Table des matières

0.1 Remerciements

Je tiens d'abord à remercier Dieu pour m'avoir donné courage et la santé pour accomplir ce travail.

Mes vifs remerciement vont ensuite à Monsieur AMROUNE Abdelaziz. Professeur à l'Université de M'sila, pour m'avoir fait l'immense honneur de diriger ce travail. Je tiens à lui témoigner ma profonde gratitude pour l'aide précieuse qu'il ma apporter durant ce travail, pour ses conseils avisés, ses nombreuses remarques et suggestions qui ont pu faire avancer ce travail et surtout ses grandes qualités humaines.

Un grand merci à toute ma famille, pour m'avoir soutenu et aidé tout au long de mes études.

Je saisis aussi cette occasion pour remercier l'ensemble des enseignants du département de mathématique ayant contribué à ma formation durant ces années de spécialité.

Enfin, que tous ceux qui nous ont aidés et encouragés, de près ou de loin, retrouvent notre gratitude et sincères remerciements.

0.2 Introduction

L'une des origines de l'idée de groupe est l'étude des équations algébriques par Joseph-Louis Lagrange 1771. La terminologie de « groupe » est mise en évidence pour la première fois par Evariste Galois 1830 : on peut « grouper » les automorphismes du corps de décomposition d'un polynôme séparable. L'idée de groupe tient aussi ses sources de l'étude de nouvelles géométries, Felix Klein 1872, et de la théorie des nombres : Leonhard Euler, Carl Friedrich Gauss.

En 1965 Lotfi A. Zadeh introduit la notion d'un sous-ensemble flou d'un ensemble dans son article "Fuzzy sets". L'idée de Zadeh a marqué une nouvelle direction et agité l'intérêt des chercheurs dans le monde entier. IL fournit des outils et l'approche du modèle de l'imprécision et de l'incertitude présente dans les phénomènes qui ne disposent pas de frontières nettes. Les développements théoriques rapides et des applications pratiques sur la base. Développements théoriques rapides et des applications pratiques sur la base du concept d'un sous-ensemble flou ont été vus à émerger peu de temps après.

En 1971, Azriel Rosenfeld utilisé la notion d'un sous-ensemble flou d'un ensemble pour introduire la notion d'un sous-groupe floue d'un groupe. L'article de Rosenfeld a inspiré le développement de l'algèbre floue abstraite.

Ce mémoire se compose de trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré à des généralités sur les groupes dans le cas classique.
Dans **le deuxième chapitr**e on introduit la notion de sous ensemble flous telle quelle est conçu par Zedah puis on rappelle les opérations ensemblistes.
Dans **le troisième chapitre** les sous groupes flous ont été introduits par deux façons.
La première on utilise la notion de Zedah pour l'ensemble flou et on introduit la définition d'une manière naturelle.
La deuxième façon on introduit la notion du produit flou de deux sous-ensembles flous et la loi de composition floue afin de donner la définition du groupe flou.

Chapitre 1

Généralités sur les groupes

1.1 Structure de groupe

Dans ce chapitre, nous rappelons des définitions et notions des groupes. Pour plus de détails voir [3, 12, 5, 14].

1.1.1 Loi de composition interne

Soit E un ensemble non vide.

Définition 1.1.1 *Une loi de composition interne sur E est une application de $E \times E$ de E. Si, f est une telle application, on appelle $f(x, y)$ le composé de x et y et on convient de noter $f(x, y) = x \cdot y$, $x * y$, $x \top y$, etc., un ensemble E muni d'une loi interne $*$ est noté $(E, *)$.*
Le couple (E, f) est appelé ***magma.***

Example 1.1.2
1/ *L'addition et la multiplication sont des lois internes dans* $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
2/ *Si E est un ensemble, les opérations $\cap$ et $\cup$ sont des lois internes dans $\mathcal{P}(E)$.*
3/ *Soient E un ensemble et $\mathcal{A}(E * E)$ l'ensemble des applications de E dans E. La composition des applications est une loi interne dans $\mathcal{A}(E * E)$.*

Définition 1.1.3 *Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $(\cdot)$. On dit qu'une partie P de E est stable pour cette loi si :*

$$\forall (x, y) \in P : x \cdot y \in P.$$

1.1.2 Propriétés des opérations internes

Soit $(E, \cdot)$ un magma.

Associative

On dit que $\cdot$ est associative si :

$$\forall (x, y, z) \in E^3 : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

Commutative

On dit que la loi $\cdot$ est commutative si :

$$\forall (x, y) \in E^2 : x \cdot y = y \cdot x.$$

Elément neutre

On dit que $\cdot$ admet un élément neutre, s'il existe $e \in E$ tel que :

$$\forall x \in E : x \cdot e = e \cdot x = x.$$

Remarque 1.1.4 *L'élément neutre, s'il existe il est unique.*
En effet,
soit $\acute{e}$ un autre élément neutre pour la loi interne $(\cdot)$ alors : $\acute{e} = \acute{e} \cdot e = e \cdot \acute{e} = e$.

Elément symétrique

Supposons que e est un élément neutre de E on dit que élément $x \in E$ admet un élément symétrique x' de E si,

$$x \cdot x' = x' \cdot x = e.$$

Son inverse est appelé **opposé** de x.

Notation 1.1.5

	$(G, *)$	$(G, +)$	$(G, \times)$
Elément neutre	e	0	1
Elément symétrique	x'	$-x$	x^{-1}

Proposition 1.1.6 *Soit $(\cdot)$ une loi interne sur E associative et admet un élément neutre :*

1/ *Si $x \in E$ est symétrisable alors son symétrique est unique.*

2/ *Si $x \in E$ et $y \in E$ sont symétrisable alors $x \cdot y$ est symétrisable et son symétrique est donne par : $(x \cdot y)' = y' \cdot x'$.*

Démonstration.

1). On suppose que l'élément symétrique x' et x'' on a :

$$\begin{aligned} x' &= e \cdot x' \\ &= (x'' \cdot x) \cdot x' \\ &= x'' \cdot (x \cdot x') \\ &= x'' \cdot e \\ &= x''. \end{aligned}$$

2). On vérifier que :

$$\begin{aligned} (x \cdot y) \cdot (y' \cdot x') &= (y' \cdot x') \cdot (x \cdot y) \\ &= x \cdot (y \cdot y') \cdot x' \\ &= x \cdot e \cdot x' \\ &= x \cdot x' \\ &= e. \end{aligned}$$

Alors : $(x \cdot y)' = y' \cdot x'$. ■

1.2 Groupes

Définition 1.2.1 *Soit la loi de composition interne* $(\cdot)$ *définie sur un ensemble* G. *On dit que le couple* $(G, \cdot)$ *est un groupe si : la loi* $(\cdot)$ *est associative, possédant un élément neutre et telle que tout élément de* G *est inversible.*

Remarque 1.2.2 *Si la loi de composition interne* $(\cdot)$ *est associative dans ce cas on appelle* $(G, \cdot)$ *est* ***semi-groupe****.*
Si la loi de composition interne $(\cdot)$ *est associative et possède un élément neutre, on dit que* $(G, \cdot)$ *est un* ***monoïde.***

Définition 1.2.3 *Soit* $(G, \cdot)$ *est un groupe. Si la loi* $(\cdot)$ *est commutative on dit que* $(G, \cdot)$ *est un groupe commutatif ou abélien.*

1.3 Sous-groupe

S'auf mention contraire, G désigne toujours un groupe multiplicatif d'élément neutre e.

1.3.1 Notion de sous-groupe, propriétés élémentaires

Définition 1.3.1 G *étant un groupe, une partie* H *non vide de* G *est un* ***sous-groupe*** *de* G *si :*

$$\begin{cases} (x, y) \in H \times H \Rightarrow xy \in H; \\ x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H. \end{cases} \tag{1.1}$$

Example 1.3.2 G *et* (e) *sont des sous-groupes de* G *appelés sous-groupe* ***triviaux*** *de* G.

Définition 1.3.3 *On appelle sous-groupe* ***propre*** *d'un groupe* G *tout sous-groupe de* G *distinct de* G *et* (e).

Notation 1.3.4 *On écrira :*

$H \leq G$ *pour exprimer que* H *est un sous-groupe de* G,

$H < G$ *si* H *est un sous-groupe propre de* G.

Proposition 1.3.5 *Soit* G *un groupe.* H *un sous-groupe de* G. *Alors,*

1) e *appartient à* H.

2) H *est un groupe pour la loi induite sur* H *par celle* G.

Démonstration.

1) Soit x appartenant à H. Alors, x^{-1} appartient à H et donc $xx^{-1} = e$ appartient à H.

2) $(\cdot)$ est associative sur G donc sur H.

D'après le 1, la restriction de $(\cdot)$ à H admet un élément neutre.

Comme H est un sous-groupe, tout élément de H admet un inverse dans H, pour la restriction de $(\cdot)$ à H.

