UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF
DE M'SILA
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse fonctionnelle

Thème

Calcul fonctionnel pour des multiplicateurs de Fourier et des BMO

Présenté par :
DELOUM Yassamine

Devant le jury composé de :

GAGUI Bachir	M.C.A.	Université de M'sila	**Président**.
MOUSSAI Madani	Prof.	Université de M'sila	**Encadreur**.
TALLAB Abdelhamid	M.C.A.	Université de M'sila	**Examinateur**.

Année universitaire : 2022/2023

Dédicace

Je dédie ce mémoire à
Mon très chere père.
Ma tendre mère "Kadra".
Mes très chers frères
et
Mes très cheres soeurs.
Tous mes amis et toute ma famille, qui m'ont encouragé tout le long de mes études.

Remerciements

Je remercie « Allah » qui ma donné la volonté pour la réalisation de ce modeste mémoire. J'adresse mes remerciements par un grand respect et gratitude à mon encadreur **le Professeur Madani Moussai** *qui a dirigé ce travail et de m'avoir encadré.*
Je remercie également les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail, recpectivement ***Mr. Bachir Gagui*** *et* ***Mr. Abdelhamid Tallab.***
Je ne voudrais pas oublier ma famille qui m'a soutenu moralement, sans les nommer explicitement, je le remercie pour leur encouragement.

Table des matières

Notation

- $1 \leq p, p' \leq \infty$ — On désigne p' l'exposant conjugé de p i.e. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.
- $\tau_a f$ — La translation $\mathcal{F}(\tau_a f) = \mathrm{e}^{-i2\pi a\cdot\xi}\hat{f}$.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — L'espace des fonctions $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à décroissance rapide .
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ — L'espace des distrubitions tempérées sur $\mathbb{R}^n$.
- $\mathbf{C}_c^\infty$ — L'espace des fonctions $\mathbf{C}^\infty$ avec le support compact .
- $< .,. >$ — Dualité.
- $f * g(.)$ — Convolution des fonctions f et g, alors $f * g(.) = \int_{\mathbb{R}^n} f(. - y)g(y)dy$.
- Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ — on pose $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, la dérivée partielle $\dfrac{\partial^\alpha f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n}$ est notée $\partial^\alpha f$ où $f^{(\alpha)}$.
- $\tilde{f}$ — $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ on note $\tilde{f}(x) = f(-x)$.
- Δ — $=\sum_{i=1}^n \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, est le laplacien.
- ∇ — $=(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})^t$, le gradient.
- $\Delta_h f$ — $=f(. + h) - f$, les opérateurs de differences avec $\Delta_h^m = \sum_{l=0}^m (m, l)^t (-1)^{m-l} f(. + lh)$.
- $\mathbb{R}^n$ — est l'espace Euclidien.

- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble de tout les nombres entiers.
- $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions mesurables .
- $\mathrm{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions localement intégrables.
- $\mathbb{R}^{n+1}_+$ $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}^n, y > 0\}$.
- $|\mathcal{Q}|$ le volume de cube (mesure de Lebsgue $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^n$).
- $B(x, r)$ Boule ouverte de rayon r centre en x $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$.
- $\ell(\mathcal{Q})$ la longeur du côté d'un cube $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^n$.
- χ_E La fonction caractérestique définie par $\chi_E = \begin{cases} 1 & si \;\; x \in E \\ 0 & si \;\; x \notin E \end{cases}$.
- H La fonction de Heaviside $H := \begin{cases} 0 & si \;\; x < 0 \\ 1 & si \;\; x > 0 \end{cases}$.
- $\|f\|_*$ $\sup_{\mathcal{Q}_{cube}} \dfrac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} |f(x) - f_B|\, dx$, est une norme équivalente à $\|f\|_{BMO}$.

Introduction

Les espaces de Lebesgue, plus connus sous le nom d'espace L^p, jouent un rôle important en analyse de Fourier. Cependant, de nombreuses classes importantes d'opérateurs ne se comportent pas bien sur les espaces L^p, en particulier dans les espaces L^1 et L^∞. Par conséquent, L^1 est trop grand pour être le domaine de ces opérateurs. De même, l'espace cible de nombreux opérateurs canoniques L^∞, on dit que L^∞ est trop petit pour être le domaine de ces opérateur.Ces deux espaces sont considérés comme du duale l'un de l'autre dans un certains sens. La motivation pour trouver des substituts aux espaces appartenant L^∞ et L^1 conduit à l'espace des Oscillations Moyennes Bornées et à l'espace de Hardy H^1. L'espace des Oscillations Moyennes Bornées noté BMO a été introduit pour la première fois par F.John et L.Nirenberg en (1961) dans le contexte des équations aux dérivées partielles. Plus tard, C.Fefferman a prouvé que l'espace BMO est l'espace dual de l'espace de Hardy H^1. L'espace BMO permet de caractériser clairement de nombreux phénomènes mathémathiques.

Dans ce travail, nous discutons des liens entre la fonction d' Oscillation Moyenne Bornées et la mesure de Carleson , les injections des quelques espaces. Alors ce mémoire est divisé en quatre chapitres.

- Dans le premier chapitre, nous rappelons l'espace L^p avec quelques propriétés. On étudie la transformation de Fourier des fonctions et des distrubitions tempérées, nous donnons aussi la décomposition de Littelwood-Paley .
- Dans le deuxième chapitre, on va étudier a multiplications de Fourier pour l'espace L^p et ses quelques propriétées.
- Dans Le troisième chapitre, nous donnons les définitions de l'espace BMO et la mesure de Carleson avec quelques théorèmes comme le théoème de John–Nirenberg , et on étudie la relation entre l'espace BMO et la mesure de Carleson.
- Pour le dernier chapitre nous rappelons quelques définitions des espaces de Besov, nous donnons aussi l'inclustion entre ces espaces et l'espace BMO .

Chapitre 1

Préparation

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de bases de l'analyse fonctionnelle, telles que les espaces de Lebesgue, la transformation de Fourier, les distributions, $\ldots$. Nous citons essentiellement le livre de C.Zuily [16], [4].

1.1 L'espace L^p

Dans ce que suit, on considère Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné ou non borné.

1.1.1 Définitions de bases

Définition 1.1.1 *Soit $0 < p \leq \infty$; On pose*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \, mesurable \ et \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \begin{cases} \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}, & si \quad p < \infty \\ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} ess \, |f(x)|, & si \quad p = \infty. \end{cases}$$

1.1.2 Quelques propriétés

Théorème 1.1.1 ***(Théorème de convergence dominée de Lebesgue)***
Soit $(f_n) \in L^1$ une suite de fonctions. Alors on suppose que :

1. *$f_n(x) \longrightarrow f(x)$ p.p sur Ω.*
2. *Il existe une fonction $g \in L^1$ telle que pour tout n ; $f_n(x) \leq g(x)$ p.p sur Ω.*

   On a $f \in L^1$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0$.

Théorème 1.1.2 ***(Fubini)***

Soit Ω_1 *et* Ω_2 *des ouverts de* $\mathbb{R}^n$*.*

On suppose que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$*. Alors pour presque tout* $x \in \Omega_1$*,*

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) et \int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

De même , pour presque tout $y \in \Omega_2$

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) et \int_{\Omega_1} F(x,y)dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

De plus on a

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx = \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x,y)dxdy.$$

Théorème 1.1.3 ***(Inégalité de Hölder)***

Soient $f \in L^p$ *et* $g \in L^{p'}$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$*.*

Alors $f \cdot g \in L^1$ *et*

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}} .$$

Théorème 1.1.4 ***(Inégalité de Young)***

Soient f, g *deux fonctions intégrables telles que* $f \in L^p$ *et* $g \in L^q$*, alors* $f * g \in L^r$ *avec*

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|f\|_{L^q} ,$$

où $\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$*.*

Théorème 1.1.5 ***(Fisher-Riesz)*** L^p *est un espace de Banach pour tout* $1 \leq p \leq \infty$*.*

Preuve *voir [[4],page* $55, 59$*]*

1.2 Transformation de Fourier

Pour la trnsformation de Fourier nous recommandons le livre de C.Zuily [16].

Dans tout ce qui suit, on désigner pat $x \cdot \xi$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$:

$$x \cdot \xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \xi_i, \qquad (x_i, \xi_i) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

1.2.1 Transformation de Fourier de fonctions

Définition 1.2.1 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On appelle la transformation de Fourier de f l'application*

$$\mathcal{F}[f(\xi)] = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{e}^{-i2\pi x\cdot\xi}dx.$$

La transformation de Fourier inverse, l'application

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) = \check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\mathrm{e}^{i2\pi x\cdot\xi}d\xi.$$

Théorème 1.2.1 *Toute fonction intégrable (au sens de Lebesgue) possède une transformée de Fourier qui est une fonction continue, bornée et tendant vers 0 lorsque $|\xi|$ tend vers l'infini.*

Théorème 1.2.2 *On a les propriété suivante :*

(i) *L'application $\mathcal{F}$ est linéaire .*

(ii) $\mathcal{F}^{-1}(\bar{f}) = \overline{(\mathcal{F}f)}$ *(tq : $\bar{f}(x) = \hat{f}(-x) = \check{f}(x)$)*

(iii) $\mathcal{F}[f(-x)] = \hat{f}(-\xi)$ *(Transposition).*

Propriétés 1.2.1 ***a) Produit*** *: la fonction $(x,\xi) \longrightarrow f(x)g(\xi)\mathrm{e}^{-i2\pi x\cdot\xi}dx$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, alors par **Fubini** on a le résultat suivant*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)g(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dx \quad (f,g \in L^1(\mathbb{R}^n)).$$

b) Dérivation *: Par rapport à x*

$$\mathcal{F}(f^{(m)}(x)) = (i2\pi\xi)^{(m)}\hat{f} \quad (dans\ \ \mathbb{R}).$$

Par rapport à ξ

$$\mathcal{F}((-i2\pi x)^{(m)}f(x))(\xi) = (\hat{f})^{(m)}(\xi).$$

c) Convolution *: f et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors on a*

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \hat{f}(\xi)\cdot\hat{g}(\xi).$$

d) Formule de Parseval-Plancherel *:*

Pour tout f , $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *on a*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi.$$

Un cas particulier important est le cas $f = g$ *c'est-à-dire, l'égalité de Parseval :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2d\xi.$$

Exemple 1 *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R})$, *et* $a > 0$.

