

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option: Analyse Mathématiques et Numérique

Présenté par :

Neche Noureddine

Thème

Contrôle Robuste Des systèmes Dynamiques

Soutenu publiquement le: 05/06/2024

Devant le jury composé de :

TIAIBA Abdelmoumen	Prof	Université de M'sila	Président
TOUAHRIA Messaoud	M.C.B	Université de M'sila	Encadreur
CHADI Khelifa	M.A.A	Université de M'sila	Examineur

Année universitaire : 2023/2024

Table des matières

Notations	3
Introduction	4
1 Généralités sur la théorie du contrôle	6
1.1 Notion de base sur les équations différentielles	6
1.1.1 Quelques types d'équations différentielles du premier ordre	7
1.2 La Transformation de Laplace	13
1.2.1 Propriétés fondamentales	14
1.3 Les systèmes dynamiques	16
1.4 Fonction de transfert d'un système	19
1.5 Commandabilité, observabilité	21
1.5.1 Problème de commande	21
1.5.2 Caractérisations algébriques	23
2 Robustesse des systèmes dynamiques	25
2.1 Robustesse en stabilité	25
2.1.1 Stabilité au sens de Lyapunov	26
2.1.2 Autres définitions de base	29
2.2 Robustesse en performance	29
2.2.1 Normes vectoriels	30
2.2.2 Performance H_2	31
2.2.3 Performance H_∞	32

2.3	Formulation LMI	33
2.3.1	Technique LMI pour la norme H_∞	35
3	Application : Le problème de la commande H_∞	36
3.1	Formulation du problème H_∞	36
3.1.1	Transformation linéaire fractionnaire (LFT)	37
3.1.2	Représentation d'état	38
3.2	Résolution du problème standard H_∞	39
3.2.1	Retour d'état	40
3.2.2	Exemple numérique	43
3.3	Conclusion	46
	 Bibliographie	 46

Notations

\forall	:	pour tout.
\exists	:	il existe.
max	:	maximum.
min	:	minimum.
sup	:	borne supérieure.
inf	:	borne inférieure.
lim	:	limite.
$lim sup$:	limite supérieure.
$lim inf$:	limite inférieure.
\mathbb{N}	:	ensemble des entiers naturels.
\mathbb{Z}	:	ensemble des entiers relatifs.
\mathbb{Q}	:	ensemble des nombres rationnels.
\mathbb{R}	:	ensemble des nombres réels.
\mathbb{R}^+	:	ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
\mathbb{C}	:	ensemble des nombres complexes.
$Re z$:	partie réelle du nombre complexe z .
$Im z$:	partie imaginaire du nombre complexe z .
\mathbb{K}	:	Corps des scalaires ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).
$M_{n,p}(\mathbb{K})$:	ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients dans \mathbb{K}
$\ \cdot \ $:	norme sur \mathbb{R}^n .
M^T	:	transposé de la matrice A .
M^{-1}	:	inverse de la matrice.
det	:	déterminant.
tr	:	trace.
rg ou rang	:	rang.
$exp(A)$, ou e^A	:	exponentielle de la matrice A .
M^+	:	la pseudo-inverse de M

Acronymes

-
- LMI : Inégalités Matricielles Linéaires (Linear Matrix Inequalities).
 - LTI : Linéaire Temps Invariant (Linear Time Invariant).
 - SISO : Mono-entrée Mono sortie (Single Input-Single Output).
 - MIMO : Entrée multiple-Sortie multiple (Multiple Input-Multiple Output).
-
-

Introduction

Le but de la théorie du contrôle est de déterminer la commande à appliquer en entrée du système pour obtenir un comportement désiré de celui-ci. Le fonctionnement de commande sur le système est assuré par un autre système appelé système de commande. Son objectif primordial est la stabilité du système corrigé, c'est-à-dire, la capacité pour un système de revenir de lui-même à sa position d'équilibre à chaque fois qu'il en est écarté.

Le problème de la commande est alors qualifiée à un problème de commande robuste qui est un type de commande qui vise à garantir les performances et la stabilité d'un système face à des perturbations du milieu. En effet, le modèle mathématique qui modélise un système réel est une représentation qui vise à approximer au mieux, avec des hypothèses simplificatrices, le système qu'on veut commander. Il existe donc un écart entre le comportement observé du système réel et son modèle interne. La commande robuste vise à déterminer une loi de commande qui soit capable de garantir des critères de performances et de stabilité. Alors si la spécification exigée pour la loi de commande est la stabilité du système, il s'agit d'un problème de stabilisation robuste et la loi de commande obtenue est dite robuste en stabilité. Aussi s'il s'agit plus de stabilité un certain niveau de performance, il est qualifié de commande robuste en performance.

L'étude de ce type de problème a connu un essor important ces dernières années et notre mémoire s'inscrit dans cette problématique, il se décompose en trois chapitres :

• **Le premier chapitre** est consacré sur une généralité de la théorie du contrôle: nous rappelons par des notions de base sur les équations différentielles, la transformation de Laplace et le problème de commande pour les systèmes LTI (Linéaire de Temps Invariant). Nous rappelons en particulier la relation entrée-sortie (input-output, en anglais) à travers une fonction de transfert sur les systèmes linéaires. On parle aussi sur des outils fon-

damentales concerne le problème de commande comme par exemple, la Commandabilité, l'observabilité... , et les critères d'estimation de ces outils.

•**Le deuxième chapitre**, nous exposons la notion de robustesse des systèmes dynamiques par deux stratégies: la première stratégie c'est robustesse en stabilité (stabilité au sens de Lyapunov, différents types de stabilité, comme la stabilité asymptote , la stabilité exponentielle...) et la deuxième c'est la robustesse en performance (performance H_2 , et performance H_∞).

•**Le troisième chapitre** est une applications des résultats des deux chapitres précédents où nous discutons le problème de synthèse d'un correcteur stabilisant c'est-à-dire une loi de commande de sorte que le transfert entre le vecteur d'entrée exogène et le vecteur de sortie mesuré est minimal. Nous commençons le chapitre par une présentation du problème de synthèse standard H_∞ pour les systèmes LTI . En suite, on discute la résolution de ce problème par chemin : retour d'état, et on termine par un exemple numérique.

Chapitre 1

Généralités sur la théorie du contrôle

La théorie du contrôle est un domaine de recherche interdisciplinaire, où beaucoup de concepts mathématiques et des méthodes travaillent ensemble pour produire un corps impressionnant des mathématiques appliquées. Ce chapitre sera consacré aux définitions élémentaires et notions de base concèrne les équations différentielles, la transformation de Laplace, la fonction de transfert, commandabilité, observabilité et stabilité... qui joues un rôle important pour réalisé le but de notre sujet.

1.1 Notion de base sur les équations différentielles

Supposons que la fonction $y = f(x)$ exprime un phénomène du point de vue quantitatif. Examinant ce phénomène, il est souvent impossible d'établire directement le caractère de la dépendance entre y et x , mais l'on peut établir une dépendance entre les quantités x, y et les dérivées de y par rapport à x : $y', y'', \dots, y^{(n)}$, c'est-à-dire que l'on peut écrire une **équation différentielle**. par exemple. On laisse tomber un corps de masse m d'une certaine hauteur. On demande d'tablire la loi de variation de la vitesse de chute v si le corps éprouve une résistance de freinage de la part de l'air proportionnelle à la vitesse (le coeffiecient de proportionnalité étant k), c'est-à-dire de trouver $v = f(t)$. En vertu le second loi de Newton on trouve l'équation différentille

$$m \frac{dv}{dt} = F$$

où $\frac{dv}{dt}$ est l'accélération du corps en mouvement (la dérivée de la vitesse par rapport au temps) et F la force agissant sur le corps dans le sens de mouvement. (Cette force est constituée de deux forces: de la force de pesanteur mg et de la force résistance de l'air $-kv$.)

On demande de déduire une relation entre x, y et les dérivées, la relation directe entre y et x , c'est-à-dire de trouver $y = f(x)$ ce qu'on appelle *intégrer une équation différentielle*.

Définition 1.1.1 On appelle *équation différentielle* une équation établissant une relation entre la variable indépendante x , la fonction inconnue $y = f(x)$ et ces dérivées $y', y'', \dots, y^{(n)}$, on peut écrire symboliquement une équation différentielle sous la forme

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

où

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

Où y est une fonction de l'inconnu x .

Si $y = f(x)$ est une fonction d'une seule variable indépendante, l'équation différentielle est dite *ordinaire*.

Remarque 1.1.1 On appelle *ordre* d'une équation différentielle l'ordre de la dérivée la plus élevée contenue dans cette équation.

Définition 1.1.2 On appelle *solution* ou *intégrale* d'une équation différentielle toute fonction $y = f(x)$ vérifiant identiquement cette équation.

1.1.1 Quelques types d'équations différentielles du premier ordre

Une équation différentielle du premier ordre est de la forme

$$F(x, y, y') = 0$$

Lorsque cette équation est résoluble en y' , on peut la mettre sous la forme

$$y' = f(x, y).$$

On dit que l'équation différentielle est résoluble par rapport à la dérivée. Pour une telle équation, on a le théorème de l'existence et l'unicité de la solution suivant

Théorème 1.1.1 *Si dans l'équation $y' = f(x, y)$ la fonction $f(x, y)$ et sa dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à y sont continues dans un certain domaine D du plan Oxy et si (x_0, y_0) est un point dans ce domaine, il existe une solution unique $y = \varphi(x)$ satisfaisant à la condition $y = y_0$ lorsque $x = x_0$.*

La condition que la fonction y doit prendre la valeur donnée y_0 lorsque $x = x_0$. Le théorème signifie qu'il existe une fonction $y = \varphi(x)$ est une seule dont la courbe représentative passe par le point (x_0, y_0) .

