varphi$ est un élément de $C(G)$, de plus

$$\|A - A_p\| \leq M \frac{\omega_n}{\alpha p^\alpha} \rightarrow 0, \text{ lorsque } p \rightarrow \infty$$

cela implique que l'opérateur A est compact ■

Théorème 1.1.10 *L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau continu ou à noyau faiblement singulier est un opérateur compact sur $C(G)$ si G est de classe C^1*

Chapitre 2

La résolution numérique d'un problème initial

2.1 Equation différentielle linéaire du premier et du second ordre

Définition 2.1.1 (*équation du premier ordre*)

une équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \quad (2.1.1)$$

où $a(x), b(x)$ et $c(x)$ sont des fonctions continues sur un même intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et on demande $\forall x \in I; a(x) \neq 0$ la forme standard de l'équation (1) est

$$y' + b_1(x)y = c_1(x) \quad (2.1.2)$$

où $b_1(x) = \frac{b(x)}{a(x)}, c_1(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$

Définition 2.1.2 (*équation du second ordre*)

appelle équation différentielle linéaire du second ordre une équation du type

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = g(x)$$

où $A(x), B(x), C(x), g(x)$ sont des fonctions continues sur un même intervalle (I) de sorte que $A(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$ la forme standard de l'éq précédente

$$y'' + B_1(x)y' + C_1(x)y = g_1(x)$$

$$\text{où } B_1(x) = \frac{B(x)}{A(x)}, C_1(x) = \frac{C(x)}{A(x)}, g_1(x) = \frac{g(x)}{A(x)}$$

2.2 Théorème d'existence et de l'unicité

Théorème 2.2.1 (existence et l'unicité) Soit l'équation différentielle suivante

$$y' = f(x, y) \tag{2.2.1}$$

où $f(x, y)$ est une fonction continue de deux variables (x, y) sur l'ensemble

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, |x - x_0| \leq a; |y - y_0| \leq b\} \subset U$$

et satisfait à la condition de Lipschitzienne en y

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq L|y_2 - y_1| \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in D$$

Alors , il existe une solution unique $y = \varphi(x)$ de l'équation (3) définie sur l'intervalle $T =]t_0 - d, t_0 + d[$, avec $d \leq a$ et satisfait à la condition

$$\varphi(x_0) = y_0 \tag{2.2.2}$$

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \tag{2.2.3}$$

Preuve. (existence de la solution)

La fonction $f(x, y)$ étant continue dans l'ensemble D fermé et borné ,alors il existe une constante M telle que

$$|f(x, y)| \leq M, \forall (x, y) \in D \tag{2.2.4}$$

soit maintenant la suite de fonctions définie par

$$\varphi_0(x) = y_0, \varphi_i(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, \varphi_{i-1}(\tau)) d\tau \quad i = 1, 2, \dots \tag{2.2.5}$$

on va montrer que les fonctions $\varphi_i(x)$ sont définies et continues sur le segment T autrement dit

$$\varphi_i(x) \in C(T, \mathbb{R}) \quad i = 0, 1, 2; \dots$$

on a pour $i = 1$

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, y_0) d\tau$$

il est clair de voir que la fonction $\varphi_1(x)$ est définie et continue sur le segment $T = [x_0 - a, x_0 + a]$ et on a en vertu de (5)

$$\begin{aligned} |\varphi_1(x) - y_0| &\leq \int_{x_0}^x |f(\tau, y_0)| d\tau \\ &\leq M|x - x_0| \end{aligned}$$

le graphe de la fonction $\varphi_1 \in D$ si

$$|x - x_0| \leq \frac{b}{M}$$

posons

$$d = \min(a, \frac{b}{M}) \tag{2.2.6}$$

on obtient

$$\{(x, \varphi_1(x)), x \in T\} \subset D \tag{2.2.7}$$

alors la fonction $\varphi_1(x) \in D$ si $x \in T$ On a

$$\varphi_{i+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, \varphi_i(\tau)) d\tau$$

il vient que la fonction $\varphi_{i+1}(x)$ est bien définie et continue sur T . De plus

$$|\varphi_{i+1}(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^x |f(\tau, \varphi_i(\tau))| d\tau \leq M|x - x_0| \leq Md \leq b \tag{2.2.8}$$

d'après les relations précédentes on obtient

$$\{(x, \varphi_{i+1}(x)), x \in T\} \subset D$$

Il est à noter que la convergence uniforme de la suite sur le segment T est équivalente à celle de la série des fonctions

