UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées et fondamentales

Par

GUESMIA FAHIMA

Sujet

L'interpolation des espaces

Dirigé par :

Mr.MOUSSAI MADANI

Promotion :2010 /2011

Table des matières

Notations

- Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$

la dérivée partielle $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 ..... \partial^{\alpha_n} x_n}$ est notée$\partial^\alpha f$,si f est une fonction de deux variables (x, y)on note $\partial_x^\alpha f$ et $\partial_y^\alpha f$.

- pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sa transformée de Fourier est

$$\mathcal{F} f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\xi) f(x)\, dx$$

et sa transformée de Fourier inverse est

$$\mathcal{F}^{-1} f(\xi) = f(\xi) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\xi) f(\xi)\, d\xi$$

- $x.\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

- $f * g(.) = \int_{\mathbb{R}^n} f(. - y)\, g(y)\, dy$ est la convolution des fonction f et g.

- Soient A_1 et A_2 deux espaces ,on dit que $A_1 \hookrightarrow A_2$ s'il existe $c > 0$,telle que :

$$\|f\|_{A_2} \leq c \|f\|_{A_1} . (\forall f \in A_1)$$

- p' est l'exposant conjugué de p $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$.

- Soit $a \in \mathbb{R}, a_+ = \max(a, 0)$.

- Si $k \in \mathbb{Z}^n, \tau_k$:est l'opérateur de translation $\tau_k f(.) = f(. - k)$.

- E' est l'espace dual de E.

- L^p :est l'espace des fonctions mesurables f telle que

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

- $D(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact.

- $D'(\mathbb{R}^n)$ est le dual de $D(\mathbb{R}^n)$.

- $S(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à décroissances rapides.

- $S'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions tempérées.

- $W^m(L^2)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_{W^m(L^2)} = \sum_{|\alpha| \le m} \left\| f^{(\alpha)} \right\|_2.$$

Introduction

Nous allons commencer par exposer les thémes abordés durant la thése et donner le plan de ce mémoire. Nous allons esuite détailler chaque partie, en présentant les travaux déjà effectués dans le domaines abordés et qui ont motivé ce travail, et énonçant de façon plus précise les résultats que nous avons obtenus.

De façon générale , ce travail touche aux domaines de l'analyse fonctionnelle et harmonique, et de la théorie des opérateurs. On peut le diviser en trois parties.

Dans une première partie, nous nous intéressons à l'interpolation dans les espaces $L^P, L^P faible$,Sobolev. Nous obtenons des résultats concernant certaines théorèmes de l'interpolation par exemple pour l'interpolation dans L^P nous obtenons la théorème de Riesz-thorin, et dans $L^P faible$ nous obtenons la théorème de Marcinkiewicz.

Dans une deuxième partie, nous nous intéressons à certaines démonstration des théorèmes. Nous utilisons la tansformation de Fourier et certaine formules.

Dans une troisième partie, nous nous intéressons à certaine manière de résoudre les EDPdans les espaces $L^P, L^P faible$,ou Sobolev.

Supposons donné un opérateur continu de E_0dansF_0 ,de E_1dansF_1 ,il s'agit de prouver qu'il est continu de$E_t$dansF_t pour $0 < t < 1$.

Les espace E_t,F_t sont des espaces de Banach de distributions (en abrégé EBD')au sens de la définition:un sous espace vectoriel E de D' est dit de EBD',si l'injection canonique $E \hookrightarrow D'$ est continue,et$(E, \|.\|)$soit de Banach.

À titre d'exemple:

1) Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f \in D'(\mathbb{R}^n)$

avac $\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx \quad ,\varphi \in D$

par l'inégalité de Hölder,il vient alors,que si $|f|^p \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad ,p \geq 1$ alors $f \in L^1_{loc}$,donc $L^P(\mathbb{R}^n)$est un EBD' pour la norme

$$\|f\|_{L^P} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

2) De même pour $L^\infty(\mathbb{R}^n)$,muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} ess\,|f(x)|$$

pour $0 < p < 1$,$L^P(\mathbb{R}^n)$ n'est pas de Banach (n'est pas normé...).

3) $C_b^m = \{f \in C^m(\mathbb{R}^n) : |f^{(\alpha)}(x)| \leq M, |\alpha| \leq m, m \in \mathbb{N}\}$est un EBD' pour la norme

$$\|f\|_{C_b^m} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|f^{(\alpha)}\|_{L^\infty}$$

4) $C^\alpha = \{f : \text{continue , bornée et } |f(x) - f(y)| \leq c|x-y|^\alpha\} \quad , 0 < \alpha < 1.$
espace de Hölder (inhomogène) est un EBD' pour la norme

$$\|f\|_{C^\alpha} = \|f\|_{L^\infty} + \sup_{x\neq y}\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Bibliographie

[B L] **J . Bergh ,J . Löfstrom** Interpolation space . Springer 1976.

[B] **G . Bourdand** Analyse fonctionnelle dans l'espace euclidien Université Paris 1988.

[MO] **M . Moussai** Analyse harmonique dans $\mathbb{R}^n$ 1997.

[N] **U . Neri** Singular itegrals .L.N.Math 200 , Springer 1971.

[ST1] **E . M . Stein** Singular integrals and differentiability proprietes of functions . Princeton Univ . Press 1970.

[ST2] Harmonic Analysis . Princeton Univ . Press 1993.