Il résulte de ce théorème que l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ possède une infinité de solutions passant par le point (x_0, y_0) par exemple la solution passe par le point (x_0, y_0) , la solution passe par le point (x_0, y_1) , la solution passe par le point (x_0, y_2) , etc. Pourvu que ces points se trouvent dans le domaine D .

La condition que la fonction y doit prendre la valeur donnée y_0 lorsque $x = x_0$, s'appelle la condition initiale.

Définition 1.1.3 *On appelle solution générale d'une équation différentielle de première ordre une fonction*

$$y = \varphi(x, c),$$

dépendant d'une constante arbitraire c et satisfaisant aux conditions suivantes:

1. *elle satisfait à l'équation différentielle quelle que soit la valeur concrète de la constante c .*

2. *quelle que soit la condition initiale $y = y_0$ lorsque $x = x_0$, on peut trouver une valeur $c = c_0$ telle que la fonction $y = \varphi(x, c_0)$, vérifie la condition initiale donnée. On suppose alors que les valeurs x_0 et y_0 appartiennent au domaine de variation des variables x et y dans lequel sont observées les conditions du théorème d'existence et d'unicité de la solution.*

Equations à variables séparées

Considérons une équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y) \quad (1.1.1)$$

Où le second membre est le produit d'une fonction dépendant seulement de x par une fonction dépendant seulement de y . Transformons la comme suit (en supposant $f_2(y) \neq 0$) :

$$\frac{1}{f_2(y)}dy = f_1(x)dx \quad (1.1.2)$$

Supposons que la fonction y de x soit connue, on peut considérer 1.1.2 comme l'égalité de deux différentielles, et leurs primitives se distingueront par une constante. Intégrant le premier membre par rapport à y et le second par rapport à x , on obtient:

$$\int \frac{1}{f_2(y)}dy = \int f_1(x)dx + C$$

Nous avons obtenu une relation entre la solution y et la variable indépendante x et la constante arbitraire C c-à-d. qu'on a l'intégrale générale de l'équation 1.1.1

1. L'équation différentielle 1.1.2

$$M(x)dx + N(y)dy = 0. \quad (1.1.3)$$

est appelée équation à *variable séparée*. Comme on vient de le démontrer sont intégrale générale est

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.$$

2. Equation de la forme

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0.$$

est appelée une équation à *variables séparables*. Elle peut être ramenée à une équation à variables séparées en divisant les deux membres par l'expression $N_1(y)M_2(x)$:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0.$$

qui une équation de la forme 1.1.3

Equations homogènes

Définition 1.1.4 On dit que la fonction $f(x, y)$ est une fonction homogène de degré n par rapport aux variables x et y si l'on a pour tout λ

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Par exemple la fonction $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ est homogène et de degré 1, car

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{(\lambda x)^3 + (\lambda y)^3} = \lambda \sqrt[3]{x^3 + y^3} = \lambda f(x, y)$$

Définition 1.1.5 L'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

est dite homogène par rapport à x et y si la fonction $f(x, y)$ est une fonction homogène de degré zéro par rapport à x et y .

La résolution de l'équation homogène. On a par hypothèse $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$. Posant dans cette identité $\lambda = \frac{1}{x}$, on obtient

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

c-à-d. qu'une fonction de degré zéro dépend seulement du rapport $\frac{y}{x}$.

Pour résoudre cette équation, nous faisons la substitution

$$u = \frac{y}{x}, \quad \text{c.à. d.} \quad y = ux$$

On a alors

$$\frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx}x.$$

On trouve par intégration

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C$$

Substituant après intégration $\frac{y}{x}$ à u , on obtient l'intégration de l'équation on question.

Equations linéaires

Définition 1.1.6 *On appelle équation linéaire, une équation linéaire par à la fonction inconnue et à sa dérivée. Elle s'écrit*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x). \quad (1.1.4)$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des fonctions continues de x données (où des constantes).

La résolution de l'équation linéaire. On associe à l'équation différentielle 1.1.4, l'équation sans second membre:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0. \quad (1.1.5)$$

L'équation 1.1.5 s'appelle aussi équation différentielle homogène associée à 1.1.4. Les solutions de l'équation 1.1.5 sont données par:

$$y \longmapsto ke^{\int -P(x)dx}$$

Où k est une constante réelle quelconque.

On obtient les solutions de l'équation 1.1.4 en ajoutant une solution particulière de cette équation à la solution générale de l'équation homogène associée.

Théorème 1.1.2 *La solution générale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre 1.1.4 est la somme de l'intégrale générale de l'équation sans second membre 1.1.5 et d'une intégrale particulière de l'équation complète 1.1.4.*

Remarque 1.1.2 *Certaines équations non linéaires se ramènent à des équations linéaires par changement de variables, c'est le cas par exemple des équations de Bernoulli:*

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^\alpha.$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des fonctions continues de x .

Lorsque α vaut 0 ou 1 l'équation est linéaire. Sinon en posant $z = y^{1-\alpha}$, on se ramène à l'équation linéaire suivante:

$$\frac{\dot{z}}{1-\alpha} = P(x)z + Q(x)$$

C'est aussi le cas de l'équation de *Ricatti*:

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x).$$

On sait résoudre cette équation dès que l'on connaît une solution particulière $y_1(x)$, cela conduit à une équation de Bernoulli pour $\alpha = 2$.

En effet, il suffit de poser $y = y_1 + z$ et de le remplacer dans l'équation de Ricatti, pour montrer que la variable z vérifie l'équation de Bernoulli suivante:

$$\frac{dz}{dx} = (2P(x)y_1(x) + Q(x))z + P(x)z^2(x).$$

une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n et d'inconnue y est donc de la forme:

$$p_0y + p_1y' + p_2y'' + \dots + p_ny^{(n)} = p_{n+1}$$

Où $p_0, p_1, \dots, p_n, p_{n+1}$, sont des fonctions numériques.

Remarque 1.1.3 Les équations différentielles d'ordre n se ramènent à des systèmes d'équations d'ordre 1.

Soit $x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$ une équation différentielle d'ordre n on pose:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_1(t) \\ x'(t) = x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^{(n-1)}(t) = x_n(t) \end{array} \right.$$

On aura alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_1(t) \\ x'_1(t) = x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_{n-1}(t) = x_n(t) \end{array} \right.$$

de plus $x'_n(t) = f(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$

On peut écrire cela sous la forme vectorielle:

$$\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_{n-1}(t) \\ x'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \\ f(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{pmatrix} = F(t, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

où $F : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t))$$

1.2 La Transformation de Laplace

Définition 1.2.1 *Considérons une fonction réelle d'une variable réelle $x(t)$ telle que $x(t) = 0$ pour $t < 0$, on définit sa **transformée de Laplace** $X(s)$ est la fonction $X = L[x]$ de la variable complexe s définie par:*

$$X(s) = L\{x(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

La fonction $X(s)$ est une fonction complexe d'une variable complexe s (avec $s = \tau + i\omega$)

La transformée de Laplace d'une fonction $x(t)$ n'existe pas dans tous les cas: il est nécessaire que l'intégrale ci-dessus converge. On démontre que cette convergence est vérifiée si la partie réelle de la variable complexe s est supérieure à une valeur donnée appelée seuil de convergence.

D'une manière générale, la transformation de Laplace est une application de l'espace des fonctions du temps (nulle pour $t < 0$) vers l'espace des fonctions complexes d'une variable complexe. La fonction $x(t)$ s'appelle l'original de $X(s)$, ou encore sa transformée inverse.

1.2.1 Propriétés fondamentales

Les propriétés qui suivent sont fondamentales car elles permettent de calculer facilement (sans utiliser la définition de la transformation de Laplace) les transformées de Laplace de certaines fonctions temporelles

Linéarité

Soient $f, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$, deux fonctions admettant des transformées de Laplace, et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors:

$$L\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}(s) = \alpha L\{f(t)\}(s) + \beta L\{g(t)\}(s)$$

La linéarité de la transformation de Laplace résulte naturellement de la linéarité de l'intégrale.