$$\varphi_0(x) + [\varphi_1(x) - \varphi_0(x)] + \dots + [\varphi_{i+1}(x) - \varphi_i(x)] + \dots \quad (2.2.9)$$

voir que

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(\tau, \varphi_0(\tau))| d\tau \leq M|x - x_0| \quad (2.2.10)$$

alors

$$\begin{aligned} |\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| &\leq \int_{x_0}^x |f(\tau, \varphi_1(\tau)) - f(\tau, \varphi_0(\tau))| d\tau \\ &\leq L \int_{x_0}^x |\varphi_1(\tau) - \varphi_0(\tau)| d\tau \\ &\leq ML \int_{x_0}^x |\tau - x_0| d\tau \\ &= ML \frac{|x - x_0|^2}{2!} \end{aligned}$$

Par récurrence , supposons que

$$|\varphi_i(x) - \varphi_{i-1}(x)| \leq ML^{i-1} \frac{|x - x_0|^i}{i!} \quad (2.2.11)$$

alors , on obtient

$$\begin{aligned} |\varphi_{i+1}(x) - \varphi_i(x)| &\leq \int_{x_0}^x |f(\tau, \varphi_i(\tau)) - f(\tau, \varphi_{i-1}(\tau))| d\tau \\ &\leq L \int_{x_0}^x |\varphi_i(\tau) - \varphi_{i-1}(\tau)| d\tau \\ &\leq ML^{i-1} \int_{x_0}^x \frac{|\tau - x_0|^i}{i!} = ML^i \frac{|x - x_0|^{i+1}}{(i+1)!} \end{aligned}$$

finalemt, on obtient

$$|\varphi_{i+1}(x) - \varphi_i(x)| \leq ML^i \frac{d^{i+1}}{(i+1)!} \quad \forall x \in T, \quad i = 1, 2, \dots$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\varphi_{i+1}(x) - \varphi_i(x)\| &\leq \max |\varphi_{i+1}(x) - \varphi_i(x)| \\ &\leq ML^i \frac{d^{i+1}}{(i+1)!}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

on a la série majorante

$$\begin{aligned} &|y_0| + Md + ML \frac{d^2}{2!} + ML^2 \frac{d^3}{3!} + \dots + ML^i \frac{d^{i+1}}{(i+1)!} + \dots \\ &= |y_0| + \sum_{i=0}^{\infty} ML^i \frac{d^{i+1}}{(i+1)!} \\ &= |y_0| + \frac{M}{L} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(Ld)^i}{i!} \\ &= |y_0| + \frac{M}{L} (e^{Ld} - 1) < \infty \end{aligned}$$

Donc la série(11) converge uniformément sur T vers une fonction $\varphi(x)$ continue sur T c'est-à-dire

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\varphi_i - \varphi\| = 0 \quad (2.2.12)$$

Démontrons que le graphe de la fonction φ appartient à D . Autrement dit

$$\{(x, \varphi(x), x \in T)\} \subset D$$

En effet,

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau, \quad \forall x \in T$$

est obtenue en faisant tendre i vers ∞ , il vient

$$|\varphi(x) - y_0| \leq b, \quad \forall x \in T$$

il reste maintenant à montrer que la fonction $\varphi(x)$ est la solution de l'équation(5), on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^x f(\tau, \varphi_i(\tau)) - f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \right| &\leq \int_{x_0}^x |f(\tau, \varphi_i(\tau)) - f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau \\ &\leq L \int_{x_0}^x |\varphi_i(\tau) - \varphi(\tau)| d\tau \\ &\leq Ld \|\varphi_i - \varphi\| \end{aligned}$$

En tenant compte de (14), on obtient

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(\tau, \varphi_i(\tau)) d\tau = \int_{x_0}^x f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau, x \in T$$

Faisant tendre i vers ∞ dans l'expression (7), on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_{i+1}(x) &= y_0 + \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(\tau, \varphi_i(\tau)) d\tau \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau, \end{aligned}$$

d'où

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau, x \in T$$

Unicité de la solution Pour la démonstration de l'unicité de la solution de l'équation différentielle on doit utiliser le lemme de (**Gronwall - Bellman**) suivant ■

Lemme 2.2.1 Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions scalaires continues et positives sur $[x_0, \infty[$; avec

$$f(x) \leq c + \int_{x_0}^x f(\tau)g(\tau)d\tau, \forall x \in [x_0, \infty[\quad c \succ 0,$$