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & si \;\; |x| \leq a \\ \\ 0 & si \;\; |x| > a \end{cases}$$

un calcul facile de $\hat{f}(\xi)$,

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-i2\pi x\cdot\xi} f(x)dx = \frac{1}{\pi\xi}\sin(2\pi a\xi) = -\frac{1}{i2\pi\xi}(\mathrm{e}^{-i2\pi a\xi} - \mathrm{e}^{i2\pi a\xi}).$$

On pose que $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, *alors*
$\hat{f}(x) = 2a \;\; g(2\pi a\xi)$, *donc* $\dfrac{1}{2a}\hat{f}(\dfrac{x}{2\pi a}) = g(x)$. *D'aprés le théorème1.2.2 (ii) et la translation on a*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}g(x) \quad &= \frac{1}{2\;\, a}\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\frac{x}{2\pi a}))(x) \\ &= \pi\mathcal{F}^{-1}(\frac{1}{2\pi a})\hat{f}(\frac{x}{2\pi a})(x) \\ &= \pi\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f(2\pi a\; x)})(x) \\ &= \pi f(2\pi a\; x) \end{aligned}$$

donc

$$\hat{g}(\xi) = \begin{cases} \pi & |x| \leq \frac{1}{2\pi} \\ 0 & |x| > \frac{1}{2\pi} \end{cases}.$$

Par Parseval on a $\left\|\hat{f}\right\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$, *alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(\xi)|^2d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \pi^2\int_{-\frac{1}{2\pi}}^{\frac{1}{2\pi}} d\xi = \pi,$$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \pi$.

Par la convolution, on a $(\hat{f})^2 = \widehat{f * f}(\xi)$, *si on pose* $h = f * f$ *alors*

$$\hat{h}(\xi) = (\hat{h}(\xi))^2 = \frac{1}{\pi^2 \ \xi^2}(\sin(2\pi a\xi))^2,$$

d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(2\pi a\xi)}{\pi\xi}\right)^4 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)|^2 dx$. *Maintenant, on pose* $t = 2\pi a\xi$, $dt = 2\pi a \ \ d\xi$, *donc*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 d\xi = \frac{\pi a}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)|^2 \, dx.$$

Soit $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)f(y)dy = \int_{-a}^{a} f(x-y)dy$, *on pose* $x - y = z, -dy = dz$ *alors* $A = -\int_{x+a}^{x-a} f(z)dz = \int_{x-a}^{x+a} f(z)dz$, *donc si*

1. $x + a \leq -a \ \ , \ \ x \leq -2a,$ *alors* $A = 0$.
2. $x - a < -a < x + a < a \ \ , \ \ -2a < x < 0,$ *alors* $A = \int_{x-a}^{a} 0 + \int_{x+a}^{-a} 1 = x + 2a$.
3. $-a < x - a < a < x + 1 \ \ , \ \ 0 < x < 2\pi,$ *alors* $A = \int_{x-a}^{a} 1 + \int_{a}^{x+a} 0 = -x + 2a$.
4. $2a < x$ *alors* $A = 0$.

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -2a \\ x + 2a & -2a \leq x \leq 0 \\ -x + 2a & 0 \leq x \leq 2a \\ 0 & 2a < x \end{cases}.$$

Alors, on va calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^4 d\xi$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \frac{\pi a}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)|^2 \, dx &= \frac{\pi a}{8} \left(\int_{-2a}^{0} (x+2a)^2 dx + \int_{0}^{2a} (-x+2a)^2 dx \right) \\ &= \frac{\pi a}{8} \left(2 \int_{0}^{2a} (-x+2a)^2 \right) dx = \frac{\pi a}{4} \int_{0}^{2a} t^2 dt \\ &= \frac{2}{3}(2a)^3 \frac{\pi a}{4}. \end{aligned}$$

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt = \frac{2\pi}{3}$, *d'où* $\int_{0}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt = \frac{\pi}{3}$.

1.2.2 Transformée de Fourier des distributions tempérées

Définition 1.2.2 *On pose*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, |x|^\alpha |\varphi^{(\beta)}(x)| \leq c\}.$$

Quelques notions :

• *Une suite* $\varphi_n \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *converge vers* 0 *dans* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, *si* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, *la suite* $\left(x^\alpha \varphi_k^{(\beta)}(x)\right)_k$ *converge uniformément vers* 0 *sur* $\mathbb{R}$.

• *On appelle distribution tempérée toute fonctions linéaire et continue sur l'espace des fonctions* $\mathcal{S}$. *Les distributions tempérées forment un sous-espace de* $\mathcal{D}'$ *noté* $\mathcal{S}'$.

Définition 1.2.3 *Soit* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *on appelle Transformation de Fourier de* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *défini par*

$$< \mathcal{F}T, \varphi >=< T, \hat{\varphi} >, \quad (\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

De même

$$< \mathcal{F}^{-1}T, \varphi >=< T, \mathcal{F}^{-1}\varphi >, \quad (\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

Théorème 1.2.3 *Soit* T *une distribution tempérée. On a les proprétiés suivante :*

1. $\mathcal{F}[T^{(m)}] = (2i\pi\xi)^m \mathcal{F}[T]$;
2. $\mathcal{F}[T(x-a)] = \mathrm{e}^{-2i\pi\xi a}\mathcal{F}[T]$
3. $\mathcal{F}[T(ax)] = \frac{1}{|a|}\hat{T}[\frac{\xi}{a}]$
4. $\mathcal{F}[\mathrm{e}^{2i\pi x a}T] = \hat{T}(\xi - a)$.

Exemple 2 *Calculer la transformation de Fourier des distributions suivantes :* $1,\ \delta,\ \mathtt{vp}\dfrac{1}{x},\ H.$

Solution :

•$\mathcal{F}(1) = \delta$, *car*

$$< \mathcal{F}(1), \varphi >=< 1, \hat{\varphi} >= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) d\xi = \varphi(0).$$

• $\forall \xi \in \mathbb{R};$ *on a* $\hat{\delta}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-i2\pi x \cdot \xi} \delta dx = \mathrm{e}^{-i2\pi 0 \cdot \xi} = 1.$

• *Posons* $R = \mathtt{vp}\dfrac{1}{x}$ *et* $K = \mathcal{F}R$. *En effet* $xR = 1$, *il en résulte que*

$$\mathcal{F}(xR) = \mathcal{F}(1) = \delta$$

D'autre part, on a aussi $K' = -i2\pi\mathcal{F}(xR)$, *il en résulte que*

$$K' = \mathcal{F}(R)' = -i2\pi\mathcal{F}\delta$$

par suite,

$$K = -i2\pi H(\xi) + c^{te} \quad (car \quad H'(\xi) = \delta_\xi, H est\ une\ fonction\ de\ Heaviside)$$

Comme $\mathtt{vp}\dfrac{1}{x}$ *est impaire, donc sa transformée de Fourier et impaire :*

$$\mathcal{F}(\mathtt{vp}\frac{1}{x}) = -2i\pi H(\xi) + i\pi = i\pi(1 - 2H(\xi)) = -i\pi\ sgnxi.$$

• *On sait que* $H' = \delta$, *alors* $\mathcal{F}(H') = 1 = (i2\pi x)\mathcal{F}(H)$, *on a aussi* $x\mathtt{vp}(\dfrac{1}{x}) = 1$. *Il en résulte que*

$$x(i2\pi\mathcal{F}(H) - \mathtt{vp}(\frac{1}{x})) = 0$$

il existe une constante c telle que

$$2i\pi(\mathcal{F}H) - \mathtt{vp}(\frac{1}{x}) = c\delta$$

en prenant la transformation de Fourier inverse, on trouve $2i\pi\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}H) = 2i\pi H$, $\mathcal{F}^{-1}(\mathtt{vp}(\dfrac{1}{x})) = 2i\pi H(\xi) - i\pi$ *et* $\mathcal{F}\delta = 1$. *On déduit que* $c = i\pi$, *alors d'où*

$$\mathcal{F}(H) = \frac{1}{2i\pi}\mathtt{vp}(\frac{1}{x}) + \frac{1}{2}\delta.$$

1.3 Décomposition de Littlewood-Paley

Définition 1.3.1 *(**Fonction Cut-off**) Soit ρ une fonction de classe $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ positive, radial et $0 \leq \rho \leq 1$ telle que :*

$$\rho(\xi) = \begin{cases} 1 & si \quad |\, \xi \,| \leq 1 \\ \\ 0 & si \quad |\, \xi \,| \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Posons

$$\gamma(\xi) = \rho(\xi) - \rho(2\xi), \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Alors $\gamma \in \mathbf{S}$ est une fonction positive, radial et à support dans la couronne $\left\{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leq |\, \xi \,| \leq \frac{3}{2}\right\}$.

On fixe ξ et γ , soit $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que :

1. *supp $\gamma \subset \left\{\xi : \frac{1}{2} \leq |\, \xi \,| \leq \frac{3}{2}\right\}$.*
2. *$\gamma(\xi) \geq 0$ pour $\left\{\frac{1}{2} \leq |\, \xi \,| \leq \frac{3}{2}\right\}$.*
3. *$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\xi) = 1, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

D'aprés $\rho(\xi) = 1 - \sum_{j\geq 1} \gamma(2^{-j}\xi)$, nous obtenons deux partitions de l'unité :

- homogéne :

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\xi) = 1, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

- non homogéne :

$$\rho(\xi) + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \gamma(2^{-j}\xi) = 1, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

Pour cette partition de l'unité ; On associe une suite d'opérateurs de convolutions suivante :

$$\begin{aligned} Q_j : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \\ S_k : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

définie par

$$Q_j f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\gamma(2^{-j}\xi)) * f(x) = 2^{jn} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}\gamma(2^{-j}(x-y)) f(y) dy, j \in \mathbb{Z},$$
$$S_k f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\rho(2^{-k}\xi)) * f(x) = 2^{kn} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}\rho(2^{-k}(x-y)) f(y) dy, k \in \mathbb{Z},$$

avec la notation $Q_0 = S_0$ alors

$\mathcal{F}(Q_j f)(\xi) = \gamma(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi)$ (pour $j \geq 0$) et $\mathcal{F}(S_k f)(\xi) = \rho(2^{-k}\xi)\hat{f}(\xi)$ (pour $k \geq 0$) .

