

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila



Faculté des Mathématiques et de l'Informatique Département de
Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option: Analyse Mathématiques et numérique

Thème

Résolution Numérique des Equations Intégrales de Volterra en utilisant les
Polynômes de Taylor

Présenté par:

Afaf DJILAT

Soutenu publiquement le: 19/06/2022.

Devant le jury composé de:

Président:	Mostefa NADIR	Prof	Université de M'sila
Encadreur:	Amina KHIRAN	M.C.A	Université de M'sila
Examineur:	Noui DJAIDJA	M.C.B	Université de M'sila

Année universitaire : 2022/2023

Remerciements

Avant tout, j'adresse mes remerciements en premier lieu, à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé, le courage et la patience qu'il m'a donné durant toutes ces longues années de formation. Je tiens à remercier sincèrement **Dr. Amina khirani** pour avoir accepté de diriger ce mémoire, pour les conseils qu'il m'a prodigué et pour les éorts qu'il a consenti tout au long de la réalisation de ce travail, qu'il trouve ici toute ma gratitude et ma reconnaissance. Mes remerciements vont également à tous les membres de jury les professeurs **Mostefa NADIR** et **Noui DJAIDJA** qui m'ont fait l'honneur de participer au jury de mon mémoire et examiner ce travail.

Merci

Dédicace

Je dédie ce travail à mon père qui m'a accompagné et soutenu durant ces années, ma mère qui m'a vraiment encouragé pour terminer ce travail, mon frère Mohamed et mes soeurs et descendantes de la famille .Je les remercie pour leurs encouragements durant toute la période d'élaboration de ce travail. A tous les membres de ma famille **Djilat** et **Belabbas** pour leurs soutien et leurs prières pour un succès durable Enfin, je remercie tous mes amis de près ou de loin, et les étudiants de ma promotion de spécialité

Analyse Mathématique et Numérique 2023

Merci

Table des matières

Introduction	ii
0.1 Introduction	ii
1 Rappels d'analyse fonctionnelle et numérique	1
1.1 Notions d'analyse fonctionnelle	1
1.1.1 Espace vectoriel normé	1
1.1.2 Espace de Banach	2
1.1.3 Espace de Hilbert	3
1.1.4 Opérateur linéaire	3
1.1.5 Opérateur borné	4
1.1.6 Compacité	4
1.1.7 Opérateur complètement continu	4
1.1.8 Théorème Arzela-Ascoli	5
1.1.9 Opérateurs intégraux	5
1.1.10 Théorèmes de point fixe	7
1.2 Notions d'analyse numérique	8
1.2.1 Polynômes de Taylor	8
1.2.2 Règle de leibnitz	9
1.2.3 Méthode de collocation :	10
2 Classifications et théorie des équations intégrales	11
2.1 Définition et classification des équations intégrales	11
2.2 Existence et unicité de solution des équations intégrales linéaires	13

2.2.1	Théorème de Riesz	13
2.2.2	Alternative de Fredholm	17
2.3	Résolution analytique des équations intégrales linéaires de Volterra	18
2.3.1	Méthode des solutions sous forme de série	18
2.4	Existence et unicité de solution de l'équation intégrale non linéaire de Volterra	20
2.5	Résolution analytique des équations intégrales non linéaires de Volterra . . .	21
2.5.1	Méthode des approximations successives	21
3	Résolution numérique des équations intégrales linéaires et non linéaire de Volterra par les polynômes de Taylor	24
3.1	Description de la méthode	24
3.1.1	Equations intégrales linéaires	25
3.1.2	Equations intégrales non linéaires	29
4	Exemples Numériques	33
4.1	Equations intégrales linéaire	33
4.2	Equations intégrales non linéaires	36
	Conclusion	40
	Bibliographie	40

0.1 Introduction

Les équations intégrales jouent un rôle important dans l'étude des problèmes mathématiques, physiques, ingénieries, comme dans les problèmes de la mécanique, les problèmes de diffusion, les théories potentiels, les problèmes de Dirichlet, électrostatiques, astrophysiques, et le problème de transport, aussi les équations différentielles fractionnaires, les système dynamiques

Les équations intégrales de Volterra apparaissent dans de nombreuses applications scientifiques comme la dynamique des populations, la propagation des épidémies et les dispositifs semi-conducteurs. Volterra a commencé travailler sur les équations intégrales en 1884, mais son étude sérieuse a commencé en 1896. Le nom équation intégrale a été donné par du Bois-Reymond en 1888. Cependant, le nom d'équation intégrale de Volterra a été inventé par Lalesco en 1908.

le but de ce mémoire est d'approximer la solution de l'équation intégrale de Volterra linéaire et non-linéaire en utilisant les polynômes de Taylor pour approximer la solution exacte de cette équation. Notre mémoire se compose de quatre chapitres

Le premier chapitre est une introduction à l'analyse fonctionnelle telles que les espaces de Hilbert et de Banach avec la théorie des opérateurs bornés, compacts et intégraux, Théorèmes de point fixe et Arzela-Ascoli et ses propriétés. où, on a utilisé les notions de base de l'analyse numérique, telles que les méthodes collocation et définition de Polynôme de Taylor et la règle de leibnitz

Le deuxième chapitre, présente une introduction et classification des équations intégrales linéaires et non-linéaires, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale linéaire et non- linéaire de Volterra, avec la résolution analytique d'équation intégrale linéaire et non-linéaire par la méthode des séries convergentes. et la méthode approximations successives.

Le troisième chapitre est destiné à l'étude de la résolution numérique des équations intégrales type Volterra (linéaire et non-linéaire) par une méthode de collocation en utilisant les polynômes de Taylor, la technique est basée sur premièrement, la différenciation des deux côtés de l'équation intégrale n fois puis en substituant la série de taylor à la fonction inconnue dans l'équation résultante. Ici, le système algébrique linéaire obtenu a été résolu

approximativement par un schéma de troncature approprié. dans cette étude, les idées de base des travaux précédents sont appliquées à la équation intégrale de volterra

Dans le quatrième chapitre on a donné des exemples pour illustrer la précision, l'efficacité de la méthode proposée

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle et numérique

Ce chapitre est consacré essentiellement à l'introduction de quelques notions fondamentales et certaines définitions et théorèmes que nous utiliserons dans les autres chapitres.

1.1 Notions d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Espace vectoriel normé

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on appelle norme sur l'espace E toute application notée $\|\cdot\|$ définie sur E à valeurs dans \mathbb{R}_+

vérifiant pour tout x, y dans E et α dans \mathbb{K}

1. $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (homogénéité).
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Soit $C([a, b], \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles.

Pour tout $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, on pose

$$\|f\|_1 = \int_a^b f(x)dx \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Les applications $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $C([a, b], \mathbb{R})$.

1.1.2 Espace de Banach

Définition 1.1.1 (Suite de Cauchy). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Une suite (x_n) est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \implies \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

Définition 1.1.2 (Espace complet). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit que E est un espace complet si toute suite de Cauchy dans E converge.

Définition 1.1.3 Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach. $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Définition 1.1.4 (Produit scalaire) Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} , un produit scalaire sur E est une application de $E \times E$ dans \mathbb{R} , notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$ possédant les propriétés suivantes :

pour tout x, y, z dans E et α, β dans \mathbb{R} ,

1. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$.
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
3. $\langle x, x \rangle \geq 0$.
4. $\langle x, x \rangle = 0$ implique $x = 0$.

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace euclidien ou un espace préhilbertien.

Un produit scalaire sur E définit une norme sur E par la formule suivante

$$\|x\|_E = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Base hilbertiennes

Définition 1.1.5 Une partie G de H est dite dense dans H si :

$$\forall h \in H, \forall \varepsilon > 0, \exists g \in G; \|g - h\| < \varepsilon$$

Ou de manière équivalente si tout h de H est limite d'une suite (g_n) d'éléments de G telle que $\|g_n - h\| \rightarrow 0$

Définition 1.1.6 Soit H un espace de Hilbert et $f = (e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs.

On dit que f est une base de H (ou base hilbertienne) si :

1. f est une famille orthonormée de H , c'est-à-dire $\forall (i, j) \in I^2: \begin{cases} \langle e_i, e_j \rangle = 0, \text{ si } i \neq j \\ \langle e_i, e_j \rangle = 1, \text{ si } i = j \end{cases}$

2. La famille f est de plus complète ou total, c'est-à-dire : $H = \text{vect}(e_i) \Leftrightarrow$ l'ensemble

des combinaisons linéaires finies des éléments de f est dense dans H

1.1.3 Espace de Hilbert

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire.

Définition 1.1.7 (Orthogonalité). Si $g, h \in E$, on dit que g et h sont orthogonaux, et on écrit $g \perp h$ si $\langle g, h \rangle = 0$.

Si M une partie de E , l'orthogonal de M est défini par

$$M^\perp = \{h \in E \text{ tq } \forall g \in M, h \perp g\}.$$

1.1.4 Opérateur linéaire

Définition 1.1.8 Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Un opérateur linéaire de

E dans F est une application A définie sur E , à valeurs dans F et vérifiant

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : A(x + y) = A(x) + A(y) \text{ et } A(\lambda x) = \lambda A(x)$$

1.1.5 Opérateur borné

Une application linéaire A entre les espaces vectoriels normés E et F est appelée opérateur borné s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que

$$\|A(x)\|_F \leq C \|x\|_E, \forall x \in E$$

en utilisant la linéarité de l'opérateur A , il est facile de voir que A est borné si et seulement si

$$\|A\| = \sup_{x \leq 1} \|A(x)\| < \infty$$

$\|A\|$ est appelé la norme de A

1.1.6 Compacité

Définition 1.1.9 Soit U un ensemble d'un espace normé X , U est dit compact si de tout recouvrement de U par des ouverts de U on peut extraire un sous-recouvrement fini i.e.

$$\forall V_j, j \in J \text{ (ouverts); } U \subset \bigcup_{j \in J} V_j, \exists V_{j(k)}, j(k) = 1, 2, \dots, n \text{ tel que } U \subset \bigcup_{k=1}^n V_{j(k)}.$$

Définition 1.1.10 Un sous ensemble d'un espace normé est dit relativement compact si son adhérence est compacte.

