



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



## MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière**: Mathématiques

**Option** : Equation aux dérivées partielles  
et applications

**Par**

Djafri Hanan

**Sujet**

# ***Problème de contact viscoélastique avec frottement et usure***

Soutenu le : 19/06/2018

**Devant le jury :**

Mr. A. Saadi	MCB. Univ de M'sila	Président
Mr.K. Chadi	MAA. Univ de M'sila	Rapporteur
Mr. N.Dechoucha	MAA. Univ de M'sila	Examineur

**Promotion : 2017 / 2018**

# *Remerciements*

Avant toute considération, je remercie le Grand Dieu le tout puissant qui , m'a aidé pour achever ce travail.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et mes remerciements les plus profonds à Monsieur **Chadi Khelifa**, qui m'a encadré, tout au long de ce mémoire, pour sa patience, son encouragement , sa disponibilité et du temps consacré à mon travail.

Je remercie également les membres du jury Monsieur **Saadi Abderachid**, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ce mémoire, et Monsieur **Dehoucha Noredine** d'avoir accepter de juger mon travail.

Merci également a tous les enseignants qui m'ont aidé pendant mon cursus, sans oublier leurs conseils précieux.

Comme je tiens à remercier vivement, mes très chers parents qui m'ont soutenu durant toute la durée de mes études, tous les membres de ma famille, petits et grands.

Enfin, mes remerciements aussi à tous les étudiants et étudiantes de ma promotion, a tous ceux qui m'aiment et que j'aime.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Notation</b>	<b>3</b>
<b>1 Requis et préliminaires</b>	<b>6</b>
1.1 FORMULATION DES PROBLEMES VISCOELASTIQUES . . . . .	6
1.1.1 lois de comportement . . . . .	7
1.1.2 loi de comportement viscoélastique . . . . .	8
1.1.3 Condition de contact avec frottement et usure . . . . .	8
1.1.4 Formulation mathématique des problèmes viscoélastiques . . . . .	9
1.2 RAPPELS D'ANALYSE FONCTIONNELS . . . . .	11
1.2.1 Espaces fonctionnels . . . . .	11
1.2.2 Espaces de Hilbert associés aux opérateurs divergence et déformation	11
1.2.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles . . . . .	14
1.2.4 Fonctions convexes . . . . .	15
1.2.5 Inéquations variationnelles . . . . .	16
1.2.6 Compléments divers . . . . .	17
1.2.7 Enoncés de certains théorèmes . . . . .	18
<b>2 Problème viscoélastique avec usure et sans frottement</b>	<b>20</b>
2.1 Formulation mécanique du problème . . . . .	21
2.2 Formulation variationnelle du problème . . . . .	23
2.3 Existence et unicité de la solution . . . . .	24

<b>3</b>	<b>Problème viscoélastique avec frottement et usure</b>	<b>28</b>
3.1	Formulation mécanique du problème . . . . .	29
3.2	Formulation variationnelle du problème . . . . .	31
3.3	L'existence et l'unicité de la solution . . . . .	33
	<b>Bibliographie</b>	<b>39</b>

# Introduction

Les problèmes de contact avec ou sans frottement, impliquant des corps déformables ou non, interviennent de multiples façons aussi bien dans le domaine industriel que dans la vie de tous les jours. Compte tenu de l'importance et de la multitude de ces phénomènes, de vastes études ont été entreprises, aussi la littérature concernant la mécanique du contact est vaste et aborde autant de sujets différents que sont la modélisation, l'analyse mathématique ou l'approximation numérique des problèmes de contact, voir les ouvrages [9, 14, 15, 21]. Il existe ainsi de multiples références, citons ici quelques classiques. Une des première référence, portant sur l'étude des problèmes de contact avec frottement via les inéquations variationnelles est sûrement [3]. En ce qui concerne l'analyse appliquée, le lecteur est invité à se reporter aux ouvrages [22]. Pour de plus amples détails sur l'analyse mathématique des équations aux dérivées partielles, il conviendra de consulter les ouvrages[11, 21]

L'objet de ce mémoire est l'étude de deux problèmes viscoélastiques . On considère loi de comportement:viscoélastique dans le cas non linéaire. Les conditions aux limites sont des conditions de contact avec usure sans frottement ou avec frottement,et nous modélisons l'usure avec une version de la loi d'Archard .

la loi de comportement viscoélastique non linéaire donnée par

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}(\varepsilon(u)),$$

où  $\sigma$  désigne le tenseur des contraintes,  $u$  représente le champ de déplacement,  $\varepsilon(u)$  désigne le tenseur des déformations linéarisées,  $\mathcal{A}$  représente un tenseur viscoélastique et  $\mathcal{G}$  représente un tenseur élastique. Cette loi de comportement a été utilisée récemment dans l'article [20].

Ce mémoire se compose de trois chapitres. An d'en faciliter la lecture, nous les avons rendus indépendants en rappelant brièvement les outils nécessaires leur compréhension. Le premier chapitre introduit des notions générales pour une bonne compréhension des problèmes traités dans la suite. Nous commençons par la description des lois de comportement, des conditions aux limites utilisés tout au long de ce mémoire et la formulation mathématique des différents problèmes. Nous rappelons ensuite les espaces fonctionnels et les principales notations utilisées. Ensuite nous passons en revue quelques résultats fondamentaux d'analyse concernant les équations variationnelles. En complément, nous rappelons les lemmes de Gronwall, et le théorème de point fixe de Banach ainsi que le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Dans le second chapitre, on étudie un problème de contact avec usure sans frottement dans un processus quasi-statique. La loi de comportement est viscoélastique non linéaire . On établit des résultats d'existence et d'unicité de la solution, les démonstrations sont basées sur des arguments d'équations variationnelles, et des arguments de théorème de Cauchy-Lipschitz.

Le troisième chapitre est consacré l'étude d'un problème de contact avec usure et frottement dans un processus quasi-statique. Le contact bilatéral avec frottement avec une base rigide et mobile se fait avec usure des surfaces de contact. Le problème se formule comme un système formé par une inéquation variationnelle elliptique par rapport au champ de déplacement. Des résultats d'existence et d'unicité de la solution ont été considérés en utilisant la théorie des inéquations elliptiques, et des arguments de point fixe.

# Notations

Si  $\Omega$  est un domaine de  $IR^d (d = 1, 2, 3)$ , on note par.

$\bar{\Omega}$	l'adhérence de $\Omega$ .
$\Gamma$	la frontière de $\Omega$ supposée régulière.
$\Gamma_i \ (i = 1, 2, 3)$	une partie mesurable de la frontière $\Gamma$ .
$mes \ \Gamma_1$	la mesure de Lebesgue ( $d = 1$ ) dimensionnelle de $\Gamma_1$ .
$\nu$	la normale unitaire sortante à $\Gamma$ .
$v_\nu, v_\tau$	les composantes normal et tangentiel du champ vectoriel $v$ défini sur $\bar{\Omega}$ .
$C(\bar{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continument différentiables sur $\bar{\Omega}$ .
$D(\bar{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans $\Omega$ .
$H$	l'espace $L^2(\Omega)^d$ .
$H_1$	l'espace $H_1(\Omega)^d$ .
$\mathcal{H}$	l'espace $L^2(\Omega)^{d \times d}$ .
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur $\Gamma$ .
$H_\Gamma$	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ .
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .
$H'_\Gamma$	l'espace dual de $H_\Gamma$ .
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles

si  $H$  est un espace de Hilbert réel et  $d \in \mathbb{N}^*$ , on utilise les notations suivantes

---

$H^d$	l'espace $\{x = (x_i) / x_i \in H\}$ ,
$H^{d \times d}$	l'espace $\{x_i = (x_{ij}) / x_{ij} \in H\}$ ,
$(\cdot, \cdot)_H$	le produit scalaire de $H$ ,
$\ \cdot\ _H$	la norme de $H$ ,
$H'$	l'espace dual de $H$ ,
$(\cdot, \cdot)_{H' \times H}$	le produit dualité entre $H' \times H$ ,
$\chi_k$	la fonction indicatrice de $k \subset H$ ,
$2^K$	l'ensemble de toutes les parties de $k$ ,
$x_n \rightarrow x$	la convergente forte de la suite $(x_n)$ vers l'élément $x$ dans $H$ ,
$x_n \rightharpoonup x$	la convergente faible de la suite $(x_n)$ vers l'élément $x$ dans $H$ ,
$\mathcal{L}(H)$	l'espace des applications linéaires et continues de $H$ dans $H$ .
Si de plus $[0; T]$ est un intervalle de temps $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$ on note par:	
$C([0; T], H)$	l'espace des fonctions continues de $[0; T]$ dans $H$ ,
$\ \cdot\ _{0, H}$	la norme de $C([0; T], H)$ ,
$C^1([0; T], H)$	l'espace des fonctions continument dérivable de $[0; T]$ dans $H$ ,
$\ \cdot\ _{1, H}$	la norme de $C^1([0; T], H)$ ,
$L^p(0, T, H)$	l'espace des fonctions mesurables de $[0; T]$ dans $H$ ,
$\ \cdot\ _{0, p, H}$	la norme de $L^p(0, T, H)$ , telles que $\int_0^T  f(t) _H^p dt < +\infty$ , avec les modifications usuelles si $p = +\infty$ ,
$W^{k, p}(0, T, H)$	l'espace de Sobolev de paramètres $k$ et $p$ .
$\ \cdot\ _{k, p, H}$	la norme de $W^{k, p}(0, T, H)$ .
Pour une fonctions $f$ , on note	
$dom f$	le domaine de $f$ ,
$\text{supp } f$	le support de $f$ ,
$\dot{f}, \ddot{f}$	les dérivés première et seconde de $f$ par rapport au temps,
$\partial_i f$	la dérivée partielle de $f$ par rapport à la $i$ ème composante $x_i$ ,
$\nabla f$	le gradient de $f$ ,
$\varepsilon(f)$	la partie symétrique du gradient de $f$ qui vaut $\frac{1}{2}(\nabla f + \nabla^T f)$ ,
$Div f$	la divergence de $f$ ,
$\partial f$	le sousdifférentiel (classique) de $f$ .
Si $H^1$ et $H^2$ sont deux espaces de Hilbert réels, on note par	

$\mathcal{L}(H^1, H^2)$  l'espace des applications linéaires et continues de  $H^1$  dans  $H^2$ .