écrivons la relation (1.1) au point $2^{-j}\xi$ et on multiplie par $\hat{f}(\xi)$, Alors

$$\hat{f}(\xi)\rho(2^{-k}\xi) + \hat{f}(\xi) \sum_{j \geq k+1} \gamma(2^{-j}\xi) = \hat{f}(\xi). \tag{1.2}$$

En appliquant l'application $\mathcal{F}^{-1}$ sur (1.2) on obtient

$$S_k f + \sum_{j \geq k+1} Q_j f = f, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pour $k = 0$ on trouve

$$S_0 f + \sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_j f = f. \tag{1.3}$$

Pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (où $f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$), la décomposition de Littlewood-Paley non homogéne de f est définit par :

$$f = S_0 f + \sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_j f.$$

Pour tout $f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ (où $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$), la décomposition de Littlewood-Paley homogéne de f est définit par :

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_j f. \tag{1.4}$$

Propriétés 1.3.1 *On fixant $j \in \mathbb{Z}$*

1. *Q_j, S_j sont bornés sur $L^p, 0 \leq p \leq 1$, i.e $\|Q_j\|_{L^p} + \|S_j\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^p}$.*
2. *$|Q_j(x)| + |S_j(x)| \lesssim (Mf)(x)$ (estimation ponctuelle).*
3. *pour $f \in L^p$ avec $1 < p < \infty$, $\sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_j f \longrightarrow^{L^p} f$.*
4. *$\|Q_j f\|_p \leq c2^{-jN}, j \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n$.*
5. *$\|S_j f\|_p \leq c2^{-jN}, j \in \mathbb{Z}^-, f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$.*
6. *$\|Q_j f\|_p + \|S_j f\|_p \leq c2^{-jN}$.*

Théorème 1.3.1 ***(Inégalité de Bernstein)***

Soient $1 \leq p \leq r \leq \infty$ *et* $R > 0$. *Alors il existe une constante* $c > 0$, *telles que*

$$\|f\|_r \leq cR^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_p \ ,$$

et

$$\left\|f^{(\alpha)}\right\|_r \leq cR^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})+|\alpha|} \|f\|_p \, , \forall \alpha \in \mathbb{N}^n. \tag{1.5}$$

Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *telle que supp* $\mathcal{F}f \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq R\}$*(c ne dépend pas de* $\mathbb{R}$*).*

Preuve. voir [2].

Chapitre 2

Multiplicateurs de Fourier

Dans ce chapitre, nous allons donner la définition et quelques propriétés de les multiplicateurs de Fourier, voir [1], [7] et [2], [10], [9].

2.1 Définitions et propriétés

Soient $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $m \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On note M_p $(1 \leq p \leq \infty)$ l'espace des fonctions $m \in L^p(\mathbb{R}^n)$, pour lesquelles l'opérateur $T_m : \begin{cases} (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\ .\ \|_p) & \to L^p(\mathbb{R}^n) \\ f & \mapsto \mathcal{F}^{-1}(m\hat{f}) \end{cases}$ est bien défini et s'étend en un opérateur continu sur $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Définition 2.1.1 *Soient $p \in [1, +\infty]$ et $m \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on dit que m et un multiplicateur de Fourier pour $L^p(\mathbb{R}^n)$ s'il existe une constante $c > 0$ dépendant uniquement de p et n, telles que :*

$$\left\|(\mathcal{F}^{-1}m) * f\right\|_p \leq c \left\|f\right\|_p \qquad (\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)).$$

- *Les éléments de M_p sont appelés multiplicateurs de Fourier sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $m \in M_p$ on note*

$$\left\|m\right\|_{M_p} = \sup_{\|f\|_p = 1} \left\|(\mathcal{F}^{-1}m) * f\right\|_p \qquad (\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

Remarque 2.1.1 • *Si $m \in M_2$, alors pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $T_m f = \mathcal{F}^{-1}(m\hat{f}) = \int_{\mathbb{R}^n} m(\xi)\hat{f}(x)e^{i2\pi x\cdot\xi}d\xi$.*

- *On définie $M_p = M(\mathcal{F}L^p(\mathbb{R}^n))$, avec la norme $\left\|f\right\|_{\mathcal{F}L^p} = \left\|\mathcal{F}^{-1}f\right\|_p$.*

Exemple 3 *Soit* $|\alpha| \leq k$, *la fonction* $m(\xi) = \dfrac{\xi^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}}$ *est un multiplicateur en* $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *pour* $1 < p < \infty$. *pour* $p = 2$ *et d'après le théorème de Plancherel on a*

$$\|T_m f\|_2^2 \overset{FP}{=} \left\|\hat{f}m\right\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \frac{\xi^{2\alpha}}{(1+|\xi|^2)^k} d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi$$

d'où $\|T_m f\|_2^2 \leq \|f\|_2^2$.

Proposition 2.1.1 *On a* $M_2 = L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *et pour tout* $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\|m\|_{M_2} = \|m\|_\infty$.

Démonstration . *Soit* $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Montrons que* $m \in M_2$ *et que* $\|m\|_{M_2} = \|m\|_\infty$.

Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *on a d'aprés le théorème de Fourier-Plancherel :*

$$\|T_m f\|_2 = \left\|\mathcal{F}^{-1}(m\hat{f})\right\|_2 \overset{FP}{=} \left\|m\hat{f}\right\|_2 \leq \|m\|_\infty \left\|\hat{f}\right\|_2 \overset{FP}{=} \|m\|_\infty \|f\|_2$$

donc $m \in M_2$ *et* $\|m\|_{M_2} \leq \|m\|_\infty$, *d'où* $L^\infty \subset M_2$.

Montrons désormais que $\|m\|_{M_2} = \|m\|_\infty$. *Soit* $m \in M_2$, *on a*

$$\left\|(\mathcal{F}^{-1}m) * f\right\|_2 \leq c\|f\|_2 \quad (\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

Soit E *est un ensemble mesurable de* $\mathbb{R}^n$, *on pose* $\hat{f} = \chi_E$

par l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned} \left|\int_E m(x)dx\right| &\leq \|m\chi_E\|_2 \|\chi_E\|_2 \\ &\leq c\|\chi_E\|_2 \|\chi_E\|_2 = c_0 mes(E) \quad (\forall c_0 = const). \end{aligned}$$

On obtient

$$\left|\frac{1}{mes(E)} \int_E m(x)dx\right| \leq c_0.$$

Pour $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, *on sait que*

$$\|m\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} ess\,|m(x)| = \sup_{\|h\|_1=1} |< m, h >|,$$

et pour tout fonction simple $h = \sum_{k=1}^N a_k e^{ib_k}\chi_{a_i}$ *où* $a_k > 0$, $b_k \in \mathbb{R}^n$ *et* (E_k) *ensemble mesurable de* $\mathbb{R}^n$ *disjoint deux à deux, alors nous avons* $\sum_{k=1}^N a_k mes(E_k) = 1$ *car* $\|h\|_1 = 1$ *et on obtient*

$$|< m, h >| = \sum_{k=1}^N a_k |< m, \chi_{E_k} >| \leq c_0 \sum_{k=1}^N a_k mes(E_k) = c_0,$$

donc $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. ■

Exemple 4 *Pour $p = 2$,soit la fonction $m(x) = \log|x| \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)(m \in M_2)$.*
On a $(\mathcal{F}^{-1}m(x))(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \log|x| e^{i2\pi x\cdot\xi} d\xi = \dfrac{c}{|\xi|^n}$, $\xi \neq 0$. par conséquent on a

$$\|T_m f\|_2 = \left\|\mathcal{F}^{-1}(m\hat{f})\right\|_2 = \left\|(\mathcal{F}^{-1}\log|x|) * f\right\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^n}dy\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq c\,\|f\|_2 .$$

Théorème 2.1.1 *Soient $p, q, p_0, p_1 \in [1, +\infty]$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, alors on a les propriétés suivante :*

(i) $M_p = M_{p'}$.

(ii) $M_{p_0} \cap M_{p_1} \subset M_q$ *et* $\|m\|_{M_p} \leq \|m\|_{M_{p_0}}^{1-\theta}\|m\|_{M_{p_1}}^{\theta}$, *pour* $0 \leq \theta \leq 1$; $\frac{1}{p} = \frac{(1-\theta)}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$.

(iii) $M_1 \subset M_p \subset M_q \subset M_2$, *avec* $1 \leq p < q \leq 2$.

Preuve.

(i) • Premier cas $1 < p < \infty$.

Par symétrie, il suffit de montrer que si T_m s'étend en un multiplicateur de Fourier borné sur $L^p(\mathbb{R}^n)$, alors T_m s'étend en un multiplicateur de Fourier borné sur $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ et $\sup_{\|f\|_p=1}\|T_m\|_p \leq \sup_{\|f\|_{p'}=1}\|T_m\|_{p'}$. supposons que T_m s'étende en un multiplicateur de Fourier borné sur $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$.On a alors :

$$\forall (f,h) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^2, \left|\int_{\mathbb{R}^n}(T_m f)(x)\bar{h}(x)dx\right| \leq \sup_{\|f\|_p=1}\|T\|_p\|f\|_p\|h\|_{p'} .$$

Par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$et$L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, il suffit de montre que :

$$\forall (f,h) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^2, \left|\int_{\mathbb{R}^n}(T_m h)(x)\bar{f}(x)dx\right| \leq \sup_{\|f\|_p=1}\|T\|_p\|f\|_p\|h\|_{p'} .$$

Soit $(f,h) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^2$. Puisque $\bar{\tilde{f}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \bar{\tilde{h}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et que pour toute $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\bar{\tilde{g}} = \bar{\hat{\hat{g}}}$, on a par Fourier-Plancherel :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n}(T_m h)(x)\bar{f}(x)dx\right| &= \left|\mathcal{F}^{-1}(m\hat{h})(x)\right| \overset{FP}{=} \left|\int_{\mathbb{R}^n} m(x)\hat{h}(x)\bar{\hat{f}}dx\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} m(x)\bar{\hat{\hat{h}}}(x)\bar{\hat{\hat{f}}}dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{T_m\bar{\tilde{f}}}(x)\bar{\hat{\hat{h}}}(x)dx\right| \\
&\overset{FP}{=} \left|\int_{\mathbb{R}^n}(T_m\bar{\tilde{f}})(x)\bar{\tilde{h}}(x)dx\right| \\
&\leq \sup_{\|f\|_p=1}\|T\|_p\left\|\bar{\tilde{f}}\right\|_p\left\|\bar{\tilde{h}}\right\|_{p'} = \sup_{\|f\|_p=1}\|T\|_p\|f\|_p\|h\|_{p'}
\end{aligned}$$

ce qui assure le résultat.