Définition 1.1.11 Soit T un opérateur d'un espace normé X dans un espace normé Y , on dit que T est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné dans X à un ensemble relativement compact dans Y

1.1.7 Opérateur complètement continu

Définition 1.1.12 L'opérateur T est dit complètement continu, si il est continu et compact.

Définition 1.1.13 L'opérateur T est compact, si et seulement si pour toute suite bornée $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$ la suite $\{Tx_n\}_{n \geq 1}$ admet une sous suite convergente dans Y . Dans le cas particulier où $X = C([a; b])$, le théorème suivant d'Arzela-Ascoli est généralement utilisé pour prouver la compacité de T .

1.1.8 Théorème Arzela-Ascoli

Une condition nécessaire et suffisante qu'une famille des fonctions continues définies sur l'intervalle compact $[a, b]$, est compacte dans $C([a, b])$ est que cette famille est uniformément bornée et équicontinue.

1.1.9 Opérateurs intégraux

Les opérateurs intégraux constituent des objets fondamentaux en analyse fonctionnelle, où ils permettent notamment de transformer les équations fonctionnelles en une version plus simple afin de les résoudre facilement. Les opérateurs intégraux interviennent dans plusieurs domaines tels que les équations aux dérivées partielles, les phénomènes de diffusion et les équations intégrales.

Définition 1.1.14 *On appelle opérateur intégral tout opérateur linéaire A défini sur un espace normé E à valeurs dans un espace normé F donné sous la forme*

$$A\varphi(x) = \int_{G_2} k(x, t)\varphi(y)dy \quad x \in G_1,$$

où $k(x, y)$ une fonction mesurable définie sur un ensemble mesuré $G_1 \times G_2$ et $\varphi(y)$ est une fonction mesurable définie sur G_2 .

La fonction mesurable $k(x, y)$ est dite noyau de l'opérateur intégral A .

Définition 1.1.15 *soit $k : [a, b]^2 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue alors l'opérateur volterra non linéaire associé à k , $A : C([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R}^n)$ donné par*

$$A(\varphi(x)) = \int_a^x k(x, t, \varphi(t))dt, x \in [a, b];$$

est complètement continue.

Preuve. Pour la preuve voir [4] ■

Normes des opérateurs intégraux

Soit A un opérateur intégral défini sur $L_p(G_1)$, alors pour tout p et q conjugués ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) avec ($1 \leq p, q \leq \infty$), la norme de l'opérateur A est donnée par

$$\|A\|_p = \begin{cases} \left(\int_{G_1} \left(\int_{G_2} |k(x, y)|^q \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ pour } 1 < p < \infty \\ \int_{G_1} \operatorname{esssup}_y |k(x, y)| dx, \text{ pour } p = 1 \\ \operatorname{esssup}_x \int_{G_2} |k(x, y)| dy, \text{ pour } p = \infty \end{cases}$$

où $k(x, y)$ une fonction mesurable définie sur un ensemble mesuré $G_1 \times G_2$.

Théorème 1.1.1 *L'opérateur intégral A de $C([a, b])$ dans $C([a, b])$ à noyau continu est un opérateur compact.*

Démonstration. Soit E un ensemble borné de $C([a, b])$ alors, on a

$$\|\varphi\| \leq M, \text{ pour tout } \varphi \in E, \text{ de plus } |A\varphi(x)| \leq M |b - a| \max_{x, t \in [a, b]} |k(x, t)|, \forall x \in [a, b] \text{ et } \forall \varphi \in E.$$

D'où l'ensemble $A(E)$ uniformément borné.

D'autre part, le noyau K est uniformément continu sur le compact $[a, b] \times [a, b]$, d'où pour tout x, t, z de $[a, b]$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que } |x - t| < \delta \implies |k(x, z) - k(t, z)| < \frac{\varepsilon}{M |b - a|}$$

D'où,

$$|A\varphi(x) - A\varphi(t)| < \varepsilon, \text{ pour tout } \varphi \in E \text{ et } x, t \in [a, b] \text{ avec } |x - t| < \delta$$

Ceci exprime que l'ensemble $A(E)$ est équicontinu, d'où $A(E)$ est relativement compact par le théorème d'Arzela-Ascoli, alors A est compact. ■

Théorème 1.1.2 *Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.*

En effet, si on désigne par

$$B(0, 1) = \{x \in X, \|x\| \leq 1\}$$

alors, $T(B(0, 1))$ est relativement compact d'où

$$\|Tx\| \leq C, \forall x \in B(0, 1)$$

Alors T est borné.

Réciproquement, l'opérateur identité I de X dans X est borné, mais il n'est pas compact

car $I(B(0, 1)) = B(0, 1)$, n'est pas relativement compacte sauf si X est de dimension finie.

Théorème 1.1.3 *Le produit AB de deux opérateurs bornés A et B est compact si l'un des opérateurs A ou B est compact.*

Preuve. Soit $\{\varphi_n\}$ une suite bornée de E , alors si B est un opérateur borné la suite $B\varphi_n(x)$ est aussi bornée, et de la compacité de l'opérateur A il existe une sous suite de $A(B\varphi_n(x))$ qui converge, ce qui implique que AB est compact.

D'autre part si B est compact, on peut extraire de la suite $B\varphi_n(x)$ une sous suite convergente $B\varphi_{n(k)}(x)$, et de la continuité de l'opérateur A car il est borné la suite $A(B\varphi_{n(k)}(x))$ converge, ce qui implique que AB est compact. ■

1.1.10 Théorèmes de point fixe

Définition 1.1.16 *Soit T un opérateur défini dans un espace de Banach E dans lui-même, alors pour tout $\varphi \in E$, tel que $\varphi = T(\varphi)$, s'appelle un point fixe de l'opérateur T .*

Définition 1.1.17 *Soit T un opérateur d'un espace de Banach E dans lui-même, T est une contraction (ou application contractante), s'il existe une constante $0 < k < 1$ telle que*

$$\|T\varphi_1 - T\varphi_2\| \leq k \|\varphi_1 - \varphi_2\|, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in E$$

Théorème 1.1.4 *Soit E un espace de Banach et F un sous-ensemble fermé de E . Soit f une application contractante de F dans E , alors il existe un unique $z \in F$, tel que*

$$f(z) = z$$

Preuve. Pour la preuve voir [2] ■

1.2 Notions d'analyse numérique

1.2.1 Polynômes de Taylor

Le polynôme de Taylor est une approximation d'une fonction à l'aide d'un polynôme. Il est obtenu en utilisant la série de Taylor, qui est une expansion en série d'une fonction au voisinage d'un point donné.

Formellement, le polynôme de Taylor d'une fonction $f(x)$ au voisinage d'un point a est un polynôme de la forme

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

$$P(x) = f(a) + f'(a) \frac{(x-a)}{1!} + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a) \frac{(x-a)^3}{3!} + \dots$$

la série de Taylor engendrée par $p(x)$ en $a = 0$ est appelée la série de Maclaurin et donnée par

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} x^n$$

équivalent à

$$P(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Définition 1.2.1 (*famille échelonnée en degré de $\mathbb{K}_n[X]$*)

une famille échelonnée en degré de $\mathbb{K}_n[X]$ est une famille (P_0, P_1, \dots, P_n) de polynômes à coefficients dans \mathbb{K}

vérifiant : pour tout i de $\{0, \dots, n\}$, $\deg(p_i) = i$.

Proposition 1.2.1 (*une famille échelonnée en degré donne une base de $\mathbb{K}_n[X]$*)

pour tout n de \mathbb{N} , si (p_1, p_2, \dots, p_n) est une famille échelonnée en degré de $\mathbb{K}_n[X]$, alors (P_0, P_1, \dots, P_n) est une base de $\mathbb{K}_n[X]$

Théorème 1.2.1 *le réciproque est fausse : il existe des bases de bases de $\mathbb{K}_n[X]$ qui ne sont pas échelonnées en degré. par exemple, la famille $(X^2, X^2 - X - 1, X^2 - 1)$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$, alors que les trois polynômes de la famille ont le même degré.*

Preuve. Pour la preuve voir [1] ■

Exemple 1.2.1 (formule de Taylor pour les polynômes).

soit a un élément de \mathbb{K} , La famille $B = \left((X - a)^k \right)_{k=0, \dots, n}$ est une famille échelonnée en degré de $\mathbb{K}_n[X]$. C'est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Vous connaissez la formule de Taylor pour les polynômes :

si P est un élément de $\mathbb{K}_n[X]$, alors $P(X) = \sum_{k=1}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$.

On peut la réinterpréter comme indiquant les coordonnées de P dans la base B :

elles sont données par le $(n + 1)$ -uplet $\left(P(0), P'(0), \frac{P''(0)}{2}, \dots, \frac{P^{(n)}(0)}{n!} \right)$.