$\|\cdot\|_{\mathcal{L}(H^1, H^2)}$  la norme de  $\mathcal{L}(H^1, H^2)$ .

# Chapitre 1

## Requis et préliminaires

Afin de faciliter la lecture de ce manuscrit, il nous est paru utile de présenter dans cette première partie le cadre physique et fonctionnel dans lequel nous allons travailler. Nous allons commencer par une description de la loi constitutive des matériaux viscoélastiques, ensuite nous présentons les différents types de conditions aux limites avec usure associée à une loi locale de frottement et un contact bilatéral avec frottement avec une base rigide et mobile où l'usure des surfaces de contact est prise en considération. Nous continuons avec la formulation mathématique des problèmes étudiés. A la fin de ce chapitre nous passons en revue quelques rappels d'analyse fonctionnelle non linéaire dans les espaces de Hilbert ainsi que les outils mathématiques que nous utilisons pour la réalisation de ce travail, notamment des résultats sur les espaces fonctionnels, les équations et les inéquations variationnelles elliptiques, les lemmes de Gronwall qui seront utiles dans les démonstrations et quelques théorèmes classiques qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.

### 1.1 FORMULATION DES PROBLEMES VISCOELASTIQUES

Dans cette partie on commence par décrire la loi de comportement viscoélastique, puis on s'intéresse aux différentes conditions aux limites de frottement ou usure. Au début, on considère la loi de contact avec usure et sans frottement puis la condition de contact avec frottement et usure. Finalement, on donne la formulation mathématique des problèmes qui

seront étudiés dans ce mémoire.

### 1.1.1 lois de comportement

L'objet de la mécanique des milieux continus est l'étude du mouvement des corps si les distances relatives entre ses points sont variables.

Le principe fondamentale de la mécanique est

$$\text{Div}\sigma + f = \rho\ddot{u}.$$

Cette équation s'appelle équation du mouvement, où  $\rho$  représente la densité de masse et  $\ddot{u}$  représente l'accélération. Si  $u$  varie lentement avec le temps alors  $\rho\ddot{u}$  sera négligeable ce qui nous conduit à l'équilibre

$$\text{Div}\sigma + f = 0,$$

où  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  représente la densité des volumiques sur  $\Omega$  et  $\text{Div}\sigma$  est la divergence du tenseur  $\sigma$ . L'équation équivaut à  $d$  relations scalaires, et mathématiquement cette équation ne suffit pas à modéliser le problème d'équilibre du corps car, par exemple les  $d$  composantes  $u_i$  du champ de déplacement ne figurent pas dans cette équation.

Du point de vue physique par ailleurs, il faut remarquer que l'équation exprime une loi universelle valable pour tous les matériaux. Si donc cette équation suffisait à déterminer tous les paramètres, cela signifierait que, soumis à des conditions identiques, les divers milieux continus auraient des comportements identiques. Ceci est naturellement absurde.

L'équation est donc insuffisante, à elle seule, à décrire l'équilibre des corps matériels, elle doit être complétée par d'autres relations qui caractérisent le comportement de chaque type de matériau et que l'on désigne sous le vocable général la loi de comportement qui est une relation reliant le tenseur de contrainte  $\sigma$ , le tenseur de déformation  $\varepsilon$  et leurs dérivées.

On présente dans ce mémoire, les lois de comportement de deux catégories de matériaux viscoélastiques.

### 1.1.2 loi de comportement viscoélastique

La loi de comportement d'un matériau viscoélastique est donnée par

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) \quad (I.1.1)$$

où  $\mathcal{A}$  est la fonction de viscosité non linéaire,  $\mathcal{G}$  représente le tenseur d'élasticité

### 1.1.3 Condition de contact avec frottement et usure

Le corps est supposé rentrer en contact avec une fondation rigide, se déplaçant à la vitesse  $v^*$ . Ce contact sera supposé toujours maintenu au cours de l'étude du phénomène. Décrivons à présent la condition de contact entre la partie de la frontière  $\Gamma_3$  du corps et la fondation rigide. Ici, la relation

$$u_\nu = -\omega \quad (I.1.2)$$

reste valide afin de représenter l'effet de l'usure sur la surface de contact  $\Gamma_3$ . Cette dernière égalité indique alors que la position de contact dépend de l'usure. Pour les fonctions assez régulières, on a

$$\dot{u}_\nu = -\dot{\omega} \quad (I.1.3)$$

L'usure étant toujours croissante, la fonction  $\dot{\omega}$  est positive et ainsi:

$$\dot{u}_\nu \leq 0 \quad (I.1.4)$$

Supposons de plus que pendant l'évolution du phénomène, la surface de contact  $\Gamma_3$  se réarrange de sorte que la vitesse tangentielle soit négligeable. La vitesse de glissement ne sera ainsi plus que la vitesse  $v^* = |v^*|$ , qui sera bien entendu supposée positive. La version simplifiée de la loi d'Archard peut ainsi être utilisée. Les relation (I.1.2) et (I.1.3) entraînent

$$\sigma_\nu = -\beta | \dot{u}_\nu | \quad \text{où} \quad \beta = \frac{1}{k_\omega | v^* |} \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times ]0, T[ \quad (I.1.5)$$

Le frottement suit la loi donnée par:

$$\sigma_\tau = -\lambda (\dot{u}_\nu - v^*) \quad \lambda \geq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times ]0, T[ \quad (I.1.6)$$

Compte tenu de l'interprétation du problème physique et ayant glissement et frottement, on a la relation:

$$|\sigma_\tau| = -\mu\sigma_\nu \text{ sur } \Gamma_3 \times ]0, T[ \quad (I.1.7)$$

Des précédentes relations, la condition de contact est donnée par:

$$\sigma_\nu = -\beta |\dot{u}_\nu|, \quad |\sigma_\tau| = -\mu\sigma_\nu \text{ sur } \Gamma_3 \times ]0, T[ \quad (I.1.8)$$

$$\sigma_\tau = -\lambda (\dot{u}_\tau - v^*), \quad \lambda \geq 0 \text{ sur } \Gamma_3 \times ]0, T[ \quad (I.1.9)$$

Dans le cas sans frottement, les mouvements tangentiels sont libres et la loi (I.1.8) devient

$$\sigma_\nu = -\beta |\dot{u}_\nu|, \quad |\sigma_\tau| = 0 \text{ sur } \Gamma_3 \times ]0, T[ \quad (I.1.10)$$

#### 1.1.4 Formulation mathématique des problèmes viscoélastiques

Nous considérons un corps viscoélastique qui occupe un domaine borné  $\Omega \subset IR^d$  ( $d = 2, 3$ ) avec une surface frontière régulière et de Lipschitz  $\Gamma$  partitionnée d'une part en trois parties mesurables  $\Gamma_1, \Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ , telles que  $mes \Gamma_1 > 0$ . On note par  $\nu$  la normale unitaire sortante à  $\Gamma$ . Le corps est encasté sur  $\Gamma_1$  dans une structure fixe. Sur  $\Gamma_2$  agissent des tractions surfaciques de densité  $f_2$  et dans  $\Omega$  agissent des forces volumiques de densité  $f_0$ . On suppose que  $f_2$  et  $f_0$  varient très lentement par rapport au temps.

Soit  $T > 0$  et  $[0, T]$  l'intervalle de temps en question. Nous étudions dans l'intervalle de temps  $[0, T]$  l'évolution du corps matériel due à l'application de forces de volume et des tractions de surface.

Nous notons par  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow IR^d$  le champ de déplacements,  $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S_d$  le champ des contraintes et  $\varepsilon(u)$  représente le tenseur des déformations. Le corps est fixé sur  $\Gamma_1 \times (0, T)$ , le champ des déplacements y est par conséquent nul. Une traction surfacique de densité  $f_2$  agit sur  $\Gamma_2 \times (0, T)$ . Le corps est éventuellement en contact avec une fondation rigide sur  $\Gamma_3 \times (0, T)$ . Les conditions sur la surface potentielle de contact  $\Gamma_3$  peuvent être diverses et donner lieu à une variété de modèles de contact avec frottement.

Notre objectif est l'étude de deux problèmes quasistatiques pour les matériaux viscoélastiques. Le premier problème est un problème de contact avec frottement et sans usure, le second est un problème de contact avec frottement et usure.

L'étude variationnelle de ces problèmes se fera dans le cadre physique défini ci-dessus. Sous ces hypothèses, en notant par  $u_0$  le déplacement initial nous arrivons à formuler les différents problèmes de la manière suivante:

**Problème  $P_1$ :** (matériau viscoélastique, condition de contact avec usure et sans frottement)

Trouver le champ de déplacement  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le champ du tenseur des contraintes  $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S_d$  tels que.

$$\begin{array}{ll}
 \sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\
 Div\sigma + f_0 = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\
 u = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \\
 \sigma\nu = f_2 & \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T) \\
 \sigma_\nu = -\beta|\dot{u}_\nu|, \sigma_\tau = 0 & \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \\
 u(0) = u_0 & \text{dans } \Omega
 \end{array}$$

**Problème  $P_2$ :** (matériau viscoélastique, condition de contact avec frottement et usure)

Trouver le champ de déplacement  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le champ du tenseur des contraintes  $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S_d$  tels que.

$$\begin{array}{ll}
 \sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\
 Div\sigma + f_0 = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\
 u = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \\
 \sigma\nu = f_2 & \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T) \\
 \left\{ \begin{array}{l} \sigma_\nu = -\beta|\dot{u}_\nu|, |\sigma_\tau| = -\mu\sigma_\tau \\ \sigma_\tau = -\lambda(\dot{u}_\tau - v^*) \text{ , } \lambda \geq 0 \end{array} \right. & \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \\
 u(0) = u_0 & \text{dans } \Omega
 \end{array}$$

Les problèmes que nous avons formulés ci-dessus seront étudiés aux deux chapitres de ce mémoire. Nous utilisons des méthodes différentes. Pour le problème  $P_1$  nous utilisons des

arguments de la théorie des opérateurs monotones et une version du théorème de Cauchy-Lipschitz. Pour le second problème nous utilisons des résultats classiques d'inéquations variationnelles elliptiques et des arguments de point fixe.