Preuve. alors, on a

$$f(x) \leq c \exp \int_{x_0}^x g(\tau) d\tau, \forall x \in [x_0, \infty[$$

Passons maintenant à l'unicité. Soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux solutions avec la conditions initiales

$$\varphi(x_0) = y_0 \text{ et } \psi(x_0) = y_0$$

alors pour $x \in [x_0, x_0 + d]$, on a

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \psi(x)| &\leq \int_{x_0}^x |f(\tau, \varphi(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau))| d\tau \\ &\leq L \int_{x_0}^x |\varphi(\tau) - \psi(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

Posons la fonction

$$f(x) = |\varphi(x) - \psi(x)|$$

et la fonction

$$g(x) = A$$

et la constante $c = 0$ Applique le lemme de **Gronwall-Bellman** à la relation au dessus , on obtient $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[x_0, x_0 + d]$, et d'une manière analogue , on traite le cas où $x \in [x_0 - d, x_0]$ **C.Q.F.D** ■

2.3 La résolution d'un problème de valeur initiale du premier ordre

Les solutions aux problèmes de valeur initiale sont obtenues en résolvant d'abord l'équation différentielle donnée puis en appliquant les conditions initiales.

2.3.1 Un problème de valeur initiale du premier ordre:

Etant donnée l'équation sous la forme suivante:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) & \forall x \in [a, b] \\ \text{avec } y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.3.1)$$

les problèmes différentielles de ce type sont appelés **problème de cauchy** ou **problème de valeur initiale**

où f est une fonction continue Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Le théorème de Cauchy Lipschitz assure l'existence et l'unicité de la solution.

2.3.2 La résolution numérique d'un problème de valeur initiale du premier ordre:

On va chercher à approcher numériquement les solutions d'équations différentielle de la forme :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ \text{avec } y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \forall x \in [a, b]$$

Il arrive que l'on sache résoudre ce problème de manière analytique mais dans un grand nombre de cas on ne connaît pas de forme explicite de la solution. On peut alors essayer d'approcher la solution par un schéma numérique

2.3.3 La méthode d'Euler :

La méthode d'Euler est le prototype le plus simple des méthodes numériques de résolution des équations différentielles, pour l'équation de forme :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \forall x \in [a, b]$$

Découpons le segment $[a, b]$ à l'aide des points en N parties égales ($a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$)

introduisons la notation $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = h$

par conséquent :

$$h = \frac{b - a}{n}$$

donc la méthode Euler s'écrit

:

$$\begin{cases} y_0 : (\text{donné}) \\ x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + h * f(x_i, y_i) \end{cases} \quad (2.3.2)$$

dans cette égalité $x_0, y_0 = y(x_0), h$ sont connus, donc on va estimer la valeur de $y(x_1)$ utilisant la formule suivante:

$$y(x_1) = y(x_0) + y'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{y''(c)}{2}(x_1 - x_0)^2$$

telle que $c \in (x_0, x_1)$,

on a $y'(x_0) = f(x_0, y(x_0))$ donc la formule précédente devient

$$y(x_1) = y(x_0) + f(x_0, y(x_0))(x_1 - x_0) + \frac{y'(c)}{2}(x_1 - x_0)^2$$

on définit l'erreur par la valeur $E = \frac{y'(c)}{2}(x_1 - x_0)^2$, donc on obtient

$$y(x_1) \approx y(x_0) + f(x_0, y(x_0))(x_1 - x_0)$$

on va estimer la valeur de $y(x_2)$, on aura :

$$y(x_2) \approx y(x_1) + f(x_1, y(x_1))(x_2 - x_1)$$

plus généralement $\forall k = 1, 2, \dots, n-1$

on peut approximer $y(x_{k+1})$ d'après la relation suivante

$$y_{k+1} = y_k + h * f(x_k, y_k) \quad (2.3.3)$$

Exemple 2.3.1 résoudre le problème initial suivant utilisant la méthode d'Euler :

$$\begin{aligned} y' &= -y + x * \exp(-x^2) \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

sachant que la solution exacte est :

$$y_{ex}(t, x) = \exp(-x^2) * (x - x * \exp(-t))$$

Solution 2.3.1 on a $x = a : h : b$ telle que h (le pas) a, b : les bords de l'intervalle
, N : le nombre de la subdivision