1.2.2 Règle de Leibnitz

La règle de Leibnitz traitant du produit des fonctions

Pour une fonction à valeur réelle y définie sur un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$, et tout entier non négatif k , laissons $y^{(k)}$ la k^{th} e dérivée de y , avec la convention que $y^{(0)} = y$. Soient f, g deux fonctions à valeur réelle définies sur un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$ telles que $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$ existent pour un certain nombre entier non négatif n . Pour $h(x) = f(x)g(x)$, la règle de Leibnitz affirme que

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

Théorème 1.2.2 Soit l'équation

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx$$

où a pourrait être $-\infty$ et b pourrait être $+\infty$, est valide à un nombre réel $t = t_0$ dans le sens où les deux côtés existent et sont égaux, pourvu que les deux conditions suivantes soient vérifiées:

1. $f(x, t)$ et $\frac{\partial}{\partial t} f(x, t)$ sont des fonctions continues de deux variables lorsque x est dans l'intervalle de intégration et t est dans un certain intervalle autour de t_0
2. pour t dans un intervalle autour de t_0 il ya des bornes supérieures $|f(x, t)| \leq A(x)$ et $|\frac{\partial}{\partial t} f(x, t)| \leq B(x)$, les deux bornes étant indépendantes de t tel que $\int_a^b A(x) dx$ et $\int_a^b B(x) dx$ existent

Preuve. Pour la preuve voir [7] ■

La règle de leibnitz traitant de la différentiation des fonctions

Si $a(t)$ et $b(t)$ sont tous deux différentiables sur un intervalle ouvert (c_1, c_2) , alors

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx + f(b(t), t)b'(t) - f(a(t), t)a'(t)$$

pour $(x, t) \in [\alpha, \beta] \times (c_1, c_2)$, où $\alpha < \beta$ et les conditions suivantes sont satisfaites:

1. pour tout $t \in (c_1, c_2)$, $a(t) \in [\alpha, \beta]$ et $b(t) \in [\alpha, \beta]$,
2. pour $(x, t) \in [\alpha, \beta] \times (c_1, c_2)$, il existe des bornes supérieures $|f(x, t)| \leq A(x)$ et $|\frac{\partial}{\partial t} f(x, t)| \leq B(x)$ tel que $\int_{\alpha}^{\beta} A(x) dx$ et $\int_{\alpha}^{\beta} B(x) dx$ existe

Preuve. Pour la preuve voir [8] ■

1.2.3 Méthode de collocation :

En mathématiques, une méthode de collocation est une méthode de résolution numérique d'équations différentielles ordinaires, d'équations aux dérivées partielles et d'équations intégrales. L'idée est de choisir un espace de dimension finie de solutions candidates (généralement des polynômes jusqu'à un certain degré) et un certain nombre de points dans le domaine (appelés points de collocation), et de sélectionner la solution qui satisfait l'équation donnée aux points de collocation

Chapitre 2

Classifications et théorie des équations intégrales

Ce chapitre présente une introduction et classification des équations intégrales linéaires et non-linéaires, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale linéaire et non-linéaire de Volterra, avec la résolution analytique d'équation intégrale linéaire et non-linéaire par la méthode des séries convergentes et la méthode approximations successives.

2.1 Définition et classification des équations intégrales

Une équation intégrale est une équation dans la fonction inconnue $\varphi(x)$ apparaît sous le signe d'intégration. Le plus standard type de l'équation intégrale en $\varphi(x)$ est de la forme:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} k(x, t, \varphi(t)) dt, \quad (2.1)$$

Où $a(x)$ et $b(x)$ sont les limites d'intégration, λ est un paramètre constant et $k(x, t)$ est une fonction connue, appelée le noyau de l'équation intégrale, la fonction inconnue $\varphi(x)$ qui sera déterminé apparaît sous le signe d'intégration.

Dans d'autres cas, la fonction inconnue $\varphi(x)$ apparaît à l'intérieur et à l'extérieur du signe d'intégration. les fonctions $f(x)$ et $k(x, t)$ sont données. Il est à noter que les bornes d'intégration déterminées comme $a(x)$ et $b(x)$ peuvent être toutes les deux des variables, constantes, ou mixtes.

La classification des équations intégrales dépend de plusieurs caractéristiques. La première est la linéarité du noyau $k(x, t, \varphi(t))$ par rapport à la troisième variable.

1. si $k(x, t, \varphi(t))$ est linéaire par rapport à la troisième variable i.e

$$k(x, t, \varphi(t)) = k(x, t)\varphi(t) \quad (2.2)$$

l'équation intégrale est appelée équation intégrale linéaire.

2. si $k(x, t, \varphi(t))$ est non linéaire par rapport à la troisième variable i.e

si l'équation contient la fonction non linéaire $\varphi(x)$, l'équation intégrale est appelée équation intégrale non linéaire.

deux autres cas distincts qui dépend des bornes d'intégration sont utilisés pour caractériser les équations intégrales, appelées:

1. Si les bornes d'intégration sont constants, l'équation intégrale est appelée **équation intégrale de Fredholm** et donnée par:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt \quad (2.3)$$

Où a et b sont constantes.

2. Si au moins une limite d'intégration est variable, l'équation intégrale est appelée **équation intégrale de Volterra** et donnée par:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)\varphi(t)dt \quad (2.4)$$

En plus, les deux autres façons distinctes qui dépend de la fonction inconnue $\varphi(x)$ sont définis comme suit:

1. Si la fonction inconnue $\varphi(x)$ apparaît seulement sous le signe d'intégration de l'équation de Fredholm ou de Volterra, l'équation intégrale est appelée l'équation intégrale de Fredholm ou Volterra de première espèce respectivement.

2. Si la fonction inconnue $\varphi(x)$ apparaît à l'intérieur et à l'extérieur de le signe d'intégration de l'équation Fredholm ou Volterra, l'équation intégrale est appelée l'équation intégrale de Fredholm ou de Volterra de seconde espèce respectivement.

Dans toutes les équations intégrales de Fredholm ou de Volterra présentées ci-dessus, si $f(x)$ est égal zéro, l'équation résultante:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt \quad (2.5)$$

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt \quad (2.6)$$

est appelée équation intégrale homogène de Fredholm ou de Volterra respectivement.

Remarque 2.1.1 *l'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, Il suffit de prendre le noyau k vérifie la condition:*

$$k(x, t) = 0, \text{ pour } x < t \quad (2.7)$$

2.2 Existence et unicité de solution des équations intégrales linéaires

2.2.1 Théorème de Riesz

Dans ce paragraphe, on désigne par $A : X \rightarrow X$ l'opérateur linéaire compact dans un espace normé dans lui-même. Nous présentons la théorie de base pour une équation

$$\varphi - A\varphi = f$$

On définit l'opérateur T par

$$T = I - A$$

où I designe l'opérateur d'identité

Théorème 2.2.1 (*Premier Théorème de Riesz*)

L'espace nul de l'opérateur T i.e. le noyau de l'opérateur T

$$N(T) = \ker(T) = \{\varphi \in X : T\varphi = 0\}$$

est un sous-espace de dimension fini.

Preuve. Le noyau de l'opérateur linéaire borné T est un sous-espace fermé de X . Puisque pour chaque suite $\varphi_n \rightarrow \varphi, n \rightarrow \infty$ et $T\varphi_n = 0$ alors on a $T\varphi = 0$, donc

$$\varphi \in \ker(T) \text{ est équivalent à } A\varphi = \varphi$$

Et donc la restriction de A sur $\ker(T)$ coïncide avec l'opérateur d'identité sur $\ker(T)$ l'opérateur A est compact dans X et donc rendre compact de $\ker(T)$ sur $\ker(T)$ puisque $\ker(T)$ est fermé. Par conséquent $\ker(T)$ est de dimension fini ■

Théorème 2.2.2 (*Deuxième Théorème de Riesz*)

L'image de l'opérateur T i.e.

$$R(T) = \text{Im}(T) = \{T\varphi : \varphi \in X\}$$

est un sous-espace linéaire fermé et de co-dimension finie

Preuve. L'image de l'opérateur T est un sous-espace. Soit f un élément de $\overline{T(x)}$ alors il existe une suite (φ_n) de X tel que $T\varphi_n \rightarrow f, n \rightarrow \infty$ on choisit la meilleure approximation χ_n i.e.

$$\|\varphi_n - \chi_n\| = \inf_{\chi_n \in \text{Im}(T)} \|\varphi_n - \chi_n\|,$$

on définit la suite

$$\tilde{\varphi}_n = \varphi_n - \chi_n, n \in \mathbb{N}$$

qui est bornée.

On suppose que la suite $(\tilde{\varphi}_n)$ n'est pas bornée, alors on peut extraire une sous-suite $(\tilde{\varphi}_{n(k)})$ telle que $\|\tilde{\varphi}_{n(k)}\| \geq k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, maintenant on pose

$$\psi_k = \frac{\tilde{\varphi}_{n(k)}}{\|\tilde{\varphi}_{n(k)}\|}, k \in \mathbb{N}$$

avec $\|\psi_k\| = 1$ et A est compact, alors il existe une sous-suite $\psi_{k(j)}$ telle que $A\psi_{k(j)} \longrightarrow \psi$ en d'autre part

$$T\psi_k = \frac{\|T\tilde{\varphi}_{n(k)}\|}{\|\tilde{\varphi}_{n(k)}\|} \leq \frac{\|T\tilde{\varphi}_{n(k)}\|}{k} \longrightarrow 0, k \longrightarrow \infty,$$

puisque la suite $(T\varphi_n)$ est convergente et donc bornée. Par conséquent

$$T\psi_{k(j)} \longrightarrow 0, j \longrightarrow \infty,$$

alors on obtient

$$\psi_{k(j)} = T\psi_{k(j)} + A\psi_{k(j)} \longrightarrow \psi, j \longrightarrow \infty$$

et puisque T est borné, et par les deux équations précédentes nous concluons que $T\varphi = 0$. Mais comme

$$\chi_{n(k)} + \|\tilde{\varphi}_{n(k)}\| \psi \in \text{Im}(T), \forall k \in \mathbb{N}$$

on trouve

$$\begin{aligned} \|\psi_k - \psi\| &= \frac{1}{\|\tilde{\varphi}_{n(k)}\|} \|\varphi_{n(k)} - \{\chi_{n(k)} + \|\tilde{\varphi}_{n(k)}\| \psi\}\| \\ &\geq \frac{1}{\|\tilde{\varphi}_{n(k)}\|} \inf_{\chi \in \text{Im}(T)} \|\varphi_{n(k)} - \chi\| \\ &= \frac{1}{\|\tilde{\varphi}_{n(k)}\|} \|\varphi_{n(k)} - \chi_{n(k)}\| = 1 \end{aligned}$$

Ceci contredit le fait que cela $\psi_{k(j)} \longrightarrow \psi, j \longrightarrow \infty$. Par conséquent $(\tilde{\varphi}_n)$ est bornée, et puisque A est compact, on peut extraire une sous-suite $(\tilde{\varphi}_{n(k)})$ telle que $(A\tilde{\varphi}_{n(k)})$ converge pour $k \longrightarrow \infty$. En raison que $T\tilde{\varphi}_{n(k)} \longrightarrow f, k \longrightarrow \infty$ et par

$$\tilde{\varphi}_n = T\tilde{\varphi}_{n(k)} + A\tilde{\varphi}_{n(k)}$$

On observe que $\tilde{\varphi}_{n(k)} \longrightarrow \varphi \in X, k \longrightarrow \infty$, mais $T\tilde{\varphi}_{n(k)} \longrightarrow T\varphi \in X, k \longrightarrow \infty$ ■

Théorème 2.2.3 (Troisième Théorème de Riesz)

Il existe un unique $r \in \mathbb{N}$ appelé nombre de Riesz de l'opérateur T tel que :

$$\{0\} = \ker(T^0) \subset \ker(T^1) \subset \dots \subset \ker(T^r) \subset \ker(T^{r+1})$$

$$E = \text{Im}(T^0) \supset \text{Im}(T^1) \supset \dots \supset \text{Im}(T^r) \supset \text{Im}(T^{r+1})$$

Et on a la somme directe

$$E = \ker(T^r) \oplus \text{Im}(T^r)$$

Preuve. Pour la preuve voir [5] ■

Théorème 2.2.4 *De mêmes conditions dans les théorèmes précédents, alors*

1. $I - A$ est injectif si et seulement s'il est surjectif.
2. Si $I - A$ est injectif, alors l'opérateur inverse $(I - A)^{-1}: X \longrightarrow X$ est borné

Preuve. Par le théorème (2.2.1), l'injectivité de l'opérateur $I - A$ est équivalent de $r = 0$. Et par le théorème (2.2.2), la surjectivité de l'opérateur $I - A$ est équivalent de $r = 0$, puisque l'injectif et le surjectif de l'opérateur $I - A$ sont équivalent.