• Deuxième cas :$(p, p') \in \{1, +\infty\}^2$.

$*$ supposons que $m \in M_1$. Montrons que $m \in M_\infty$ et que $\|m\|_{M_\infty} \leq \sup_{\|f\|_1=1} \|T_m\|_1$.

Pour tout $(f, h) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^2$, par Fourier-Plancherel,on a :

$$\begin{aligned}
< T_m f, h >_{L^\infty(\mathbb{R}^n), L^1(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}(m\hat{f})(x)\bar{\bar{h}}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} m(x)\hat{f}(x)\bar{\bar{\hat{h}}}(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\overline{\bar{m}\bar{\hat{h}}}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{\mathcal{F}^{-1}(\bar{m}\bar{\bar{\hat{h}}})}(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathcal{F}^{-1}(\tilde{m}\hat{h})(x)dx =< f, T_{\tilde{m}}h >_{L^\infty(\mathbb{R}^n), L^1(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

et pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\|T_{\tilde{m}}f\|_1 = \left\|\mathcal{F}^{-1}(\tilde{m}\hat{f})\right\|_1 = \left\|\mathcal{F}^{-1}(m\hat{\tilde{f}})\right\|_1 = \left\|T_m\tilde{f}\right\|_1 \leq \sup_{\|f\|_1=1} \left\|\tilde{f}\right\|_1 = \sup_{\|f\|_1=1} \|f\|_1$$

donc $\tilde{m} \in M_1$ et $\|T_{\tilde{m}}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)\to L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|T\|_{L^1(\mathbb{R}^n)\to L^1(\mathbb{R}^n)}$.

Alors, pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned}
\|T_m f\|_\infty &= \sup_{h\in B_{L^1(\mathbb{R}^n)}} \left|< T_m f, h >_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\to L^1(\mathbb{R}^n)}\right| = \sup_{h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\cap B_{L^1(\mathbb{R}^n)}} \left|< T_m f, h >_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\to L^1(\mathbb{R}^n)}\right| \\
&= \sup_{h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\cap B_{L^1(\mathbb{R}^n)}} \left|< f, T_{\tilde{m}}h >_{L^\infty(\mathbb{R}^n)\to L^1(\mathbb{R}^n)}\right| \leq \|T_{\tilde{m}}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)\to L^1(\mathbb{R}^n)} \|f\|_\infty \\
&\leq \|T\|_{L^1(\mathbb{R}^n)\to L^1(\mathbb{R}^n)} \|f\|_\infty .
\end{aligned}$$

D'où $m \in M_\infty$ et $\|m\|_\infty \leq \|T_m\|_{L^1(\mathbb{R}^n)\to L^1(\mathbb{R}^n)}$.

$*$ supposon que $m \in M_\infty$. Montrons que $m \in M_1$ et que $\|T_m\|_{L^1(\mathbb{R}^n)\to L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|m\|_\infty$.

Donc, on montre que $\tilde{m} \in M_\infty$, et que $\|\tilde{m}\|_\infty \leq \|m\|_\infty$.Pour $(f, h) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$< T_m f, h >_{L^1(\mathbb{R}^n)\to L^\infty(\mathbb{R}^n)}=< f, T_{\tilde{m}}h >_{L^1(\mathbb{R}^n)\to L^\infty(\mathbb{R}^n)} .$$

D'aprés $\left(\|f\|_1 = \sup_{h\in B_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\cap C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} \left|< f, h >_{L^1(\mathbb{R}^n)\to L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right|, f \in L^1(\mathbb{R}^n)\right)$, et pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On a

$$\|T_m f\|_1 = \sup_{B_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\cap C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} \left|< f, T_{\tilde{m}}h >_{L^1(\mathbb{R}^n)\to L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right| \leq \|\tilde{m}\|_{M_\infty} \|f\|_1 \leq \|m\|_{M_\infty} \|f\|_1$$

d'où le résultat $M_1 = M_\infty$.

(ii) Soient $m \in M_{p_0} \cap M_{p_1}$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ On a :

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}m * f\right\|_{p_0} \leq \|m\|_{M_{p_0}} \|f\|_{p_0} \quad et \quad \left\|\mathcal{F}^{-1}m * f\right\|_{p_1} \leq \|m\|_{M_{p_1}} \|f\|_{p_1},$$

alors , d'après le théorème d'interpolation dans $L^p(\mathbb{R}^n)$(théorème de Riesz-Thorin).

On a :

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}m * f\right\|_q \leq \|m\|_{M_{p_0}}^{1-\theta} \|m\|_{M_{p_1}}^{\theta} \|f\|_q,$$

d'où $m \in M_q$ et $\|m\|_{M_q} \leq \|m\|_{M_{p_0}}^{1-\theta} \|m\|_{M_{p_1}}^{\theta}$. Ce qui donne le résultat .□

(iii) On appliquons $(i)(ii)$,pour $p_0 = p \in [1,2]$ et $p_1 = p' \in [2,+\infty]$ et $p \leq q \leq p'$ on a

$$M_p = M_p \cap M_{p'} \subset M_q \quad et \quad \|m\|_{M_q} \leq \|m\|_{M_p}^{1-\theta} \|m\|_{M_p}^{\theta} = \|m\|_{M_q}.$$

■

Proposition 2.1.2 *[7] Pour* $1 \leq p < \infty$ *, l'espace* $(M_p, \|.\|_{M_p})$ *est un espace de Banach. De plus,* M_p *est fermé et est une algébre de Banach.*

Démonstration . Il suffit de considérer le cas $1 \leq p \leq 2$. Il évident que si $m_1, m_2 \in M_p$et $b \in \mathbf{C}$ alors m_1+m_2, bm_1 dans M_p avec m_1m_2 corespondant à l'opérateur $T_{m_1m_2} = T_{m_1}T_{m_2}$ alors

$$\|m_1m_2\|_{M_p} = \|T_{m_1}T_{m_2}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|m_1\|_{M_p} \|m_2\|_{M_p}.$$

D'où M_p est une algébre .

•On montre que M_p est un espace complet . Soient $m_j \in M_p$(suite de Cauchy) et $f \in \mathcal{S}$, on a $m_j \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{CV} m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$(m est une fonction borné), donc on montre que $m \in M_p$

$$T_{m_j}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}m_j(\xi)\mathrm{e}^{i2\pi x\cdot\xi}d\xi \to \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}m(\xi)\mathrm{e}^{i2\pi x\cdot\xi}d\xi = T_m(f)(x)$$

par le théorème de convergence dominée de Lebesgue et soit $\sup_j \|m_j\|_{M_p} \leq +\infty$. Avec une application de Lemme de Fatou ,on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |T_m(f)|^p \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{j\to+\infty} \inf \left|T_{m_j}(f)\right|^p dx \\ &\leq \lim_{j\to+\infty} \inf \left|T_{m_j}(f)\right|^p dx \\ &\leq \lim_{j\to+\infty} \inf \|m_j\|_{M_p}^p \|f\|_{L^p},\end{aligned}$$

donc $m \in M_p$. Elle est satisfait à $\|m\|_{M_p} \leq \lim_{j\to+\infty} \inf \|m_j\|_{M_p}$, on prend $m_j = m_k - m_j$ et $m = m_k - m$, avec $j, k \geq N$. On a $\|m_k - m_j\|_{M_p} \leq \varepsilon$ alors

$$\|m_k - m\|_{M_p} \leq \lim_{j\to+\infty} \inf \|m_k - m_j\|_{M_p} \leq \varepsilon.$$

Donc M_p est un espace de Banach .

Définition 2.1.2 *Soient H_0 et H_1 deux espace de hilbert ,considérons une fonction $m \in \mathcal{S}'(H_0, H_1)$ et en écrit $m \in M_p(H_0, H_1)$, si pour tout $f \in S(H_0)$ on a $\mathcal{F}^{-1}m * f \in L_p(H_1)$ avec la norme $\|m\|_{M_p(H_0,H_1)} = \sup_{\|f\|_{L_p(H_0)}=1} \|\mathcal{F}^{-1}m * f\|_{L_p(H_1)}$.*

2.2 Le théorème de multiplicateur de Mikhlin

Théorème 2.2.1 *Soient H_0 et H_1 deux espace de Hilbert ,on pose $m : \mathbb{R}^n \longrightarrow L_p(H_0, H_1)$ et donc*

$$|\xi|^{|\alpha|} \|\partial^\alpha m(\xi)\|_{L_p(H_0,H_1)} \leq A \quad (|\alpha| \leq L)$$

pour un certain nombre entier $L > n/2$. Dans ce cas $m \in M_p(H_0, H_1), 1 < p < \infty$ et $\|m\|_{M_p} \leq C_p A$.

Preuve. Voir lemme (6.1.7), et le lemme (6.1.8) d'aprés [1] .

2.3 Le théorème de décomposition de Calderón-Zygmund

Théorème 2.3.1 *. Soit $f \in L^1, \lambda > 0$.*

Il existe deux fonction g et h dans L^1 vérifiant :

(i) $|g| \leq \lambda$ *(presque partout) ;*

(ii) $b = \sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{B}}, 1_{\mathcal{Q}} f$, *où $\mathfrak{B}$ est une collection de intervalles dyadiques disjoints ;*

(iii) $\forall \mathcal{Q} \in \mathfrak{B}$, $\lambda < \dfrac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} |f(x)|\, dx \leq 2\lambda$;

(v) $\left|\bigcup_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{B}} \mathcal{Q}\right| < \dfrac{1}{\lambda} \|f\|_1$;

(iv) $f = g = h$ *(presque partout).*

Chapitre 3

L'espace $BMO(\mathbb{R}^n)$ et Mesure de Carleson

L'objectif de ce chapitre est de donner la définition et quelques propriétés des espaces de $BMO(\mathbb{R}^n)$, la Mesure de Carleson, la relation entre $BMO(\mathbb{R}^n)$ et Mesure de Carleson, Voir [3], [6] et [8] .