Transformée d'une translation

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$, une fonction vérifiant $f(t) = 0$, si $(t < 0)$ et admettant une transformée de Laplace $L\{f(t)\}(s)$. On considère la fonction f_a définie par $f_a(t) = f(t - a)$, $a > 0$, alors :

$$L\{f_a(t)\}(s) = e^{-as} L\{f(t)\}(s)$$

Transformée d'une homothétie

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$, une fonction admettant une transformée de Laplace $L\{f(t)\}(s)$ et $k > 0$. On considère la fonction f_k définie par $f_k(t) = f(kt)$, alors:

$$L\{f_k(t)\}(s) = \frac{1}{k} L\{f(t)\}\left(\frac{s}{k}\right)$$

Transformée de Laplace d'une dérivée

Soit $f(t)$ une fonction de temps. Soit $F(s)$ sa transformée de Laplace. La transformée de Laplace de sa dérivée première $L\{f'(t)\}(s)$ se calcule simplement en fonction de $F(s)$:

$$L\{f'(t)\}(s) = sF(s) - f(0)$$

De même, la transformée de Laplace de sa dérivée n-ième est

$$L\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F'(s) - \sum_{k=n+1}^{2n} (s^{2n-k} \frac{d^{k-n-1} f}{dt^{k-n-1}}(0))$$

Par exemple:

$$L\{f''(t)\}(s) = s^2 F'(s) - sf(0) - f'(0)$$

En observant que la transformation de Laplace transforme l'opérateur de dérivation en un opérateur arithmétique. Il faut noter que l'on retrouve dans ces expressions les conditions initiales, c'est-à-dire les valeurs en $t = 0$ des dérivées successives d'ordre inférieurs à l'ordre de dérivation considéré.

Transformé de Laplace d'une primitive

Soit $P(t)$ une primitive d'une fonction $f(t)$ et $F(s)$ la transformée de Laplace de cette fonction. On a:

$$L\{P(t)\}(s) = L\{\int f(t)dt\}(s) = \frac{F(s)}{s} + \frac{F(0)}{s}$$

Là encore, l'opérateur *intégration* se trouve changé en un opérateur arithmétique dans l'espace des transformées de Laplace.

Transformée de Laplace d'un produit de convolution

Si $L\{f(t)\}(s) = F(s)$ et $L\{g(t)\}(s) = G(s)$ alors $L\{f(t) * g(t)\}(s) = F(s).G(s)$

Théorème de la valeur initiale

Considérons la transformée de Laplace $L\{f(t)\}(s) = F(s)$ d'une fonction $f(t)$ et $L\{f'(t)\}(s)$ la transformée de Laplace de sa dérivée, alors lorsque $s \rightarrow +\infty$, on a $e^{-st} \rightarrow 0$, donc $sF(s) - f(0) \rightarrow 0$. Nous retiendrons:

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} [sF(s)]$$

Ceci constitue le théorème de la valeur initiale qui permet d'obtenir une expression de la valeur de f au voisinage de zéro par valeur supérieure en fonction de sa transformée de Laplace.

Théorème de la valeur finale

Le théorème de la valeur finale permet de calculer la limite quand t tend vers l'infini d'une fonction temporelle $f(t)$ en connaissant uniquement sa transformée de Laplace

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)]$$

Fonction de transfert inverse

De même qu'une fonction du temps peut avoir une transformée de Laplace, il est possible à partir d'une fonction $F(s)$ de retrouver son original, autrement dit la fonction $f(t)$ dont elle est la transformée de Laplace.

Définition 1.2.2 La transformée de Laplace étant une application bijective, sa bijection inverse noté L^{-1} et définit pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ par:

$$L^{-1}\{F(s)\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad (c = \operatorname{Re}(s)).$$

Elle est unique et on l'appelle la transformée inverse de Laplace ou originale de F .

1.3 Les systèmes dynamiques

En mathématiques, un système dynamique est un système et dont l'évolution dans le temps est décrite par une loi. Par exemple le mouvement des planètes dans le système solaire (régis par la loi universelle de la gravitation de Newton), l'évolution de la mémoire d'un ordinateur sous l'action d'un programme informatique... . Formellement on distingue les systèmes dynamiques à temps discrets (comme un programme d'informatique) des systèmes dynamiques à temps continus (comme une réaction chimique).

Lors de la conception d'un système de commande, la première étape, qui conditionne le succès d'une telle réalisation et la modélisation, l'obtention d'une description mathématique convenable, qui reproduit de manière aussi fidèle que possible le comportement du système à commander dans un contexte donné, est nécessaire.

Les modèles des systèmes dynamiques peuvent être classés en plusieurs catégories :

- Linéaires / non linéaires
- Invariants dans le temps / variants dans le temps
- **Déterministes** (c'est-à-dire qu'une condition initiale donnée à l'instant "présent" va correspondre à chaque instant ultérieur un et un seul état "futur" possible.) / **stochastiques** (si son évolution est régie par une loi de probabilité).

- Mono variables / multi variables

Bien que la plupart des systèmes physiques soient essentiellement non linéaires, variants dans le temps, de dimension infinie et que leur représentation mathématique se traduise donc par des équations aux dérivées partielles non linéaires ou par des équations ordinaires. En effet, il existe plusieurs techniques pour approcher le comportement des systèmes physiques par des modèles linéaires invariants de dimension finie. On peut par exemple linéariser un modèle non-linéaire autour de plusieurs points de fonctionnement et obtenir ainsi une famille de modèles linéaires.

Dans notre étude, on considère des systèmes dynamiques modélisés par des équations différentielles sous la forme:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad (1.3.1)$$

telle que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état de système, et le vecteur $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée (où commande). Pour calculer l'évolution future d'un système, il faut connaître le vecteur $t \rightarrow u(t)$ aussi que la condition initiale de l'état. Étant donné l'évolution du système on s'intéresse souvent à un certain nombre de vecteurs qu'on nomme sorties où mesures. Les équations de sorties considérées sont de la forme

$$y(t) = g(x(t), u(t), t) \in \mathbb{R}^p, \quad p \leq n. \quad (1.3.2)$$

On peut agir sur l'état x par un contrôle u en fonction de l'état c'est-à-dire $u = k(x; t)$, et le système 1.3.1 s'écrit sous la forme

$$\dot{x}(t) = f(x(t), k(x, t), t), \quad (1.3.3)$$

on parle alors de *retour d'état*.

Si $u = k(y; t)$ on parle de *retour de sortie*. Puisque la loi de rétroaction est particulièrement choisie, ou parce que le système ne possède pas de commande, il est important de comprendre comment étudier les systèmes libres de la forme

$$\dot{x}(t) = f(x, t). \quad (1.3.4)$$

Un tel système sous la forme 1.3.4 est stationnaire lorsque f ne dépend pas explicitement du temps. C'est-à-dire

$$\dot{x} = f(x). \quad (1.3.5)$$

Un des concepts clés dans l'étude des systèmes dynamiques est la notion de *point d'équilibre* (appelé également point stationnaire). Le point x_e est dit point d'équilibre pour le système différentiel 1.3.4, s'il est initialisé en ce point, c'est à dire $x(0) = x_e$, alors le système reste en x_e pour tous les temps futurs.

L'étude physique de nombreux systèmes dynamiques à temps continu permet de décrire leur comportement par un système d'équations de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t). \end{cases} \quad (1.3.6)$$

Ici encore, le vecteur $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est la sortie, issue de la seconde équation de 1.3.6 (dite équation d'observation). Le vecteur $x(t) \in \mathbb{R}^n$, solution de la

première équation (équation différentielle ordinaire, dite équation d'évolution), est appelé vecteur d'état du système, il décrit à un instant donné la configuration interne du système. Sous les hypothèses précitées de linéarité et d'invariance dans le temps, f et g sont linéaire et indépendantes de t , les équations 1.3.6 deviennent

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (1.3.7)$$

telle que, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est appelée matrice d'état de système, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matrice de commande, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ matrice d'observation, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ matrice de transmission directe, et la quadruplet $(A, B; C, D)$ est appelée réalisation de système 1.3.7.

L'approche 1.3.7 est intéressante car elle fournit souvent des informations locale sur le comportement des systèmes non linéaire 1.3.6 autour de x_e . Néanmoins cette information est parfois insuffisante, surtout lorsqu'on cherche des informations sur le comportement du loin de l'équilibre. En outre les systèmes linéaires et non linéaires sont en fait très différents par nature. Enfin, si le système dynamique à contrôler possède une entrée ($m = 1$) et une sortie ($p = 1$) celui-ci est appelé SISO (Single Input Single Output), sinon il est dit MIMO (Multiple Input Multiple Output).

1.4 Fonction de transfert d'un système

Considérons un système linéaire quelconque possédant un entrée $u(t)$ et un sortie $y(t)$.

On suppose qu'il est régi par une équation différentielle de degré n

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u(t) \quad (1.4.1)$$

Si nous appliquons la transformation de Laplace aux deux membres de cette équation, tout en supposant nulles les conditions initiales, il vient

$$\begin{aligned} a_n s^n Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) &= b_m s^m U(s) + \dots + b_1 s U(s) + b_0 U(s) \\ [a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0] Y(s) &= [b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0] U(s) \\ \text{d'où } \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}. \end{aligned}$$

Cette fraction rationnelle de deux polynômes de la variable complexe s est appelée *fonction de transfert* du système et communément notée

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \Leftrightarrow Y(s) = G(s)U(s) \quad (1.4.2)$$

Comme cette fonction est une fonction rationnelle de deux polynômes en s , il est possible de factoriser ces deux polynômes dans le corps des complexes. On obtient:

$$G(s) = \frac{b_m(s - z_m)(s - z_{m-1})\dots(s - z_1)}{a_n(s - s_n)(s - s_{n-1})\dots + (s - s_1)}$$

Les racines z_i qui annule le numérateur sont appelées *les zéros* de la fonction de transfert. Les racines s_i qui s'annule le dénominateur sont *les pôles* de la fonction de transfert. Ces peuvent être réels ou complexes. Le signe ou l'appartenance à l'ensemble des réels de ces pôles ou zéros, jouent des rôles très importants dans l'étude des systèmes.