## 1.2 RAPPELS D'ANALYSE FONCTIONNELS

### 1.2.1 Espaces fonctionnels

On introduit dans cette section des espaces du type Sobolev utilisés en mécanique du contact, à savoir les espaces de Hilbert associés aux opérateurs divergence et déformation, ainsi que les espaces de fonctions à valeurs vectorielles. On présente en plus leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. On adopte ici la convention de l'indice muet et on précise aussi que toutes les notations ainsi que les espaces fonctionnels utilisés dans mémoire sont introduits dans cette section. En outre, dans la rédaction de cette section nous avons utilisé [5, 19]. Pour plus de détails sur les espaces de Sobolev et les espaces de distributions, on renvoie par exemple à [12].

### 1.2.2 Espaces de Hilbert associés aux opérateurs divergence et déformation

Nous désignons par  $S_d$  l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur  $IR^d$  ( $d = 2, 3$ ), "." et  $|\cdot|$  représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur  $IR^d$  et  $S^d$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} u.v &= u_i v_i, & |v| &= (v.v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d \\ \sigma.\tau &= \sigma_{ij} \tau_{ij}, & |\sigma| &= (\sigma.\sigma)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \sigma, \tau \in S^d \end{aligned}$$

Dans toute la suite,  $\Omega \subset IR^d$  est un domaine borné avec une surface frontière régulière de Lipschitz notée  $\Gamma$ .

Nous utilisons les espaces suivants.

$$\begin{aligned} H &= \{ u = (u_i) \ / \ u_i \in L^2(\Omega) \ / \ i = \overline{1, d} \} = L^2(\Omega)^d \\ \mathcal{H} &= \{ \sigma = (\sigma_{ij}) \ / \ \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega) \ / \ i, j = \overline{1, d} \} = L^2(\Omega)^{d \times d} \\ H_1 &= \{ u \in H \ / \ \varepsilon(u) \in \mathcal{H} \} = \{ u = (u_i) \ / \ u_i \in H^1(\Omega) \ / \ i = \overline{1, d} \} = H^1(\Omega)^d \\ \mathcal{H}_1 &= \{ \sigma \in \mathcal{H} \ / \ \sigma_{ij} \in H \} \end{aligned}$$

où  $\varepsilon : H_1 \rightarrow H$  et  $Div : H_1 \rightarrow H$  sont les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad Div \sigma = (\sigma_{i,j}) \quad 1 \leq i, j \leq d$$

où la virgule représente la dérivée par rapport à la variable spatiale, c'est à dire que

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Ces espaces respectifs sont des espaces de Hilbert réels munis de leurs produits scalaires suivants:

$$\begin{aligned} (u, v)_H &= \int_{\Omega} u_i v_i dx \quad \forall u, v \in H \\ (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H} \\ (u, v)_{H_1} &= (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in H_1 \\ (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}_1} &= (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} + (Div \sigma, Div \tau)_H \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H}_1 \end{aligned}$$

Les normes sur les espaces  $H$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $H_1$  et  $\mathcal{H}_1$  sont notées respectivement par  $|\cdot|_H$ ,  $|\cdot|_{\mathcal{H}}$ ,  $|\cdot|_{H_1}$  et  $|\cdot|_{\mathcal{H}_1}$ .

Comme la frontière  $\Gamma$  est Lipschitzienne, le vecteur normal extérieur  $\nu$  à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteurs  $u \in H_1$  nous utilisons la notation  $u$  pour désigner la trace  $\gamma_u$  de  $u$  sur  $\Gamma$  et nous notons par  $u_\nu$  et  $u_\tau$  les composantes normale et tangentielle de  $u$  sur la frontière données par

$$u_\nu = u \cdot \nu, \quad u_\tau = u - u_\nu \nu \tag{I.2.1}$$

Pour le champ des contraintes  $\sigma$  nous notons par  $\sigma_\nu$  et  $\sigma_\tau$  les composantes normale et tangentielle à la frontière, à savoir :

$$\sigma_\nu = (\sigma \nu) \cdot \nu, \quad \sigma_\tau = \sigma \nu - \sigma_\nu \nu \tag{I.2.2}$$

Nous rappelons que l'application de trace  $\gamma : H_1 \rightarrow L^2(\Gamma)^d$  est linéaire continue, mais n'est pas surjective. L'image de  $H_1$  par cette application est notée par  $H_\Gamma$ , ce sous-espace s'injecte continûment dans  $L^2(\Gamma)^d$ . Désignons par  $H'_\Gamma$  le dual de  $H_\Gamma$ , et  $(\cdot, \cdot)_{H'_\Gamma \times H_\Gamma}$  le produit de dualité entre  $H'_\Gamma$  et  $H_\Gamma$ .

Pour tout  $\sigma \in H_1$ , il existe un élément noté  $\sigma\nu \in H'_\Gamma$  tel que

$$(\sigma\nu, \gamma v)_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = (\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (Div \sigma, v)_H \quad \forall v \in H_1$$

En outre, si  $\sigma$  est assez régulier (par exemple  $C^1$ ), nous avons la formule

$$(\sigma\nu, \gamma v) = \int_{\Gamma} \sigma\nu \cdot v da \quad \forall v \in H_1$$

donc, si  $\sigma$  est assez régulier nous avons la formule suivante (*Formule de Green*):

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (Div \sigma, v)_H = \int_{\Gamma} \sigma\nu \cdot v da \quad \forall v \in H_1(\Omega) \quad (I.2.3)$$

Nous introduisons à présent un sous espace fermé de  $H_1$ , dont la définition est donnée ci-après

$$V = \left\{ v \in H_1(\Omega)^d \mid v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \right\}$$

puisque  $mes \Gamma_1 > 0$ , l'inégalité de Korn s'applique sur  $V$  : il existe une constante  $C_k > 0$  dépendant uniquement de  $\Omega$  et  $\Gamma_1$  telle que

$$|\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \geq C_k |v|_{H_1(\Omega)^d} \quad \forall v \in V \quad (I.2.4)$$

une preuve de cette inégalité peut être trouvée dans [13, p.79].

Sur  $V$  nous considérons le produit scalaire donné par

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V \quad (I.2.5)$$

et soit  $|\cdot|_V$  la norme associée, c'est à dire

$$|v|_V = |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V \quad (I.2.6)$$

par l'inégalité de korn, il vient que  $|\cdot|_{H_1}$  et  $|\cdot|_V$  sont des normes équivalentes sur  $V$  et ainsi  $(V, |\cdot|_V)$  est un espace de Hilbert.

En outre, par le théoème de trace, il existe constante  $C_0 > 0$  dépendant uniquement de  $\Omega, \Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  telle que

$$|v|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq C_0 |v|_V \quad \forall v \in V \quad (I.2.7)$$

### 1.2.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Soit  $H$  un espace de Hilbert. Soient  $k \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq p \leq +\infty$  et  $T > 0$ . On rappelle que  $W^{k,p}(0, T; H)$  est l'espace des distributions vectorielles  $u \in D'(0, T; H)$  telles que  $D_j u \in L^p(0, T; H)$  pour  $j = \overline{0, k}$ ,  $D_j$  désignant la dérivée d'ordre  $j$  au sens des distributions.

Si  $1 \leq p < +\infty$ ,  $W^{k,p}(0, T; H)$  est un espace de Banach réel pour la norme définie par

$$|u|_{W^{k,p}(0,T;H)} = \left( \sum_{j=0}^k \int_0^T |D_j u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\forall u \in W^{k,p}(0, T; H).$$

En particulier,  $W^{k,2}(0, T; H)$  est un espace de Hilbert réel pour le produit scalaire défini par

$$(u, v)_{W^{k,2}(0,T;H)} = \sum_{j=0}^k \int_0^T (D_j u(t), D_j v(t))_H dt$$

$$\forall u, v \in W^{k,2}(0, T; H)$$

D'autre part,  $W^{k,\infty}(0, T; H)$  est un espace de Banach pour la norme définie par

$$|u|_{W^{k,\infty}(0,T;H)} = \sum_{j=0}^k \sup_{[0,T]} |D_j(u(t))|_H$$

$$\forall u \in W^{k,\infty}(0, T; H)$$

Pour le cas particulier  $k = 0$ , on remarque que

$$W^{0,p}(0, T; H) = L^p(0, T; H)$$

et on note alors la norme  $L^p(0, T; H)$  par  $|\cdot|_{L^p(0,T;H)}$  pour tout  $1 \leq p \leq +\infty$ . On définit aussi, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , l'espace  $C^k(0, T; H)$  des fonctions  $u : [0, T] \rightarrow H$  telles que pour

tout  $j = \overline{0, k}$  les dérivées  $\frac{d^j u}{dt^j}$  existent et sont continues sur  $[0, T]$ . On note, en particulier,  $C^0(0, T; H)$  par  $C(0, T; H)$ . L'espace  $C^k(0, T; H)$  est un espace de Banach pour la norme définie par

$$\|u\|_{C^k(0, T; H)} = \sum_{j=0}^k \max_{t \in [0, T]} \left\| \frac{d^j u}{dt^j}(t) \right\|_H$$

$$\forall u \in C^k(0, T, H).$$

En particulier, les normes sur les espaces  $C(0, T; H)$  et  $C^1(0, T; H)$  sont données par

$$\|u\|_{C(0, T; H)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_H \quad \forall u \in C(0, T, H)$$

$$\|u\|_{C^1(0, T; H)} = \|u\|_{C(0, T; H)} + \|\dot{u}\|_{C(0, T; H)}$$

$$\forall u \in C^1(0, T; H)$$

On précise que le point au dessus d'une expression désigne la dérivée de cette expression par rapport au temps, représentée par la variable  $t \in [0, T]$ .

### 1.2.4 Fonctions convexes

On considère une fonction  $\varphi$  définie sur un espace vectoriel réel  $X$  et à valeurs dans  $]-\infty, +\infty]$ . Une telle fonction est dite propre si elle n'est pas identiquement égale à  $+\infty$ , c'est à dire s'il existe  $u_0 \in X$  tel que  $\varphi(u_0) < +\infty$ . La fonction  $\varphi$  est dite convexe si

$$\varphi(tu + (1-t)v) \leq t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v) \quad \forall u, v \in X, t \in ]0, 1[$$

.La fonction  $\varphi$  est dite strictement convexe si cette dernière inégalité est stricte pour tout  $u, v \in X$  tels que  $u \neq v$ . Pour toute fonction  $\varphi : X \rightarrow ]-\infty, +\infty]$ , on définit le domaine et l'épigraphe de  $\varphi$  respectivement par

$$\text{dom}(\varphi) = \{u \in X / \varphi(u) < +\infty\}$$

$$\text{epi } \varphi = \{(u, \alpha) \in X \times \mathbb{R} / \varphi(u) \leq \alpha\}.$$

Il est clair qu'on peut établir les résultats suivants:

- 1)  $\varphi$  est propre si et seulement  $\text{dom}(\varphi) \neq \emptyset$ ,
- 2) le domaine de  $\varphi$  est un ensemble convexe de  $X$  si  $\varphi$  est convexe.