3.1 L'espace $BMO(\mathbb{R}^n)$

Définition 3.1.1 *Une fonction* $f \in \mathrm{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *est dite dans* $BMO(\mathbb{R}^n)$ *(Oscillation moyenne bornée) , si pour tout ensemble mesurable* $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$ *, on a :*

$$\sup_{\mathcal{Q}} \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} |f(x) - f_{\mathcal{Q}}| \, dx < \infty,$$

Où le supremum est pris sur tous les cubes $\mathcal{Q}$ *dans* $\mathbb{R}^n$ *avec les côtés du cube parallèles aux axes coordonnées ,* $|\mathcal{Q}|$ *représente la mesure de* $\mathcal{Q}$*, et où* $f_{\mathcal{Q}}$ *est la valeure moyenne de* f *on le cube* $\mathcal{Q}$ *définie comme*

$$f_{\mathcal{Q}} = \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} f(x) dx.$$

Remarque 3.1.1 *La norme de* $BMO(\mathbb{R}^n)$ *définie par :*

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{\mathcal{Q}} \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} |f(x) - f_{\mathcal{Q}}| \, dx.$$

Soient $f, g \in BMO(\mathbb{R}^n)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *on a*

- *Si* $\|f\|_{BMO} = 0 \Leftrightarrow f =$ *constante.*

- $\|f+g\|_{BMO} \leq \|f\|_{BMO} + \|g\|_{BMO}$.
- $\|\lambda f\|_{BMO} \leq |\lambda| \, \|f\|_{BMO}$.

Exemple 5 *:*

La fonction $\log(|x|) \in BMO$ *mais n'appartient pas à* L^∞*. Alors soit on prend la boule* $|I| = 1$ *et* $\log|rx| = \log|x| + \log r$

$\bullet I \subset \{|x| < 2\}$ *, puis* $\int_I |\log|y|| \, dy \leq C$*.*

$\bullet I \subset \{r < |x| < r+1\}, r \geq 1$ $\quad : \int_I |\log|y| - \log r| \, dy \leq 1$.

Exemple 6 *La fonction* $f(x) = \begin{cases} \log \dfrac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$. *n'est pas dans* $BMO(\mathbb{R}^n)$*, d'après Grafakos [8].*

Proposition 3.1.1 *Soit* $f \in \mathrm{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$*, Alors* $f \in BMO$ *si et seulement s'il existe une constante* $C(f)$ *telle que pour tout boule* B*, il existe* C_B *tel que* $\dfrac{1}{|B|} \int_B |f - C_B| \, dx \leq C(f)$*. Et* $\|f\|_{BMO}$ *est équivalent à l'inf des* $C(f)$*.*

Preuve : *On prend* $C_B = f_B$*, qui marche . Dans l'autre sens, si* B *et* C_B *sont donnés, on trouve que*

$$|f_B - C_B| \leq \frac{1}{|B|} \int_B |f - C_B| \, dx \leq C(f)$$

et ensuite

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B| \, dx \leq |f_B - C_B| + \int_B |f(x) - C_B| \, dx \leq 2C(f).$$

On remplaçant les boules B *par des cubes* $\mathcal{Q}$*, on notant que si* $\mathcal{Q}$ *est un cube et* B *la plus petit boule, donc*

$$\frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} |f - C_B| \, dx \leq \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_B |f - C_B| \, dx \leq 2^n \frac{1}{|B|} \int_B |f - C_B| \, dx \leq 2^n C(f).$$

Finalement, les normes mentionnées sont équivalentes .

Proposition 3.1.2 *Soient* $f, g \in BMO(\mathbb{R}^n)$

(i) *On a* $L^\infty \subset BMO$ *et* $\|f\|_{BMO} \leq 2 \|f\|_{L^\infty}$ *.*

(ii) *On pose qu'il existe* $A > 0$, *telle que* $\forall \mathcal{Q} \in \mathbb{R}^n, \exists$ *une conctante* $C_{\mathcal{Q}}$ *tel que*

$$\sup_{\mathcal{Q}} \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} |f(x) - C_{\mathcal{Q}}|\, dx < A.$$

d'où $\|f\|_{BMO} \leq 2A$.

(iii) *Pour tout* $f \in \mathrm{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$\frac{1}{2}\|f\|_{BMO} \leq \sup_{\mathcal{Q}} \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \inf_{C_{\mathcal{Q}}} \int_{\mathcal{Q}} |f(x) - C_{\mathcal{Q}}|\, dx \leq \|f\|_{BMO}.$$

(iv) *On a* $h \in \mathbb{R}^n$ *et* $\tau^h(f) \in BMO(\mathbb{R}^n)$, *donnée par* $\tau^h(f)(x) = f(x-h)$ *et*

$$\left\|\tau^h(f)\right\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}.$$

(v) *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$, *la function* δ^λ *définie par* $\delta^\lambda(f)(x) = f(\lambda x)$ *et* $\left\|\delta^\lambda(f)\right\|_{BMO} = \|f\|_{BMO}$.

Preuve :

• On montre (i), pour $f \in BMO$ on a

$$\begin{aligned} |f - f_{\mathcal{Q}}|_{\mathcal{Q}} &\leq 2|f|_{\mathcal{Q}} \\ &\leq 2\|f\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

•On montre (ii), $\forall \mathcal{Q} \in \mathbb{R}^n, \exists$ une conctante $C_{\mathcal{Q}}$ telle que

$$\begin{aligned} |f - f_{\mathcal{Q}}| &\leq |f - C_{\mathcal{Q}}| + |f_{\mathcal{Q}} - C_{\mathcal{Q}}| \\ &\leq |f - C_{\mathcal{Q}}| + \frac{1}{|\mathcal{Q}|}\int_{\mathcal{Q}} |f(t) - C_{\mathcal{Q}}| dt. \end{aligned}$$

On utilisant

$$\sup_{\mathcal{Q}} \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} |f(x) - C_{\mathcal{Q}}|\, dx < A.$$

donc

$$\|f\|_{BMO} \leq 2A.$$

• On montre (iii)(trivial), d'aprés (2) on a $\|f\|_{BMO} \leq 2A$.

Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|f\|_{BMO} &\leq \sup_{\mathcal{Q}} \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} |f(x) - C_{\mathcal{Q}}|\, dx \\ &\leq A \\ &\leq \sup_{\mathcal{Q}} \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \inf_{C_{\mathcal{Q}}} \int_{\mathcal{Q}} |f(x) - C_{\mathcal{Q}}|\, dx. \end{aligned}$$

et d'aprés la norme

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{\mathcal{Q}} \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} |f(x) - f_{\mathcal{Q}}| \, dx.$$

D'où

$$\begin{aligned} \|f\|_{BMO} &\geq \sup_{\mathcal{Q}} \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} |f(x) + C_{\mathcal{Q}} - C_{\mathcal{Q}} - f_{\mathcal{Q}}| \, dx \\ &\geq \sup_{\mathcal{Q}} \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \inf_{C_{\mathcal{Q}}} \int_{\mathcal{Q}} |f(x) - C_{\mathcal{Q}}| \, dx. \end{aligned}$$

- La preuve de (v), on a $\tau^h(f)(x) = f(x-h)$ .Alors $(x - h = t)$

$$\begin{aligned} \left\|\tau^h(f)\right\|_{BMO} &= \sup_{\mathcal{Q}} \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} \left|\tau^h(f) - \tau^h(f)_{\mathcal{Q}}\right| dx \\ &= \sup_{\mathcal{Q}} \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} |f(x-h) - f_{\mathcal{Q}}(x-h)| \, dx \\ &= \sup_{\mathcal{Q}} \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} |f(t) - f_{\mathcal{Q}}| \, dt \\ &= \|f\|_{BMO} \, . \end{aligned}$$

- La preuve de (iv) , on note $\delta^\lambda(f) = f_{\lambda\mathcal{Q}}$

$$\begin{aligned} \left\|\delta^\lambda(f)\right\|_{BMO} &= \sup_{\mathcal{Q}} \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} \left|\delta^\lambda(f) - \delta^\lambda(f)_{\mathcal{Q}}\right| dx \\ &= \sup_{\mathcal{Q}} \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} \left|f(\lambda x) - \delta^\lambda(f)_{\mathcal{Q}}\right| dx \\ &= \sup_{\mathcal{Q}} \frac{1}{|\lambda\mathcal{Q}|} \int_{\lambda\mathcal{Q}} |f(x) - f_{\lambda\mathcal{Q}}| \, dx. \end{aligned}$$

Lemme 3.1.1 *Soit $f \in BMO$, et si I, J sont deux cubes, tel que $I \subset J$ et $|J| \leq 2\,|J|$, alors $|f_I - f_J| \leq 2\,\|f\|_*$.*

Plus généralement, si $I \subset J$ tel que $|J| \leq 2^m\,|J|$,alors $|f_I - f_J| \leq 2m\,\|f\|_*$.

Preuve : • *La première partie*

$$\int_I |f - f_J| \leq \int_J |f - f_J| \leq |J|\,\|f\|_* \, .$$

et

$$|f_I - f_J| = \frac{1}{|I|}\left|\int_I (f - f_J)\right| \leq \frac{1}{|I|}\int_I |f - f_J| \leq \frac{1}{|I|}\int_J |f - f_J| \leq \frac{|J|}{|I|}\,\|f\|_* \leq 2\,\|f\|_* \, .$$

• *Dans deuxiéme partie on pose le cube k tel que* $I \subset K \subset J$ *avec* $|K| = 2^K |I|$, *et* K *maximal on a*

$$|f_I - f_K| \leq 2K \|f\|_*$$

et

$$|f_K - f_J| \leq 2 \|f\|_* .$$

Avec l'addition $|f_I - f_K| + |f_K - f_J| \leq (2K+2) \|f\|_* = 2(k+1) \|f\|_*$.