Aussi en peut définir la relation entrée-sortie d'un système linéaire invariant dans le temps ou (en anglais Linear Time Invariant (LTI)) par le produit de convolution suivant

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(t - \tau)u(\tau)d\tau,$$

où $g(t)$ est la réponse impulsionnelle du système, et $u(t)$ est le vecteur d'entrée correspondant. Comme précédent, dans le domaine de Laplace, on obtient le produit simple

On dira que la matrice de transfert G est propre si

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \|G(\infty)\| < +\infty,$$

et qu'elle est strictement propre si

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \|G(\infty)\| = 0 .$$

Le système est dit mono-entrée/mono-sortie si u et y sont des scalaires, et multi-entrées/multi-sorties ou multivariable si l'un des deux est un vecteur. On utilisera les abréviations anglaises SISO (single-input/single-output) et MIMO (multi-input/multi-output).

Lorsqu'on a accès aux équations d'évolution physique du système, on peut décrire explicitement son comportement par la dynamique de ses variables internes (entités physiques caractérisant l'état du système). On obtient alors des équations "d'état" de la forme 1.3.7.

En prenant la transformée de Laplace, on vérifie aisément que la fonction de transfert de $U(s)$ à $Y(s)$ est alors donnée par

$$G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B \quad (1.4.3)$$

En effet

$$\begin{aligned} sX(s) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \\ (sI - A)X(s) &= BU(s) \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \\ \text{d'où } Y(s) &= [D + C(sI - A)^{-1}B]U(s). \end{aligned}$$

Réciproquement, à toute fonction de transfert propre on peut associer une représentation interne équivalente de la forme 1.3.7. Le quadruplet $(A; B; C; D)$ s'appelle une réalisation de $G(s)$. Cette réalisation est minimale si $(A; B)$ est commandable et $(C; A)$ observable.

1.5 Commandabilité, observabilité

1.5.1 Problème de commande

Étant donnée une réalisation (A, B, C, D) d'un système LTI.

Définition 1.5.1 *Le couple (A, B) est dit commandable si, pour tout $t_1 > 0, x_0; x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe une commande $u : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$, intégrable sur $[0; t_1]$, qui amène la variable $x(t)$ de $x(0) = x_0$, à $x(t_1) = x_1$ autrement dit telle que*

$$x_1 = e^{At}x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

Le couple (C, A) est dit observable si, pour $t_1 > 0$, l'état initial $x(0)$ peut être déterminé de manière unique à partir de tout commande $u : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ et de la sortie $y : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^p$ qui en résulte.

Comme il est d'usage, on dira dans la suite que la réalisation (A, B, C, D) d'un système est commandable (resp, observable) si (A, B) est commandable, (resp, si (C, A) est observable).

Remarque 1.5.1 - On peut, sans amoindrir l'énoncé, remplacer x_0 par 0 dans la définition de la commandabilité.

- De même, l'observabilité peut être définie de façon équivalente en ne considérant que la sortie $y : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^p$ résultant de la commande nulle (y est alors la réponse libre du système)

- Une fois déterminé l'unique $x(0)$ d'une réalisation observable (A, B, C, D) , tout vecteur prise par le vecteur d'état $x(t)$ sur $[0; t]$ peut être calculer avec

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

Exemple 1.5.1 La connaissance de la matrice de transistion (trensfert) permet de calculer directement le vecteur d'état du système à partir de cette expression.

Considérons par exemple le système régi par les équations d'état suivantes:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad \text{avec } A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Supposons que la commande associée est $u(t) = 1$, et que son état initial est définit par:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Après calcule la matrice de transition donnée par

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t} & -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t} \\ -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t} & \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

On a donc

$$x(t) = e^{At} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \left(\begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-(t-\tau)} + \frac{1}{3}e^{-4(t-\tau)} & -\frac{2}{3}e^{-(t-\tau)} + \frac{1}{3}e^{-4(t-\tau)} \\ -\frac{1}{3}e^{-(t-\tau)} + \frac{1}{3}e^{-4(t-\tau)} & \frac{1}{3}e^{-(t-\tau)} + \frac{2}{3}e^{-4(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right) d\tau$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t (2e^{-(t-\tau)} - e^{-4(t-\tau)}) d\tau \\ \int_0^t (-e^{-(t-\tau)} - e^{-4(t-\tau)}) d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} - 2e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-4t} \\ -\frac{5}{4} + e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

1.5.2 Caractérisations algébriques

(A, B) est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité

$$(B, AB, \dots, A^{n-1}B),$$

est de plein rang (n , en ligne).

(C, A) est observable si et seulement si la matrice d'observabilité

$$(C, CA, \dots, CA^{n-1})^T,$$

est de plein rang (n , en colonne).

On dispose aussi des caractérisations modales suivantes :

(A, B) est commandable (resp. (C, A) est observable) si et seulement si tout vecteur propre à gauche v^* de A est tel que $v^*B \neq 0$, c'est-à-dire s'il n'existe pas de vecteur propre à gauche v^* de A qui soit orthogonal à toutes les colonnes de B . de plus

$$v^*A = \lambda v^* \text{ alors } v^*B = 0 \implies v^* = 0$$

(resp, tout vecteur propre à droite v de A est tel que $Cv \neq 0$, c'est-à-dire s'il n'existe pas de vecteur propre à droite v de A qui soit orthogonal à toutes les lignes de C). de plus

$$Av = \lambda v \text{ alors } Cv = 0 \implies v = 0$$

Cela conduit à définir la commandabilité et l'observabilité par mode de système, c'est-à-dire par valeur propre de A , est vis-à-vis de B et C .

Un mode $\lambda \in \Lambda(A)$ est commandable si pour tout vecteur propre à gauche (resp, à droite) v associé à la valeur propre λ , on a $v^*B \neq 0$ (resp. $Cv \neq 0$).

Ainsi (A, B) est commandable (resp. (C, A) est observable) si et seulement si tous les modes du système sont commandables (resp. observables).

Critère de Popov-Belevitch-Hautus (ou PBH):

traduit cette interprétation modale par une condition de rang.

(A, B) est commandable si et seulement si, pour toute valeur propre $\lambda \in \Lambda(A)$ la matrice

$$[A - \lambda I_n \quad B]$$

est de plein rang (n , en ligne). De même, (C, A) est observable si et seulement si, pour toute valeur propre $\lambda \in \Lambda(A)$ la

matrice

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I_n \\ C \end{bmatrix}$$

est de plein rang (n , en colonne).

Nous donnons une dernière caractérisation, qui permet de lier la commandabilité à la notion de placement de valeurs propres. En effet, (A, B) est commandable (resp. (C, A) est observable) si et seulement si les valeurs propres de $A + BF$ (resp. de $A + LC$)

peuvent être placées arbitrairement dans C par un choix convenable de $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (resp. de $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$).

Stabilisabilité, détectabilité

Les notions de stabilisabilité et de détectabilité sont voisines, mais moins fortes que les précédentes : (A, B) est stabilisable si les modes instables de A sont commandables, c'est-à-dire avec le critère **PBH**, si pour toute valeur propre $\lambda \in \Lambda(A) \cap \bar{\mathbb{C}}^+$ la matrice $[A - \lambda I_n]$ est de rang n . De façon duale, (C, A) est détectable si les modes instables de A sont observables

: pour toute valeur propre $\lambda \in \Lambda(A) \cap \bar{\mathbb{C}}^+$ la matrice $\begin{bmatrix} A - \lambda I_n \\ C \end{bmatrix}$ est de rang n .

On a enfin des caractérisation par placement de valeurs propres : (A, B) est stabilisable (resp. (C, A) est détectable) s'il existe $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (resp. de $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$) tel que $A + BF$ (resp. de $A + LC$) est **Hurwitz**, c'est-à-dire que ses valeurs propres sont toutes dans le demi-plan gauche \mathbb{C}^- .

Chapitre 2

Robustesse des systèmes dynamiques

Dans ce chapitre on parle plus précisément au terme de **robustesse** est généralement associé à celui de risque et de prise de décision. La robustesse est la qualité que possède un système qui est peut affecté par des incertitudes et perturbations inhérentes où extérieures au système. Un système robuste est celui qui garde ses caractéristiques et qualités (stabilité, performance, etc.) même sous l'influence de perturbations. Une commande robuste doit donc garantir au système toutes les propriétés, soit en prenant en compte au niveau de la synthèse ; les incertitudes, soit parce qu'elle est conçue de façon à garantir certaines marges de stabilité et/ou performance.

Donc la question de robustesse peut-être abordée de deux manières, pour la stabilité comme pour les performances:

2.1 Robustesse en stabilité

Avant de se lancer dans l'analyse de la robustesse, c'est-à-dire dans l'étude des modifications du comportement du système en fonction des paramètres, il convient de connaître quelques notions et résultats de base qui concerne la stabilité d'un système dynamique. La notion de stabilité correspond à l'idée d'un comportement dure dans le temps.