D'où, H est un groupe pour $(\cdot)$ restreinte à H. ■

Théorème 1.3.6 *Soit* H *une partie non vide d'un groupe* G, *alors* H *est un sous-groupe de* G *si et seulement si*

$$\forall (x, y) \left[(x, y) \in H \times H \Rightarrow xy^{-1} \in H\right] \tag{1.2}$$

Démonstration. $-$Supppsons $H \leq G$; soit $(x, y) \in H \times H$, alors $y \in H \Rightarrow y^{-1} \in H$, par suite

$(x, y^{-1}) \in H \times H \Rightarrow xy^{-1} \in H$, d'après (1.1) ; on en déduit (1.2).

$-$Supppsons (1.2) vérifié ; soit $(x, y) \in H \times H$.

$x \in H \Rightarrow (x, x) \in H \times H$, d'où $xx^{-1} = e \in H$;

$e \in H$ et $x \in H \Rightarrow (e, x) \in H \times H$, d'où $ex^{-1} = x^{-1} \in H$; par suite,

$(x, y) \in H \times H \Rightarrow (x, y^{-1}) \in H \times H$, d'où $xy \in H$,

donc (1.2)$\Rightarrow$(1.1). ■

Proposition 1.3.7 *Soit G un groupe et $\{H_i\}_{i\in I}$ une famille de sous-groupes de G alors :* $\underset{i\in I}{\cap} H_i = H_1 \cap H_2 \cap ...H_i,\ _{i\in I}$ *est un sous-groupe de G.*

Démonstration. Soit x, $y \in \underset{i\in I}{\cap} H_i$ et on montre que $xy^{-1} \in \underset{i\in I}{\cap} H_i$

$$\text{On a} \begin{cases} x \in \underset{i\in I}{\cap} H_i \\ et \\ y \in \underset{i\in I}{\cap} H_i \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \in H_i, \forall i = 1, ..., n \\ et \\ y \in H_i, \forall i = 1, ..., n \end{cases} \Longrightarrow x, y^{-1} \in H_{i,i=1,\ldots,n}$$

car H_i est un sous-groupe de G.

Donc : $xy^{-1} \in \underset{i\in I}{\cap} H_i \Rightarrow \underset{i\in I}{\cap} H_i$ est un sous-groupe de G. ∎

Remarque 1.3.8 *En générale $\underset{i\in I}{\cup} H_i$ n'est pas un sous-groupe de G.*
En effet, on peut vérifier, par exemple, que dans le groupe $(\mathbb{Z}, +)$,
$3\mathbb{Z} = \{3x; x \in \mathbb{Z}\}$ *et* $8\mathbb{Z}$ *sont des sous-groupe ; or* $3 + 8 = 11$ *et* $11 \notin 3\mathbb{Z}\cup 8\mathbb{Z}$, *donc* $3\mathbb{Z}\cup 8\mathbb{Z}$ *n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.*
On a cependant le résultat suivant :

Proposition 1.3.9 *Si, dans un groupe G, $(H_i)_{i\in I}$ est une chaine de sous groupes, alors $\underset{i\in I}{\cup} H_i$ est un sous-groupe de G.*

Démonstration. Soient x et y dans $\underset{i\in I}{\cup} H_i$; il existe j et k dans I tels que $x \in H_j$ et $y \in H_k$. La famille des H_i étant totalement ordonnée par l'inclusion, on a $H_j \subseteq H_k$ ou $H_k \subseteq H_j$. Plaçons-nous, par exemple, dans le premier cas ; on a alors x et y dans H_k, d'où $xy^{-1} \in \underset{i\in I}{\cup} H_i$. on en conclut que $\underset{i\in I}{\cup} H_i$ est un sous-groupe de G. ∎

Lemme 1.3.10 *Tout partie stable finie H d'un groupe G est un sous-groupe de G.*

Démonstration. Pour tout $h \in H$, l'application $H \to H$, $x \to hx$ est injective, donc (puisque H est fini) surjective et, de même pour l'application $x \to xh$. Mais $h \in H$ et la surjectivité implique qu'il existe $x \in H$ tel que $hx = h$ et y tel que $yh = h$, d'où $x = y = e \in H$. De même, il existe $x \in H$ tel que $hx = e$ (et y tel que $yh = e$), donc $h^{-1} = x = y \in H$.

Attention : ce lemme n'est plus vrai lorsque H n'est pas fini ! (exemple : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$). ■

1.3.2 Sous-groupe engendré par une partie

Soient G un groupe et B une partie de G, le plus petit sous-groupe de G qui contient B est appelé sous-groupe engendré par B noté $\langle B \rangle$.

Il est claire que : $\langle B \rangle = \bigcap\limits_{i=1}^{n} H_i$ (H_i sont sous-groupes de G qui contient B), on dit que B une partie génératrice de $\langle B \rangle$, et les éléments de B on les appelle générateurs de $\langle B \rangle$.

1.3.3 Classes à droite, classes à gauche modulo un sous-groupe

Relations d'équivalence modulo un sous-groupe

A tout sous-groupe H d'un groupe G, on peut associer deux relation binaires $\mathcal{R}_H$ est ${}_H\mathcal{R}$ définies dans G par :

$$x\mathcal{R}_H y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H \qquad \text{et} \qquad x\,{}_H\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H.$$

Proposition 1.3.11 *G étant un groupe :*

1) *Pour tout sous-groupe H de G, les relations $\mathcal{R}_H$ et ${}_H\mathcal{R}$ sont des relations d'équivalence.*

2) $y \equiv x(\mathcal{R}_H) \Leftrightarrow y \in Hx,$ *où* $Hx = \{hx;\ h \in H\}$;

$y \equiv x({}_H\mathcal{R}) \Leftrightarrow y \in xH,$ *où* $xH = \{xh;\ h \in H\}$.

Démonstration. Démontrons la propriété pour $\mathcal{R}_H$.

1) pour tout $x \in G$, on a $xx^{-1} = e \in H$, dans $x\mathcal{R}_H x$.

Si $xy^{-1} \in H$, alors $(xy^{-1})^{-1} = yx^{-1} \in H$, donc $x\mathcal{R}_H y \Rightarrow y\mathcal{R}_H x$.

Enfin, si $xy^{-1} \in H$ et yz^{-1}, alors $xy^{-1}yx^{-1} = xz^{-1} \in H$, d'où $x\mathcal{R}_H y$ et $y\mathcal{R}_H z \Rightarrow x\mathcal{R}_H z$.

2) $y \equiv x(\mathcal{R}_H) \Leftrightarrow yx^{-1} \in H$,

$yx^{-1} \in H \Leftrightarrow \exists h \in H,\ y = hx$,

d'où $y \equiv x(\mathcal{R}_H) \Leftrightarrow y \in Hx$. ■

Définition 1.3.12 *H étant un sous-groupe d'un groupe G, les relations $\mathcal{R}_H$ et ${}_H\mathcal{R}$ sont respectivement appelées : relation d'équivalence à droite et à gauche, modulo H dans G. Pour $x \in G$, les ensembles Hx et xH sont appelés classes à droite et classes à gauche de x modulo H.*

1.3.4 Sous-groupes normaux

Définition 1.3.13 *Soit G un groupe. H un sous-groupe de G. H est dit normal (ou distingué) si, $\mathcal{R}_H =_H \mathcal{R}$.*

Remarque 1.3.14

1/ *Dans tout groupe G, (e) et G sont sous-groupes normaux,*

2/ *Dans un groupe abélien, tout sous-groupe est normal.*

Théorème 1.3.15 *H est un sous-groupe normal d'un groupe G ; alors les cinq conditions suivante sont équivalentes :*

1/ $Hx = xH, \forall x \in G$,

2/ $xHx^{-1} = H, \forall x \in G$,

3/ $x^{-1}Hx = H, \forall x \in G$,

4/ $xhx^{-1} \in H, \forall h \in H, \forall x \in G$,

5/ $x^{-1}hx \in H, \forall h \in H, \forall x \in G$.

Démonstration. Par définition, $H \trianglelefteq G$ équivalente à $\mathcal{R}_H =_H \mathcal{R}$, or, $\mathcal{R}_H =_H \mathcal{R} \Leftrightarrow Hx = xH$, $\forall x \in G$, d'où $H \trianglelefteq G \Leftrightarrow (1)$.

- Supposons $Hx = xH$; pour tout $h \in H$, il existe $h' \in H$ tel que $hx = xh'$, C'est -à-dire

$h = xh'x^{-1}$; d'où $H \subseteq xHx^{-1}$.

L'hypothèse implique aussi que, pour tout $h \in H$, il existe $h'' \in H$ tel que $xh = h''x$, c'est -à-dire $xhx^{-1} = h''$; d'où $xHx^{-1} \subseteq H$; par suite (1) $\Leftrightarrow$ (2).

- Compte tenu de la bijection $x \mapsto x^{-1}$ de G sur lui-même, on a (2) $\Leftrightarrow$ (3) et aussi (5) $\Leftrightarrow$ (4).

- Montrons que (1) équivalente à (4).

Si $Hx = xH$, alors pour tout $h \in H$, $xh \in Hx$, donc $xhx^{-1} \in H$; on en déduit : (1) $\Rightarrow$ (4).