On note $K \leq \log_2(|J| / |I|)$.

Proposition 3.1.3 *[8] Pour tout* $f \in \mathrm{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, *il existe une constante* C_n *telle que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^{n+1}} dx < \infty$$

on a

$$C_n \|f\|_{BMO} \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - (P_t * f)(y)| \, P_t(x-y) dx. \tag{3.1}$$

Preuve :Soit l'expression A, pour $|x-y| \leq t$ on a $P_t(x-y) \geq c_n t (2t^2)^{-\frac{n+1}{2}} = c_n' t^{-n}$, ce qui donne

$$A \geq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - (P_t * f)(y)| \, P_t(x-y) dx \geq c_n' t^{-n} \int_{|x-y| \leq t} |f(x) - (P_t * f)(y)| \, dx.$$

D'où la proposition3.1.2 (ii) implique la $\|f\|_{BMO} \leq 2A(v_n c_n')^{-1}$.

Théorème 3.1.1 ***(John–Nirenberg)***

Soit $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$, *pour tous les cubes* $\mathcal{Q}$ *et* $\lambda > 0$ *on a*

$$|\{x \in \mathcal{Q} : |f(x) - f_{\mathcal{Q}}| > \lambda\}| \leq c |\mathcal{Q}| \mathrm{e}^{-A\lambda / \|f\|_{BMO}}$$

avec $A = (2^n c)^{-1}$ *et* $c > 0$ *est une constante indépendante de* f .

Preuve : Voir [[8], thm.7.1.6, p.124].

Ce théorème, nous donne le résultat suivant :

Corollaire 3.1.1 *Toute fonction BMO est exponentiellement intégrable sur un cube quelconque. Plus précisément, pour tout* $b \leq 1/(2^n \mathrm{e})$, *pour tout* $f \in BMO$, *et tout cube* $\mathcal{Q}$ *On a :*

$$\frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} \mathrm{e}^{b|f(x) - f_{\mathcal{Q}}| / \|f\|_{BMO}} dx \leq C.$$

Preuve :

On utilisant l'identité suivant

$$\int_E \phi d\mu = \int_0^{+\infty} \phi'(t)\mu(\{x \in E : f(x) > t\})dt,$$

soit ϕ est une fonction croisante et continue, dérivable avec $\phi(t) = \mathrm{e}^t - 1$.

On écrit

$$\frac{1}{|\mathcal{Q}|}\int_{\mathcal{Q}} \mathrm{e}^h dx = \frac{1}{|\mathcal{Q}|}\int_{\mathcal{Q}} \mathrm{e}^h + 1 - 1 dx = 1 + \frac{1}{|\mathcal{Q}|}\int_{\mathcal{Q}} (\mathrm{e}^h - 1)dx = \frac{1}{|\mathcal{Q}|}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^\alpha \left|\{x \in \mathcal{Q} : |h(x)| > \alpha\{\right| \; d\alpha,$$

pour h est une fonction mesurable ,avec $h = b\,|f(x) - f_{\mathcal{Q}}| \,/\, \|f\|_{BMO}$.

Théorème 3.1.2 *Pour tout $f \in BMO$, pour tout cubes $\mathcal{Q}$ et $\alpha > 0$, alors*

$$|\{x \in \mathcal{Q} : |f(x) - f_{\mathcal{Q}}| > \alpha\}| \leq \mathrm{e}\,|\mathcal{Q}|\,\mathrm{e}^{-A\alpha/\|f\|_{BMO}}$$

avec $A = (2^n\mathrm{e})^{-1}$ et $b < A$.

D'aprés le Théorème3.1.2, On obtient

$$\frac{1}{|\mathcal{Q}|}\int_{\mathcal{Q}} \mathrm{e}^{b|f(x)-f_{\mathcal{Q}}|/\|f\|_{BMO}} dx \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^\alpha \mathrm{e}\mathrm{e}^{-A(\frac{\alpha}{b}\|f\|_{BMO})/\|f\|_{BMO}} d\alpha = C. \quad \square$$

On peut formuler le corollaire précedent de la manière suivante.

Corollaire 3.1.2 *Supposons que $f \in BMO$, on a*

(a) *Pour $p < +\infty$, f est localement en L^p et*

$$\frac{1}{|\mathcal{Q}|}\int_{\mathcal{Q}} |f - f_{\mathcal{Q}}|^p \, dx \leq c_p \, \|f\|^p_{BMO} \, ,$$

Pour toutes cubes $\mathcal{Q}$.

(b) *Il existe c_1, c_2 des constantes positif ,pour $\alpha > 0$ et tout cubes $\mathcal{Q}$,*

$$|\{x \in \mathcal{Q} : |f(x) - f_{\mathcal{Q}}| > \alpha\}| \leq c_1|\mathcal{Q}|\mathrm{e}^{-c_2\alpha/\|f\|_{BMO}}.$$

Preuve : Voir [[13], page 145]

Exemple 7 *Soit l'opérateur de Hilbert on a*

$$Hf(x) = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy.$$

on a $H : L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow BMO(\mathbb{R}^n)$.

Donc soit la fonction $h(x) = 1 \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, *alors* $Hh(x) = \log|x|$.

on pose $f = \chi_{[a,b]} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, *et nous avons calculer* Hf *alour*

$$H(\chi_{[0,2a]})(x) = \log \left| \frac{x-a}{x-b} \right|.$$

Donc pour l'interval $[0, +\infty]$ *et pour* $x \in [-a, a]$, *on trouve*

$$Hf(x) = \log|x| - \log 2a.$$

D'où $\log|x| \in BMO(\mathbb{R}^n)$.

3.2 Mesure de Carleson

Définition 3.2.1 *Soit* F *est une fonction mesurable sur* $\mathbb{R}_+^{n+1}$. *Pour* $x \in \mathbb{R}^n$ *soit* $\Gamma(x)$ *le cône avec le sommet* x *défini par*

$$\Gamma(x) = \left\{ (y,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ : |y-x| < t \right\}.$$

Remarque 3.2.1 .

•*La fonction maximale non tangentielle de* F *est la fonction*

$$F^*(x) = \sup_{(y,t)\in\Gamma(x)} |F(y,t)| \in [0, \infty]$$

Cette fonction est obtenue en prenant la somme des valeurs de F *à l'intérieur du cône* $\Gamma(x)$.

• *Si* $F^*(x) = 0 \Leftrightarrow F = 0$ *sur* $\mathbb{R}_+^{n+1}$ *(*$x \in \mathbb{R}^n$*)*

Définition 3.2.2 *Soit* $B = B(x_0, r)$ *une boule dans* $\mathbb{R}^n$ *on définie la tente cylindrique sur* B *comme étant "l'ensemble cylindrique"*

$$T(B) = \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : x \in B, 0 < t \leq r \right\}.$$

Définie la tente sur le cube $\mathcal{Q}$ par

$$T(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q} \times (0, \ell(\mathcal{Q})].$$

Définition 3.2.3 *Soit μ est une mesure positive sur $\mathbb{R}_+^{n+1}$, est appelée mesure de Carleson si*

$$\|\mu\|_c = \sup_{\mathcal{Q}} \frac{1}{|\mathcal{Q}|}\mu(T(\mathcal{Q})) < \infty,$$

On définie la fonction de Carleson comme suite :

$$c(\mu)(x) = \sup_{\mathcal{Q} \ni x} \frac{1}{|\mathcal{Q}|}\mu(T(\mathcal{Q}))$$

D'où $\|c(\mu)\|_{L^\infty} = \|\mu\|_c$.

Proposition 3.2.1 ***(Décomposition de Whitney)*** *Soit Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. Il existe $\{\mathcal{Q}_j\}_j$ (la famille de cubes fermés) telle que*

1. *$\bigcup_j \mathcal{Q}_j = \Omega$, avec $\mathcal{Q}_j$ des intérieurs disjoints .*
2. *$\sqrt{n}\ell(\mathcal{Q}_j) \leq dist(\mathcal{Q}_j, \Omega^c) \leq 4\sqrt{n}\ell(\mathcal{Q}_j)$.*
3. *Soient $\mathcal{Q}_j$ et $\mathcal{Q}_k$ deux cubes des limites touchent , alors*
$$\frac{1}{4} \leq \frac{\ell(\mathcal{Q}_j)}{\ell(\mathcal{Q}_k)} \leq 4.$$
4. *Pour un $\mathcal{Q}_j$ donné , il existe au plus $12^n \mathcal{Q}_k$ qui le touchent.*

Théorème 3.2.1 *Soient $\alpha > 0, \mu \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+^{n+1}$ et pour tout $F \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ (μ-fonction mesurable). Il existe une constante C_n, alors*

$$\mu(\{(x,t) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : |F(x,t)| > \alpha\}) \leq C_n \int_{\{F^* > \alpha\}} c(\mu)(x)dx. \tag{3.2}$$

Si μ est une mesure de Carleson ,alors

$$\mu(\{|F| > \alpha\}) \leq C_n \|\mu\|_c |\{F^* > \alpha\}|.$$

Preuve :

Soit $\{ \mathcal{Q}_k\}$ la décomposition de Whitney de l'ensemble $\Omega_\alpha = \{F^* > \alpha\}$. Pour $x \in \Omega_\alpha$ on a $\delta_\alpha(x) = dist(x, \Omega_\alpha^c)$. Pour $z \in \mathcal{Q}_k$,alors

$$\delta_\alpha(z) \leq \sqrt{n}\ell(\mathcal{Q}_k) + dist(\mathcal{Q}_k, \Omega_\alpha^c) \leq 5\sqrt{n}\ell(\mathcal{Q}_k) \tag{3.3}$$

d'aprés le propositon (3.2.1).