$$h = \frac{b - a}{N}$$

en appliquant le schéma de la méthode

$$\begin{cases} y_{i+1} \simeq y_i + h * x_i \\ x_{i+1} \simeq x_i + h \end{cases}$$

	la valeur x	la solution exacte	la solution approchée	l'erreur
	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
	0.2000000000000000	0.034832315617154	0.0000000000000000	0.034832315617154
On obtient	0.4000000000000000	0.112373890046959	0.038431577566093	0.073942312480866
	0.6000000000000000	0.188870064057551	0.098916765170171	0.089953298887380
	0.8000000000000000	0.232291732288741	0.162854571264661	0.069437161024081
	1.0000000000000000	0.232544157934830	0.214650444858616	0.017893713076213

Exemple 2.3.2 résoudre l'équation suivante **Ricaty** $y' = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$

$$\begin{cases} y' = y + x^2y^2 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Solution 2.3.2 on a $N = 5, a = 0, b = 1, x = a : h : b$ telle que $h = \frac{b-a}{N}$

	la valeur de x	la solution exacte	la valeur approchée	l'erreur
	0.0000000000000000	-1.0000000000000000	-1.0000000000000000	0.0000000000000000
	0.2000000000000000	-1.217627475700369	-1.2000000000000000	0.017627475700369
On obtient	0.4000000000000000	-1.449947898662102	-1.4284800000000000	0.021467898662102
	0.6000000000000000	-1.636156803786667	-1.648878236467200	0.012721432680533
	0.8000000000000000	-1.692989734134272	-1.782900324174587	0.089910590040315
	1.0000000000000000	-1.581976706869326	-1.732602492568948	0.150625785699621

2.4 Un problème de valeur initiale du second ordre

Le problème aux valeurs initiales consiste à trouver une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ solution de :

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_1 \quad y'(x_0) = y_2 \end{cases} \quad x \in I$$

La condition $y(x_0), y'(x_0)$ sont des conditions initiales, ce problème est un **problème d'évolution**, c'est à dire à partir de la conditions initiale on peut calculer la solution à l'instant x . On remarque que la solution doit obligatoirement passer par le point (x_0, y_0) .

pour ces équations d'un intérêt pratique, on trouve rarement la solution $y(x)$ exprimée avec une formule exacte. Notre objectif est de décrire un certain nombre de méthodes permettant de résoudre numériquement ce genre des problèmes.

2.4.1 La résolution numérique d'un problème de valeur initiale du second ordre :

On suppose qu'on va résoudre le problème initial sur l'intervalle I , $a \leq x \leq b$

Etant donnée l'équation suivante sous la forme:

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y, y') & , \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

ou

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)$$

où $p(x), q(x), f(x)$ sont des fonctions continues sur l'intervalle I , donc il existe $y(x)$ solution unique pour ce problème

on va chercher à approximer la solution par un schéma numérique.

Dévisant l'intervalle $I ; (a \leq x \leq b)$ en N parties égales ($a = x_0 \prec x_1 \prec \dots \prec x_n = b$) où $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1}$ on l'appelle **le pas**,

ce pas $h = \frac{b-a}{N}$, sachant que $x_{i+1} = x_i + h$

2.4.2 La réduction d'équations différentielles linéaire à un système du premier ordre :

Tout problème de valeur initiale de la forme

$$\begin{cases} y'' = a(x)y' + b(x)y + c(x) \\ y(a) = \alpha \quad y'(a) = \beta \end{cases}$$

peut se réduire à un système matriciel du premier ordre

$$\begin{cases} y'(x) = A(x)y(x) + g(x) \\ y(a) = c \end{cases}$$

où $A(x), g(x), c$ et l'instant initial x_0 sont connus

on pose $y_1 = y$ et $y_2 = y'$ alors on obtient $y'_1 = y_2$

$$\begin{cases} y'' = a(x)y_2 + b(x)y_1 + c(x) \\ y(a) = \alpha, y'(a) = \beta \end{cases}$$

alors on aura

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = a(x)y_2 + b(x)y_1 + c(x) \end{cases}$$

la forme matricielle est :

$$\begin{aligned} Y'(x) &= \begin{bmatrix} y' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b(x) & a(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c(x) \end{bmatrix} \\ Y(x_0) &= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

on va chercher à approximer la solution de ce genre de problème utilisant la méthode d'Euler