Supposons (4) vérifiée ; soit $xh \in xH$; alors (4) implique $xhx^{-1} \in H$, donc il existe $h' \in H$ tel que $xhx^{-1} = h'$, c'est-à-dire $xh = h'x$; par suite $xH \subseteq Hx$.

On prouverait de même que $Hx \subseteq xH$ d'où (4) $\Rightarrow$ (1). ■

Proposition 1.3.16 *On suppose que H est normal dans G.*

Alors, H est normal dans tout sous-groupe de G contenant H.

Démonstration. Soit K un sous-groupe de G contenant H.

Comme K contient H, H est un sous-groupe de K.

Pour tout élément g de G et pour tout élément h de H, ghg^{-1} appartient à H.

Mais K étant inclus dans G, pour tout k appartenant à K, khk^{-1} est inclus dans H c'est à dire H est normal dans K. ■

Remarque 1.3.17 *Si H est un sous-groupe normal de K et K un sous-groupe normal de G alors H n'est pas forcément normal dans G (la normalité n'est pas transitive),*

Définition 1.3.18 *Soit G un groupe quelconque et $Z(G)$ son* ***centre*** *:*

$$Z(G) = \{a \in G;\ ax = xa,\ \forall x \in G\}.$$

$Z(G)$ est un sous-groupe de G et quels que soient $x \in G$ et $a \in Z(G)$, $xax^{-1} \in Z(G)$, donc $Z(G) \trianglelefteq G$.

On vérifie que ; plus généralement :

$$(H \leq G \text{ et } H \subseteq Z(G)) \Rightarrow H \trianglelefteq G.$$

Remarque 1.3.19 *G est abélien si et seulement si $Z(G) = G$.*

Définition 1.3.20 *G est un groupe simple, si G ne possède aucun sous-groupe normal propre et différent de G et (e),*

$$G \text{ groupe simple} \Longleftrightarrow \forall H \leq G,\ H \trianglelefteq G \Rightarrow H = (e) \text{ ou } H = G.$$

Example 1.3.21 *Tout groupe fini dont lordre est un nombre premier est dit simple.*

1.3.5 Groupes cycliques

Définition 1.3.22 *Soit $(G, \cdot)$ un groupe, si l'ensemble G est fini, alors le groupe $(G, \cdot)$ est dit un **groupe fini** et le cardinal de G est appelé l'ordre de G noté $|G|$ ou bien $O(G)$.*

Groupe de type fini

Le groupe engendré par une partie de cardinal fini est dit de type fini

$$G = \langle B \rangle \text{ et } |B| \text{ est fini} \Longleftrightarrow G \text{ de type fini}$$

Groupes monogènes et groupes cycliques

Définition 1.3.23 *Soit G un groupe et $\langle x \rangle$ est le sous-groupe de G engendré par l'élément x, le groupe G est dit **monogène** si $\langle x \rangle = G$.*
*Si G un groupe monogène fini ($|G| = n$), alors on dit que G est un groupe **cyclique** d'ordre n.*

1.4 Homomorphismes de groupes

Nous allons étudier les applications qui conservent la structure de groupe.

Définition 1.4.1 *Soit $(G, \cdot)$ et $(G', *)$ deux groupes :*

a. On dit que l'application $f : G \to G'$ est homomorphisme "morphisme" si :

$$\forall x_1, x_2 \in G : f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) * f(x_2).$$

L'ensemble des morphismes d'un groupe G dans un groupe G' sera noté $Hom\,(G, G')$.
b. On dit que l'application $f : G \to G'$ est isomorphisme si f est un homomorphisme bijective. On dit simplement que G isomorphisme à G'.
c. On dit que l'application f est un endomorphisme si f est un homomorphisme de G dans lui-même.
L'ensemble des endomorphismes d'un groupe sera noté $End\,(G)$
d. On dit que l'application f est un automorphisme si f est un endomorphisme bijective dans lui-même. L'ensemble des automorphismes de G est noté $Aut(G)$.
*e. On dit que l'application f est un monomorphisme (ou morphisme **monique)** si f est un morphisme injective.*
f. On dit que l'application f est un épimorphisme si f est un morphisme surjective.

Dans la suite, les groupes G et G' seront notés multiplicativement, leurs éléments unités étant respectivement e et e'.

Proposition 1.4.2 *Soient H un groupe, et $f : G \to G'$ et $g : G' \to G''$ des homomorphismes de groupes.*
Alors, $g \circ f : G \to G''$ est un homomorphisme de groupes.

Démonstration. Soient x et y dans G;
$g \circ f\,(xy) = g\,(f\,(xy))$
$g \circ f\,(xy) = g\,(f\,(x)\,f\,(y))$, car $f \in Hom\,(G, G')$;
$g \circ f\,(xy) = g\,(f\,(x))g(f\,(y))$, car $g \in Hom\,(G', G'')$
d'où $g \circ f\,(xy) = (g \circ f\,(x))\,(g \circ f\,(y))$. ■

Remarque 1.4.3 *Si* $f : G \to G'$ *est un isomorphisme.*
L'application réciproque $f^{-1} : G' \to G$ *est encore un isomorphisme de groupes.*

Proposition 1.4.4 *Soient* G *et* G' *deux groupes isomorphes. Alors,* G *est abélien si et seulement si* G' *est abélien.*

Démonstration. Soit f un isomorphisme de G dans G'.
Soient g_1'et g_2' appartenant à G'.
f étant bijective, il existe $g_1$et g_2 dans G_1tels que $g_1' = f(g_1)$ et $g_2' = f(g_2)$.
f étant un homomorphisme, on a $g_1'g_2' = f(g_1)f(g_2) = f(g_1g_2)$.
D'où, si G est abélien.

$$\begin{aligned} g_1'g_2' &= f(g_1g_2) \\ &= f(g_2g_1) \\ &= f(g_2)f(g_1) \\ &= g_2'g_1' \end{aligned}$$

et donc G' est abélien.
Si G' est abélien,

$$\begin{aligned} f(g_1g_2) &= g_1'g_2' \\ &= g_2'g_1' \\ &= f(g_2)f(g_1) \\ &= f(g_2g_1) \end{aligned}$$

et donc, comme f est injective, $g_1g_2 = g_2g_1$ et par conséquent G est abélien. ■

Proposition 1.4.5 $Aut(G)$ *est un groupe pour la composition.*

Démonstration. $Aut(G)$ n'est pas vide car il contient l'identité. On a vu, à la proposition (1.4.2), que le composé de deux éléments de $Aut(G)$, ($Aut(G)$ est inclus dans $Hom(G)$) est un élément de $Hom(G)$.
De plus, si f_1 et f_2 sont des applications bijectives alors $f_1 \circ f_2$ est bijective d'inverse $(f_1 \circ f_2)^{-1} = f_2^{-1} \circ f_1^{-1}$.

D'où, le composé de deux éléments de $Aut(G)$ est encore un élément de $Aut(G)$.

Soit f appartenant à $Aut(G)$. Posons $\theta = f^{-1}$.

Montrons que θ appartient à $Hom(G)$: soient g et g' deux éléments de G.

f étant un homomorphisme, $f(\theta(g)\theta(g')) = f(\theta(g))f(\theta(g')) = gg' = f(\theta(gg'))$ par définition de θ. D'où, f étant injective (car bijective), $\theta(gg') = \theta(g)\theta(g')$.

De plus, θ est bijective d'inverse f donc appartient à $Aut(G)$.

$(Aut(G), \theta)$ est un groupe. ∎

1.4.1 Image et noyau d'un morphisme

Définition 1.4.6 *Soit G et G' deux groupes et $f : G \to G'$ est un homomorphisme*

a) On appelle noyau de f l'ensemble :

$$\ker(f) = f^{-1}(e') = \{x \in G : f(x) = e'\}.$$

b) On appelle image de f l'ensemble :

$$\mathrm{Im}(f) = f(G) = \{y \in G' : y = f(x)\}.$$

Proposition 1.4.7 *Tout $f \in Hom(G, G')$ vérifie les propriétés suivantes :*

1. $f(e) = e'$.
2. $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$, *quel que soit x dans G.*
3. $f(x^n) = (f(x))^n$, *quel que soit x dans G et n dans $\mathbb{Z}$.*
4. $H \leq G \Rightarrow f(H) \leq G'$.
5. $H' \leq G' \Rightarrow f^{-1}(H') \leq G$, $f(H') = \{x \in G; f(x) \in H\}$.

Démonstration.

1) La relation $xe = ex = x$ donne $f(xe) = f(ex) = f(x)$ pour tout $x \in G$.

Il en résulte :

$$f(x)f(e) = f(x) \text{ et } f(e)f(x) = f(x).$$

Donc $f(e)$ et l'élément neutre e' de G'.

2) La relation $xx^{-1} = x^{-1}x = e$ donne $f(xx^{-1}) = f(x^{-1}x) = f(e)$ pour tout $x \in G$.

D'où $f(x) f(x^{-1}) = f(x^{-1}) f(x) = e'$, il en résulte que $f(x^{-1})$ est le symétrique de $f(x)$.

Alors $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$.

3) Pour $n = 0$, $x^0 = e$ et $(f(x))^0 = e'$; on est ramené au 1°.