Il reste de montrer que T^{-1} est borné quand le $T = I - A$ est injectif. Assume que T^{-1} n'est pas borné alors il existe une suite (f_n) de X avec $\|f_n\| = 1$ telle que $\|T^{-1}f_n\| \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit

$$g_n = \frac{f_n}{\|T^{-1}f_n\|}, \varphi_n = \frac{T^{-1}f_n}{\|T^{-1}f_n\|}, \forall n \in \mathbb{N}$$

alors $g_n \longrightarrow \infty, n \longrightarrow \infty$ et $\|\varphi_n\| = 1$ pour tout n Puisque A est compact, on peut extraire une sous suite $(\varphi_{n(k)})$ telle que $A\varphi_{n(k)} \longrightarrow \varphi, k \longrightarrow \infty$ alors puisque

$$\varphi_n - A\varphi_n = g_n$$

on observe que $\varphi_{n(k)} \longrightarrow \varphi, k \longrightarrow \infty$ et $\varphi \in \text{Im}(T)$. Par conséquent $\varphi = 0$ contradiction. car

$$\|\varphi_n\| = 1 \text{ pour tout } n$$

■

2.2.2 Alternative de Fredholm

1. Si l'équation homogène

$$\varphi - A\varphi = 0 \quad (2.12)$$

admet seulement la solution triviale $\varphi = 0$, alors pour tout $f \in X$ l'équation

$$\varphi - A\varphi = f \quad (2.13)$$

admet une solution unique $\varphi \in X$ et cette solution et depend de la continuité de f .

2. Si l'équation homogène(2.12) n'admet pas la solution triviale $\varphi = 0$, alors elle a seulement un nombre fini $m \in \mathbb{N}$ de solutions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ de X sont linéairements indépendents et l'équation non homogène (2.13) est unsolvable ou sa solution est de la forme générale

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \sum_{k=1}^m \alpha_k \varphi_k,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ sont des nombres arbitraires complexes et $\tilde{\varphi}$ une solution particulière de l'équation non homogène.

Preuve. Pour la preuve voir [5] ■

Définition 2.2.1 Soit $A : X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire compact dans un espace normé dans lui même Le nombre complexe λ est appelle valeur propre, s'il existe un élément $\varphi \in X, \varphi \neq 0$ tel que $A\varphi = \lambda\varphi$

1. Le nombre λ s'appelle une valeur de régularité de A
2. Si $(\lambda I - A)^{-1}$ existe et borné, alors l'ensemble de toute valeur régulière de A est appelée l'ensemble des résolvant $\rho(A)$ et $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$
3. Le complément de $\rho(A)$ dans \mathbb{C} est appelé le specter de A , noté $\sigma(A)$ et $r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$ est appelé le rayon spectral de A .

2.3 Résolution analytique des équations intégrales linéaires de Volterra

2.3.1 Méthode des solutions sous forme de série

Définition 2.3.1 Une fonction $\varphi(x)$ est dite analytique si elle a des dérivées de tous les ordres telles que la série de Taylor en $x = 0$ peut être écrite comme

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2.3.1)$$

Dans cette section, nous appliquerons la méthode des solutions en série, qui découle principalement de la série de Taylor pour les fonctions analytiques. Pour résoudre les équations intégrales de Volterra nous supposons que la solution $\varphi(x)$ de l'équation

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt \quad (2.3.2)$$

est analytique, et possède donc une série de Taylor de la forme donnée en (2.3.1), où les coefficients a_n sera déterminé de manière récurrente. Dans cette méthode, nous substituons généralement la série de Taylor (2.3.1) dans les deux côtés de (2.3.2) pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = T(f(x)) + \lambda \int_0^x k(x, t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt \quad (2.3.3)$$

où $T(f(x))$ est le développement de Taylor de la fonction f

Pour plus de simplicité on utilise

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = T(f(x)) + \lambda \int_0^x k(x, t) (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dt \quad (2.3.4)$$

Exemple 2.3.1 Utilisez la méthode de résolution en série pour résoudre l'équation intégrale de Volterra:

$$\varphi(x) = x + \int_0^x (x - t) \varphi(t) dt \quad (2.3.5)$$

en remplaçant $\varphi(x)$ par la série

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

dans les deux côtés de l'équation.(2.3.5)on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x + \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x a_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} \right) dt \quad (2.3.6)$$

l'évaluation du côtés droit conduit à

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+1)} a_n x^{n+2} \quad (2.3.7)$$

qui peut être réécrit comme

$$a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} a_{n-2} x^n \quad (2.3.8)$$

ou équivalent

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = x + \frac{1}{2} a_0 x^2 + \frac{1}{6} a_1 x^3 + \frac{1}{12} a_2 x^4 + \dots \quad (2.3.9)$$

l'équation des coefficients de même puissances de x des deux côtés de(2.3.8) donne la relation réccurente

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, & a_1 &= 1, \\ & \vdots & & \\ a_n &= \frac{1}{n(n-1)} a_{n-2}, & n &\geq 2. \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

ce résultat peut être combiné pour obtenir

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)!}, n \geq 0 \quad (2.3.11)$$

la substitution de ce résultat dans(2.3.1)donne la solution en série

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad (2.3.12)$$

qui converge vers la solution exacte

$$g(x) = \sinh x \quad (2.3.13)$$

il est intéressant de souligner que ce résultat peut également être obtenu en assimilant coefficients des mêmes termes des deux côtés de (2.3.9),où l'on trouve

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 & a_1 &= 1, & a_2 &= \frac{1}{2} a_0 = 0, \\ a_3 &= \frac{1}{6} a_1 = \frac{1}{3!} & a_4 &= \frac{1}{12} a_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

ceci conduit au même résultat obtenu précédemment en résolvant la relation de récurrence

2.4 Existence et unicité de solution de l'équation intégrale non linéaire de Volterra

Théorème 2.4.1 Soit l'équation intégrale non linéaire de Volterra suivante :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t, \varphi(t)) dt. \quad (2.1)$$

Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.
2. $k : [0, +\infty[\times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, est une fonction continue satisfait la condition Lipschitz suivante :

$$|k(x, t, \varphi_1) - k(x, t, \varphi_2)| \leq L |\varphi_1 - \varphi_2| \text{ tel que } x, t \in [0, +\infty[\text{ et } \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$$

Alors, l'équation (2.1) admet une solution unique $\varphi \in C([0, +\infty[, \mathbb{R})$.

Preuve. On choisit la norme suivante

$$|g| = \sup_x \{ |g(x)| \exp(-Lx) \}.$$

On définit l'opérateur A comme suit :

$$A\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t, \varphi(t)) dt$$

A fin de prouver que l'équation (2.1) admet une solution, il faut montrer que l'opérateur A admet un point fixe.

D'abord, on montre que A est contractante.

$$\begin{aligned} |A\varphi(x) - A\psi(x)| &\leq \sup_x \left\{ \exp(-Lx) \int_0^x |k(x, t, \varphi(t)) - k(x, t, \psi(t))| dt \right\} \\ &\leq L \sup_x \left\{ \exp(-Lx) \int_0^x |\varphi(t) - \psi(t)| dt \right\} \\ &\leq L \sup_x \left\{ \exp(-Lx) \int_0^x \exp(-Lt) \exp(Lt) |\varphi(t) - \psi(t)| dt \right\} \\ &\leq L |\varphi - \psi| \sup_x \left\{ \sup(-Lx) \int_0^x \exp(Lt) dt \right\} \\ &\leq L |\varphi - \psi| \sup_x \left\{ \exp(-Lx) \frac{\exp(Lx) - 1}{L} \right\} \\ &\leq (1 - \exp(-Lx)) |\varphi - \psi| \end{aligned}$$

puisque

$$(1 - \exp(-Lx)) \leq 1,$$

alors, A est contractante, d'après le principe de Banach l'opérateur A admet un point fixe unique $\varphi \in C([0, +\infty[)$, qui est une solution unique de l'équation intégrale (2.1). ■

Exemple 2.4.1 *montrer que l'équation intégrale*

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \frac{\sin(x-t)}{1 + \varphi^2(t)} dt, \quad 0 < x < 1 \quad (2.2)$$

admet une unique solution continue sur $[0, 1]$

Notons d'abord que la fonction $f(x) \equiv 1$ est continue sur $[0, 1]$ pour l'existence et l'unicité de la solution de cette équation, il suffit de prouver que le noyau $k(x, t, \varphi)$ la condition de lipschitz est remplie par rapport à la troisième variable φ . nous avons

$$\begin{aligned} |k(x, t, \varphi_1(t)) - k(x, t, \varphi_2(t))| &= \left| \frac{\sin(x-t)}{1 + \varphi_1^2(t)} - \frac{\sin(x-t)}{1 + \varphi_2^2(t)} \right| \\ &\leq \left| \frac{\varphi_1^2(t) - \varphi_2^2(t)}{(1 + \varphi_1^2(t))(1 + \varphi_2^2(t))} \right| \\ &\leq \left| \frac{\varphi_1(t) - \varphi_2(t)}{(1 + \varphi_1^2(t))(1 + \varphi_2^2(t))} \right| \|\varphi_1 - \varphi_2\| \\ &\leq \|\varphi_1 - \varphi_2\| \end{aligned}$$

parce que

$$\left| \frac{a+b}{(1+a^2)(1+b^2)} \right| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{2a}{1+a^2} \right| + \frac{1}{2} \left| \frac{2b}{1+b^2} \right| \quad \text{pour } a, b \in \mathbb{R}$$

Ainsi, l'équation (2.2) admet une unique solution continue

2.5 Résolution analytique des équations intégrales non linéaires de Volterra

2.5.1 Méthode des approximations successives

La méthode des approximations successives peut, a priori, être appliquée tous les problèmes non linéaires.