3)  $\varphi$  est convexe si et seulement si  $\text{epi } \varphi$  est un ensemble convexe dans  $X \times \mathbb{R}$ .

Soit maintenant  $H$  un espace de Hilbert.

Une fonction  $\varphi : H \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  est dite semi-continue inférieurement (s.c.i.) en  $u_0 \in H$  si

$$\liminf_{u \rightarrow u_0} \varphi(u) \geq \varphi(u_0)$$

Une fonction est s.c.i. sur  $K \subset H$  si elle est s.c.i. en tout point de  $K$  et elle est dite s.c.i. si elle est s.c.i. sur tout  $H$ .

La propriété de semi-continuité peut être caractérisée de la façon suivante:

**Lemme.** Soit  $\varphi : H \rightarrow ]-\infty, +\infty]$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes

- 1)  $\varphi$  est semi-continue inférieurement.
- 2) L'épigraphe de  $\varphi$  est fermé dans  $H \times \mathbb{R}$ .

Puisque dans un espace vectoriel normé tout ensemble convexe est simultanément fermé pour la topologie forte et la topologie faible, le lemme précédent conduit au résultat suivant:

### 1.2.5 Inéquations variationnelles

Soient  $A : H \rightarrow H$  un opérateur non linéaire,  $\varphi : H \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  une fonction propre et  $f \in H$ . Un bon nombre de problèmes aux limites en équations aux dérivées partielles ainsi qu'en mécanique des milieux continus ont un rapport avec des problèmes mathématiques de la forme suivante:

Trouver  $u$  tel que  $u \in H$ ,

$$(Au, v - u)_H + \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)_H \quad \forall v \in H. \quad (I.2.8)$$

Le problème (I.2.8) est appelé inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce sur  $H$ .

On dit que l'opérateur  $A$  est:

- a) Fortement monotone s'il existe  $m > 0$  tel que

$$(Au - Av, u - v)_H \geq m \|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in H \quad (I.2.9)$$

b) De Lipschitz s'il existe  $L > 0$  tel que

$$\| Au - Av \|_H \leq L \| u - v \| \quad \forall u, v \in H. \quad (I.2.10)$$

On peut démontrer que si  $A$  est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz alors  $A$  est inversible et  $A^{-1}$  est fortement monotone et de Lipschitz.

En ce qui concerne le problème (I.2.8), on a le résultat d'existence et d'unicité suivant:

**Théorème.** Si  $A$  est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz et  $\varphi$  est une fonction propre, convexe et semi-continue inférieurement alors l'inéquation variationnelle elliptique (I.2.8) admet une solution unique.

Le théorème précédent représente un résultat d'existence et d'unicité pour les inéquations variationnelles de seconde espèce. La démonstration de ce théorème peut être trouvée par exemple dans [7].

### 1.2.6 Compléments divers

Nous rappelons ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de majoration, en particulier pour établir l'unicité de la solution. Nous citons certains théorèmes utilisés dans ce mémoire. Pour avoir plus de détails sur les rappels figurant dans cette section, nous proposons par exemple [22].

#### Lemmes de Gronwall

**Lemme.** Soient  $m, n \in C(0, T; \mathbb{R})$  telles que  $m(t) \geq 0$  et  $n(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, T]$  et soit  $a \geq 0$ . Si  $\varphi \in C(0, T; \mathbb{R})$  est une fonction telle que

$$\varphi(t) \leq a + \int_0^t m(s) ds + \int_0^t n(s) \varphi(s) ds \quad \forall t \in [0, T]$$

alors

$$\varphi(t) \leq \left( a + \int_0^t m(s) ds \right) \exp\left( \int_0^t n(s) ds \right) \quad \forall t \in [0, T]$$

Pour le cas particulier  $m = 0$ , ce lemme devient:

**Corollaire.** Soit  $n \in C(0, T; \mathbb{R})$  telle que  $n(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, T]$  et soit  $a \geq 0$ . Si  $\varphi \in C(0, T; \mathbb{R})$  est une fonction telle que

$$\varphi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\varphi(s)ds \quad \forall t \in [0, T]$$

alors

$$\varphi(t) \leq a \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right) \quad \forall t \in [0, T]$$

**Lemme.** Soient  $m, n \in C(0, T; \mathbb{R})$  telles que  $m(t) \geq 0$  et  $n(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, T]$  et soit  $a \geq 0$ . Si  $\varphi \in C(0, T; \mathbb{R})$  est une fonction telle que

$$\frac{1}{2}\varphi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t m(s)\varphi(s)ds + \int_0^t n(s)\varphi^2(s)ds \quad \forall t \in [0, T]$$

alors

$$|\varphi(t)| \leq \left(a + \int_0^t m(s)ds\right) \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right) \quad \forall t \in [0, T]$$

### 1.2.7 Énoncés de certains théorèmes

Nous considérons maintenant quelques théorèmes importants qui sont utilisés le long de ce mémoire.

**Définition.** On dit qu'une forme bilinéaire  $a(u, v) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  est

1) Continue s'il existe une constante  $C$  telle que

$$|a(u, v)| \leq C |u|_H |v|_H \quad \forall u, v \in H \tag{I.2.11}$$

2) Coercive s'il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que

$$a(v, v) \geq \alpha |v|_H^2 \quad \forall v \in H \tag{I.2.12}$$

**Théorème I.2.1.** (conséquence de *Minty – Browder*). Soit  $A : H \rightarrow H$  une application non linéaire, fortement monotone et de Lipschitz.

Alors pour tout  $f \in H$  il existe  $u \in H$  unique solution de l'équation  $Au = f$ .

**Théorème I.2.2.** (*Cauchy – Lipschitz*) : Soit  $X$  un espace de Banach et soit  $F : [0; T]X \rightarrow X$  une application continue et

telle que:

$$|F(t, x_1) - F(t, x_2)|_X < L|x_1 - x_2|$$

$$\forall x_1, x_2 \in X \text{ et } \forall t \in [0, T] \quad L \geq 0$$

Alors, pour tout  $x_0 \in X$ , il existe  $x \in C^1(0; T; X)$  unique tel que :

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)) \quad \forall t \in [0, T]$$

La démonstration de ce théorème peut trouver par exemple dans [11; page48]. Ce théorème sera utilisé au deuxième chapitre.

## Chapitre 2

# Problème viscoélastique avec usure et sans frottement

Le second chapitre est consacré à l'étude mathématique d'un problème de contact sans frottement pour des matériaux viscoélastiques, dans un processus quasi-statique. Le contact avec une base rigide est modélisé sans frottement avec condition d'usure.

Le problème se formule comme un système qui comporte une équation variationnelle par rapport au champ de déplacement.

Pour ce problème, des résultats d'existence et d'unicité de la solution ont été considérés en utilisant des arguments de la théorie des opérateurs monotones et une version du théorème de Cauchy-Lipschitz.

## 2.1 Formulation mécanique du problème

Trouver le champ de déplacement  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le champ du tenseur des contraintes  $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S_d$  tels que:

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (II.1.1)$$

$$\text{Div}\sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (II.1.2)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \quad (II.1.3)$$

$$\sigma\nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T) \quad (II.1.4)$$

$$\sigma_\nu = -\beta|\dot{u}_\nu|, \quad \sigma_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \quad (II.1.5)$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (II.1.6)$$

Ici, la relation (II.1.1) représente la loi de comportement d'un matériau viscoélastique, La relation (II.1.2) représente l'équations d'équilibres pour le champ de déplacement. Les relations (II.1.3)-(II.1.4) sont les conditions de déplacement-traction. (II.1.5) représente les conditions de contact aux limites avec usure et sans frottement. La relation (II.1.6) représente les conditions initiales du champ de déplacement  $u_0$ .

Pour obtenir la formulation variationnelle du problème (II.1.1)-(II.1.6), nous avons le sous-espace fermé de  $H^1(\Omega)^d$ :

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega)^d \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\}$$

Comme  $mes(\Gamma_1) > 0$ , l'inégalité de Korn est vérifiée, donc il existe une constante  $C_k > 0$ , qui dépend uniquement de  $\Omega$  et  $\Gamma_1$ , telle que:

$$|\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \geq C_k |v|_{H(\Omega)^d} \quad \forall v \in V.$$

La démonstration de l'inégalité de Korn est trouvée dans [7]. L'espace  $V$  muni du produit scalaire et de la norme associée donnée par:

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad |v|_V = |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V \quad (II.1.7)$$

Il vient que  $|\cdot|_{H^1(\Omega)^d}$  et  $|\cdot|_V$  sont des normes équivalentes sur  $V$  et par conséquent,  $(V, |\cdot|_V)$  est un espace de Hilbert réel.

Pour l'étude du problème (II.1.1)-(II.1.6), on considère les hypothèses suivantes.



Puis, la fonction de frottement  $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} \beta |u_\nu| v_\nu da, \quad \forall u, v \in V. \quad (II.1.13)$$

Notons que la condition (II.1.10) indique

$$f \in L^2(0, T; V). \quad (II.1.14)$$

## 2.2 Formulation variationnelle du problème

En utilisant des arguments standards nous obtenons la formulation variationnelle du problème mécanique (II.1.1)-(II.1.6)

En utilisant la formule de Green (I.2.3) on à

$$(\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (Div \sigma, v)_H = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v da, \quad \forall v \in V \quad (II.2.1)$$

on trouve

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx + \int_{\Omega} Div \sigma \cdot v dx = \int_{\Gamma_1} \sigma \nu \cdot v da + \int_{\Gamma_2} \sigma \nu \cdot v da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot v da, \quad \forall v \in V$$

De la définition de l'espace V avec (II.1.2) et (II.1.4) on obtient

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx - \int_{\Omega} f_0 \cdot v dx = \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot v da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot v da, \quad \forall v \in V$$

et puisque

$$\begin{aligned} \sigma \nu \cdot v &= \sigma_\nu \cdot v_\nu + \sigma_\tau \cdot v_\tau \\ &= -\beta |\dot{u}_\nu| \cdot v_\nu + 0 \cdot v_\tau \\ &= -\beta |\dot{u}_\nu| \cdot v_\nu \end{aligned}$$

il vient que

$$\int_{\Omega} \sigma(t) \cdot \varepsilon(v) dx + \int_{\Gamma_3} \beta |\dot{u}_\nu| \cdot v_\nu da = \int_{\Omega} f_0 \cdot v dx + \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot v da, \quad \forall v \in V$$

De(II.1.12) et (II.1.13) , nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx + j(\dot{u}, v) = (f(t), v)_V, \forall v \in V, \forall t \in [0, T].$$

**Problème**  $P_1V$ : Trouver le champ de déplacement  $u : [0, T] \longrightarrow V$ ,

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) \tag{II.2.2}$$

$$(\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(\dot{u}, v) = (f(t), v)_V, \forall v \in V, \forall t \in [0, T]. \tag{II.2.3}$$

$$u(0) = u_0 \tag{II.2.4}$$

On note que le problème variationnel  $PV$  est formulé en termes de champ de déplacement.