Pour $n > 0$, $x^n = \underbrace{xx...x}_{n \text{ fois}}$, d'où

$$f(x^n) = \underbrace{f(x) f(x) ... f(x)}_{n \text{ fois}}$$

donc $f(x^n) = (f(x))^n$.

Pour $n < 0$, on pose $n = -n'$, $n' > 0$;

$x^n = (x^{-1})^n \Rightarrow f(x^n) = (f(x^{-1}))^{n'} = (f(x))^{-n'}$

d'où $f(x^n) = (f(x))^n$.

4) $f(H) = \{f(x) ; x \in H\}$. Soient y_1 et y_2 dans $f(H)$; il existe x_1 et x_2 dans H tels que $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$.

$$y_1 y_2^{-1} = f(x_1)(f(x_2))^{-1} = f(x_1) f\left(x_2^{-1}\right),$$

d'où $y_1 y_2^{-1} = f\left(x_1 x_2^{-1}\right)$.

$$(x_1 \in H,\ x_2 \in H \text{ et } H \leq G) \Rightarrow x_1 x_2^{-1} \in H;$$

par suite $y_1 y_2^{-1} \in f(H)$, donc $f(H) \leq G'$.

5) Soient x_1 et x_2 dans $f^{-1}(H')$; alors $f(x_1) \in H'$ et $f(x_2) \in H'$; H' étant un sous-groupe de G', on a

$$f(x_1)(f(x_2))^{-1} = f(x_1) f\left(x_2^{-1}\right) = f\left(x_1 x_2^{-1}\right) \text{ dans } H',$$

d'où $x_1 x_2^{-1} \in f^{-1}(H')$ et par suite $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G. ■

Corollary 1.4.8

Soit $f \in Hom(G, G')$, alors :

1/ $\ker(f)$ *est un sous-groupe de* G.

2/ $\mathrm{Im}(f)$ *est un sous-groupe de* G'.

Ce propriétés découlent de l'application de la proposition aux cas particuliers : $H = G$ et $H' = (e')$.

Proposition 1.4.9 *Pour* $f \in Hom(G, G')$, *on a :*

1) f *surjectif* $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = G'$.

2) f *injectif* $\Leftrightarrow \ker(f) = (e)$.

Démonstration. La première propriété est immédiate puisque, par définition, f est surjectif si et seulement si, quelque soient x et $x\prime$ dans G, $f(x) = f(x')$ implique $x = x'$.

– Supposons f injectif; soit $x \in \ker(f)$, alors $f(x) = e' = f(e)$, d'où $x = e$ et par suite $\ker(f) = (e)$.

– Supposons $\ker(f) = (e)$; soient x et x' dans G tels que $f(x) = f(x')$; on en déduit :

$$e' = (f(x))^{-1} f(x') = f\left(x^{-1}\right) f(x'), \text{ d'où } e = f\left(x^{-1}x'\right),$$

ce qui implique $x^{-1}x' \in \ker(f)$;

$$\ker(f) = (e) \Longrightarrow x^{-1}x' = e, \text{ d'où } x' = x,$$

f est donc injectif. ■

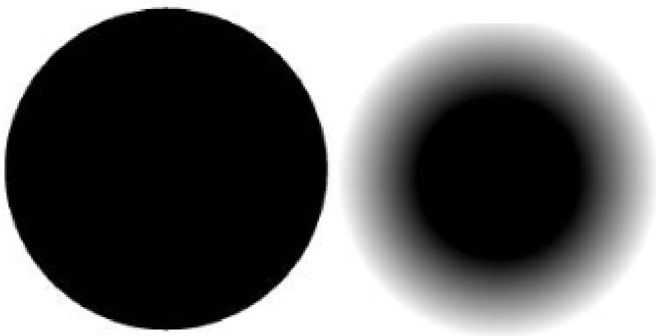
Chapitre 2

Sous-ensembles flous

2.1 Sous-ensembles flous

Dans la théorie des ensembles classiques, il n'y a que deux situations possibles pour qu'un élément, appartenir ou ne pas appartenir à un sous-ensemble.

Le mérite de Zadeh a été de tenter de sortir de cette logique booléenne en introduisant la notion d'appartenance pondérée : permettre des graduations dans l'appartenance d'un élément à un sous-ensemble, c'est -à-dire d'autoriser un élément à appartenir plus mois fortement à ce sous-ensemble on se réfère à [1, 2, 4, 7, 13, 10, 15].



(a) Ensemble classique (b) Ensemble flou

Figure1 : Ensembles classique et ensembles flou

Définition 2.1.1 ***(Sous-ensemble classique ou partie nette)*** *[4] Un sous-ensemble classique A de X est défini par une fonction caractéristique $\mathcal{X}_A$ qui prend la valeur* 0 *pour* *les éléments de* X *n'appartenant pas à* A *et la valeur* 1 *pour ceux qui appartiennent à* A :

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{X}_A : & X & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1 \ si \ x \in A; \\ 0 \ si \ x \notin A. \end{cases} \end{array}$$

Définition 2.1.2 ***(Sous-ensemble flou ou partie flou)*** *[1] Soit* X *un ensemble de référence. Un sous-ensemble flou* A *de* X *est défini comme l'ensemble de couples :*

$$A = \{\langle x, \mu_A(x)\rangle, x \in X\}$$
$$\text{avec } \mu_A : X \longrightarrow [0,1]$$

Remarque 2.1.3 *Ainsi, un sous-ensemble flou* A *de* X *est caractérisé par une fonction d'appartenance* $\mu_A(x)$ *qui associe, à chaque point* x *de* X *un réel dans l'intervalle* $[0,1]$ *;* $\mu_A(x)$ *représente le degré d'appartenance de* x *à* A*. On observe les trois cas possibles suivants :*

$*$ $\mu_A(x) = 0$ *si* x *n'appartient par à* A;

$*$ $0 < \mu_A(x) < 1$ *si* x *appartient partiellement à* A;

$*$ $\mu_A(x) = 1$ *si* x *appartient entièrement à* A.

Notation 2.1.4

- *Dans la suite,* $\mathcal{F}(X)$ *désigne l'ensemble de toutes les parties flous de* X.
- *Le sous-ensemble flou vide est noté* $\emptyset$; *il est défini par :* $\mu_\emptyset(x) = 0, \forall\ x \in X$.

Example 2.1.5 *Soit* $X = \{a, b, c\}$. *On considère* $A = \{\langle a, 0.5\rangle, \langle b, 0.1\rangle, \langle c, 0.9\rangle\}$.
Alors, A *est un sous-ensemble flou. Les degrés d'appartenance de* a, b *et* c *dans* A *sont, respectivement,* 0.5, 0.1 *et* 0.9.

Example 2.1.6 $\mu_{jeune}[0,100] \to [0,1]$

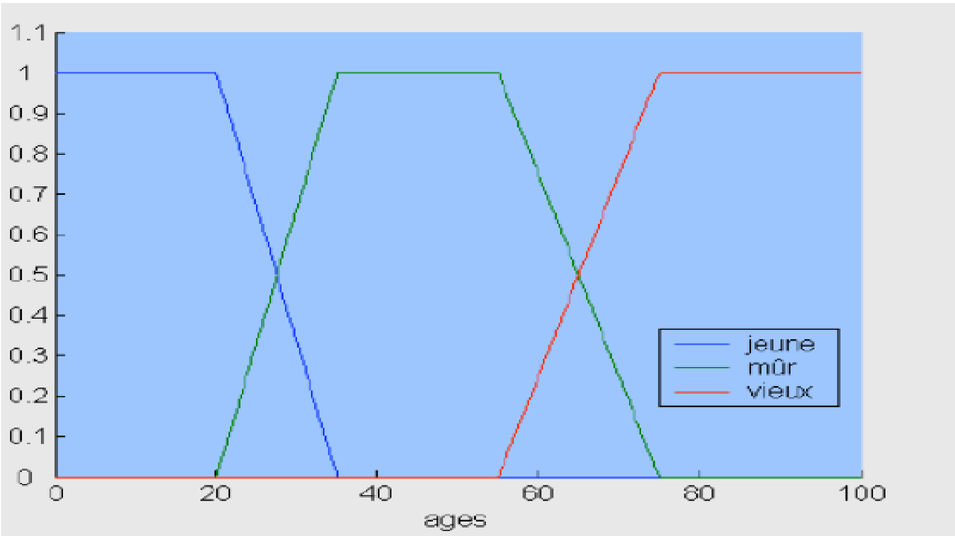
$$x \to \begin{cases} \mu_{jeune}(x) = 1, & si \quad x \leq 20; \\ \mu_{jeune}(x) = \frac{35-x}{15}, & si \quad 20 < x < 35; \\ \mu_{jeune}(x) = 0 & si \quad x \geq 35. \end{cases}$$

$\mu_{m\hat{u}r}\,[0,100] \longrightarrow [0,1]$

$$x \longrightarrow \begin{cases} \mu_{m\hat{u}r}(x) = 0, & si \quad x \leq 20 \quad ou\ x \geq 75; \\ \mu_{m\hat{u}r}(x) = \frac{35-x}{15}, & si \quad 20 < x < 35; \\ \mu_{m\hat{u}r}(x) = 1, & si \quad 35 \leq x \leq 55; \\ \mu_{m\hat{u}r}(x) = \frac{75-x}{20}, & si \quad 55 < x < 75. \end{cases}$$