2.4.3 La méthode d'Euler

$x = a : h : b$ telle que $h = \frac{b-a}{N}$

$$Y'(x_{i+1}) = Y(x_i) + hY'(x_i) + \frac{h^2}{2}Y''(w_i) \quad , x_i \prec w \prec x_{i+1}$$

telle que l'erreur d'approximation est :

$$E = \frac{h^2}{2}Y''(w_i) \quad , x_i \prec w \prec x_{i+1}$$

d'autre terme on a : $y'' = f(x, y, y') , y = y , y' = y_1$

$$\begin{aligned} Y(x) &= \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y_1(x) \end{pmatrix} ; Y(x_0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ Y'(x) &= \begin{pmatrix} y'(x) \\ y_1'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ f(x, y_1) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y(x_{i+1}) \\ y_1(x_{i+1}) \end{pmatrix} &\simeq \begin{pmatrix} y(x_i) \\ y_1(x_i) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} y_{1i} \\ f(x_i, y_i, y_i') \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemple 2.4.1 résoudre le problème suivant:

$$\begin{cases} y'' = -9y' - 14y + \frac{1}{2}\sin(x) \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Solution 2.4.1 $a = 0$ $b = 1$ $h = \frac{b-a}{N}$ telle que N le nombre des subdivisions

on obtient	la valeur de x	la solution exacte	la solution approchée	l'erreur
	0.0000000000000000	1.0000000000000000	1.0000000000000000	0.0000000000000000
	0.2000000000000000	0.925690501840839	1.2000000000000000	0.274309498159161
	0.4000000000000000	0.687937549559603	0.4800000000000000	0.207937549559603
	0.6000000000000000	0.484696802486111	0.387973386615901	0.096723415870210
	0.8000000000000000	0.339231881605946	0.200583044169353	0.138648837436593
	1.0000000000000000	0.240358785213677	0.144523071089588	0.095835714124089

Chapitre 3

Transformation d'un problème initiale à une équation intégrale de Volterra:

3.1 L'équation intégrale de Volterra:

Considerons l'équation intégrale de Volterra sous la forme suivante:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{x_0}^x k(x, y)\varphi(y)dy ; a \leq x \leq b \quad (3.1.1)$$

Sachant que $f(x)$ et le noyau de l'équation intégrale $k(x, y)$ sont des fonctions données , où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue on va la déterminer.

3.2 Transformation d'un problème initiale à une équation intégrale de Volterra:

On va chercher comment transformer un **(PVI)** à une équation intégrale de Volterra
(PVI) du premier ordre qui est sous la forme:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(0) = \alpha \end{cases} \quad (3.2.1)$$

où α est une constante et $f(x, y)$ est une fonction continue

On intègre l'équation précédente(3.2.1) de x_0 à x on aura:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{x_0}^x y'(x) = \int_{x_0}^x f(x, y) \\ y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(x, y) \end{array} \right.$$

Alors on obtient:

$$y(x) = \alpha + \int_{x_0}^x f(x, y)dx \quad (3.2.2)$$

(**PVI**) du second ordre qui est sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = \alpha \quad y'(x_0) = \beta \end{array} \right. \quad (3.2.3)$$

où α, β sont des valeurs données et $f(x, y, y')$ est une fonction continue

On intègre l'équation précédente (3.2.3)de x_0 à x , on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{x_0}^x y''(x) = \int_{x_0}^x f(x, y', y) \\ y'(x) - y'(x_0) = \int_{x_0}^x f(x, y', y) \\ y'(x) = \beta + \int_{x_0}^x f(x, y', y) \\ \int_{x_0}^x y'(x) = \int_{x_0}^x (\beta + \int_{x_0}^x f(x, y', y)) \end{array} \right. \quad (3.2.4)$$

Alors on obtient:

$$y(x) = \alpha + \beta(x - x_0) + \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x f(x, y', y) \quad (3.2.5)$$

3.2.1 Approximation de la solution de l'équation intégrale de Volterra

La méthode des Trapèzes

Rappelons que l'équation intégrale de Volterra est donnée par:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x) = g(x) + \int_{x_0}^x k(x, y)u(y)dy \end{array} \right. \quad (3.2.6)$$

Notre objectif est d'approximer la solution u^* de l'équation (3.2.5) sur un système des noeuds

$$x_0 = a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n = b$$

supposons que ce système est equidistant

$$x_i = a + ih \quad i = 1, 2, \dots, n$$

où h est le pas de la discrétisation telle que:

$$h = \frac{b - a}{n}$$

La méthode des Trapèzes, est usuelle dans le but d'approchée numériquement la quantité qui se présente sous forme intégrale dans l'équation précédente (3.2.6)