## 2.3 Existence et unicité de la solution

Le principal résultat dans cette section est le suivant:

**Théorème** II.3.1. Sous les hypothèses (II.1.8) – (II.1.14), le problème admet une solution unique  $(u, \sigma)$  ayant la régularité suivante

$$u \in W^{1,2}(0, T; V), \sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H}_1). \tag{II.3.1}$$

La fonction  $\{u, \sigma\}$  s'appellent la solution faible du problème  $PV_1$

la démonstration du théorème II.3.1 se fait en plusieurs étapes, elle est basée sur les arguments de la théorie des opérateurs monotones et le théorème de *Cauchy – Lipchitz*.. On suppose que les hypothèses du théorème II.3.1 sont vérifiées  $C$  est une constante positive qui dépend de  $\Omega, \Gamma_1$ , et  $\Gamma_3$  dont le valeur varie d'une place a l'autre.

**Lemme** II.3.1. Il existe une solution unique du problème  $PV_1$  qui satisfait la régularité (II.3.1).

**Démonstration.** En utilisant le théorème de représentation de Riez, nous définissons l'opérateur  $A : V \longrightarrow V$  et  $G : V \longrightarrow V$  par

$$(Au, v)_V = (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(u, v), \tag{II.3.2}$$

$$(Gu, v)_V = (\mathcal{G}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad (II.3.3)$$

Pour tous  $u, v \in V$ ,  $t \in [0, T]$ . Soient  $u_1, u_2 \in V$ . En utilisant (II.1.8) et la définition de  $j$  donnée par (II.1.13), nous -trouvons:

$$\begin{aligned} (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_V &= (\mathcal{A}\varepsilon(u_1) - \mathcal{A}\varepsilon(u_2), \varepsilon(u_1 - u_2))_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} (\beta u_{1\nu} - \beta u_{2\nu})(u_{1\nu} - u_{2\nu}) da \end{aligned}$$

D'après (II.1.7) et (II.1.8), nous obtenons

$$(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_V \geq m_{\mathcal{A}} |u_1 - u_2|_V^2 - C_0^2 |\beta|_{L^\infty(\Gamma_3)^d} |u_1 - u_2|^2$$

$$(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_V \geq (m_{\mathcal{A}} - C_0^2 |\beta|_{L^\infty(\Gamma_3)^d}) |u_1 - u_2|_V^2 \quad (II.3.4)$$

En utilisant (II.3.2) et (II.1.13), il vient que

$$\begin{aligned} (Au_1 - Au_2, v)_V &= (\mathcal{A}\varepsilon(u_1) - \mathcal{A}\varepsilon(u_2), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} (\beta(u_{1\nu}) - \beta(u_{2\nu})) v_\nu da \end{aligned}$$

Pour tout  $v \in V$ , par (II.1.8) et (I.2.7), nous déduisons que

$$|Au_1 - Au_2|_V \leq L_{\mathcal{A}} |u_1 - u_2|_V + C_0^2 |\beta| |u_1 - u_2|$$

$$|Au_1 - Au_2|_V \leq (L_{\mathcal{A}} + C_0^2 |\beta|) |u_1 - u_2|_V \quad (II.3.5)$$

Il résulte de (II.3.4) et (II.3.5) que, si  $|\beta|_{L^\infty(\Gamma_3)} \prec \beta_0$  où  $\beta_0$  est donné par  $\beta_0 = \frac{m_{\mathcal{A}}}{C_0^2}$ , alors l'opérateur

$A : V \longrightarrow V$  est un opérateur continu de Lipschitz fortement monotone sur  $V$ . Par conséquent, l'opérateur  $A$  est inversible et son inverse  $A^{-1}$  est aussi un opérateur continu de Lipschitz fortement monotone sur  $V$ .

De même, à partir de(II.1.7), (II.1.9) et (II.3.3), il s'ensuit que

$$(Gu_1 - Gu_2, v)_V = (\mathcal{G}\varepsilon(u_1) - \mathcal{G}\varepsilon(u_2), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}$$

$$|Gu_1 - Gu_2|_V \leq L_G |u_1 - u_2|_V \quad (II.3.6)$$

c'est-à-dire que l'opérateur  $G$  est un opérateur Lipschitz continu sur  $V$ .

Nous considérons maintenant l'opérateur  $F(t, \cdot) : V \rightarrow V$ , défini a.e. sur  $(0, T)$  par

$$F(t, v) = A^{-1}(f(t) - Gv) \quad \forall v \in V \quad (II.3.7)$$

En utilisant (II.1.14)et (II.3.6), il est simple de voir que  $F$  vérifie le théorème de *Cauchy – Lipschitz* .

Donc, en utilisant (II.1.11), (II.3.7) et le théorème(I.2.2)., on obtient l'existence et l'unicité d'un élément  $u \in W^{1,2}(0, T ; V)$  tel que

$$Au(t) + Gu(t) = f(t) \quad \forall t \in (0, T) \quad (II.3.8)$$

$$u(0) = u_0 \quad (II.3.9)$$

Considérons maintenant l'élément  $\sigma$  par (II.2.2). Il résulte de (II.3.2), (II.3.3), (II.3.8) et (II.3.9) que  $\{u, \sigma\}$  est une solution du problème  $P_1V$  .

En utilisant l' hypothèse (II.1.8), (II.1.9)et(II.2.2) , et les propriétés de tenseur de déformation , nous obtenons  $\sigma \in L^2(0, T ; \mathcal{H})$  , en prenant  $v = \varphi \in D(\Omega)^d$  en (II.2.3), en utilisant la définition (II.1.12)pour  $f(t)$ , nous trouvons

$$Div\sigma + f_0 = 0, \forall t \in (0, T) \quad (II.3.10)$$

Avec l'hypothèse de régularité (II.1.10) sur  $f_0$  et(II.3.10), nous déduisons

$Div\sigma \in L^2(0, T ; H)$  par conséquent,  $\sigma \in L^2(0, T ; \mathcal{H}_1)$  , pour  $t \in [0, T]$ .

Ce qui conclut l'existence de la partie du théorème.

**Unicité:**

Soit  $\{u_i, \sigma_i\}$  deux solutions du problème  $P_1V$  avec régularité (II.3.1),  $i = 1, 2$ .

à simplifier la notation, nous noterons indiquer explicitement la dépendance sur  $t$ . Il résulte de (II.2.2)et (II.2.3) que

$$(\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_1) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_2), \varepsilon(\dot{u}_1 - \dot{u}_2))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{G}\varepsilon(u_1) - \mathcal{G}\varepsilon(u_2), \varepsilon(\dot{u}_1 - \dot{u}_2))_{\mathcal{H}} \\ + j(\dot{u}_1, \dot{u}_1 - \dot{u}_2) - j(\dot{u}_2, \dot{u}_1 - \dot{u}_2) = (f - f, \dot{u}_1 - \dot{u}_2)_V$$

$$(\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_1) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_2), \varepsilon(\dot{u}_1 - \dot{u}_2))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{G}\varepsilon(u_1) - \mathcal{G}\varepsilon(u_2), \varepsilon(\dot{u}_1 - \dot{u}_2))_{\mathcal{H}} \\ + j(\dot{u}_1, \dot{u}_1 - \dot{u}_2) - j(\dot{u}_2, \dot{u}_1 - \dot{u}_2) = 0$$

De (II.1.14) et (II.1.13) nous trouvons

$$(\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_1) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_2), \varepsilon(\dot{u}_1 - \dot{u}_2))_{\mathcal{H}} \leq L_A |\dot{u}_1 - \dot{u}_2|_V \quad \forall t \in [0, T].$$

Et de (II.1.29), (II.1.19) et (II.1.20) nous obtenons

$$j(\dot{u}_1, \dot{u}_1 - \dot{u}_2) - j(\dot{u}_2, \dot{u}_1 - \dot{u}_2) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

$$(A\dot{u}_1 - A\dot{u}_2, \dot{u}_1 - \dot{u}_2)_V \leq (Gu_1 - Gu_2, u_1 - u_2)_V$$

$$L_A |\dot{u}_1 - \dot{u}_2|_V \leq L_G |u_1 - u_2|$$

on utilisant(II.3.5)et (II.2.6) , nous obtenons

$$|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)|_V \leq C |u_1(t) - u_2(t)| \\ \int_0^t |\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)|_V ds \leq C \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)| ds \quad \forall t \in [0, T]. \\ |u_1(t) - u_2(t)|_V \leq 0 + C \int_0^t 1. |u_1(s) - u_2(s)| ds \quad \forall t \in [0, T].$$

telle que  $C \geq 0$  .d'après lemme de Granwelle ,nous trouvons que

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V \leq 0. \exp(C \int_0^t 1 ds) \quad \forall t \in [0, T].$$

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V \leq 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (II.3.11)$$

Alors d'après(II.2.4)et(II.3.11) nous trouvons que  $u_1 = u_2$ ,ce qui implique que  $\sigma_1 = \sigma_2$ , donc l'unicité de la solution.

## Chapitre 3

# Problème viscoélastique avec frottement et usure

Le troisième chapitre du mémoire est consacré à l'étude mathématique d'un problème de contact avec frottement pour des matériaux viscoélastiques dans un processus quasi-statique.