On considère l'équation intégrale non linéaire de Volterra

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k(x, t, \varphi(t)) dt \quad (2.5.1)$$

La méthode des approximations successives introduit la Relation réccurente

$$\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t, \varphi_n(t)) dt, \quad n \geq 1 \quad (2.5.2)$$

Nous commençons toujours par une estimation initiale pour $\varphi_0(x)$, la plupart du temps nous sélectionnons 0, 1, x pour $\varphi_0(x)$, et en utilisant (2.5.2), plusieurs approximations successives $\varphi_k, k \geq 1$

sera déterminé comme

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) \varphi_0(t) dt \\ \varphi_2(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) \varphi_1(t) dt \\ \varphi_3(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) \varphi_2(t) dt \\ &\vdots \\ \varphi_{n+1}(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) \varphi_n(t) dt \end{aligned}$$

par conséquent

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n+1}(x)$$

Exemple 2.5.1 *Utilisez la méthode des approximations successives pour résoudre l'équation intégrale non linéaire de Volterra*

$$\varphi(x) = \exp(x) + \frac{1}{3}x(1 - \exp(3x)) + \int_0^x x\varphi^3(t) dt$$

on a

$$\varphi_0(x) = 1$$

Nous utilisons la méthode des approximations successives

$$\varphi_{n+1}(x) = \exp(x) + \frac{1}{3}x(1 - \exp(3x)) + \int_0^x x\varphi_n^3(t) dt$$

alors

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(x) &= \exp(x) + \frac{1}{3}x(1 - \exp(3x)) + \int_0^x x\varphi_0^3(t)dt \\
 &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{35}{24}x^4 - \frac{67}{60}x^5 + \dots \\
 \varphi_2(x) &= \exp(x) + \frac{1}{3}x(1 - \exp(3x)) + \int_0^x x\varphi_1^3(t)dt \\
 &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{67}{60}x^5 + \dots \\
 \varphi_3(x) &= \exp(x) + \frac{1}{3}x(1 - \exp(3x)) + \int_0^x x\varphi_2^3(t)dt \\
 &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \dots
 \end{aligned}$$

la solution $\varphi(x)$ est

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n+1}(x) = \exp(x)$$

Chapitre 3

Résolution numérique des équations intégrales linéaires et non linéaire de Volterra par les polynômes de Taylor

Ce chapitre est destiné à l'étude de la résolution numérique des équations intégrales type Volterra (linéaire et non-linéaire) par une méthode de collocation en utilisant les polynômes de Taylor, la technique est basée premièrement sur la différenciation des deux côtés de l'équation intégrale n fois puis en substituant la série de Taylor à la fonction inconnue dans l'équation résultante. Ici, le système algébrique linéaire obtenu a été résolu approximativement par un schéma de troncature approprié. Dans cette étude, les idées de base des travaux précédents sont appliquées à l'équation intégrale de Volterra

3.1 Description de la méthode

Considérons l'équation intégrale linéaire et non linéaire de Volterra du second espèce, respectivement

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, y) \varphi(t) dt \quad (3.1.1)$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, y) [\varphi(t)]^2 dt \quad (3.1.2)$$

Dans cette section, nous utilisons le polynôme de Taylor pour approximer la solution de l'équation intégrale de Volterra (3.1.1) et (3.1.2), cette opération nous conduit à un système d'équations linéaires par rapport à la fonction inconnue $\varphi(x)$ et ses dérivées $\varphi^{(0)}(x)\varphi^{(1)}(x)\dots\varphi^{(n)}(x)$

Proposition 3.1.1 *Soit $\varphi(x)$ une fonction à dérivées de tous ordres dans un intervalle $[a, b]$ qui contient un point intérieur t . La série de Taylor de $\varphi(x)$ générée en $x = t$ est*

$$\varphi(t) \approx \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(x) (t-x)^{(k)} \quad (1.3.2)$$

$\varphi(t)$ peut être exprimé en termes de Taylor d'ordre n série en un point arbitraire $x \in [a, b]$ comme

$$\varphi(t) = \varphi^{(0)}(x) + \varphi^{(1)}(x) (t-x) + \dots + \frac{1}{n!} \varphi^{(n)}(x) (t-x)^{(n)} + E_n(t, x) \quad (1.3.3)$$

où $E_n(x, t)$ l'erreur de Lagrange

$$E_n(t, x) = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (t-x)^{(n+1)} \quad (1.3.4)$$

où le point ξ est entre x et t

Si la solution de (3.1.1) $\varphi(x) \in C^{n+1}([a, b])$ Alors cette solution s'écrit sous la forme de la série de Taylor d'ordre n en un point arbitraire $x = c, a \leq x, c \leq b$

$$\varphi(x) \approx \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(c) (x-c)^{(k)} \quad a \leq c \leq x \quad (3.1.3)$$

où $\varphi^{(k)}(x)$ sont les coefficients de Taylor à déterminer.

3.1.1 Equations intégrales linéaires

Pour obtenir la solution de l'équation (3.1.1) sous la forme de l'expression (3.1.3) on commence par le différencier n fois par rapport à x pour obtenir

$$\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + \lambda I^{(n)}(x) \quad (3.1.4)$$

où

$$I^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x k(x, y) \varphi(t) dt \quad (3.1.5)$$

pour $n = 0$

$$I^{(0)}(x) = I(x) = \int_a^x k(x, y) \varphi(t) dt$$

en appliquant successivement n fois la règle de leibnitz (traitant de la différentiation des intégrales) à l'intégrale $I(x)$, nous avons, pour $n \geq 1$,

$$I^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} [h_i(x) \varphi(x)]^{(n-i-1)} + \int_a^x \frac{\partial^{(n)} k(x, t)}{\partial x^n} \varphi(t) dt \quad (3.1.6)$$

où

$$h_i(x) = \frac{\partial^{(i)} k(x, t)}{\partial x^i} \Big|_{t=x} \quad (3.1.7)$$

a partir de la règle de leibnitz (traitant de la différentiation des produits de fonctions), nous évaluons $[h_i(x) \varphi(x)]^{(n-i-1)}$ et le substituons dans l'équation (3.1.6) ainsi, l'équation (3.1.5)

$$I^{(n)}(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-m-1} \binom{n-i-1}{m} h_i^{(n-m-i-1)}(x) \varphi^{(m)}(x) + \int_a^x \frac{\partial^{(n)} k(x, t)}{\partial x^n} \varphi(t) dt \quad (3.1.8)$$

notez que dans l'équation (3.1.8)

$$\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-m-1} (...) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-i-1} (...)$$

nous mettons d'abord $x = c$ dans l'équation (3.1.4) ,donc dans l'équation (3.1.8) ,puis nous substituons l'expansion de taylor de $\varphi(t)$ sur $t = c$ c'est-à-dire

$$\varphi(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(c) (t - c)^m$$

dans l'équation résultant. le résultat est

$$\varphi^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) + \lambda \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-m-1} \binom{n-i-1}{m} h_i^{(n-m-i-1)}(c) \varphi^{(m)}(c) + \lambda \int_a^c \frac{\partial^{(n)} k(x, t)}{\partial x^n} \Big|_{x=c} \left[\sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(c) (t - c)^m \right]$$

ou brièvement

$$\varphi^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) + \lambda \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} (H_{nm} + T_{nm}) \varphi^{(m)}(c) + \sum_{m=n}^{\infty} T_{nm} \varphi^{(m)}(c) \right\} \quad (3.1.9)$$

où pour $n = 0$

$$\sum_{m=0}^{n-1} (H_{nm} + T_{nm}) \varphi^{(m)}(c) = 0$$

pour $n = 1, 2, 3, \dots, m = 0, 1, 2, \dots, n - 1, (n > m)$

$$H_{nm} = \sum_{i=0}^{n-m-1} \binom{n-i-1}{m} h_i^{(n-m-i-1)}(c) \quad (3.1.10)$$

pour $n \leq m$

$$H_{nm} = 0$$

et pour $n, m = 0, 1, 2, \dots$

$$T_{nm} = \frac{1}{m!} \int_a^c \frac{\partial^{(n)} k(x, t)}{\partial x^n} \Big|_{x=c} (t - c)^m dt \quad (3.1.11)$$

la relation (3.1.9) qui est un système de $N + 1$ équations linéaires pour les $N + 1$ inconnues $\varphi^{(0)}(c), \varphi^{(1)}(c), \dots, \varphi^{(N)}(c)$. ces équations peuvent être résolues numériquement par des méthodes standard

le système qui s'écrit sous la forme

$$TG + F = 0 \quad (3.1.12)$$

où T, G et F sont des matrices définies par

$$\begin{bmatrix} \lambda T_{00} - 1 & \lambda T_{01} & \dots & \lambda T_{0N} \\ \lambda (H_{10} + T_{10}) & \lambda T_{11} - 1 & \dots & \lambda T_{1N} \\ \vdots & \vdots & & \\ \lambda (H_{N0} + T_{N0}) & \lambda (H_{N1} + T_{N1}) & \dots & \lambda T_{NN-1} \end{bmatrix}$$

$$G = [\varphi^{(0)}(c) \varphi^{(1)}(c) \dots \varphi^{(N)}(c)]^t$$

et

$$F = [f^{(0)}(c) f^{(1)}(c) \dots f^{(N)}(c)]^t$$

si le déterminant $D(\lambda) = |T| \neq 0$, alors l'équation matricielle (3.1.12) peut s'écrire sous la forme

$$G = -T^{-1}F \quad (3.1.13)$$

ainsi les coefficients $\varphi^{(n)}(c)$ ($n = 0, 1, \dots, N$) sont uniquement déterminés par l'équation (3.1.13) l'équation intégrale (3.1.1) a donc une solution unique. cette solution est donnée par le polynôme de Taylor

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \varphi^{(n)}(c) (x - c)^n \quad (3.1.14)$$

il est généralement difficile d'évaluer l'intégrale (3.1.11). dans de tels cas, il convient de choisir $c = a$. donc les quantités T_{nm} sont identiquement nulles et l'équation (3.1.9) se réduit à la relation de récurrence

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)}(a) &= f^{(a)}(a) \\ \varphi^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a) + \lambda \sum_{m=0}^{n-1} H_{nm} \varphi^{(m)}(a) \\ n &= 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

à partir de cette relation, les coefficients inconnus sont facilement calculés successivement de plus, comme $n \rightarrow \infty$, on obtient la solution en série de Taylor.