$\mu_{vieux}\,[0,100] \longrightarrow [0,1]$

$$x \longrightarrow \begin{cases} \mu_{vieux}(x) = 0, & si \quad x \leq 55; \\ \mu_{vieux}(x) = \frac{x-55}{20}, & si \quad 55 < x < 75; \\ \mu_{vieux}(x) = 1 & si \quad x \geq 75. \end{cases}$$



Example 2.1.7 *On définit un sous- ensemble flou $A = \{nombre\ réel\ près\ de\ 0\}$. La frontière pour voir les résultats "nombre réel près de 0" est plutôt ambiguë. La possibilité de nombre réel x à être membre d'ensemble prescrit peut être défini par la fonction d'appartenance suivante.*

$$\mu_A\ (x) = \frac{1}{1+x^2}$$

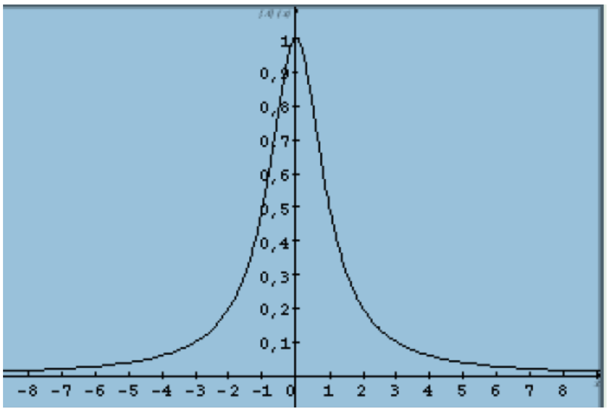


Fig : nombre réel près de 0

2.2 Caractéristiques d'un sous-ensemble flou

Un sous-ensemble flou est complètement défini par la donnée de sa fonction d'appartenance. A partir d'une telle fonction, un certain nombre de caractéristiques du sous-ensemble flou peuvent être étudiées.

Définition 2.2.1 *[10]Le Support d'un sous-ensemble flou* A *de* X, *noté* ***Supp***(A), *est l'ensemble de tous les éléments qui lui appartiennent au mois un petit peu, il est représenté par :*

$$Supp(A) = \{x \in X \ / \ \mu_A(x) \neq 0\}$$

Définition 2.2.2 *[7]Le point de croisement d'un sous-ensemble flou* A *dans* X *est le sous-ensemble des éléments de* X *pour les quels la fonction d'appartenance prend une valeur égale à* 0.5. *C'est l'ensemble des éléments de* X *qui appartiennent autant à* A *qu'à son complémentaire :*

$$C(A) = \{x \ / \ \mu_A(x) = 0.5\}$$

Définition 2.2.3 *[10]Le noyau d'un sous-ensemble flou* A *de* X, *noté* ***Noy***(A), *est l'ensemble de tous les éléments qui lui appartiennent complètement, il est représenté par :*

$$Noy(A) = \{x \in X \ / \ \mu_A(x) = 1\}$$

Remarque 2.2.4 *[13]Si A et B deux sous-ensembles flous de l'ensemble X, on dit que :*

1. *A est plus spécifique que B si $noy(A) \subseteq noy(B)$ et $Supp(A) \subseteq Supp(B)$.*
2. *A est plus précis que B si $noy(A) = noy(B)$ et $Supp(A) \subsetneq Supp(B)$.*

Définition 2.2.5 *[10]Le hauteur d'un sous-ensemble flou A de X ; noté $H(A)$, est la valeur maximale atteinte sur tout le support de A :*

$$H(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x)$$

A est dit normalisé si $H(A) = 1$.

Définition 2.2.6 *[1]Le cardinalité d'un sous-ensemble flou A fini X ; noté $|A|$, est le nombre d'éléments appartenant à A pondéré par leur degré d'appartenance. Formellement, pour A fini :*

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x)$$

Si A est continu, le nombre d'élément d'un ensemble flou A définir par :

$$Card(A) = \int_X \mu_A(x)\, dx$$

Remarque 2.2.7 *Si A est un sous-ensemble de X au sens classique, alors A est normalisé, $A = SuppA$, $A = noyA$ et $|A| = CardA$.*

Définition 2.2.8 *[7]($\alpha-$**coupes**) Pour toute valeur α de l'intervalle $[0,1]$, on appel $\alpha-$coupe d'un sous-ensemble flou A de X (resp. Coup strict), le sous-ensemble noté A_α (resp A_α) des éléments de X pour les quels la fonction d'appartenance est supérieure ou égale (resp, strictement supérieure) à α. Elles sont définies comme suit :*

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \{x \in X, \mu_A(x) \geq \alpha\}, \alpha \in]0,1], \\ A_{\overline{\alpha}} &= \{x \in X, \mu_A(x) > \alpha\}, \alpha \in [0,1[. \end{aligned}$$

Les propriétés suivantes sont valides

$*\ A_1 = Noy(A)$

$*\ A_{\overline{0}} = Supp(A)$

Example 2.2.9 *Soit* $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$

$A = \{\langle x_1, 0.3\rangle, \langle x_2, 0.17\rangle, \langle x_3, 0.18\rangle, \langle x_4, 0\rangle, \langle x_5, 0.5\rangle, \langle x_6, 0.63\rangle\}$ *de* X.

Donc :

$*\ A_{0.2} = \{x_1, x_3, x_5, x_6\}$.

$*\ A_1 = \emptyset$.

$*\ A_{0.5} = \{x_3, x_5, x_6\}$.

$*\ A_{0.75} = \{x_3\}$.

Proposition 2.2.10 *[2, 13],Les* α*-coupes vérifient :*

a) $\emptyset_\alpha = \emptyset$.

b) $X_\alpha = X$.

c) $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$.

d) $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$.

e) $A \subset B \Leftrightarrow A_\alpha \subset B_\alpha$.

f) $\alpha < \beta \Rightarrow A_\alpha \supset B_\alpha$.

g) *Si* $A_\alpha = B_\alpha$; $\forall \alpha \in]0, 1]$ *alors* $A = B$.*"principe de determination de Moisil"*

h) $A_\beta = \bigcap\limits_{\alpha<\beta} A_{\overline{\alpha}}$.

Démonstration.

a)

$$\begin{aligned} \emptyset_\alpha &= \{x \in X / \ \mu_\emptyset \geq \alpha\} \\ &= \{x \in X / \ 0 \geq \alpha\} = \emptyset. \end{aligned}$$

b) $x \in X_\alpha \Rightarrow x \in X,\ X_\alpha \subset X$,

si $x \in X : \mu_X(x) = 1 \geq \alpha \Rightarrow x \in X_\alpha,\ \forall \alpha \in [0, 1]$, alors $X_\alpha = X$.

c)

$$
\begin{aligned}
(A \cup B)_\alpha &= \{x \in X / \ \mu_{A\cup B}(x) \geq \alpha\} \\
&= \{x \in X / \ \max(\mu_A(x), \mu_B(x))\} \geq \alpha \\
&= \{x \in X / \ \mu_A(x) \geq \alpha \text{ ou } \mu_B(x)\} \geq \alpha \\
&= \{x \in X \ / \ \mu_A(x) \geq \alpha\} \cup \{x \in X \ / \ \mu_B(x) \geq \alpha\} \\
&= A_\alpha \cup B_\alpha.
\end{aligned}
$$

$d)$

$$
\begin{aligned}
(A \cap B)_\alpha &= \{x \in X / \ \mu_{A\cap B}(x) \geq \alpha\} \\
&= \{x \in X / \ \min(\mu_A(x), \mu_B(x))\} \geq \alpha \\
&= \{x \in X / \ \mu_A(x) \geq \alpha \text{ et } \mu_B(x)\} \geq \alpha \\
&= \{x \in X \ / \ \mu_A(x) \geq \alpha\} \cap \{x \in X \ / \ \mu_B(x) \geq \alpha\} \\
&= A_\alpha \cap B_\alpha.
\end{aligned}
$$

$e)$ $-$Si $A \subset B$; $x \in A_\alpha \Rightarrow \mu_A(x) \geq \alpha$ mais $\mu_B(x) \geq \mu_A(x)$;

$\mu_B(x) \geq \alpha \Rightarrow x \in B_\alpha$;

$-$ supposons $A_\alpha \subset B_\alpha$; soit $x \in X$, $\mu_A(x) \geq \alpha_0$.

$*$ $\alpha_0 = 0$, $\mu_A(x) = 0 \leq \mu_B(x)$

$*$ $\alpha_0 \neq 0$, $x \in A_{\alpha_0} \Rightarrow x \in B_{\alpha_0}$,

donc $\mu_B(x) \geq \alpha_0 \Rightarrow A \subset B$.

$f)$ $-$Soit $x \in A_\beta \Rightarrow \mu_A(x) \geq \beta \geq \alpha \Rightarrow \mu_A(x) \geq \alpha$; donc $x \in A_\alpha$,

Alors $A_\beta \subset A_\alpha$.