Le contact bilatéral avec frottement avec une base rigide et mobile se fait avec usure des surfaces de contact. Le problème se formule comme un système formé par une inéquation variationnelle elliptique par rapport au champ de déplacement . Des résultats d'existence et d'unicité de la solution ont été considérés en utilisant la théorie des inéquations elliptiques, et des arguments de point fixe.

### 3.1 Formulation mécanique du problème

Trouver le champ de déplacement  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le champ des contraintes  $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow S_d$  tels que.

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (III.1.1)$$

$$Div\sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (III.1.2)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \quad (III.1.3)$$

$$\sigma\nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T) \quad (III.1.4)$$

$$\begin{cases} \sigma_\nu = -\beta |\dot{u}_\nu|, & |\sigma_\tau| = -\mu\sigma_\tau \\ \sigma_\tau = -\lambda (\dot{u}_\tau - v^*), & \lambda \geq 0 \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \quad (III.1.5)$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (III.1.6)$$

Ici, la relation (III.1.1) représente la loi de comportement d'un matériau viscoélastique, la relations(III.1.2) représente les équations d'équilibres pour le champ de déplacement. Les relations (III.1.3)-(III.1.4) sont les conditions de déplacement-traction. (II.1.5) représente les conditions de contact avec frottement et usure. La relation (III.1.6) représente les conditions initiales du champ de déplacement  $u_0$ .

Pour obtenir la formulation variationnelle du problème (III.1.1)-(III.1.6), nous avons le sous-espace fermé défini par:

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega)^d \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\},$$

Comme  $mes(\Gamma_1) > 0$ , l'inégalité de Korn est vérifiée, donc il existe une constante  $C_k > 0$ , qui dépend uniquement de  $\Omega$  et  $\Gamma_1$ , telle que:

$$|\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \geq C_k |v|_{H^1(\Omega)^d} \quad \forall v \in V.$$

La démonstration de l'inégalité de Korn peut être trouvée dans[4]. L'espace  $V$  muni du produit scalaire et de la norme associée donnée par:

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad |v|_V = |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V \quad (III.1.7)$$

Il vient que  $|\cdot|_{H^1(\Omega)^d}$  et  $|\cdot|_V$  sont des normes équivalentes sur  $V$  et par conséquent,  $(V, |\cdot|_V)$  est un espace de Hilbert réel.



Le champ de déplacement initial satisfait

$$u_0 \in V. \quad (III.1.13)$$

Ensuite, on note par  $f : [0, T] \rightarrow V$  la fonction définie par

$$(f(t), v)_V = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot v \, da \quad \forall v \in V, t \in [0, T]. \quad (III.1.14)$$

Puis, la fonction de frottement  $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} \beta |u_\nu| (\mu |v_\nu - v^*| + v_\nu) \, da, \quad \forall u, v \in V. \quad (III.1.15)$$

nous notons que les conditions (III.1.10) impliquent

$$f \in C(0, T; V). \quad (III.1.16)$$

## 3.2 Formulation variationnelle du problème

En utilisant la formule de Green (I.2.3) on à

$$(\sigma(t), \varepsilon(v - \dot{u}))_{\mathcal{H}} + (Div \sigma, v - \dot{u})_H = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}) \, da, \quad \forall v \in V$$

on trouve

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v - \dot{u}) \, dx + \int_{\Omega} Div \sigma \cdot (v - \dot{u}) \, dx = \int_{\Gamma_1} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}) \, da \\ & + \int_{\Gamma_2} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}) \, da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}) \, da, \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v - \dot{u}) \, dx + \int_{\Omega} Div \sigma \cdot (v - \dot{u}) \, dx = \int_{\Gamma_1} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}) \, da \\ & + \int_{\Gamma_2} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}) \, da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}) \, da, \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

De la définition de l'espace  $V$  avec (III.1.2) et (III.1.4), on obtient

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v - \dot{u}) \, dx - \int_{\Omega} f_0 \cdot (v - \dot{u}) \, dx = \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot (v - \dot{u}) \, da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}) \, da, \quad \forall v \in V$$

et puisque

$$\begin{aligned}
\sigma_\nu \cdot (v - \dot{u}) &= \sigma_\nu \cdot (v_\nu - \dot{u}_\nu) + \sigma_\tau \cdot (v_\tau - \dot{u}_\tau) \\
&= -\beta |\dot{u}_\nu| \cdot (v_\nu - \dot{u}_\nu) - |\sigma_\tau| |v_\tau - \dot{u}_\tau| \\
&= -\beta |\dot{u}_\nu| \cdot (v_\nu - \dot{u}_\nu) - \mu \beta |\dot{u}_\nu| |v_\tau + v^* - v^* - \dot{u}_\tau| \\
&= -\beta |\dot{u}_\nu| \cdot (v_\nu - \dot{u}_\nu) - \mu \beta |\dot{u}_\nu| |(v_\tau - v^*) - (\dot{u}_\tau - v^*)| \\
&\geq -\beta |\dot{u}_\nu| \cdot (v_\nu - \dot{u}_\nu) - \beta |\dot{u}_\nu| (\mu |(v_\tau - v^*)| - \mu |(\dot{u}_\tau - v^*)|) \\
&= \beta |\dot{u}_\nu| [(\mu |(\dot{u}_\tau - v^*)| + \dot{u}_\nu) - (\mu |(v_\tau - v^*) + v_\nu)]
\end{aligned}$$

il vient que

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon (v - \dot{u}) \, dx + \int_{\Gamma_3} \beta |\dot{u}_\nu| (\mu |(v_\tau - v^*) + v_\nu) \, da - \int_{\Gamma_3} \beta |\dot{u}_\nu| (\mu |(\dot{u}_\tau - v^*)| + \dot{u}_\nu) \\
&\geq \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot (v - \dot{u}) \, da + \int_{\Omega} f_0 \cdot (v - \dot{u}) \, dx, \forall v \in V
\end{aligned}$$

de (III.1.14) et (III.1.15), nous obtenons

$$(\sigma(t), \varepsilon (v - \dot{u}))_{\mathcal{H}} + j(\dot{u}, v) - j(\dot{u}, \dot{u}) \geq (f(t), v - \dot{u})_V, \forall v \in V$$

**Problème  $P_2V$ :** Trouver le champ de déplacement  $u : [0, T] \longrightarrow V$ , le champ de contrainte  $\sigma : [0, T] \longrightarrow \mathcal{H}$ , tels que:

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u) \tag{III.2.1}$$

$$(\sigma(t), \varepsilon (v - \dot{u}))_{\mathcal{H}} + j(\dot{u}, v) - j(\dot{u}, \dot{u}) \geq (f(t), v - \dot{u})_V, \forall v \in V, \forall t \in [0, T]. \tag{III.2.2}$$

$$u(0) = u_0 \tag{III.2.3}$$

Notons que le problème variationnel  $P_2V$  est formulé en termes de champ de déplacement, champ de contrainte.

### 3.3 L'existence et l'unicité de la solution

**Théorème III.3.1.** Nous supposons que les hypothèses (III.1.8)-(III.1.13) sont satisfaites. Alors, il existe une constante  $\beta_0$  qui est dépend uniquement sur  $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2$  et  $\mathcal{A}$  tels que, si

$$|\beta|_{L^\infty(\Gamma_3)} \left( |\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1 \right) < \beta_0, \quad (III.3.1)$$

Alors, il existe une solution unique  $\{u, \sigma\}$  du problème  $P_2V$ . De plus, la solution satisfait

$$u \in C^1(0, T ; V). \quad (III.3.2)$$

$$\sigma \in C(0, T ; \mathcal{H}_1). \quad (III.3.3)$$

Les fonctions  $u, \sigma$  qui satisfont (III.2.1)-(III.2.3) s'appellent une solution faible du problème de contact. Nous concluons que sous les hypothèses (III.1.8)-(III.1.13), le problème mécanique (III.1.1)-(III.1.6) a une solution faible unique de la régularité donnée par (III.3.2)-(III.3.3). La démonstration du théorème III.3.1 se fait en plusieurs étapes. Dans tout ce qui suit, nous supposons que les hypothèses du théorème III.3.1 sont satisfaites et nous considérons que  $C$  est une constante positive qui dépend de  $\Omega, \Gamma_1$  et  $\Gamma_3$  dont la valeur ne change d'une place à l'autre.

**Remarque 3.1.** On remarque que si  $\nu^*$  est assez grand, alors  $\beta = \frac{1}{k_1 \nu^*}$  est suffisamment petit et, par conséquent, la condition (III.3.1) pour la solution unique du problème  $PV$  est satisfaite. Nous concluons que le problème mécanique (III.1.1) – (III.1.6) a une faible solution unique si la vitesse tangentielle de la fondation est assez grande. De plus, la résolution du problème (III.1.1) – (III.1.6), nous permet de trouver la fonction de l'usure par intégration de (I.1.10) et on utilise la condition initiale  $w(0) = 0$  qui indique que le corps à l'instant initial n'est pas soumis à une usure.

Soient  $\eta \in C(0, T ; \mathcal{H})$  et  $g \in C(0, T ; V)$ .

Dans la première étape, nous considérons le problème variationnel suivant.

**Problème  $PV_{\eta g}$ .** Trouver le champ de déplacement  $u_{\eta g} : [0, T] \longrightarrow V$  et le champ de contrainte  $\sigma_{\eta g} : [0, T] \longrightarrow \mathcal{H}$  tels que

$$\sigma_{\eta g}(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(v_{\eta g}(t))) + \eta(t), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (III.3.4)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_{\eta g}(t), \varepsilon(v - v_{\eta g}(t)))_{\mathcal{H}} + j(g(t), v) - j(g(t), v_{\eta g}(t)) \\ \geq (f(t), v - v_{\eta g}(t))_V, \quad \forall v \in V, t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (III.3.5)$$

Dans l'étude du problème  $PV_{\eta g}$ , nous avons le résultat suivant.