Soit B_k est la plus petit boule contient $(\mathcal{Q}_k)$, et le rayon de $B_k = \sqrt{n}\ell(\mathcal{Q}_k)/2$,donc

$$\begin{aligned} z \in \mathcal{Q}_k &\implies B(z, \delta_\alpha(z)) \subseteq 12\, B_k \\ &\implies \bigcup_{z \in \Omega_\alpha} T(B(z, \delta_\alpha(z))) \subseteq \bigcup_k T(12B_k). \end{aligned} \tag{3.4}$$

On dire

$$\{|F| > \alpha\} \subseteq \bigcup_{z \in \Omega_\alpha} T(B(z, \delta_\alpha(z))). \tag{3.5}$$

D'aprés (3.4)et(3.5) on obtient

$$\{|F| > \alpha\} \subseteq \bigcup_k T(12B_k)$$

. • En appliquant la mesure μ , on obtient

$$\begin{aligned} \mu(\{|F| > \alpha\}) &\leq \sum_k \mu(T(12B_k)) \\ (\textit{utilisant la définition de la fonction de Carleson}) &\leq \sum_k |12B_k| \inf_{x \in \mathcal{Q}_k} c^{cylinder}(\mu)(x) \\ &\leq 12^n \sum_k \frac{|B_k|}{|\mathcal{Q}_k|} \int_{\mathcal{Q}_k} c^{cylinder}(\mu)(x)dx \\ &\leq C_n \int_{\Omega_\alpha} c(\mu)(x)dx, \end{aligned}$$

Depuis $|B_k| = 2^{-n} n^{n/2} \nu_n |\mathcal{Q}_k|$.

Corollaire 3.2.1 *Pour tout mesure de Carleson μ et tout F une fonction mesurable dans $\mathbb{R}^{n+1}_+$ on a*

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |F(x,t)|^p d\mu(x,t) \leq C_n \left\|\mu\right\|_c \int_{\mathbb{R}^n} (F^*(x))^p dx \; (0 < p < \infty).$$

Théorème 3.2.2 *Soit la fonction $\phi \in \mathbb{R}^n$ est non négatif et $C > 0, \delta < \infty$*

$$|\phi(x)| \leq C/(1 + |x|)^{n+\delta} et \int_{|x| \leq 1} P(x)dx > 0.$$

Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et μ la mesure de Carleson. Pour tout $1 < p < \infty$, il existe une constant $C(p, n)$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |(\phi_t * f)(x)|^p d\mu(x,t) \leq C(p,n) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx. \tag{3.6}$$

- $\phi_t(x) = t^{-1}\phi(t^{-1}\,x)$.
- $F(x,t) = f * \phi_t(x)$ *et* $f = \chi_{2Q}$.

3.3 L'espace $BMO(\mathbb{R}^n)$ et Mesure de Carleson

Nous énonçons maintenant la relation entre L'espace BMO et la mesure de Carleson.

Théorème 3.3.1 •*Soit* $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$, *et Soit* $\phi \in \mathbf{C}_c^\infty$ *telle que* $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 0$. *On posons* $\phi_t(x) = t^{-n}\phi(x/t)$ *pour* $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$, *alors*

$$d\mu(x,t) = |\phi_t * f(x)|^2 \frac{dxdt}{t} \quad \text{est une mesure de Carleson ,} \tag{3.7}$$

$\phi_t * f(x)$ *ne change pas, si on ajoute une constante à* f .

• *Soit* ϕ *est une fonction intégrable , nous dit que* $\hat{\phi}$ *est continue, bornnée et qu'il existe une constant* C_ϕ *telle que* ξ *dans la sphère unité de* $\mathbb{R}^n$,

$$\int_{t>0} \left|\hat{\phi}(t\xi)\right|^2 \frac{dt}{t} \leq C_\phi. \tag{3.8}$$

Ces condition sont assez faciles à déduire les hypothèses, donc $\hat{\phi}$ *est régulière prés de* 0, *alors* $\left|\hat{\phi}(v)\right| \leq C\,|v|$, *puisque* $\hat{\phi}(0) = \int \phi = 0$ *et décroît à l'infini,donc* $\left|\hat{\phi}(v)\right| \leq C\,|v|^{-1}$.
Alors

$$\int_{t>0} \left|\hat{\phi}(t\xi)\right|^2 \frac{dt}{t} \leq C\int_0^1 t^2\frac{dt}{t} + C\int_1^{+\infty} t^-2\frac{dt}{t} \leq C$$

et (3.8) s'ensuit.

• *On montre sa version plus simple sur* L^2. *Soit* $g \in L^2$, *il existe* $C > 0$ *telle que :*

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |\phi_t * g(x)|^2 \frac{dxdt}{t} \leq C\,\|g\|_2^2 \tag{3.9}$$

on fixant t, et d'après Plancherel on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\phi_t * g(x)|^2 \, dx &= \left|\widehat{\phi_t * g(\xi)}\right|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{\phi}(t\xi)\hat{g}(\xi)\right|^2 d\xi\end{aligned}$$

(*on intègre le résultat par* $\frac{dt}{t}$, *et d'aprés Fubini on trouve*)

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{g}(\xi)|^2 \left\{ \int_{t>0} \left|\hat{\phi}(t\xi)\right|^2 \frac{dt}{t} \right\} d\xi$$

$$(\text{on appliquant Plancherel}) \leq C \|g\|_2^2 .$$

• *Maintenant, On montrant le théoréme . On a* $f \in BMO$ *et* $d\mu(x,t) = |\phi_t * f(x)|^2 \frac{dxdt}{t}$.

Soit donc $A < 0$ *telle que* $\phi = 0$ *hors de* $B(0, A)$.

On doit prouver qu'il existe une constante C *telle que*

$$\int_{x\in B(y,r)} \int_{0<t<r} |\phi_t * f(x)|^2 \frac{dxdt}{t} \leq Cr^n \|f\|_{BMO}^2 \tag{3.10}$$

$\forall y \in \mathbb{R}^n$ *et* $r > 0$. *Notons* $B = B(y, (A + 1)r)$. *On peut supposer que* $f_B = 0$.

Posons encore que $f_1 = f\mathbb{1}_B$*(qui est donc d'intégrale nulle). Noter pour tout* $t < r$ *et tout* $x \in B(y, r)$

$$\phi_t * f(x) = \int \phi_t(x - z)f(z)dz \, où \, |z - x| \leq At, \quad donc \quad |z - y| \, (A + 1)r$$

De sorte que $\phi_t * f(x) = \phi_t * f\mathbb{1}_B$ *et que*

$$\begin{aligned}\int_{x\in B(y,r)} \int_{0<t<r} |\phi_t * f(x)|^2 \frac{dxdt}{t} &= \int_{x\in B(y,r)} \int_{0<t<r} |\phi_t * f\mathbb{1}_B|^2 \frac{dxdt}{t} \\ &\leq \int_{x\in \mathbb{R}^n} \int_{t>0} |\phi_t * f\mathbb{1}_B|^2 \frac{dxdt}{t} \\ &\leq C \|f\mathbb{1}_B\|_2^2 = \int_B |f(z)|^2 \, dz = \int_B |f(z) - f_B|^2 \, dz \\ &\leq C \|f\|_{BMO}^2 |B| = Cr^n \|f\|_{BMO}^2\end{aligned}$$

par(3.9), puis $f_B = 0$ *et par John et Nirenberg, On a la preuve de (3.10) et de le théorème suite.*■

Chapitre 4

Quelques inclusions entre $BMO(\mathbb{R}^n)$ et les espaces de Besov

Ce chapitre est consacr quelques relation d'inclusion entres les espaces de Besov homogènes et les espaces $BMO(\mathbb{R}^n)$

4.1 Définition des espaces de Besov

Définition 4.1.1 *Soient $s \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p, q \leq \infty$. L'espace de Besov homogène noté $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est défini par les fonctions $f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que :*

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} = \begin{cases} (\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsq} \|\Delta_j f\|_p^q)^{\frac{1}{q}} & < +\infty \qquad si \quad q \neq \infty \\ \sup_{j\in\mathbb{Z}}(2^{js} \|\Delta_j f\|_p) & < +\infty \qquad si \quad q = \infty \end{cases}.$$

Définition 4.1.2 *Soient $1 \leq p < \infty, 1 \leq q \leq \infty$ et $s \in \mathbb{R}$. L'espace de Lizorkin-Triebel homogène noté $\dot{F}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$, telles que*

$$\|f\|_{\dot{F}^s_{p,q}} = \begin{cases} \left\|(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsq} |\Delta_j f|^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_p & si \quad q \neq \infty \\ \left\|\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{js} |\Delta_j f|\right\|_p & si \quad q = \infty \end{cases}.$$

Proposition 4.1.1 *(i)* $\dot{B}^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n), s \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}.\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ *désigne l'espace de Hölder homogène.*

(ii) $\dot{B}^s_{p,p}(\mathbb{R}^n) = \dot{F}^s_{p,p}(\mathbb{R}^n)$, *pour* $s \in \mathbb{R}, 0 < p < \infty$.

4.2 Relation avec les $BMO(\mathbb{R}^n)$

Définition 4.2.1 *Soit l'opérateur de Riesz défini par*

$$\mathcal{I}_s f = (-\Delta)^{-\frac{s}{2}} f = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-s}\hat{f}(\xi)) \qquad i.e. \qquad \widehat{\mathcal{I}_s f}(\xi) := c|\xi|^{-s}\hat{f}(\xi) \qquad\qquad (f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)),$$

avec $s \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^n$.

On donne $\mathcal{I}_s$ *sous la forme (Grafakos [8])*

$$\mathcal{I}_s f = c\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)|y|^{-n+s}dy,$$

et cette intégrale est convergent si f *est une class de Schwartz.*

Proposition 4.2.1 *L'opérateur*

$$\mathcal{I}_s : \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n).$$

Démonstration :

Soit $f \in \mathcal{S}_\infty$, *on pose* $f = \mathcal{F}^{-1}\gamma$ *donc* $\hat{f} = \gamma$ *avec* $\gamma(\xi) \in \mathbf{C}^\infty, supp\ \gamma\ \ [\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}] \cup [\frac{3}{2}, \frac{1}{2}]$ *alors* $\hat{f}^{(\alpha)}(0) = \gamma^{(\alpha)}(0) = 0$.

Et soit $g \in \mathcal{S}_\infty; g = \mathcal{F}^{-1}\rho$ *alors* $\hat{g} = \rho, \hat{g}(0) = 1$,*on pose* $h = \mathcal{F}^{-1}(\rho') \in \mathcal{S}_\infty; \hat{h}(0) = \rho'(0) = 0$.