On considère le système dynamique suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) \\ x(t; t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue en t et localement Lipschitz en x sur $D \times [0; +\infty)$ et $D \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine qui contient l'origine $x = 0$

Définition 2.1.1 *L'origine est un point d'équilibre de 2.1.1 si*

$$f(0, t) = 0, \forall t \geq 0$$

Par exemple si on considère le système décrit par

$$\dot{x} = -(1 + \sin(x^2)) x.$$

Il est clair que *l'origine* est un point d'équilibre et la solution du système est donnée par:

$$x(t) = x(0) \exp \int_0^t -(1 + \sin(x^2(\tau))) d\tau$$

Pour tout $t \geq 0$.

2.1.1 Stabilité au sens de Lyapunov

Le principe de stabilité au sens de Lyapunov est attribué à Lagrange qui a démontré qu'un système mécanique, en l'absence des forces extérieures, est stable si, déplacé de sa position d'équilibre, l'énergie de système décroît d'une façon continue jusqu'à atteindre son minimum à l'état d'équilibre. En 1892, A.M.Lyapunov a réussi à extraire, à partir de ce raisonnement qualitatif sur le comportement et la stabilité des systèmes mécaniques, une théorie mathématique générale applicable à toute équation différentielle.

Définition 2.1.2 *Le point d'équilibre $x = 0$, de 2.1.1 est*

- *Stable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon; t_0) > 0$; tel que*

$$\|x(t_0, t_0)\| < \delta \implies \|x(t, t_0)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 \geq 0$$

- Uniformément stable si, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$; tel que

$$\|x(t_0, t_0)\| < \delta \implies \|x(t, t_0)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 \geq 0$$

- Instable si'il n'est pas stable.

- Asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe $c = c(\varepsilon) > 0$, tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, t_0) = 0$, pour tout $\|x(t_0, t_0)\| < c$.

- Uniformément asymptotiquement stable s'il est uniformément stable et s'il existe $c > 0$, indépendant de t_0 , tel que pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $T = T(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\|x(t, t_0)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 + T(\varepsilon), \text{ pour tout } \|x(t_0, t_0)\| < c.$$

- Globalement uniformément asymptotiquement stable s'il est uniformément stable et si pour toutes paires de réels positifs ε, c , il existe $T = T(\varepsilon, c)$ tel que

$$\|x(t, t_0)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 + T(\varepsilon, c), \text{ pour tout } \|x(t_0, t_0)\| < c.$$

Fonctions spéciale

Définition 2.1.3 Une fonction $\gamma : [0, a) \rightarrow [0, +\infty)$ est dite appartenir à la classe des fonctions K si celle-ci est continue, strictement croissante et $\gamma(0) = 0$. Elle est dite appartenir à la classe des fonctions K_∞ si $a = +\infty$ et

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \gamma(r) = 0$$

Définition 2.1.4 Une fonction continue $\beta : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ est dite appartenir à la classe des fonctions KL si pour tout s fixé, la fonction $\beta(r, \tau)$ est de classe K par rapport à r et, pour tout $r > 0$ fixé, la fonction $\beta(r; \tau)$ est strictement décroissante par rapport à τ et

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \beta(r, \tau) = 0$$

Fonction d'énergie: fonction de Lyapunov

La méthode de Lyapunov permet de se prononcer quant à la stabilité d'un état d'équilibre sans avoir recours à la résolution de l'équation d'état. Le signe d'une fonction $V(x)$, ($V(0) = 0; V(\infty) = \infty$), appelée **fonction de Lyapunov**, et celui de sa dérivée $\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dt}$ donne une information sur la stabilité de système considéré. Nous rappelons ici par le principal théorème de cette théorie. Et nous supposons que l'origine est un point d'équilibre pour le système 2.1.1

Définition 2.1.5 Une fonction $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, pour laquelle il existe des fonctions $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4 \in K_\infty$, et $\gamma_3 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $t \in \mathbb{R}^+$ ce qui suit est vérifié

$$\gamma_1(\|x\|) \leq V(x, t) \leq \gamma_2(\|x\|) \quad (2.1.2)$$

$$\dot{V}(x, t) = \frac{\partial V}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial V}{\partial x}(x, t) f(x, t) \leq -\gamma_3(x) \quad (2.1.3)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x}(x, t) \right\| \leq \gamma_4(\|x\|) \quad (2.1.4)$$

est appelée fonction de Lyapunov pour le système 2.1.1 si γ_3 est semi définie positive, et fonction de Lyapunov stricte si γ_3 est définie positive.

Nous rappelons le théorème de Lyapunov pour les systèmes variants dans le temps valables bien sûr pour les systèmes autonomes.

Théorème 2.1.1 Soit $x = 0$, un point d'équilibre de 2.1.1 et $X \subset \mathbb{R}^n$ un domaine contenant $x = 0$. Soit $V : X \times [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable telle que

$$\gamma_1(\|x\|) \leq V(x, t) \leq \gamma_2(\|x\|) \quad \forall t \in [0; +\infty), \forall x \in X$$

$$\dot{V}(x, t) = \frac{\partial V}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial V}{\partial x}(x, t) f(x, t) \leq -\gamma_3(x) \quad \forall t \in [0; +\infty), \forall x \in X$$

où $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont des fonctions définies positives et continues sur X . Alors l'origine est uniformément asymptotiquement stable. Si $X = R^n$ et γ_3 est de classe K_∞ , alors l'origine est globalement asymptotiquement stable.

2.1.2 Autres définitions de base

Lemme 2.1.1 *Le point d'équilibre $x = 0$ de 2.1.1 est*

- Uniformément stable si et seulement si il existe une fonction de classe K et une constante $c > 0$ telles que

$$\|x(t; t_0)\| < \gamma(\|x(t_0, t_0)\|), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|x(t_0, t_0)\| < c.$$

- Uniformément asymptotiquement stable si et seulement si il existe une fonction de classe KL et une constante $c > 0$ telle que

$$\|x(t; t_0)\| < \beta(\|x(t_0, t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|x(t_0, t_0)\| < c.$$

- Globalement uniformément asymptotiquement stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfait pour toute condition initiale $x(t_0, t_0)$.

Grâce à ce lemme, nous pouvons introduire la notion, *stabilité exponentielle*.

Définition 2.1.6 *Le point d'équilibre $x = 0$ de 2.1.1, est exponentiellement stable s'il existe deux constantes k, α strictement positive telle que :*

$$\|x(t; t_0)\| < k\|x(t_0, t_0)\|e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|x(t_0, t_0)\| < c.$$

- Globalement exponentiellement stable si cette condition est satisfaite pour toute condition initiale.

2.2 Robustesse en performance

La conception d'une loi de commande doit généralement répondre, au delà de l'exigence de stabilité, à des spécifications relatives à la "taille" des vecteurs ou des matrices de transfert

: On cherchera par exemple à réduire l'impacte sur le comportement de système des perturbations pouvant affecter la commande ou la sortie, ou encore à minimiser l'effet de bruit apparaissant sur les mesures. On pourra aussi exiger de maintenir l'effet des actionneurs à une certaine limite. Ces objectifs ou contraintes de performance sont exprimés au moyen de normes de type H_2 et H_∞

2.2.1 Normes vectoriels

On considère un vecteur $u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}^m$. on définit la norme infini ou norme *sup* de u par

$$\|u\|_\infty \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_\infty$$

Si u est de carré sommable sur \mathbb{R}^+ (c'est à dire si $u \in L_2(\mathbb{R}^+)$, espace de Hilbert), on définit la norme

$$\|u\|_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\int_0^\infty \|u(t)\|_2^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

C'est la norme induite par le produit scalaire sur $L_2(\mathbb{R}^+)$

$$\langle u, v \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^\infty u(t) v(t) dt$$

A titre d'exemple, pour un vecteur sortie $y(t)$, $\|y\|_2^2$ représente son énergie totale. Pour tout $1 \leq p < +\infty$; $L_p(\mathbb{R}^+)$ représente l'ensemble des fonctions vectorielles $u(t)$ définie sur un intervalle I de \mathbb{R}^+ telle que

$$\|u\|_p \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\int_I \|u(t)\|_p^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Définition 2.2.1 *Un système en boucle ouverte est dit L_p -stable s'il existe une constante γ telle que pour chaque entrée $u(t) \in L_p$, la sortie $y(t) \in L_p$ satisfait*

$$\|y\|_p \leq \gamma_p \|u\|_p$$

Pour $p = \infty$, la L_∞ -stabilité est appelée stabilité entrée bornée-sortie bornée (en anglais, Bounded Input-Bounded Output)