Schéma de la méthode des Trapèzes:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x, y) &= h(f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}\Delta f(x_0, y_0)) \\ &= h(f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0))) \\ &= \frac{h}{2}(f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)) \end{aligned}$$

pour l'intervalle $[x_1, x_2]$ on obtient

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y) = \frac{h}{2}(f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2))$$

et pour le dernier intervalle $[x_{n-1}, x_n]$ on obtient

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x, y) = \frac{h}{2}(f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_n, y_n))$$

finalement on aura

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x, y) = \frac{h}{2}(f(x_0, y_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i, y_i) + f(x_n, y_n))$$

Evaluation de l'erreur

$$E = \frac{-1}{12}h^3(f_0'' + f_1'' + \dots + f_{n-1}'')$$

alors

$$\begin{aligned} E &= \frac{-1}{12}h^3 n f''(\overline{x, y}) \\ E &= \frac{-(b-a)}{12}h^2 f''(\overline{x, y}) \end{aligned}$$

telle que

$$nh = (b - a)$$

Exemple 3.2.1 résoudre l'équation suivante utilisant la méthode des Trapèzes:

$$\begin{aligned} y' &= -y + x * \exp(-x^2) \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

Solution 3.2.1

$$y' = -y + x * \exp(-x^2); \quad y(0) = 0$$

transformation à une équation de Volterra

$$y(x) = \int_0^x -y + x * \exp(-x^2)$$

alors on obtient:

Conclusion

On conclut que tout problème de valeur initial peut se transformer à une équation intégrale de Volterra, telle que la solution numérique obtenue par la méthode des Trapèzes est la meilleure par rapport à celle qui est déjà obtenue par la méthode d'Euler.

Résumé

Dans ce travail, on résout le problème de valeur initial du premier et deuxième ordrenumériquement utilisant la méthode d'Euler.Puis, on transforme (**PVI**) à une équation intégrale de Volterra , sa solution numérique obtenu par la méthode des Trapèzes. est la meilleure par rapport à celle d'Euler.

Bibliographie

- [1] J. Kiusalaas, Numerical Methods in Engineering with MATLAB, in Cambridge University Press, New York 2010
- [2] M. Nadir, S. Guechi, Integral Equations and their Relationship to Differential Equations with Initial Conditions, in General Letters in Mathematics. 1(1) , (2016) 1-9
- [3] M. Nadir, Cours sur les équations intégrales. University of Msila, Algeria, 2008.
- [4] P.Howard Solving ODE in MATLAB Fall 2007
- [5] Francois Cuvelier Méthodes numériques Université Paris 13 / Institut Galilée./Département de Mathématiques
- [6] M. Nadir, Cours sur les opérateurs compacts. University of Msila, Algeria, 2008.
- [7] A.Rahmoune, M.R.Nadir Initial value problems between Taylor and Volterra integral equations (2018)
- [8] M. Nadir, Cours sur.théorème d'existence et l'unicité University of Msila, Algeria, 2008
- [9] S.S.Sastry Introductory Methods of Numerical Analysis
- [10] P.Mohana Shankar DIFFERENTIAL EQUATIONS A Problem Solving Approach Based on MATLAB
- [11] Ali Ümit Keskinli Ordinary Differential Equations for Engineers Problems with MATLAB Solutions

Résumé :

Dans ce travail, on résout le problème de valeur initial du premier et deuxième ordre numériquement utilisant la méthode d'Euler. Puis, on transforme (PVI) à une équation intégrale de Volterra, sa solution numérique obtenue par la méthode de Trapèze est la meilleure par rapport à celle d'Euler

Abstract :

In this work, we solve initial value problem for a second order numerically using Euler. On the other hand, we show that after the transformation of the (IVP) into Volterra integral equation of the second kind, its numerical solution using trapezoidal method is better than Euler method

ملخص:

في هذا العمل، قمنا بحل المعادلة التفاضلية الدرجة الأولى والثانية ذات القيم الابتدائية باستعمال طريقة أولر. ثم نقوم بتحويل المعادلة التفاضلية إلى معادلات تكاملية من نوع فولتيرا لنقوم بحلها بطريقة تراباز الدرجة الأولى والثانية لنجد أن طريقة تراباز أحسن من أولر