$g)$ On montre que $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ $\forall x \in X$;

soit $x \in X$, $\mu_A(x) = \alpha_0$, $\forall \alpha \in [0, 1]$;

si $\alpha_0 = 0$, $\mu_B(x) \geq 0 \Rightarrow \mu_B(x) \geq \mu_A(x)$

si $\alpha_0 > 0$, c'est-à-dire $\alpha \in]0, 1]$; $\mu_A(x) = \alpha_0 \Rightarrow x \in A_{\alpha_0} = B_{\alpha_0} \Rightarrow \mu_B(x) \geq \alpha_0$;

donc $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$, un raisonnement analogue montre $\mu_B(x) \leq \mu_A(x)$

$h)$ Supposons $x \in A_\beta \Rightarrow \mu_A(x) > \alpha \Rightarrow x \in A_{\overline{\alpha}}$ $\forall \alpha$ tels que $\alpha < \beta$

$\Rightarrow x \in \bigcap\limits_{\alpha<\beta} A_{\overline{\alpha}}$, alors $A_\beta \subset \bigcap\limits_{\alpha<\beta} A_{\overline{\alpha}}$

supposons $x \in \bigcap\limits_{\alpha<\beta} A_{\overline{\alpha}} \Rightarrow x \in A_{\overline{\alpha}}$ $\forall \alpha < \beta \Rightarrow \mu_A(x) > \alpha, \forall \alpha < \beta$

on pose $\alpha_0 = \mu_A(x) < \beta \Rightarrow \alpha_0 < \beta \Rightarrow \mu_A(x) > \alpha_0$; $\alpha_0 > \alpha_0$ contradiction

$\Rightarrow \mu_A(x) \geq \beta$. Donc $A_\beta = \underset{\alpha<\beta}{\cap} A_{\overline{\alpha}}$. ■

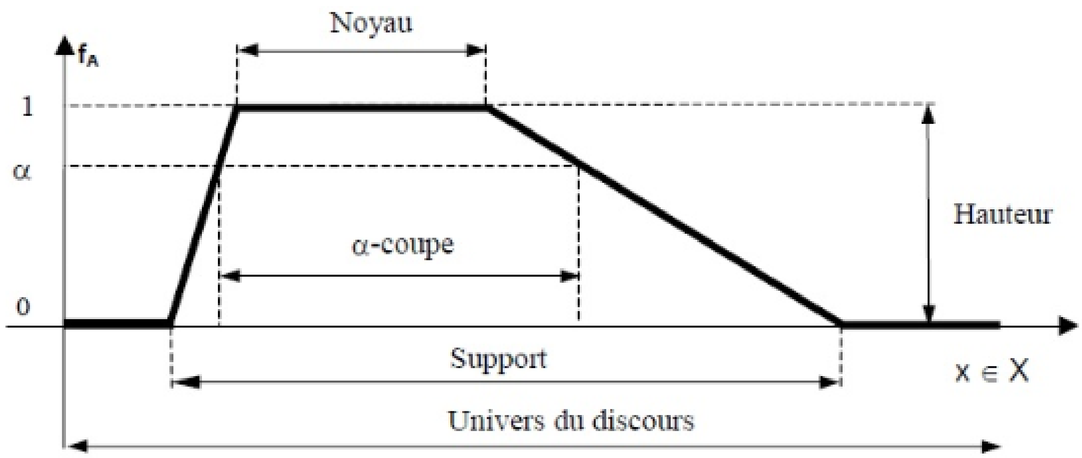


Figure 2 : Support, hauteur, noyau et α − coupes d'un sous-ensemble flou

Théorème 2.2.11 *[7] :(Théorème de décomposition)*

$$\forall x \in X,\ \mu_A(x) = \sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha \mathcal{X}_{A_\alpha}(x).\ \textit{Où :}\ \mathcal{X}_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & si \quad \mu_A(x) \geq \alpha; \\ 0 & \quad sinon. \end{cases}$$

Ce théorème montre qu'il est possible de reconstituer un sous-ensemble flou A à partir de ses α-coupes. En fait, le théorème permet de définir la fonction d'appartenance μ_A à partir des fonctions caractéristiques des α-coupes

Définition 2.2.12 ***Le singleton flou*** *est un sous-ensemble flou A de X vérifiant :*

$$\begin{aligned} \mu_{\{x\}}(x) &= 1 \textit{ pour } \{x\} \textit{ de } X; \\ \mu_{\{x\}}(y) &= 0 \textit{ pour tout } y \neq x. \end{aligned}$$

2.3 Opérations sur les sous-ensembles flous

Les opérations usuelles définies sur les ensembles classiques on été généralisées aux ensembles flous.

Supposons que A et B sont deux sous-ensembles flous définis dans un univers du discours X par leurs fonction d'appartenance μ_A et μ_B. On peut définir des opérations ensemblistes telles que l'égalité, l'inclusion, l'intersection, l'union et la complémentation grâce à des opérations sur les fonctions d'appartenance.

Définition 2.3.1 *[7]Deux ensembles A et B sont dits égaux, propriété que l'on note $A = B$, si leurs fonctions d'appartenance prennent la même valeur en tout point de X :*

$$\forall x \in X,\ \mu_A(x) = \mu_B(x)$$

Example 2.3.2 *Soit* $X = \{a, b, c, d\}$.
$A = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 0.3\rangle, \langle c, 0.5\rangle, \langle d, 0.9\rangle\}, B = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 0\rangle, \langle c, 0.5\rangle, \langle d, 0.9\rangle\}$ *deux sous-ensembles flous de X.*
On a $\mu_A(b) \neq \mu_B(b)$ donc $A \neq B$.

Définition 2.3.3 *[7]On dit que A est inclus dans B, et on note $A \subseteq B$, si tout élément x de X qui appartient à A appartient aussi à B avec un degré au moins aussi grand*

$$\forall x \in X,\ \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

Example 2.3.4 *Soit* $X = \{x_1, x_2\}$ *un ensemble.*
$A = \{\langle x_1, 0\rangle, \langle x_2, 0.4\rangle\}$; $B = \{\langle x_1, 0.2\rangle, \langle x_2, 0.6\rangle\}$ *deux sous-ensembles flous de X.*
On a : $\mu_A(x_1) \leq \mu_B(x_1)$ et $\mu_A(x_2) \leq \mu_B(x_2)$, donc $A \subseteq B$.

Remarque 2.3.5 *L'inclusion définit une relation d'ordre sur $\mathcal{F}(X)$, $A \subseteq A$ (réflexivité), $A \subseteq B$ et $B \subseteq C$, $A \subseteq C$ (transitivité), $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$, implique $A = B$ (antisymétrie).*

Définition 2.3.6 *[7]Le complément de A, que l'on note $\overline{A}$, est le sous-ensemble flou de X défini par :*

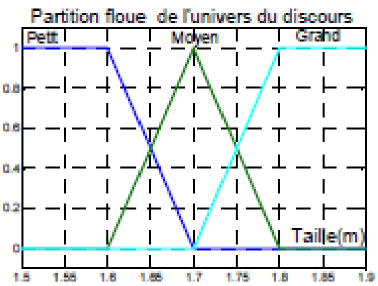
$$\begin{aligned} \overline{A} &= \{(x, \mu_{\overline{A}}(x) / x \in X)\} \\ \textit{avec} &: \ \forall x \in X,\ \mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x). \end{aligned}$$

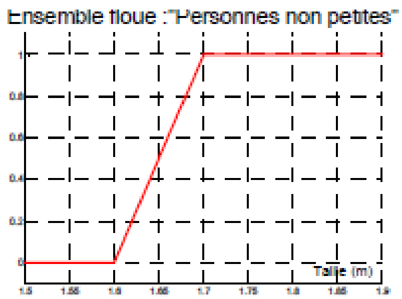
Example 2.3.7 *Soit* $X = \{a, b, c\}$ *un ensemble et* $A = \{\langle a, 0.5\rangle, \langle b, 0.3\rangle, \langle c, 0.65\rangle\}$ *sous-ensemble flou de* X.

donc $\overline{A} = \{\langle a, 1 - 0.5\rangle, \langle b, 1 - 0.3\rangle, \langle c, 1 - 0.65\rangle\}$

$\Longrightarrow \overline{A} = \{\langle a, 0.5\rangle, \langle b, 0.7\rangle, \langle c, 0.35\rangle\}$.

Example 2.3.8





Remarque 2.3.9 *On peut faire quelques remarques sur cette définition dans les ensembles flous :*

•*Le principe du tiers exclus n'est plus vérifié, en général. C'est à dire qu'en général, on a* $\left(A \cup \overline{A} \neq X\right)$.

L'égalité se produisant, par exemple, dans le cas particulier de la théorie des ensembles classiques.

Cela vient directement de la définition.

En effet, $\exists x \in A;\ \max\left(\mu_A(x),\ 1 - \mu_A(x)\right) \neq 1$ *en général.*

•*De même, on a généralement* $\left(A \cap \overline{A} \neq \emptyset\right)$.