2.2.2 Performance H_2

Pour une fonction de transfert $G(s)$ strictement propre dont $(A, B, C, 0)$ est représentation d'état la norme H_2 est définie par :

$$\|G(\cdot)\|_2 = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} (G^*(j\omega) G(j\omega) d\omega) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Le calcul algébrique de la norme H_2 utilise les grammiens d'observabilité et de commandabilité du système. On a

$$\begin{aligned} \|G\|_2^2 &= \int_0^\infty \text{tr} [g^T(t)g(t)] dt, \quad \text{où } g(t) = Ce^{At}B \\ &= \text{tr} \int_0^\infty (B^T e^{A^T t} C^T) (Ce^{At} B) dt \\ &= \text{tr} \left[B^T \underbrace{\int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt}_{W_0} B \right] \\ \|G\|_2^2 &= \int_0^\infty \text{tr} [g(t)g(t)^T] dt \\ &= \text{tr} \int_0^\infty (Ce^{At} B) (B^T e^{A^T t} C^T) dt \\ &= \text{tr} \left[C \underbrace{\int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} dt}_{W_c} C^T \right] \\ \|G\|_2^2 &= \text{tr}(B^T W_0 B) = \text{tr}(C W_c C^T) \end{aligned}$$

avec

$$W_0 = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$$

matrice symétrique semi-définie positive appelée grammien d'observabilité solution de l'équation de Lyapunov

$$A^T W_o + W_o A + C C^T = 0$$

et

$$W_c = \int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} dt$$

matrice symétrique semi définie positive appelée grammien de contrôlabilité solution de l'équation de Lyapunov

$$A W_c + W_c A^T + B B^T = 0$$

En effet, partons de

$$\frac{d}{dt} \left[e^{tA} B B^T e^{tA^T} \right] = A \cdot e^{tA} B B^T e^{tA^T} + e^{tA} B B^T e^{tA^T} \cdot A^T$$

En notant que pour un système stable

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{tA} = 0$$

et en intégrant sur $[0; \infty)$, on obtient directement les deux équations de Lyapunov. La norme H_2 d'un système linéaire stable représente l'énergie totale du vecteur sortie lorsque l'entrée du système est une impulsion de Dirac. Minimiser la norme H_2 d'un transfert entre une sortie z et une perturbation w permet donc de minimiser l'énergie totale de sortie z sous l'effet de w .

2.2.3 Performance H_∞

Egalement la norme H_∞ a été historiquement également été un moyen de prendre en compte des problèmes de robustesse. Il consiste de minimiser l'effet d'une perturbation w sur le comportement du système. On suppose w et son effet sur le système le vecteur "coût" z mesuré par la norme L_2 . Si on agit sur le système par un commande u , et on dispose d'une observation y . Il s'agit donc de synthétiser une loi de commande $u = K(s)y$,

qui minimise l'impact de w sur z . Cet impact dans le pire des cas est

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}$$

Cette norme correspond au plus grand transfert possible entre z et w , donc au gain maximal en énergie de système ; elle est donc définie comme suit,

$$\|G(\cdot)\|_\infty \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\text{Re}(s) > 0} \bar{\sigma}(G(s)) = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(G(j\omega)) = \sup \bar{\sigma}(G(j\omega))$$

où $\bar{\sigma}(G(s))$ désigne la plus grande valeur singulière de $G(s)$. Contrairement à la norme H_2 , il n'existe pas une méthode analytique pour calculer la norme H_∞ , d'une matrice de transfert. Pour évaluer la norme H_∞ d'une matrice de transfert, on choisit une valeur arbitraire de γ , on calcule les valeurs propres de la matrice hamiltonienne définie par :

$$H(\gamma) = \begin{pmatrix} A & \gamma^{-1}BB^T \\ -\gamma^{-1}CC^T & -A^T \end{pmatrix}$$

Si aucune n'est imaginaire pure, on diminue et on recommence, sinon on augmente et on recommence. On ne peut donc pas calculer la valeur de la norme H_∞ , mais seulement en donnant une borne supérieure, aussi proche que l'on veut $\|G\|_\infty < \gamma$. Le calcul de la norme H_∞ est donc plus complexe que celui de la norme H_2 , et il n'existe pas à notre connaissance de méthode de calcul directe de cette norme. On ne peut en fait tester si la norme H_∞ est inférieure ou non à un scalaire donné. Il est donc nécessaire d'approximer la valeur de cette norme en calculant dans un premier temps des bornes inférieures et supérieures, puis d'avoir recours à une approche itérative.

2.3 Formulation LMI

Le terme *IML* (**In**égalité **M**atricielle **L**inéaire), (*LMI* : **L**inear **M**atrix **I**nequality **en anglais**) est couramment employé dans la littérature liée à l'analyse ou à la commande des systèmes. Nous rappelons par quelques notions *IMLs*.

Historiquement le premier LMI est apparu autour 1890 quand Lyapunov montra que le système dynamique linéaire $\dot{x}(t) = Ax(t)$, est stable, c'est-à-dire les trajectoires convergent vers zéros, si seulement si il existe une solution vérifiant l'inégalité matricielle $A^T P + P A < 0$,

$P = P^T \succ 0$. L'importance de LMI est qu'elle peut être efficacement résolue en utilisant des méthodes de point intérieur qui ont commencé une révolution dans la programmation mathématique avec le travail de Karmarkar, publié en 1984.

Définition 2.3.1 On appelle *inégalité matricielle linéaire (IML)* le problème suivant : étant données les matrices réelles, carrées et symétriques M_k , $k = 1, \dots, m$, trouver les réels x_k , telles que

$$M(x) = M_0 + \sum_{k=1}^m x_k M_k \succ 0$$

Le succès des LMI vient du développement des méthodes dites du point intérieur qui permettent de résoudre de manière efficace ces problèmes. Il est également lié au fait que de nombreux problèmes, notamment de l'automatique, peuvent être formulés sous forme LMI.

Remarque 2.3.1 L'inégalité " \succ " signifie définie positive c'est à dire $x^T M(x) x > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, ce qui est équivalent à ce que la plus petite valeur propre de $M(x)$ est positive. (ou " \prec " signifie définie négative)

Remarque 2.3.2 Un système de plusieurs LMIs est une LMI

$$\begin{cases} P(x) \succ 0 \\ Q(x) \succ 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} P(x) & 0 \\ 0 & Q(x) \end{bmatrix} \succ 0 \quad (2.3.1)$$

Il s'agit d'un résultat préliminaire qui permettra, dans ce qui suit, de simplifier des expressions matricielles

Lemme 2.3.1 (Lemme de Schur). Soient les matrices $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $R = R^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$, on a

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \prec 0 \iff \begin{cases} Q \prec 0, \\ R - S^T Q^{-1} S \prec 0. \end{cases}$$

Preuve. La démonstration est très simple. en multipliant à droite par ■

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -R^{-1}S^T & I \end{bmatrix}$$

et à gauche par la transposée de cette dernière matrice. On obtient alors une condition équivalente :

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -R^{-1}S^T & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -R^{-1}S^T & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q - SR^{-1}S^T & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \prec 0$$

2.3.1 Technique LMI pour la norme H_∞

Lemme 2.3.2 (Lemme borné réel 1) *Soit un système $G(s)$ ayant une réalisation en espace d'état donnée par : 1.3.7 alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

- 1) $\|G(s)\|_\infty < \gamma$ et A est stable
- 2) Il existe une matrice X symétrique définie positive solution de l'inégalité matricielle

linéaire

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA + C^T C & XB + C^T D \\ B^T X + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.3.2)$$

Lemme 2.3.3 (Lemme borné réel 2) *Soit un système $G(s)$ ayant une réalisation en espace d'état donnée par : 1.3.7 alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

- 1) $\|G(s)\|_\infty < \gamma$ et A est stable
- 2) Il existe une matrice X définie positive symétrique solution de l'inégalité matricielle

linéaire

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.3.3)$$

En appliquant le complément de Schur à la relation ci-dessus avec la décomposition

$$Q = \begin{bmatrix} A^T X + XA & XB \\ B^T X & -\gamma I \end{bmatrix}; R = \gamma I; \quad S = \begin{bmatrix} C^T \\ D^T \end{bmatrix}$$

et en multipliant par γ on obtient la première forme du lemme borné réelle où la matrice de Lyapunov est X . Les deux formes sont bien équivalentes puisque $\gamma > 0$.

Chapitre 3

Application : Le problème de la commande H_∞

La théorie de la commande H_∞ est l'une de pierre angulaire de la théorie de commande moderne. Il a été développé pour résoudre de tels problèmes avec des implications pratiques très fortes, la technique moderne largement acceptée pour résoudre maintenant des problèmes de contrôle robuste et les réduit aux problèmes des inégalités matricielles linéaires (LMIs).

Dans ce dernier chapitre on traite le problème de la commande robuste H_∞ qui assure la stabilité et les performances désirées pour des systèmes linéaires, c'est-à-dire on cherche un correcteur stabilisant de telle sorte à minimiser l'effet des perturbations sur la commande.

3.1 Formulation du problème H_∞

La commande des systèmes dynamiques ne recouvre pas tout à fait les mêmes notions, suivant que l'on se place du point de vue du mathématicien ou de celui de l'automaticien. Le but poursuivi est le même : trouver une expression de vecteur de commande $u(t)$ à appliquer en entrée du système afin que ce dernier vérifie un ensemble de spécifications. Cela peut être par exemple un critère à minimiser (comme la norme H_∞ d'un transfert par exemple), on parle alors de commande optimale. Il peut s'agir simplement de trouver une commande qui stabilise le système.

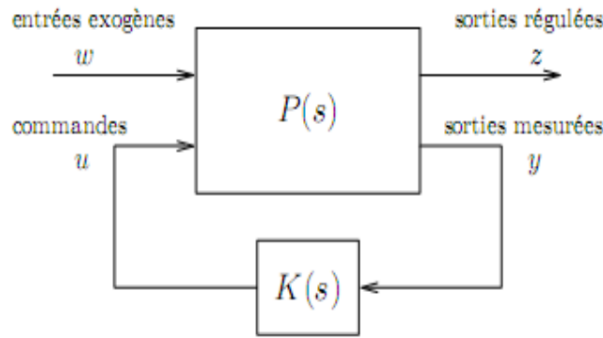


FIG. 1.1 - La forme standard.