Exemple 3.1.1 *Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra de second espèce.*

$$\varphi(x) = 1 + x + \int_0^x (x - t) \varphi(t) dt \quad (3.1.16)$$

avec la solution exacte $\varphi(x) = \exp(x)$

et approcher la fonction $\varphi(x)$ par un polynôme de Taylor du cinquième degré, de sorte que

$$f(x) = x \quad k(x, t) = t - x \quad c = a = 0 \quad N = 5 \quad \lambda = 1$$

soit $c = a = 0$. dans ce cas, à partir des deux relations (3.1.7) et (3.1.10), on trouve les quantités H_{nm} comme

$$\begin{aligned} H_{10} &= 0 & H_{20} &= 1 & H_{21} &= 0 & H_{30} &= 0 & H_{31} &= 1 \\ H_{32} &= 0 & H_{40} &= 0 & H_{41} &= 0 & H_{42} &= 1 & H_{43} &= 0 \\ H_{50} &= 0 & H_{51} &= 0 & H_{52} &= 0 & H_{53} &= 1 & H_{54} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

depuis (3.1.11)

$$T_{nm} = 0 \text{ pour } n, m = 0, 1, \dots, 5 \quad (3.1.18)$$

les valeurs de $\varphi^{(n)}(x)$ ($n = 0, 1, \dots, 5$) à $x = c = 0$ sont

$$f^{(0)}(0) = 1 \quad f^{(1)}(0) = 1 \quad f^{(2)}(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = f^{(5)}(0) = 0 \quad (3.1.19)$$

en suite ,nous substituons les valeurs (3.1.17),(3.1.18) et(3.1.19) dans l'équation matricielle (3.1.12) pour obtenir

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^{(0)}(0) \\ \varphi^{(1)}(0) \\ \varphi^{(2)}(0) \\ \varphi^{(3)}(0) \\ \varphi^{(4)}(0) \\ \varphi^{(5)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

la solution de cette équation est

$$\varphi^{(0)}(0) = \varphi^{(1)}(0) = 1 \quad \varphi^{(2)}(0) = \varphi^{(3)} = \lambda \quad \varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(5)}(0) = \lambda^2$$

en remplaçant ces valeurs dans l'équation (3.1.14), nous obtenons la solution du polynôme de taylor

$$\varphi(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

qui est le développement de taylor

3.1.2 Equations intégrales non linéaires

Considérons maintenant l'équation de volterra non linéaire (3.1.2) et cherchons la solution $\varphi(x)$ sous la forme de l'équation (3.1.3).pour obtenir une telle solution, en remplaçant d'abord

$$G(t) = [g(t)]^2 \quad (3.1.20)$$

dans l'équation (3.1.2) puis en suivant la procédure précédente ,on obtient

$$\varphi^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) + \lambda \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} (H_{nm} + T_{nm}) G^{(m)}(c) + \sum_{m=n}^{\infty} T_{nm} G^{(m)}(c) \right\} \quad (3.1.21)$$

où, pour $n = 0$

$$\sum_{m=0}^{n-1} (H_{nm} + T_{nm}) G^{(m)}(c) = 0$$

pour $n \leq m$

$$H_{nm} = 0$$

et H_{nm} ($n = 1, 2, 3, \dots; m = 0, 1, 2, \dots, n - 1; n > m$) et T_{nm} ($n, m = 0, 1, 2, \dots$) sont quantités définies par les équations (3.1.10) et (3.1.11), respectivement. les quantités $G^{(m)}(c)$, $m = 0, 1, 2, \dots$ dans l'équation (3.1.21) peut être trouvé à partir de la relation

$$G^{(m)}(c) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \varphi^{(m-i)}(c) \varphi^{(i)}(c) \quad (3.1.22)$$

qui est obtenu en appliquant la règle de leibnitz à l'équation (3.1.20) .si nous prenons $n, m = 0, 1, 2, \dots, N$,alors l'équation (3.1.21) devient

$$\varphi^{(0)}(c) = f^{(0)}(c) + \lambda \sum_{m=0}^n T_{0m} G^{(m)}(c) \quad (3.1.23)$$

$$\varphi^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) + \lambda \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} (H_{nm} + T_{nm}) G^{(m)}(c) + \sum_{n=m}^N T_{nm} G^{(m)}(c) \right\}$$

$$n = 1, 2, \dots, N$$

$$m = 0, 1, \dots, N$$

qui est un système de $N+1$ équations non linéaires pour les $N+1$ inconnues $\varphi^{(0)}(c), \varphi^{(1)}(c), \dots, \varphi^{(N)}(c)$. ces équations peuvent être résolues numériquement par des méthodes standard

le système (3.1.23) peut être mis sous forme matricielle comme suit

$$G - TG^* = F \quad (3.1.24)$$

où G, F et T sont des matrices définies dans l'équation (3.1.12) et G^* est la matrice colonne défini par

$$G^* = [G^{(0)}(c)G^{(1)}(c)\dots G^{(N)}(c)]^t$$

dont les éléments sont donnés par l'équation (3.1.22).si nous avons besoin de choisir $c = a$,alors le système(3.1.23) devient

$$\varphi^{(0)}(a) = f^{(0)}(a) \quad (3.1.25)$$

$$\varphi^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + \lambda \sum_{m=0}^{n-1} H_{nm} G^{(m)}(a) \quad n = 1, 2, \dots, N$$

ainsi, à partir des équations (3.1.22) et (3.1.25), les coefficients peuvent être calculés très facilement.

Exemple 3.1.2 *Considérons l'équation intégrale non linéaire de Volterra de second espèce.*

$$\varphi(x) = x + \int_0^x [\varphi(t)]^2 dt \quad (3.1.26)$$

avec la solution exacte $\varphi(x) = \tan(x)$

supposons que $\varphi(x)$ soit approximé par un polynôme de Taylor de degré trois ($N = 3$). en prenant $c = a = 0$ et en procédant comme précédemment, les coefficients de Taylor inconnus peut être calculé facilement. dans ce cas, les valeurs $h^{(k)}$ calculées par la formule (3.1.7) sont donnée dans le tableau 1. et la relation (3.1.10), on obtient les valeurs H_{nm} , $n = 1, 2, \dots, 3$ $m = 0, 1, \dots, 3$ ($n > m$) montré dans le tableau 2

i, m	0	1	2
0	1	0	0
1	0	0	0
2	0	0	0

Tableau 1. valeurs de $h_i^{(m)}(0)$, $i, m = 0, 1, 2$

n, m	0	1	2
1	1		
2	1	0	
3	0	0	1

Tableau 2. valeurs de H_{nm} pour $n = 1, 2, 3$ $m = 0, 1, 2$ ($n > m$)

comme $f(x) = x$, les valeurs de $f^{(n)}(x)$ ($n = 0, 1, \dots, 3$) à $x = c = a = 0$ sont calculés comme

$$f^{(0)}(0) = 0 \quad f^{(1)}(0) = 1 \quad f^{(2)}(0) = f^{(3)}(0) = 0 \quad (3.1.27)$$

Enfin, nous substituons les valeurs H_{nm} dans le tableau 2 et $f^{(n)}(0)$ dans résultat (3.1.27) dans l'équation (3.1.25) et ,à partir des deux équation de résultat (3.1.25) et de la relation

(3.1.22) ,nous obtenons successivement les coefficients de taylor comme

$$\begin{aligned}\varphi^{(0)}(0) &= 0 & \varphi^{(1)}(0) &= 1 \\ \varphi^{(2)}(0) &= 0 & \varphi^{(3)}(0) &= 1\end{aligned}$$

ainsi la solution polynomiale de taylor de degré six de l'équation intégrale (3.1.26) devient

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{3!}x^3$$

qui sont les quatre premiers termes du développement de taylor de la solution exacte $\tan(x)$ à $x = 0$.

Si nous prenons N suffisamment grand, nous observons que la solution devient

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \simeq \tan(x)$$

Chapitre 4

Exemples Numériques

Dans cette section on va résoudre quelques exemples d'équations intégrales linéaires et non linéaires de seconde espèce par la méthode de Taylor-collocation.