Car, si $A \neq \emptyset$ *et* $A \neq X$, $\exists x \in A;\ \min\left(\mu_A(x),\ 1 - \mu_A(x)\right) \neq 0$.

•*Par contre, les autres propriétés sont conservées, notamment :*

$\overline{\overline{A}} = A;\ \overline{\emptyset} = X,\ \overline{X} = \emptyset,\ |A| + \left|\overline{A}\right| = X,$ *si* X *est fini.*

Example 2.3.10 *Soit* $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ *un ensemble*

$A = \{\langle x_1, 0.25\rangle, \langle x_2, 0.33\rangle, \langle x_3, 0.56\rangle\}$ *sous-ensemble flou de* X.

On a $\overline{A} = \{\langle x_1, 0.75\rangle, \langle x_2, 0.67\rangle, \langle x_3, 0.46\rangle\}$.

Donc $A \cup \overline{A} = \{\langle x_1, 0.75\rangle, \langle x_2, 0.67\rangle, \langle x_3, 0.56\rangle\} \neq X.$

$A \cap \overline{A} = \{\langle x_1, 0.25\rangle, \langle x_2, 0.33\rangle, \langle x_3, 0.46\rangle\} \neq \emptyset.$

$\overline{\overline{A}} = \{\langle x_1, 1-0.75\rangle, \langle x_2, 1-0.67\rangle, \langle x_3, 1-0.46\rangle\}$

$\overline{\overline{A}} = \{\langle x_1, 0.25\rangle, \langle x_2, 0.33\rangle, \langle x_3, 0.56\rangle\} = A.$

$|A| + |\overline{A}| = (0.25 + 0.33 + 0.56) + (0.75 + 0.67 + 0.44) = 1.14 + 1.86 = 3 = |X|$

Définition 2.3.11 *[7]L'intersection de* A *et* B, *que l'on note* $A \cap B$, *est le sous-ensemble flou constitué des éléments de* X *affectés du plus petit des deux degrés d'appartenance* μ_A *et* μ_B *:*

$$A \cap B = \{\langle x, \mu_{A\cap B}(x)\rangle / x \in X\}$$
$$\text{avec } \forall x \in X \ \ \mu_{A\cap B} = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$
$$A \cap B = \{\langle x, \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)\rangle / x \in X\}$$

Dans cette définition min *et* $\wedge$ *désignent l'opérateur de calcul du minimum des deux valeurs,*

Example 2.3.12 *Soit* $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ *un ensemble.*

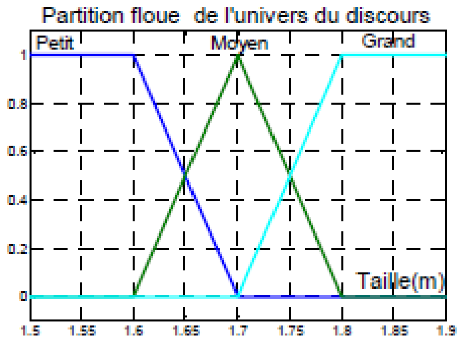
Et $A = \{\langle x_1, 0.8\rangle, \langle x_2, 0\rangle, \langle x_3, 0.7\rangle, \langle x_4, 0.45\rangle\}, B = \{\langle x_1, 0.25\rangle, \langle x_2, 0.6\rangle, \langle x_3, 1\rangle, \langle x_4, 0.15\rangle\}$ *deux sous-ensembles flous de* X.

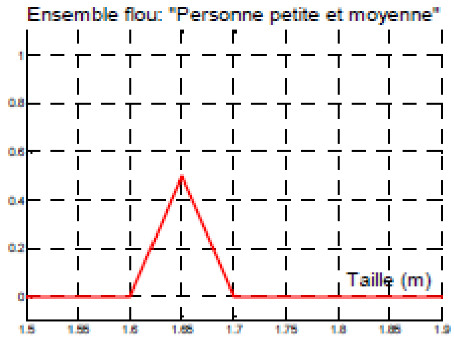
Donc :

$A \cap B = \{\langle x_1, \min(0.8, 0.25)\rangle, \langle x_2, \min(0, 0.6)\rangle, \langle x_3, \min(0.7, 1)\rangle, \langle x_4, \min(0.45, 0.15)\rangle\}$

$\Longrightarrow A \cap B = \{\langle x_1, 0.25\rangle, \langle x_2, 0\rangle, \langle x_3, 0.7\rangle, \langle x_4, 0.15\rangle\}.$

Example 2.3.13





Définition 2.3.14 *[7]L'union de A et B, que l'on note $A \cup B$, est le sous-ensemble flou constitué des éléments de X affectés du plus grand des deux degrés d'appartenance μ_A et μ_B :*

$$A \cup B = \{\langle x, \mu_{A\cup B}(x)\rangle / x \in X\}$$

$$\text{avec } \forall x \in X \ \ \mu_{A\cup B} = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

Dans cette définition max *et* $\vee$ *désignent l'opérateur de calcul du maximum des deux valeurs.*

Example 2.3.15 *Soit $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ un ensemble.*

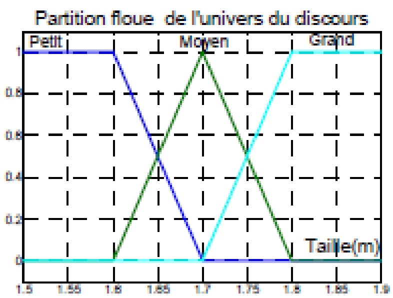
Et $A = \{\langle x_1, 0.8\rangle, \langle x_2, 0\rangle, \langle x_3, 0.7\rangle, \langle x_4, 0.45\rangle\}, B = \{\langle x_1, 0.25\rangle, \langle x_2, 0.6\rangle, \langle x_3, 1\rangle, \langle x_4, 0.15\rangle\}$ deux sous-ensembles flous de X.

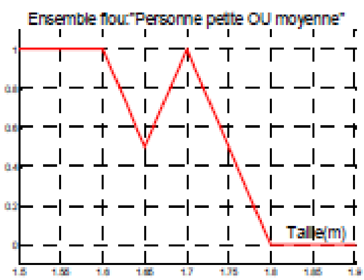
Donc :

$A\cup B = \{\langle x_1, \max(0.8, 0.25)\rangle, \langle x_2, \max(0, 0.6)\rangle, \langle x_3, \max(0.7, 1)\rangle, \langle x_4, \max(0.45, 0.15)\rangle\}$

$\Longrightarrow A \cup B = \{\langle x_1, 0.8\rangle, \langle x_2, 0.6\rangle, \langle x_3, 1\rangle, \langle x_4, 0.45\rangle\}$.

Example 2.3.16





2.3.1 Propriétés de l'union et de l'intersection[1]

Comme pour les ensembles classiques, toutes les propriétés de treillis distributif et les relations de Morgan restent valables, ainsi que l'idempotence.

$a)$ Commutativité : $A\cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

$b)$ Associativité : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C; A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$c)$ Idempotence : $A \cup A = A$; $A \cap A = A$

$d)$ Distributivité : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$e)$ Les relations de Morgan : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$f)$ Les lois d'absorption : $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$

$g)$ $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cup X = X$

$h)$ Identité : $A \cup \emptyset = A$; $A \cap X = A$

$i)$ Cardinalité : $|A| + |B| = |A \cap B| + |A \cup B|$

$j)$ Formule d'équivalence : $(\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$

$k)$ Formule de la différence symétrique : $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cup B)$

Définition 2.3.17 *[10]Lorsque les problèmes considérés sont décrits dans plusieurs univers de référence $X_1, X_2, ..., X_n$, il est plus intéressant de pouvoir raisonner dans un univers de référence global X composé de chacun des univers initiaux. De ce fait, X correspond au produit cartésien de $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$: $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$, et ses éléments x sont des n-uples : $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$.*

Le produit cartésien de n sous-ensembles flous $A_1, A_2, ..., A_n$ définis respectivement sur les univers de référence $X_1, X_2, ..., X_n$ est sous-ensemble flou A définis sur X par sa fonction d'appartenance :

$$\forall x \in X,\ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X,$$
$$\mu_A(x) = \min\left(\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), ..., \mu_{A_n}(x_n),\right)$$

Example 2.3.18 *Soit $X_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$ et $X_2 = \{a, b\}$.*

Et les deux sous-ensembles flous $A_1 = \{\langle x_1, 0.8\rangle, \langle x_2, 0.13\rangle, \langle x_3, 0.4\rangle\}$de X_1, *et* $A_2 = \{\langle a, 0.3\rangle, \langle b, 0.5\rangle\}$ *de* X_2.

Donc :

$A_1 \times A_2 = \{\langle (x_{1,}a), 0.3\rangle, \langle (x_{1,}b), 0.5\rangle, \langle (x_{2,}a), 0.13\rangle, \langle (x_2, b), 0.13\rangle, \langle (x_3, a), 0.3\rangle, \langle (x_3, b), 0.4\rangle\}$.

Example 2.3.19 *Soit* $X_1 = \{jaune, blue\}$*et* $X_2 = \{rond, long\}$.