Nous introduisons tout d'abord une formulation dite standard, une représentation qui donne un cadre général pour la synthèse de loi de commande.

La forme standard (FIG.1.1) permet donc une description de différentes configurations de boucles fermées à l'aide d'une représentation unique.

$u \in \mathbb{R}^{m_2}$: vecteur de commande par lequel on peut agir sur le comportement du système par rétro action.

$w \in \mathbb{R}^{m_1}$: vecteur d'entrée exogène pouvant comporter aussi bien les grandeurs de référence que des perturbations d'origine extérieure dont on souhaite minimiser l'effet.

$y \in \mathbb{R}^{p_2}$: vecteur de sortie mesuré permettant d'élaborer la commande.

$z \in \mathbb{R}^{p_1}$: vecteur de sortie à contrôler et caractérisant plus ou moins le bon fonctionnement du système.

3.1.1 Transformation linéaire fractionnaire (LFT)

La matrice de transfert $G(s)$, des vecteurs d'entrée w et u vers les vecteurs de sortie z et y , est partitionnée en quatre blocs, de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} Z(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = G(s) \begin{pmatrix} W(t) \\ U(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(t) \\ U(t) \end{pmatrix} \quad (3.1.1)$$

Cette représentation permet de calculer, avec les outils appropriés, le correcteur K de manière à optimiser, selon un critère donné, la fonction de transfert $T_{w \rightarrow z}$ entre les entrées

exogènes $w(t)$ et les sorties régulées $z(t)$. Par ailleurs, pour une loi de commande $u = K.y$ connue, $T_{w \rightarrow z}$ peut se calculer de la façon suivante :

L'interconnexion en boucle fermée du système et du correcteur, représentés par leurs matrices de transferts respectives G et K (supposées propres), constitue un nouveau système LTI. La matrice de transfert en boucle fermée $T_{w \rightarrow z}$ est :

$$T_{w \rightarrow z}(s) = F(G, K) = G_{11}(s) + G_{12}(s) K(x) (I - G_{22}(s) K(x))^{-1} G_{21}(s) \quad (3.1.2)$$

appelée **Transformation Linéaires Fractionnaire (LFT)** ou produit de **Redheffer** de G et K . Le système bouclé est dit bien posé si cette matrice de transfert existe et propre, ou de façon équivalente, dès que $I - G_{22}(\infty)K(\infty)$ est inversible.

3.1.2 Représentation d'état

La formulation LFT et l'approche par variable d'état offrent un cadre méthodologique riche pour la résolution de problème de commande, notamment dans le cas de la synthèse H_∞ . Nous reprenons donc ici les notations usuelles pour la forme standard exprimée en espace d'état.

Supposons que les sorties z et y sont liées aux entrées w et u par la réalisation

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ z(t) = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \\ y(t) = C_2x(t) + D_{21}w(t) + D_{22}u(t) \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Avec $x \in \mathbb{R}^n$, et la condition initiale $x(0) = 0$, de sorte que

$$P(s) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} (sI - A)^{-1} (B_1 \ B_2) + \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \quad (3.1.4)$$

De même, soit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_K x_K(t) + B_K y(t) \\ u(t) = C_K x_K(t) + D_K y(t) \end{cases} \quad (3.1.5)$$

Une réalisation de correcteur, de variable d'état $x_K \in \mathbb{R}^{n_K}$ (avec $x_K(0) = 0$), telle que :

$$K(s) = C_K (sI - A)^{-1} B_K + D_K \quad (3.1.6)$$

Afin d'alléger la formulation en espace d'état de la forme standard nous formulons l'hypothèse que le bloc P_{22} de la matrice de transfert P est strictement propre, ce qui revient à poser $D_{22} = 0$; (pas de transmission directe de u vers y). Cette condition est très souvent vérifiée dans les applications, et peut se poser sans perte de généralité dans les problèmes de synthèse de correcteur.

Pour $D_{22} = 0$, en éliminant u et \tilde{y} on obtient une réalisation en boucle fermée

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + B_2 D_K C_2) x(t) + B_2 C_K x_K(t) + (B_1 + B_2 B_K D_{21}) w(t) \\ \dot{x}_K(t) = B_K C_2 x(t) + A_K x_K(t) + B_K D_{21} w(t) \\ z(t) = (C_1 + D_{12} D_K C_2) x(t) + D_{12} C_K x_K(t) + (D_{11} + D_{12} D_K D_{21}) w(t) \end{cases} \quad (3.1.7)$$

de sorte que

$$T_{w \rightarrow z}(s) = C_c(K) (sI - A_c(K))^{-1} B_c(K) + D_c(K) \quad (3.1.8)$$

Avec

$$A_c(K) = \begin{pmatrix} A + B_2 D_K C_2 & B_2 C_K \\ B_K C_2 & A_K \end{pmatrix}; B_c(K) = \begin{pmatrix} B_1 + B_2 B_K D_{21} \\ B_K D_{21} \end{pmatrix}$$

$$C_c(K) = \begin{pmatrix} C_1 + D_{12} D_K C_2 & D_{12} C_K \end{pmatrix}; D_c(K) = (D_{11} + D_{12} D_K D_{21})$$

3.2 Résolution du problème standard H_∞

La résolution du problème H_∞ consiste à rechercher une loi de commande, qui stabilise la boucle fermée et minimise la norme H_∞ du transfert $T_{w \rightarrow z}(K)$:

$$\min_{K(s) \text{ stabilise}} \|T_{w \rightarrow z}(K)\|_\infty \quad (3.2.1)$$

Rappelons que la norme H_∞ est la norme induite sur l'espace des matrices de transfert stables par la norme L_2 (qui mesure l'énergie). L'objectif recherché est ainsi de réduire le plus

possible l'effet des entrées exogènes w sur les sorties régulées z . Le problème d'optimisation 3.2.1 n'est pas convexe, du fait que la transformation linéaire fractionnaire

$$K \longrightarrow T_{w \rightarrow z}(K) \text{ n'est pas linéaire.}$$

Il existe essentiellement deux approches pour résoudre le problème H_∞ . Elles sapuient sur des caractérisations de l'ensemble des correcteurs γ - sous optimaux, c'est-à-dire tels que $\|T_{w \rightarrow z}(K)\|_\infty < \gamma$, pour une performance $\gamma > 0$ fixée. La première s'appuie sur des équations algébriques de Riccati qui n'est pas mon objectif . La seconde utilise des inégalités matricielles linéaires.

Par la techniques en boucle fermée, retour d'état, nous discutons suivant des inégalités matricielles repose sur le lemme borné réel 2.3.2 , 2.3.3 l'existence d'un correcteur H_∞ stabilisant.

3.2.1 Retour d'état

On cherche une loi de commande par retour d'état ($K \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$), $u(t) = Kx(t)$ et assure *le système en boucle fermée est stable asymptotiquement.*

La représentation d'état de correcteur est définie par 3.1.5 telle que

$$\|T_{w \rightarrow z}(K)\|_\infty < \gamma \quad , \gamma > 0 \tag{3.2.2}$$

de plus en suppose que:

$H1$: la paire (A, B_2) est stabilisable et (C_2, A) est détectable

$H2$: $D_{22} = 0$, pour simplifier la présentation des résultats Le système en boucle fermée admet pour équation d'état

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + B_2K)x(t) + B_1w(t) \\ z(t) = (C_1 + D_{12}K)x(t) + D_{11}w(t) \end{cases} \tag{3.2.3}$$

Résolution par LMI

Ce système est stable si et seulement s'il existe un correcteur par retour d'état, s'il existe une matrice K et une matrice $X = X^T \succ 0$ telle que

$$\begin{pmatrix} (A + B_2K)^T X + X(A + B_2K) + (C_1 + D_{12}K)^T(C_1 + D_{12}K) & XB_1 + (C_1 + D_{12}K)^T D_{11} \\ B_1^T + D_{11}^T(C_1 + D_{12}K) & D_{11}^T D_{11} - \gamma^2 I \end{pmatrix} \prec 0 \quad (3.2.4)$$

Les variables d'optimisation sont X et K , cette inégalité n'étant pas affine en X et en K , elle ne définit pas une LMI. Par une série de transformation, on va montrer que l'on peut obtenir une contrainte LMI équivalente après un changement de variable adéquat, on peut réécrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} A^T X + XA + K^T B_2^T X + XB_2 K & XB_1 \\ B_1^T X & -\gamma^2 I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (C_1 + D_{12}K)^T \\ D_{11}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (C_1 + D_{12}K) & D_{11} \end{pmatrix} \prec 0$$

On applique le lemme de Shur, on obtient :

$$\begin{pmatrix} A^T X + XA + K^T B_2^T X + XB_2 K & XB_1 & (C_1 + D_{12}K)^T \\ B_1^T & -\gamma^2 I & D_{11}^T \\ C_1 + D_{12}K & D_{11} & -I \end{pmatrix} \prec 0 \quad (3.2.5)$$

dans cette inégalité il ne reste plus que $XB_2 K$ et $K^T B_2^T X$ comme terme bilinéaire. On applique la propriété suivante : $\forall T$ (inversible) $\in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M \prec 0 \iff T^T M T \prec 0$ avec

$$T = \begin{pmatrix} X^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$\begin{pmatrix} X^{-1} A^T + AX^{-1} + B_2 K X^{-1} + X^{-1} K^T B_2^T & B_1 & X^{-1} (C_1 + D_{12}K)^T \\ B_1^T & -\gamma^2 I & D_{11}^T \\ (C_1 + D_{12}K) X^{-1} & D_{11} & -I \end{pmatrix} \prec 0$$