**Lemme III.3.1.** Le problème  $PV_{\eta g}$  a une solution faible unique, telle que

$$v_{\eta g} \in C(0, T; V), \quad \sigma_{\eta g} \in C(0, T; \mathcal{H}_1). \quad (III.3.6)$$

**Démonstration.** Nous définissons l'opérateur  $A : V \longrightarrow V$  tel que

$$(Au, v)_V = (\mathcal{A}(\varepsilon(u)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad \forall u, v \in V. \quad (III.3.7)$$

Il résulte de (III.3.7) et (III.1.8) (a) que

$$|Au - Av|_V \leq L_{\mathcal{A}} |u - v|_V, \quad \forall u, v \in V, \quad (III.3.8)$$

Ce qui indique que  $A : V \longrightarrow V$  est de Lipschitz. maintenant, par (III.3.7) et (III.1.8) (b), nous trouvons

$$(Au - Av, u - v)_V \geq m_{\mathcal{A}} |u - v|_V^2, \quad \forall u, v \in V, \quad (III.3.9)$$

i.e., que  $A : V \longrightarrow V$  est un opérateur fortement monotone dans  $V$ . De plus, l'utilisation du théorème de représentation de Riesz, nous pouvons définir un élément  $F \in C(0, T; V)$  par

$$(F(t), v)_V = (f(t), v)_V - (\eta(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}.$$

Comme  $A$  est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz sur  $V$  et comme  $j$  une fonction convexe, proper et semi-continue, il vient du résultat classique sur les inégalités elliptiques qu'il existe une fonction unique  $v_{\eta g}(t) \in V$  qui satisfait

$$\begin{aligned} (Av_{\eta g}(t), v - v_{\eta g}(t))_{\mathcal{H}} + j(g(t), v) - j(g(t), v_{\eta g}(t)) \\ \geq (F(t), v - v_{\eta g}(t))_V, \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (III.3.10)$$

nous utilisons la relation (III.3.7), l'hypothèse (III.1.8) et les propriétés du tenseur de déformation pour obtenir  $\sigma_{\eta g}(t) \in \mathcal{H}$ . Prenant  $v = v_{\eta g}(t) \pm \psi$  et satisfait (III.2.5), où  $\psi \in D(\Omega)^d$  est arbitraire, et en utilisant la définition (III.1.14) pour  $f(t)$ , nous trouvons

$$\text{Div } \sigma_{\eta g}(t) + f_0(t) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (\text{III.3.11})$$

avec la régularité (III.2.3) sur  $f_0$ , nous remarquons que  $\text{Div } \sigma_{\eta g}(t) \in H$ . Par conséquent,  $\sigma_{\eta g}(t) \in \mathcal{H}$ . Soient  $t_1, t_2 \in [0, T]$  et nous notons  $\eta(t_i) = \eta_i$ ,  $f(t_i) = f_i$ ,  $g(t_i) = g_i$ ,  $v_{\eta g}(t_i) = v_i$  et  $\sigma_{\eta g}(t_i) = \sigma_i$  pour  $i = 1, 2$ . En utilisant la relation (III.3.5), nous trouvons

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\varepsilon(v_1) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2), \varepsilon(v_1 - v_2))_{\mathcal{H}} \\ & \leq (f_1 - f_2, v_1 - v_2)_V + (\eta_1 - \eta_2, \varepsilon(v_1 - v_2))_{\mathcal{H}} \\ & \quad + j(g_1, v_2) - j(g_1, v_1) + j(g_2, v_1) - j(g_2, v_2). \end{aligned} \quad (\text{III.3.12})$$

de la définition de la fonctionnelle  $j$  donnée par (III.1.15) Nous avons

$$\begin{aligned} & j(g_1, v_2) - j(g_1, v_1) + j(g_2, v_1) - j(g_2, v_2) \\ & = \int_{\Gamma_3} (\beta |g_{1\nu}| - \beta |g_{2\nu}|) (\mu |v_{2\tau} - v^*| - \mu |v_{1\tau} - v^*| + v_{2\nu} - v_{1\nu}) da. \end{aligned}$$

La relation (I.2.7), l'hypothèse (III.1.11) et (III.1.12) implique

$$\begin{aligned} & |j(g_1, v_2) - j(g_1, v_1) + j(g_2, v_1) - j(g_2, v_2)| \\ & \leq C_0^2 |\alpha|_{L^\infty(\Gamma_3)} \left( |\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1 \right) |g_1 - g_2|_V |v_1 - v_2|_V. \end{aligned} \quad (\text{III.3.13})$$

La relation (III.1.7), l'hypothèse (III.1.8) et l'inégalité (III.3.13) combinées avec (III.3.12) nous donne

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{A}} |v_1 - v_2|_V & \leq C_0^2 |\alpha|_{L^\infty(\Gamma_3)} \left( |\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1 \right) |g_1 - g_2|_V \\ & \quad + |f_1 - f_2|_V + |\eta_1 - \eta_2|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (\text{III.3.14})$$

l'inégalité (III.3.14) et la régularité des fonctions  $f$ ,  $g$  et  $\eta$  montrent que

$$v_{\eta g} \in C(0, T; V).$$

l'hypothèse (III.1.11) et la relation (III.3.4) nous obtenons

$$|\sigma_1 - \sigma_2|_{\mathcal{H}} \leq L_{\mathcal{A}} |v_1 - v_2|_V + |\eta_1 - \eta_2|_{\mathcal{H}}. \quad (\text{III.3.15})$$

et d'après (III.3.11) on a

$$\text{Div}\sigma_{\eta g}(t_i) + f_0(t_i) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (\text{III.3.16})$$

la régularité des fonctions  $\eta, v, f_0$  et des relations (III.3.15) – (III.3.16) montrent que

$$\sigma_{\eta g} \in C(0, T; \mathcal{H}_1).$$

Soient  $g \in C(0, T; V)$  et  $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$ . Nous considérons l'opérateur suivant

$$\Lambda_\eta : C(0, T; V) \rightarrow C(0, T; V)$$

définie par

$$\Lambda_\eta g = v_{\eta g}, \quad \forall g \in C(0, T; V). \quad (\text{III.3.17})$$

**Lemme III.3.2.** Supposons que les hypothèses (III.1.8) – (III.1.13) est satisfaites. Alors il existe un réel  $\beta_0 > 0$ , qui ne dépend que de  $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3$  et  $\mathcal{A}$  telle que si (III.3.1) est vérifiée, l'opérateur  $\Lambda_\eta$  a un point fixe unique  $g_\eta^* \in C(0, T; V)$ .

**Démonstration.** Soient  $g_1, g_2 \in C(0, T; V)$  et  $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$ . Nous utilisons la notation  $v_i = v_{\eta g_i}$  et  $\sigma_i = \sigma_{\eta g_i}$  pour  $i = 1, 2$ .

Nous utilisons les mêmes arguments que ceux utilisés dans (III.3.14) on trouve

$$\begin{aligned} & m_{\mathcal{A}} |v_1(t) - v_2(t)|_V \\ & \leq C_0^2 |\beta|_{L^\infty(\Gamma_3)} \left( |\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1 \right) |g_1(t) - g_2(t)|_V, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (\text{III.3.18})$$

de (III.3.17) et (III.3.18) nous obtenons

$$\begin{aligned} & |\Lambda_\eta g_1(t) - \Lambda_\eta g_2(t)|_V \\ & \leq \frac{C_0^2}{m_{\mathcal{A}}} |\beta|_{L^\infty(\Gamma_3)} \left( |\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1 \right) |g_1(t) - g_2(t)|_V, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (\text{III.3.19})$$

Soit

$$\beta_0 = \frac{m_{\mathcal{A}}}{C_0^2}$$

$\beta_0$  est une constante positive qui dépend de  $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3$  et de l'opérateur  $\mathcal{A}$ . Si (III.3.1) est satisfait, nous déduisons de (III.3.19) que l'opérateur  $\Lambda_\eta$  est une contraction. Du

théorème du point fixe de Banach, nous concluons que l'opérateur  $\Lambda_\eta$  a un point fixe unique  $g_\eta^* \in C(0, T; V)$ .

Nous désignons par

$$v_\eta = v_{\eta g_\eta^*}, \quad \sigma_\eta = \sigma_{\eta g_\eta^*}, \quad (III.3.20)$$

et soit  $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$  la fonction définie par

$$u_\eta(t) = \int_0^t v_\eta(s) ds + u_0, \quad \forall t \in [0, T] \quad (III.3.21)$$

En utilisant (III.3.9), nous trouvons que  $u_\eta$  satisfait la régularité exprimée dans (III.3.2).

Dans la deuxième étape, soit  $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$ , nous utilisons le champ de déplacement  $u_\eta$  obtenu dans (III.3.21).

Maintenant pour  $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$  considérons l'opérateur  $\Lambda(\eta) : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$

$$(\Lambda(\eta)(t), v)_V = \mathcal{G}(\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad (III.3.22)$$

Nous avons le résultat suivant

**Lemme III.3.3.** Pour  $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$ , la fonction  $\Lambda(\eta) : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$  est continue et un élément unique  $(\eta^*) \in C(0, T; \mathcal{H})$  tel que

$$\Lambda\eta^* = \eta^*.$$

**Démonstration.** Soient  $\eta \in C(0, T; \mathcal{H})$ . et  $t_1, t_2 \in [0, T]$ , en utilisant (III.1.9), nous avons

$$|\Lambda\eta(t_1) - \Lambda\eta(t_2)|_{\mathcal{H}} \leq |\mathcal{G}\varepsilon(u_\eta(t_1)) - \mathcal{G}\varepsilon(u_\eta(t_2))|_{\mathcal{H}}. \quad (III.3.23)$$

Après, en raison de la régularité de  $u_\eta$  exprimée dans (III.3.2), nous déduisons de (III.3.19) que  $\Lambda(\eta) \in C(0, T; V)$

Par conséquent  $\Lambda(\eta) \in C(0, T; \mathcal{H})$ . Soient  $\eta_1, \eta_2 \in C(0, T; \mathcal{H})$ .