On a $\hat{h} := \xi^m\hat{f}(\xi) : (\xi^m\hat{f}(\xi))^{(\beta)}|_{\xi=0} = 0$ *avec* $m = -s$,

donc

$$\mathcal{I}_m f = h \in \mathcal{S}_\infty$$

alors

$$f \in \mathcal{S}_\infty \Longrightarrow \mathcal{I}_s f \in \mathcal{S}_\infty.$$

Proposition 4.2.2 *[11]* $\forall f, g \in \mathcal{S}_\infty, s \in \mathbb{R}$ *on a*

$$< \mathcal{I}_s f, g >=< f, \mathcal{I}_s g > .$$

Proposition 4.2.3 *Soit* $s, s' \in \mathbb{R}$ *alors on a*

$$\mathcal{I}_s \circ \mathcal{I}_{s'} = \mathcal{I}_{s+s'}.$$

Démonstration :

Soit $f \in \mathcal{S}_\infty \Longrightarrow \mathcal{I}_s f \in \mathcal{S'}_\infty$, *on a*

$$\mathcal{I}_s \circ \mathcal{I}_{s'}(f) = \mathcal{I}_s(\mathcal{I}_{s'}(f)) \in \mathcal{S}_\infty.$$

• *D'après la transformation de Fourier*

$$\mathcal{I}_s\widehat{(\mathcal{I}_{s'}(f))} = |\xi|^{-s}\widehat{\mathcal{I}_{s'}(f)}(\xi) = |\xi|^{-s}|\xi|^{-s'}\hat{f}(\xi) = |\xi|^{-(s+s')}\hat{f}(\xi) = \widehat{\mathcal{I}_{s+s'}(f)}(\xi)$$

alors $\quad \mathcal{I}_s \circ \mathcal{I}_{s'} f = \mathcal{I}_s(\mathcal{I}_{s'}(f)) = \mathcal{I}_{s+s'} f.$

• *D'après la distribution*

soient $f \in \mathcal{S'}_\infty$ *et* $g \in \mathcal{S}_\infty$, *on a*

$$< \mathcal{I}_s \circ \mathcal{I}_{s'} f, g >=< \mathcal{I}_s(\mathcal{I}_{s'} f), g >:=< \mathcal{I}_{s'} f, \mathcal{I}_s g >_{\mathcal{S'}_\infty \times \mathcal{S}_\infty}=< f, \mathcal{I}_{s'}(\mathcal{I}_s g) >=< f, \mathcal{I}_{s+s'} g >=< \mathcal{I}_{s+s'} f, g > .$$

Remarque 4.2.1 *Soit* $\mathcal{I}_s g = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-s}\hat{g}(\xi))$ *est un potentiels de Riesz de* g *, si on pose* $f = \mathcal{I}_s g$ *on a* $\|f\|_{\mathcal{I}_s(BMO)} = \|g\|_{BMO}$.

Proposition 4.2.4 $f \in \mathcal{I}_s(BMO)$ *si et seulement si* $(\frac{\partial}{\partial x})^\beta f \in \mathcal{I}_{s-k}(BMO)$ *pour toutes dèrivèes partielles d'ordre* k.

Les espaces de Sobolev basés sur BMO (voir, Neri [12]), que nous noterons $\mathcal{I}_s(BMO)$ est l'image de BMO sous l'opérateur intégraux fractionnaire $\mathcal{I}_s$ des potentiels de Riesz. Nous obtiendrons des caractérisations directes de l'espace $\mathcal{I}_s(BMO)$ pour $s > 0$. Par exemple, pour $0 < s < 1$ et le cube $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$. $f \in \mathcal{I}_s(BMO)$ si et seulement si

$$\frac{1}{\mid \mathcal{Q}_\alpha \mid} \int_{\mathcal{Q}_\alpha} \int_{|y|\leq\alpha} \frac{|f(x+y)-f(x)|}{|y|^{n+2s}} dx \ dy$$

est uniformément borné d'après R.Strichartz (voir [14]).

Théorème 4.2.1 *Soit l'espace de Besov on a*

$$\dot{B}^s_{\infty,2}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{I}_s(BMO) \subseteq \dot{B}^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. Voir [14]

Proposition 4.2.5 *Pour $s > 0$ on a*

$$\dot{F}^{s+\frac{n}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \subset \dot{B}^s_{\infty,2}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{I}_s(BMO).$$

Démonstration : Pour $1 < q \leq p \leq \infty$ on a

$$\dot{F}^\beta_{p,q}(\mathbb{R}^n) \subset \dot{B}^\beta_{p,\max(p,q)}(\mathbb{R}^n) \subset \dot{B}^{\beta-\frac{n}{p}}_{\infty,\max(p,q)}(\mathbb{R}^n),$$

telle que $\beta = s + \frac{n}{p}, \beta - \frac{n}{p} = s,$ avec $\max(p,q) = 2,$ donc $\dot{F}^\beta_{p,q}(\mathbb{R}^n) \subset \dot{B}^s_{\infty,2}(\mathbb{R}^n)$.

D'où $\dot{F}^\beta_{p,q}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{I}_s(BMO)$.

Proposition 4.2.6 *Soit $n \geq 1$ et soit $h \in \dot{B}^n_{1,\infty}(\mathbb{R}^n),$ alors $h \in BMO(\mathbb{R}^n)$(Voir [5] la proposition B.1, page* 159 *).*

Démonstration : La transformation $h \longrightarrow h(\lambda x), \lambda > 0$ est isométrique pour ces deux espaces.

Tout d'abord, on suppose que $h = \sum_{j\in\mathbb{Z}} g_j$ avec

$$\|g_j\|_1 \leq C2^{-jn} et \, \|\nabla g_j\|_\infty \leq C2^j, j \in \mathbb{Z}.$$

Maintenant, on considère un cube $\mathcal{Q}$ de côté $d_\mathcal{Q}$ vérifiant $2^{-m} \leq d_\mathcal{Q} < 2^{-m+1}$. On peut écrire $h = u + w$ où

$$u = \sum_{-\infty}^{m} g_j \quad \text{et} \quad w = \sum_{m+1}^{\infty} g_j.$$

On a les estimations $\|w\|_1 \leq C2^{-nm}$ et $\|\nabla u\|_\infty \leq C2^m$.

Donc

$$\int_\mathcal{Q} |u(x) - u_\mathcal{Q}|\, dx \leq |\mathcal{Q}| d_\mathcal{Q} \|\nabla u\|_\infty \leq C|\mathcal{Q}|,$$

et on a $\int_\mathcal{Q} |w(x)|\, dx \leq \|w\|_1 \leq C|\mathcal{Q}|$, alors h appartient à BMO.

Pour le cas général, il suffit d'appliquer les inégalités de Bernstein (1.5) données par le théorème à la décomposition de Littlewood-Paley de h . ■

Conclusion

Le but principal de notre travail a été de faire une étude assez détaillée des multiplicateurs de Fourier et des BMO, nous avons traité quelques propriètès et présenté quelques théorèmes essentiels concernant les espaces de BMO .

Bibliographie

[1] F. Audry, Multiplicateurs de Fourier sur le tore et la droite réele, Mini. projrt-M2, Univ-Franche-comté, $(2019-2020)$.

[2] J. Bergh, J. Löfström, Interpolation Spaces. An Introduction, Grundlehren der mathematishen Wissenchaften 233, Springer-verlag, Berlin-New York, 1976.

[3] G. Bourdaud, Analyse Fonctionnelle dans L'espace Euclidien, 2ième édition. Pub. Math. Univ. Paris $7, 23, 1995$.

[4] H. Brezis, Analyse fonctionnelle théorie et application, $2^e tirage$, Masson-Paris 83, Univ-Pierre . Marie-Curie et école Polythechnique.

[5] D. Chamorro, Inégalités de Gagliardo-Nirenberg Précisées sur le groupe de Heisenberg, Thèse-Docteur, ENS Cachan-France, 2006.

[6] G. David, Cours de M2, Techniques D'Analyse, Univ. Paris-Sud 11.

[7] L. Grafakos, Classical Fourier Analysis, 3^{rd} edition, Graduate Texts in Mathematics 249, Springer.

[8] L. Grafakos, Modern Fourier Analysis, Graduate texts in Mathematics, 2^{nd} edition. Univ. Missouri. Columbia. 2009.

[9] T. Hytönen, JV. Neerven, M. Veraar, L. Weis, Analysis in Banach Spaces, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics 63, springer.

[10] M. Moussai, On the Fourier multiplers of the spaces L^p, G. Math. J. Vol $12, 2015, 2, 331-336$.

[11] M. Moussai, Cours de master, Espaces de type de Sobolev, M'sila, 2020.

[12] U. Neri, Fractional integration on the space H^1 and its dual, Studia Math. $53(1975), 175-189$.

[13] E. M. Stein, 93, Harmonic Analysis, Printed in the United States of America, Univ-Press Princeton, New Jersey.

[14] R. Strichartz, Bounded mean osillation and Sobolev Spaces, Indiana Univ. Math. J $.29(1980), 539-558$.

[15] H. Triebel, Theory of Function Spaces, Birkhäuser 1983.

[16] M. Zuily, Éléments de Distribution et d'Equation aux Dérivées Partielles, Dunod 2002.

الملخص

في هذه المذكرة قمنا باعطاء بعض التعريفات و الخصائص لفضاء BMO ، وجداءات فورييه .ودرسنا علاقة الفضاء BMO بقياس كارلوسون ،وبفضاءات $Besov$ المتجانسة.

الكلمات المفتاحية
جداءات فورييه ، فضاء BMO ،قياس كارلوسون ، فضاءات $Besov$ المتجانسة .

Résumé :

Dans ce mémoire, nous avons donné quelques définitions et proprétiés de l'espace BMO et des multiplicateurs de Fourier. Nous avons étudie la relation de l'espace BMO avec la mesure de Carleson et avec les espaces de Besov homogènes.

Mot-Clés :

Les multiplicateurs de Fourier, l'espace BMO, la mesure de Carleson et les espaces de Besov homogènes.

abstract :

In this memory, we have given some definitions and properties of the BMO space and Fourier multipliers, and we have studied the relation between the BMO space and the Carleson measure and with homogeneous Besov spaces.

Keyword :

the Fourier multipliers, the BMO space , the Carleson measure and the homogeneous Besov spaces .