En posons le changement de variable $Q = X^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y = KX^{-1} \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$, ce changement est bien posé car la fonction qui relie (X, K) , et (Q, Y) est une bijection :

on aura

$$\begin{pmatrix} QA^T + AQ + B_2Y + Y^TB_2^T & B_1 & QC_1^T + Y^TD_{12}^T \\ B_1^T & -\gamma^2I & D_{11}^T \\ C_1Q + D_{12}Y & D_{11} & -I \end{pmatrix} \prec 0 \quad (3.2.6)$$

Cette dernière inégalité est une LMI (affine en les variable Q et Y). D'où cette recherche d'une loi de commande $u(t) = Kx(t)$, assure la stabilité de la boucle fermée et une norme H_∞ entre w et z inférieure à γ s'obtient de la façon suivante :

- 1) Trouver Q et Y telle que l'inégalité précédente 3.2.6 soit satisfaite.
- 2) $X = Q^{-1}$, et $K = YX$

Notons que dans le cas où l'objectif est de chercher l'existence d'un correcteur H_∞ pour un donné, sans le calculer explicitement, pour cela, on dispose du résultat suivant.

Condition d'existence d'une solution au problème

Théorème 3.2.1 *Étant donné $\gamma > 0$, et sous les hypothèses H1, H2, le problème H_∞ , à une solution s'il existe des matrices symétriques R , et S vérifiant les conditions LMIs suivantes:*

$$\begin{pmatrix} W \begin{bmatrix} B_2^T & D_{12}^T \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} AR + RA^T & RC_1^T & B_1 \\ C_1R & -\gamma I & D_{21} \\ B_1^T & D_{21}^T & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W \begin{bmatrix} B_2^T & D_{12}^T \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \prec 0$$

$$\begin{pmatrix} W \begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A^TS + SA & SB_1 & C_1 \\ B_1^TS & -\gamma I & D_{21}^T \\ C_1^T & D_{21} & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W \begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \prec 0$$

$$\begin{pmatrix} R & I \\ I & S \end{pmatrix} \prec 0$$

où $W \begin{bmatrix} B_2^T & D_{12}^T \end{bmatrix}$ et $W \begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ sont des matrices dont les colonnes forment des bases des noyaux de $\begin{pmatrix} B_2^T & D_{12}^T \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} C_2 & D_{21} \end{pmatrix}$.

La détermination du correcteur se fait suivant les étapes suivantes :

1. On détermine d'abord les matrices R et S à partir des LMIs du théorème précédent
2. Soit r le rang de la matrice $I - RS$. Une décomposition en valeurs singulières permet de déterminer les matrices M et $N \in \mathbb{R}^{n \times r}$ telles que :

$$MN^T = I - RS$$

3. On détermine ensuite la matrice de Lyapunov

$$X = \begin{pmatrix} S & N \\ N^T & -M^+RN \end{pmatrix}$$

où M^+ est la pseudo-inverse de M

4. Il ne reste plus qu'à résoudre 3.2.5 avec X connu ; ce qui est une LMI en A_K, B_K, C_K et D_K .

3.2.2 Exemple numérique

Exemple 3.2.1 On considère le système LTI suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ z(t) = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \\ y(t) = C_2x(t) + D_{21}w(t) + D_{22}u(t) \end{cases}$$

telles que

$$A = 0 \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = 1$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & D_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & D_{12} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C_2 &= 1 & D_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} & D_{22} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = [0]x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}w + [1]u \\ z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}w + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u \\ y = [1]x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}w + [0]u \end{cases}$$

On a les deux hypothèses $H1$ et $H2$ vérifiées, et pour résoudre le problème 3.2.5 telle que

$$\begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} D_K & C_K \\ B_K & A_K \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & B_K \\ 0 & B_K \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ D_K \end{pmatrix} & D_K \end{bmatrix}$$

On a $\begin{bmatrix} B_2^T & D_{12}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1) & (0 & 1) \end{bmatrix}$, d'où l'on peut choisir

$$W \begin{bmatrix} B^T & D_{12}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

De la même manière, on a $\begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1) & (0 & 1) \end{bmatrix}$, et ainsi

$$W \begin{bmatrix} B^T & D_{12}^T \end{bmatrix} = W \begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$$

A est un scalaire donc R et S le sont aussi. Et la première inégalité du théorème est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (0) & R & 0 & 1 & 0 \\ R & -\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \prec 0$$

$$\iff \begin{bmatrix} \gamma & -R & -1 & 0 \\ -R & \gamma & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \succ 0$$

Par application de la technique du complément de Schur, cette inégalité est équivalente

à

$$\begin{cases} \gamma > 0 \\ \gamma^2 - 1 - R^2 > 0 \end{cases}$$

Comme $W \begin{bmatrix} B^T & D_{12}^T \end{bmatrix} = W \begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$, vient de manière analogue, en traitant la deuxième inégalité du théorème

$$\gamma^2 - 1 - S^2 > 0$$

Enfin, la dernière LMI du théorème correspond ici à :

$$\begin{bmatrix} R & 1 \\ 1 & S \end{bmatrix} \succeq 0 \iff \begin{cases} R \geq 0 \\ RS - 1 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} S \geq 0 \\ RS - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Donc les contraintes du théorème sur nous amènent à déduire que

$$\gamma^2 - 1 > \min_{R,S} (\max \{R^2, S^2\})$$

La dernière contrainte nous montre que ce minimum vaut 1 et atteint pour $R = S = 1$. Ceci conduit à

$$\gamma > \sqrt{2}$$

On note que dans le cas $RS = 1$ (cas optimal entre autre), il est impossible de calculer un correcteur d'ordre $n = 1$, car la condition de rang du théorème n'est pas satisfaite dans ce cas.

Pour $RS \neq 1$ (γ - sous optimal), on peut choisir

$$M = -N = \sqrt{RS - 1}$$

Ce qui conduit à

$$X = \begin{bmatrix} S & -\sqrt{RS - 1} \\ -\sqrt{RS - 1} & R \end{bmatrix}$$

Enfin, la résolution de la LMI du lemme borne réel permet d'obtenir K .

3.3 Conclusion

Le problème de robustesse est un sujet très important pour analyser le comportement et la stabilité des systèmes dynamiques face aux perturbations affectant le modèle du système à commander. Parmi les outils d'évaluation de performance la technique de la commande H_∞ , qui minimize l'effet de perturbation sur la commande.

Bibliographie

- [1] D. Arzelier , J. Bernussou, D. Henrion, et D. Peaucelle : Optimisation et théorie de la commande robuste , LAAs - CNRS Toulouse.
- [2] P. Apkarian : éléments de la théorie de la commande robuste, cours 1993.
- [3] Neila. Bedioui, Salh salhi and Mekki Ksouri : Robust stabilization Approach and H_∞ performance via static output feedback for a class of nonlinear systems, volume 2009, Article ID 486470; 20 pages.
- [4] Vincent Bompert : optimisation non lisse pour la commande des systèmes de l'aéronautique, thèse doctorat de l'université Paul sabatier - Toulouse *III*, 2007.
- [5] Jean - Micel Coron : quelques résultats sur la commandabilité et la stabilisation des systèmes non linéaires, Université Pierre et Marie Curie, laboratoire Jacques Louis - Lions.
- [6] Edouard. Laroche : commande robuste, université strasbourg, 2010-2011.
- [7] Jean , Michel. Coron : stabilisation des systèmes contrôlables et observables : annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série , tome 4, n^o1, 1995,p, 31– 59.
- [8] Emmanuel. Trélat : Contrôle Optimal : théorie et application, première édition:2005,Vuibert,collection "Mathématiques Concrètes", 246 page , université , paris-sud.

ملخص

الهدف من هذا البحث هو دراسة مسألة متانة الأنظمة الديناميكية ، التي يمكن تناولها بطريقتين : من حيث الاستقرار ومن حيث الأداء . فيما يتعلق بالإستقرار ، يظل النظام مستقرًا رغم التغيرات ، وفيما يتعلق بالأداء ، يحافظ النظام على الأداء المتوقع في مواجهة التغيرات .

الكلمات المفتاحية: التحكم القوي ، القدرة على التحكم ، الأنظمة الديناميكية .

Résumé

Le but de ce mémoire est la question de robustesse des systèmes dynamiques, qui peut être abordée de deux manière , pour la stabilité comme pour la performance. Pour la stabilité, le système demeure stable malgré les variations et pour la performance si le système maintient les performances prévues pour les variations.

Mots clés : contrôle robuste , contrôlabilité , systèmes dynamiques.

Abstract

The objective of this work is the robustness question of dynamic systems , which can be addressed in two ways , for stability and for performance . For stability , the system remains stable in the case of variations and for performance if the system maintains the expected performance in the face of variations.

Keywords: robuste control , controllability , dynamic systems.