Nous utilisons la notation  $g_{\eta_i}^* = g_i$ ,  $\sigma_{\eta_i} = \sigma_i$ ,  $u_{\eta_i} = u_i$ , et  $\dot{u}_{\eta_i} = v_{\eta_i} = v_i$ ,  $i = 1, 2$

De la même manière que pour établir (III.3.17) et (III.3.20) nous trouvons

$$|\Lambda(\eta_1)(t) - \Lambda(\eta_2)(t)|_{\mathcal{H}}^2 \leq C |u_1(t) - u_2(t)|_V^2 \quad (III.3.24)$$

soit

$$u_i(t) = \int_0^t v_i(s) ds + u_0.$$

Nous avons

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V^2 \leq C \int_0^t |v_1(s) - v_2(s)|_V^2 ds, \forall t \in [0, T]. \quad (III.3.25)$$

il vient de  $PV_{\eta g}$  pour  $\eta = \eta_i, i = 1, 2$  que

$$\sigma_i(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(v_i(t))) + \eta_i(t) \quad \forall t \in [0, T], \quad (III.3.26)$$

$$\begin{aligned} & (\sigma_i(t), \varepsilon(v - v_i(t)))_{\mathcal{H}} + j(g_i(t), v) - j(g_i(t), v_i(t)) \\ & \geq (f(t), v - v_i(t))_V, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (III.3.27)$$

En utilisant (III.3.27) nous trouvons que

$$\begin{aligned} & (\sigma_1(t) - \sigma_2(t), \varepsilon(v_1(t) - v_2(t)))_{\mathcal{H}} \leq j(g_1(t), v_2(t)) - j(g_1(t), v_1(t)) \\ & + j(g_2(t), v_1(t)) - j(g_2(t), v_2(t)) \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (III.3.28)$$

Nous utilisons (III.3.13) et fonction  $j$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} & (\sigma_1(t) - \sigma_2(t), \varepsilon(v_1(t) - v_2(t)))_{\mathcal{H}} \\ & \leq C_0^2 |\beta|_{L^\infty(\Gamma_3)} \left( |\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1 \right) |g_1(t) - g_2(t)|_V |v_1(t) - v_2(t)|_V. \end{aligned}$$

Nous utilisons la notation  $v_i = g_i$  pour  $i = 1, 2$ , nous trouvons que

$$\begin{aligned} & (\sigma_1(t) - \sigma_2(t), \varepsilon(v_1(t) - v_2(t)))_{\mathcal{H}} \\ & \leq C_0^2 |\beta|_{L^\infty(\Gamma_3)} \left( |\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1 \right) |v_1(t) - v_2(t)|_V^2 \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Nous utilisons dans (III.3.26),(III.1.8) et (III.1.9), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left( m_{\mathcal{A}} - C_0^2 |\alpha|_{L^\infty(\Gamma_3)} \left( |\mu|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1 \right) \right) |v_1(t) - v_2(t)|_V \\ & \leq |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_{\mathcal{H}} \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Nous utilisons les trois inégalités précédentes pour trouver

$$|v_1(t) - v_2(t)|_V^2 \leq C |\eta_1(t) - \eta_2(t)|_V^2. \quad (III.3.29)$$

Il vient de l'inégalité précédente, des estimations (III.3.24) et (III.3.29) que

$$|\Lambda(\eta_1)(t) - \Lambda(\eta_2)(t)|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \left( C \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_V^2 ds \right).$$

En réitérant cette inégalité  $m$  fois on obtient:

$$|\Lambda^m(\eta_1) - \Lambda^m(\eta_2)|_{C(0,T;\mathcal{H})}^2 \leq \frac{C^m T^m}{m!} |(\eta_1) - (\eta_2)|_{C(0,T;\mathcal{H})}^2 ds,$$

ainsi, pour  $m$  suffisant grand  $\Lambda^m$  est une contraction sur l'espace de Banach  $C(0, T; \mathcal{H})$ , donc  $\Lambda$  a un point fixe unique.

Maintenant on peut démontrer le Théorème III.3.1.

**Démonstration.** de l'existence. Soit  $\eta^* \in C(0, T; \mathcal{H})$  est un point fixe de  $\Lambda$  défini par (III.3.22) et  $(v, \sigma)$  sont des solutions du problèmes  $PV_{\eta g}$  pour  $\eta = \eta^*$  et  $g = g_{\eta^*}$  c'est-à-dire  $u = u_{\eta^*}$ . pour  $\eta = \eta^*$ . Les équations  $\Lambda^1(\eta^*)(t) = \eta^*$  se combinent avec (III.3.22) montrent que (III.2.1) – (III.2.2) sont satisfaites. Ensuite (III.2.3) et les régularités (III.3.2) – (III.3.3) résulte de lemme III.3.1.

Unicité. la solution unique est la conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur  $\Lambda$  défini par (III.3.22) et l'unicité de la solution des problème  $PV_{\eta g}$ .

# Bibliographie

- [1] A. Djabi and A Merouani, Bilateral Contact problem With Friction and Wear For an Electro Elastic-Viscoplastic Materials With Damage ,Taiwanese Journal of Mathematics Vol. 19, No. 4, pp. 1161-1182, August 2015
- [2] A. Djabi, A. Merouani and A. Aissaoui, A frictional contact problem with wear involving elastic-viscoplastic materials with damage and thermal effects, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations 2015, No. 27, 1–18;
- [3] G. Duvaut and J.L. Lions, Les Inéquations en Mécanique et en Physique, Springer-Verlag, Berlin (1976).
- [4] H. Brézis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et Application, Masson (1987).
- [5] H. Brézis, Equations et Inequations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, Ann. Inst. Fourier, 18 (1968), 115-175.
- [6] J.L. Liom. Frémond and B. Nedjar, Damage in concrete: The Unilateral Phenomenon, Nuclear Engng. Design, 156, (1995), 323-335.ns, Inéquations Variationnelles D'évolution, Actes, Congrès intern. Math., 1970. Tome 2, p. 841 à 851.
- [7] J.R. Fernandez, M. Shillor and M. Sofonea, Analysis and Numerical Simulations of A Dynamic Contact Problem with Adhesion, Math. Comput Modelling 37 (2003), 13171333.
- [8] K.Chadi ,Etude Mathématique de quelques problèmes aux limites en viscoélasticité avec mémoire longue,Mémoire de magister, Université Ferhat Abbas - Setif ,(2013).

- 
- [9] K.T. Andrews , M. Shillor, Dynamic Contact of the Membrane, *Adv. Math. Sci. Appl.* 13(2003), 343-356
- [10] L. Jianu, M. Shillor and M. Sofonea, A Viscoelastic Bilateral Frictionless Contact Problem with Adhesion, *Applic. Anal.* 80 (2001), 233-255.
- [11] L. Selmani, M. Selmani, Analysis of A Viscoelastic Contact Problem with Normal Damped Reponse and Damage, *Bulletin of the Belgian Mathematical Society- Simon Stevin.*
- [12] M. Dalah and M. Sofonea Antiplane frictional contact of electro-viscoelasticity cylinders, *EDJE*, Vol. 2007 (2007), No. 161, 1-14.
- [13] M. Frémond and B. Nedjar, Damage in concrete: The Unilateral Phenomenon, *Nuclear Engng. Design*, 156, (1995), 323-335.
- [14] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea, Quasistatic Nonlinear Viscoelastic Contact with Normal Compliance and Friction, *Journal of Elasticity*, 51(1998), 105-126.
- [15] M. Selmani, L. Selmani, A frictional contact problem with wear and damage for electroviscoelastic materials, *Sétif* 89-109. (2010).
- [16] N. Cristescu, Drawing through canonical dies, An Analysis Compared with Experiments, *Int. Mech. Sci.* Vol.18, No.1, (1976), 45-49.
- [17] N. Cristescu et I. Suliciu, *Viscoplasticity*, Martinus Nirjhoff, Editura Technica, Bucharest(1982).
- [18] N.Dechoucha ,Etude Mathématique d'un problèmes de contact en mécanique du contact,Mémoire de magister, Université Ferhat Abbas - Setif ,(2010).
- [19] R.S.Adams, *Sobolev espace*, Academic Press, London (1975).
- [20] T-V. Hoarau-Mante and M. Sofonea,Viscoelastic Sliding Contact Problems with Wear, *Mathematical and Computer Modelling* 36(2002), 861-874.

- [21] V. Barbu and Th Precupanu, Convexity and Optimisation in Banach Spaces, Sijthoff and Noordhoff (1978).
- [22] W. Han, K.L. Kuttler, M. Sillor and M. Sofonea, Elasti Beam in Adhésive Contact, Int. J. Solides Structures 39 (2002), 1145-1164.
- [23] W. Han, M. Shillor and M. Sofonea, Variational and Numerical Analysis of A Quasi-stic ViscoelasticProblemwithNormalCompliance, FrictionandDamage, J.Comput.Appl. Math(2001).
- [24] Z. Lerguet, Analyse de quelques problèmes de contact avec frottement et adhésion, Thèse de doctorat, Université de Sétif, (2008).

**Résumé:** Nous considérons un modèle mathématique pour décrire le contact glissant avec l'usure entre le corps viscoélastique et la base mobile rigide. Nous considérons à la fois les cas quasi-statique sans frottement et quasi-statique avec frottement, et nous modélisons l'usure avec une version de la loi d'Archard. Nous dérivons la formulation diverse du modèle et prouvons l'existence et les résultats d'unicité. Les démonstrations sont basées sur le théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas du premier modèle, et sur des arguments d'équations d'évolution avec des opérateurs monotones et sur le théorème des point fixe dans le cas du second modèle.

**Mots-Clés :** viscoélastique ,quasi-statique, usure, équation d'évolution, inéquation d'évolution, solution faible, point fixe.

**Abstract:** We consider a mathematical model to describe the sliding contact with wear between the viscoelastic body and the rigid mobile base. We consider both quasi-static and frictionless quasi-static cases, and we model wear with a version of Archard's law. We derive the diverse formulation of the model and prove the existence and the results of uniqueness. The proofs are based on Cauchy-Lipschitz's theorem in the case of the first model, and on evolution equation arguments with monotonic operators and on the fixed point theorem in the case of the second model.

**Key-Words:** viscoelastic, quasi-static, wear, evolution equation, evolution inequality, weak solution, fixed point.

**ملخص:** نعتبر نموذجاً رياضياً يصف الاتصال المنزلق بالتآكل بين الجسم اللزج والأساس المتحرك الصلب. نعتبر كلاً من الحالات شبه الساكنة دون إحتكاك وشبه الساكنة مع الإحتكاك، ونصمم التآكل باستخدام نسخة من قانون اتشارد

نعطي الصيغة التغيرية للنموذج ثم نثبت نتائج الوجود و الوحداية. تستند البراهين على نظرية كوشي -ليبشيتز في حالة النموذج الأول، وعلى حجج مرتبطة بالمؤثرات الرتبية ونظرية النقطة الصامدة في حالة النموذج الثاني.

**الكلمات المفتاحية:** فيسكومرن، شبه ساكن، تآكل، معادلة تفايرية، متباينة تفايرية، حل ضعيف، نقطة صامدة.