4.1 Equations intégrales linéaire

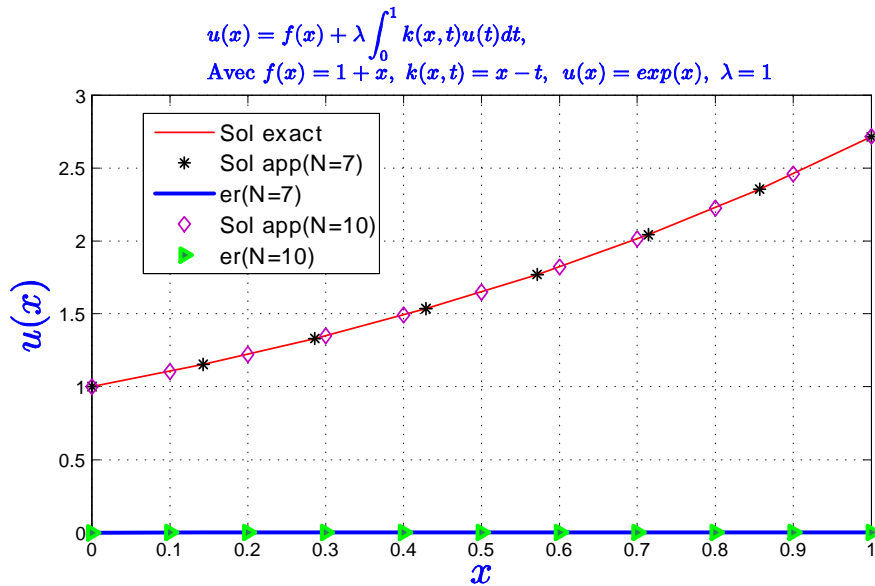
Exemple 4.1.1

$$\varphi(x) = 1 + x + \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt$$

où $0 \leq x, t \leq 1$, et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par $\varphi(x) = \exp(x)$

val de x	Sol φ_{ex}	sol $\varphi_{app}(N = 5)$	sol $\varphi_{app}(N = 7)$	err($N = 5$)	err($N = 7$)
0	1.0000e + 00	1.0000e + 00	1.0000e + 00	0	0
1.0e - 01	1.1052e + 00	1.1052e + 00	1.1052e + 00	1.4090e - 09	2.5091e - 13
2.0e - 01	1.2214e + 00	1.2214e + 00	1.2214e + 00	9.1494e - 08	6.4932e - 11
3.0e - 01	1.3499e + 00	1.3499e + 00	1.3499e + 00	1.0576e - 06	1.6831e - 09
4.0e - 01	1.4918e + 00	1.4918e + 00	1.4918e + 00	6.0310e - 06	1.7006e - 08
5.0e - 01	1.6487e + 00	1.6487e + 00	1.6487e + 00	2.3354e - 05	1.0255e - 07
6.0e - 01	1.8221e + 00	1.8220e + 00	1.8221e + 00	7.0800e - 05	4.4610e - 07
7.0e - 01	2.0138e + 00	2.0136e + 00	2.0138e + 00	1.8129e - 04	1.5493e - 06
8.0e - 01	2.2255e + 00	2.2251e + 00	2.2255e + 00	4.1026e - 04	4.5628e - 06
9.0e - 01	2.4596e + 00	2.4588e + 00	2.4596e + 00	8.4486e - 04	1.1848e - 05
1.0e + 00	2.7183e + 00	2.7167e + 00	2.7183e + 00	1.6151e - 03	2.7860e - 05

Tableau 1 comparaison des resultats pour l'exemple 1



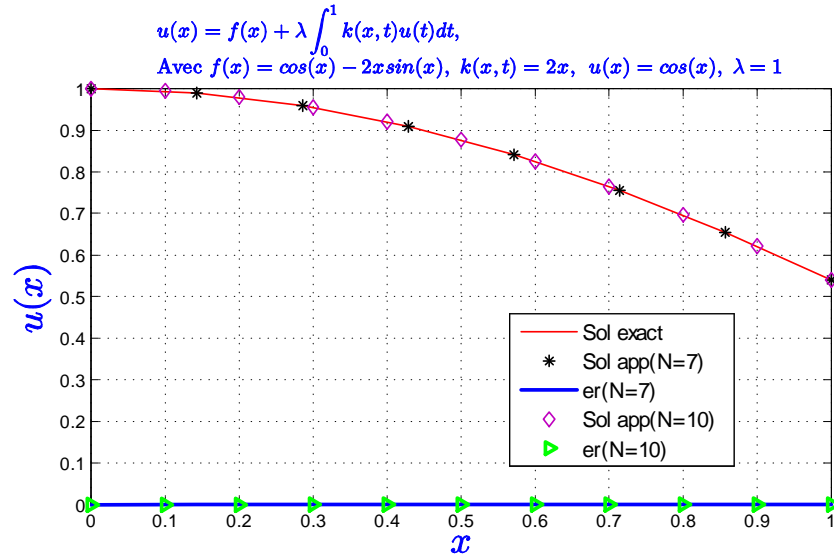
Exemple 4.1.2 Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra de second espèce.

$$\varphi(x) = \cos(x) - 2x \sin(x) + \int_0^x 2x\varphi(t)dt$$

où $0 \leq x, t \leq 1$, et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par $\varphi(x) = \cos(x)$

val de x	Sol φ_{ex}	sol $\varphi_{app}(N = 7)$	sol $\varphi_{app}(N = 10)$	err($N = 7$)	err($N = 10$)
0	1.0000e + 00	1.0000e + 00	1.0000e + 00	0	0
1.0e - 01	9.9500e - 01	9.9500e - 01	9.9500e - 01	2.4791e - 13	0
2.0e - 01	9.8007e - 01	9.8007e - 01	9.8007e - 01	6.3464e - 11	0
3.0e - 01	9.5534e - 01	9.5534e - 01	9.5534e - 01	1.6256e - 09	1.1102e - 15
4.0e - 01	9.2106e - 01	9.2106e - 01	9.2106e - 01	1.6225e - 08	3.5083e - 14
5.0e - 01	8.7758e - 01	8.7758e - 01	8.7758e - 01	9.6613e - 08	5.0904e - 13
6.0e - 01	8.2534e - 01	8.2534e - 01	8.2534e - 01	4.1491e - 07	4.5355e - 12
7.0e - 01	7.6484e - 01	7.6484e - 01	7.6484e - 01	1.4220e - 06	2.8819e - 11
8.0e - 01	6.9671e - 01	6.9670e - 01	6.9671e - 01	4.1316e - 06	1.4296e - 10
9.0e - 01	6.2161e - 01	6.2160e - 01	6.2161e - 01	1.0581e - 05	5.8701e - 10
1.0e + 00	5.4030e - 01	5.4028e - 01	5.4030e - 01	2.4528e - 05	2.0763e - 09

Tableau 2 comparaison des resultats pour l'exemple 2



4.2 Equations intégrales non linéaires

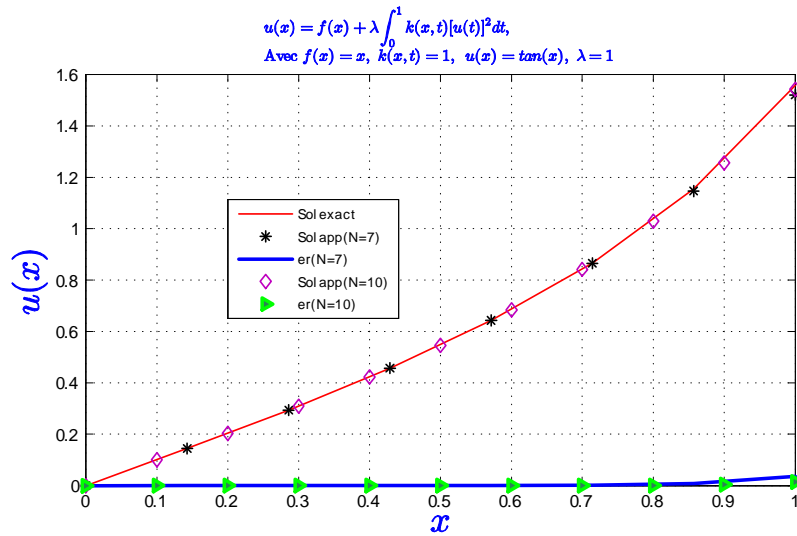
Exemple 4.2.1 *Considérons l'équation intégrale non linéaire de Volterra de second espèce.*

$$\varphi(x) = x + \int_0^x [\varphi(t)]^2 dt$$

où $0 \leq x, t \leq 1$, et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par $\varphi(x) = \tan(x)$

val de x	Sol φ_{ex}	sol $\varphi_{app}(N = 7)$	sol $\varphi_{app}(N = 10)$	err($N = 7$)	err($N = 10$)
0	0	0	0	0	0
$1.0e - 01$	$1.0033e - 01$	$1.0033e - 01$	$1.0033e - 01$	$2.1958e - 11$	$8.8970e - 14$
$2.0e - 01$	$2.0271e - 01$	$2.0271 - 01$	$2.0271e - 01$	$1.1382e - 08$	$1.8451e - 10$
$3.0e - 01$	$3.0934e - 01$	$3.0934e - 01$	$3.0934e - 01$	$4.4675e - 07$	$1.6295e - 08$
$4.0e - 01$	$4.2279e - 01$	$4.2279e - 01$	$4.2279e - 01$	$6.1305e - 06$	$3.9753e - 07$
$5.0e - 01$	$5.4630e - 01$	$5.4625e - 01$	$5.4630e - 01$	$4.7530e - 05$	$4.8157e - 06$
$6.0e - 01$	$6.8414e - 01$	$6.8388e - 01$	$6.8410e - 01$	$2.5804e - 04$	$3.7649e - 05$
$7.0e - 01$	$8.4229e - 01$	$8.4119e - 01$	$8.4207e - 01$	$1.1012e - 03$	$2.1868e - 04$
$8.0e - 01$	$1.0296e - 00$	$1.0257e - 00$	$1.0286e - 01$	$4.9633e - 03$	$1.0280e - 03$
$9.0e - 01$	$6.2602e - 00$	$1.2475e - 00$	$1.2560e - 01$	$1.2613e - 02$	$4.1407e - 03$
$1.0e + 00$	$5.5574e - 00$	$1.5206e - 01$	$1.5425e - 01$	$3.6773e - 02$	$1.4903e - 02$

Tableau 3 comparaison des resultats pour l'exemple 3



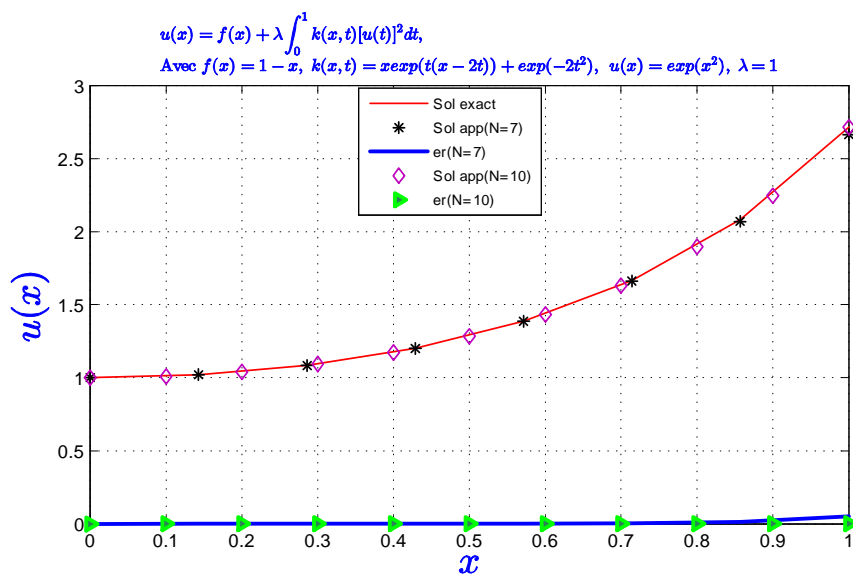
Exemple 4.2.2 Considérons l'équation intégrale non linéaire de Volterra de second espèce.

$$\varphi(x) = 1 - x + \int_0^x [x \exp(t(x - 2t)) + \exp(-2t^2)] [\varphi(t)]^2 dt$$

où $0 \leq x, t \leq 1$, et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par $\varphi(x) = \exp(x^2)$

val de x	Sol φ_{ex}	sol $\varphi_{app}(N = 7)$	sol $\varphi_{app}(N = 10)$	err($N = 7$)	err($N = 10$)
0	1.0000e + 00	1.0000e + 00	1.0000e + 00	0	0
1.0e - 01	1.0101e + 00	1.0101e - 00	1.0101e - 00	4.1750e - 10	1.3323e - 15
2.0e - 01	1.0408e + 00	1.0408e - 00	1.0408e - 00	1.0753e - 07	5.7214e - 12
3.0e - 01	1.0942e + 00	1.0942e - 00	1.0942e - 00	2.7837e - 06	7.4771e - 10
4.0e - 01	1.1735e + 00	1.1735e - 00	1.1735e - 00	2.8204e - 05	2.3845e - 08
5.0e - 01	1.2840e + 00	1.2839e - 00	1.2840e - 00	1.7125e - 04	3.5158e - 07
6.0e - 01	1.4333e + 00	1.4326e - 00	1.4333e - 00	7.5341e - 04	3.1861e - 06
7.0e - 01	1.6323e + 00	1.6297e - 00	1.6323e - 00	2.6581e - 03	2.0657e - 05
8.0e - 01	1.8965e + 00	1.8885e - 00	1.8964e - 00	7.9902e - 03	1.0492e - 04
9.0e - 01	2.2479e + 00	2.2266e - 00	2.2475e - 00	2.1284e - 02	4.4270e - 04
1.0e + 00	2.7183e + 00	2.6667e - 00	2.7167e - 00	5.1615e - 02	1.6152e - 03

Tableau 4 comparaison des resultats pour l'exemple 4



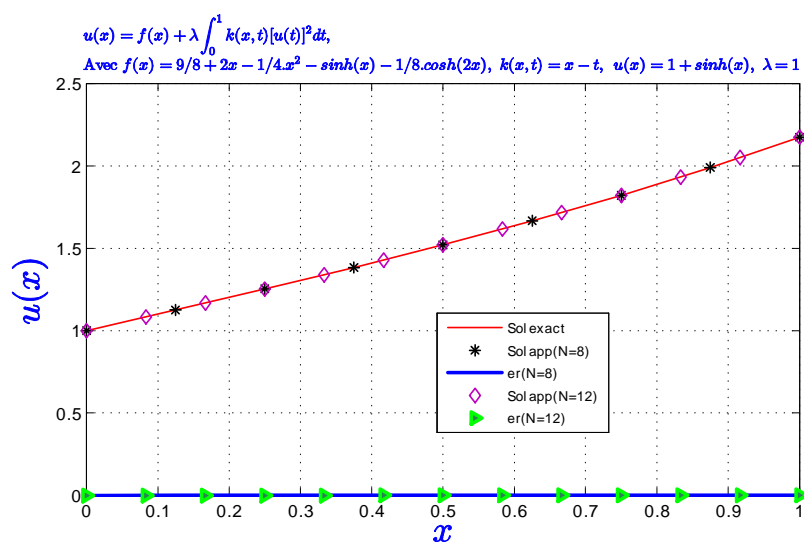
Exemple 4.2.3 Considérons l'équation intégrale non linéaire de Volterra de second espèce.

$$\varphi(x) = \frac{9}{8} + 2x - \frac{1}{4}x^2 - \sinh x - \frac{1}{8} \cosh 2x + \int_0^x (x-t) \varphi^2(t) dt$$

où $0 \leq x, t \leq 1$, et la fonction f est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par $\varphi(x) = 1 + \sinh(x)$

val de x	Sol φ_{ex}	sol $\varphi_{app}(N = 8)$	sol $\varphi_{app}(N = 12)$	err($N = 8$)	err($N = 12$)
0	1.0000e + 00	1.0000e + 00	1.0000e + 00	0	0
1.0e - 01	1.1002e + 00	1.1002e + 00	1.1002e + 00	2.6645e - 15	0
2.0e - 01	1.2013e + 00	1.2013e + 00	1.2013e + 00	1.4113e - 12	0
3.0e - 01	1.3045e + 00	1.3045e + 00	1.3045e + 00	5.4285e - 11	0
4.0e - 01	1.4108e + 00	1.4108e + 00	1.4108e + 00	7.2345e - 10	0
5.0e - 01	1.5211e + 00	1.5211e + 00	1.5211e + 00	5.3945e - 09	0
6.0e - 01	1.6367e + 00	1.6367e + 00	1.6367e + 00	2.7863e - 08	2.2204e - 16
7.0e - 01	1.7586e + 00	1.7586e + 00	1.7586e + 00	1.1170e - 07	3.5527e - 15
8.0e - 01	1.8881e + 00	1.8881e + 00	1.8881e + 00	3.7203e - 07	2.7089e - 14
9.0e - 01	2.0265e + 00	2.0265e + 00	2.0265e + 00	1.0755e - 06	1.5765e - 13
1.0e + 00	2.1752e + 00	2.1752e + 00	2.1752e + 00	2.7809e - 06	7.6739e - 13

Tableau 5 comparaison des resultats pour l'exemple 5



conclusion

Dans ce mémoire on a présenté une méthode de collocation pour la résolution numérique des équations intégrales linéaires et non linéaires de Volterra en utilisant les polynômes de Taylor. en estimant les erreurs pour cette méthode avec une comparaison de la solution approchée avec la solution exacte, on a choisit les nœuds de Taylor pour réduire Les résultats numériques obtenus à partir de ces exemples, démontrent l'efficacité et la bonne précision de cette méthode, lorsque n (le nombre de nœuds) augmente, le terme d'erreur diminue. ce qui montre que la méthode proposée peut traiter avec succès un problème de Volterra

Il convient de mentionner que la méthode présentée peut être développée et appliquée à aux équations de Volterra non linéaires de type φ^n

Bibliographie

- [1] Alexandre Afgoustidis CEREMADE, Université Paris-Dauphine, 75016 Paris, France.
- [2] B. Gagui, sur les équations intégrales dans les espaces d'Orlicz, doctorat en science université de M'sila 2015.
- [3] M. Guesba, Sur quelques équations intégrales non linéaires, Mémoire de magister université de M'sila 2012.
- [4] S. Guechi, Méthodes Computationnelles pour la Résolution des équations Intégrales Non Linéaires, Thèse de doctorat en science université de M'sila 201
- [5] A.khirani, Etude des équations intégrales non linéaires de Volterra dans les espace fonctionnels, thesis of Doctorate, University of Msila, 2016.
- [6] R. Kress, Linear Integral Equations, Springer-Verlag, New York, 1999. 69, 70
- [7] KANWAL, R. P., and LIU, K. C, 1989, A Taylor expansion approach for solving integral equations. Int. J. Mat. Educ. Sci. Technol., 20, 411-414
- [8] S. Lang, Undergraduate Analysis, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1997.
- [9] Majumdar, Rajeshwari (2017) "Generalization of Pascal's Rule and Leibniz's Rule for Differentiation," RoseHulman Undergraduate Mathematics Journal: Vol. 18 : Iss. 1 , Article 12.
- [10] A. Rahmoune, Résolution Numérique des Equations Intégrales, Mémoire de magister université de M'sila 2004.

- [11] Mehmet Sezer (1994) Taylor polynomial solutions of Volterra integral equations, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 25:5,625-633
- [12] NADIR, M. Cours sur les équations intégrales, université de M'sila 2008.
- [13] M. NADIR : Cours d'analyse fonctionnelle ,université de M'sila Algérie 2004
- [14] M.N. NADIR, Sur la solution numérique des équations intégrales de VolterraFredholm en utilisant les polynômes de Chebyshev, Mémoire Master, Université de M'sila. 2022
- [15] A.M.Wazwaz, Linear and nonlinear integral equations methods and applications, Saint Xavier University chicago, IL 60655, USA.

المخلص:

الهدف من هذه المذكرة هو إيجاد حلول تقريبية لمعادلة فولتر التكاملية من النوع الثاني وذلك باستخدام كثيرات حدود تايلور بالإضافة إلى ذلك، تقديم أمثلة مختلفة لتوضيح دقة الطريقة المقترحة

الكلمات المفتاحية:

كثيرات حدود تايلور- المعادلات التكاملية- المعادلات التكاملية لفولتيرا

Résumé :

Le but de ce mémoire, est de trouver des solutions approchées de l'équation intégrale de Volterra de la seconde espèce, en employant les polynômes de Taylor. De plus, on a donné des exemples pour illustrer la précision, l'efficacité de la méthode proposée

Mots clés :

Polynômes de Taylor- Equations intégrales- Equation intégrale de Volterra

Abstract :

The aim of this thesis, is to find approximate solutions of the Volterra integral equation of the second kind, by using Taylor polynomials. Also, we introduced many examples to illustrate the precision, the efficiency of the proposed method

Key words:

Taylor polynomials- integral equations- Volterra integral equation