On pose les ensembles flous :

$A_1 = \{\langle j/0.8\rangle, \langle b/0.2\rangle\}$ *et* $A_2 = \{\langle r/0.4\rangle, \langle l/0.6\rangle\}$.

Alors le produit cartésien :

$A_1 \times A_2 = \{\langle (j, r)/0.4\rangle, \langle (j, l)/0.6\rangle, \langle (b, r)/0.2\rangle, \langle (b, 1)/0.2\rangle\}$.

Chapitre 3

Sous-groupes flous

3.1 Notion de sous-groupe flou

Soit (G, L) une structure floue dans laquelle G est un groupe (dont la loi de composition est notée multiplicativement, et dont l'élément neutre est désigné par e, L un treillis avec plus petit et plus grand élément, notés respectivement 0 et 1.[9]

Définition 3.1.1 ***(sous-groupe floue)*** *On dit qu'une partie floue H d'une structure floue (G, L) est un sous-groupe flou de (G, L) (ou simplement de G lorsqu'il n'y a par d'ambiguité à propos du treillis) lorsque :*

$$\begin{cases} 1.\ \text{pour tout } x,\ \text{tout } y \text{ de } G & \mu_H(xy) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y) \\ 2.\ \text{pour tout } x \text{ de } G & \mu_H(x^{-1}) \geq \mu_H(x) \end{cases} \tag{3.1}$$

Remarque 3.1.2 *La condition* (1) *exprime que H est une partie fermée pour la multiplication.*

3.1.1 Propriétés immédiates

Soit H un sous-groupe flou d'un structure floue (G, L) ; alors :

1. Pour tout x de G, $\mu_H(x) \leq \mu_H(e)$,

2. Pour tout x de G, $\mu_H(x^{-1}) = \mu_H(x)$,

3. Il est équivalent de dire que H est un sous-groupe flou de G et que pour tout x, y de G
$$\mu_H(xy^{-1}) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y)$$

4. Pour tout n de $\mathbb{Z}$, tout x de G, $\mu_H(x^n) \geq \mu_H(x)$.

Démonstration.

1/ $\mu_H(e) = \mu_H(xx^{-1})$; or $\mu_H(xx^{-1}) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(x^{-1})$ et $\mu_H(x^{-1}) \geq \mu_H(x)$ d'après la définition (3.1.1), donc $\mu_H(e) \geq \mu_H(x)$.

2/ $\mu_H(x) \geq \mu_H\left((x^{-1})^{-1}\right)$; or $\mu_H\left((x^{-1})^{-1}\right) \geq \mu_H(x^{-1})$ d'après la définition (3.1.1), $\mu_H(x) \geq \mu_H(x^{-1})$ et comme $\mu_H(x^{-1}) \geq \mu_H(x)$, alors $\mu_H(x) = \mu_H(x^{-1})$.

3/ Si H est un sous-groupe flou, pour tout x, y de G $\mu_H(xy^{-1}) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y^{-1})$ et $\mu_H(y^{-1}) \geq \mu_H(y)$, donc $\mu_H(xy^{-1}) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y)$.

Réciproquement, si pour tout x,y de G , $\mu_H(xy^{-1}) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y)$, alors :

$-$pour tout x de G $\mu_H(e) = \mu_H(xx^{-1}) = \mu_H(x) \wedge \mu_H(x)$, soit $\mu_H(e) \geq \mu_H(x)$;

$-$pour tout x de G $\mu_H(x^{-1}) = \mu_H(ex^{-1}) \geq \mu_H(e) \wedge \mu_H(x)$ et comme $\mu_H(e) \geq \mu_H(x)$, $\mu_H(x^{-1}) \geq \mu_H(x)$

$-$pour tout x , y de G $\mu_H(xy) = \mu_H\left(x(y^{-1})^{-1}\right) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y^{-1})$ et, comme $\mu_H(y^{-1}) \geq \mu_H(y)$, $\mu_H(xy) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y)$, par conséquent,

H est un sous-groupe flou de G.

4/ Pour n de $\mathbb{N}$, on raisonne par récurrence :

si $n = 0, \mu_H(x^0) = \mu_H(e) \geq \mu_H(x)$; d'après la définition (3.1.1)

si $n > 0$, supposons que $\mu_H(x^n) \geq \mu_H(x)$ et montrons que $\mu_H(x^{n+1}) \geq \mu_H(x)$. On a $\mu_H(x^{n+1}) = \mu_H(x^n x) \geq \mu_H(x^n) \wedge \mu_H(x)$, d'après 3-et, comme par hypothèse de récurrence

$\mu_H(x^n) \geq \mu_H(x)$, $\mu_H(x^{n+1}) \geq \mu_H(x)$; donc la propriété est vrais pour tout n de $\mathbb{N}$; enfin, si $n < 0$, $\mu_H(x^n) = \mu_H\left((x^{-1})^{-n}\right) \geq \mu_H(x^{-1})$ d'après ce qui précède, et comme

$$\mu_H\left(x^{-1}\right) = \mu_H(x), \mu_H(x^n) \geq \mu_H(x).$$

■

Example 3.1.3 1. *Pour tout* α, $(\delta \equiv \alpha)$ *(application constante égale* α *par tout) est un sous-groupe flou, en particulier* $(\delta \equiv 0) = \emptyset$.
2. *Pour tout* α *de* L *le point flou* e_α*(défini par* $e_\alpha(x) = 0$ *si* $x \neq e$ *et* $e_\alpha(e) = \alpha$*) est un sous-groupe flou.*
Les résultats suivants nous permettrons d'exhiber facilement des sous-groupes flous.

Proposition 3.1.4 *Si* G *est un groupe monogène et* H *un sous-groupe flou de* (G, L), *si* a *et* b *sont des générateurs de* G, *alors* $\mu_H(a) = \mu_H(b)$ *et , pour tout* x *de* G, $\mu_H(a) \leq \mu_H(x)$.

Démonstration. • Si a et b sont des générateurs de G, il existe m, n de $\mathbb{Z}$ tels que $a = b^m$ et $b = a^n$, d'où, d'après 4 de propriétés (3.1.1) $\mu_H(a) = \mu_H(b^m) \geq \mu_H(b)$ et $\mu_H(b) = \mu_H(a^n) \geq \mu_H(a)$, d'où $\mu_H(a) = \mu_H(b)$
• $\mu_H(a) \leq \mu_H(x)$ se démontre pareillement. ■

Corollary 3.1.5 *Si* p *un nombre premiers,* m *un entier strictement supérieur à* 1. *Alors :*
1. H *est un sous-groupe flou de* $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, L)$ *si et seulement si pour tout* x, y *de* $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$ $\mu_H(x) = \mu_H(y) \leq \mu_H(0)$.
2. *Si* H *est une partie floue de* $(\mathbb{Z}/_{p^m\mathbb{Z}}, L)$ *telle que pour tout générateur* a *de* $\mathbb{Z}/_{p^m\mathbb{Z}}$, $\mu_H(a) = \alpha$, *tout non générateurs* x *de* $\mathbb{Z}/_{p^m\mathbb{Z}}$, $\mu_H(x) = \beta$ *avec* $\alpha \leq \beta \leq \mu_H(0)$, *alors* H *est un sous-groupe flou.*

Démonstration. La condition nécessaire provient de proposition (3.1.4) et du fait que tout élément non nul de $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$ en est générateur ; la condition suffisante est évidente avec les 3 de propriétés.(3.1.1)

Soit x, y de $\mathbb{Z}/_{p^m\mathbb{Z}}$; si x n'est pas générateur et y non plus, alors $-y$ non plus et $x-y$ non plus, par conséquent $\mu_H(x-y) = \beta = \mu_H(x) = \mu_H(y)$, d'où $\mu_H(x-y) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y)$; si x ou y est générateur, alors $\mu_H(x) = \alpha$ ou $\mu_H(y) = \alpha$, d'où $\mu_H(x) \wedge \mu_H(y) = \alpha$; or $\mu_H(x-y) \geq \alpha$ d'après les hypothèses, donc $\mu_H(x-y) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y)$, ce qui prouve (d'après 3.de propriétés (3.1.1)) que H est un sous-groupe flou de $\mathbb{Z}/_{p^m\mathbb{Z}}$. ■

Remarque 3.1.6 *Si l'ordre n de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas une puissance d'un nombre premier et si $\alpha \neq \beta$, l'assertion 2 de ce corollaire n'est plus vraie, en général (par exemple si on considère $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\mu_H(\overline{0}) = \mu_H(\overline{2}) = \mu_H(\overline{3}) = 1$, $\mu_H(\overline{1}) = \mu_H(\overline{5}) = 0$ on a $\mu_H(\overline{2}+\overline{3}) = \mu_H(\overline{5}) = 0$ et $\mu_H(\overline{2}) \wedge \mu_H(\overline{3}) = 1$.*
Cela provient du fait, qu'alors, il existe deux éléments non générateurs du groupe dont la somme est un générateur.

• Avant de poursuivre, il serait bon de se demander si une partie nette qui est un sous-groupe de G est un sous-groupe flou de (G, L) et réciproquement si toute partie nette qui est un sous-groupe de G. La proposition suivante répond à la question :

Proposition 3.1.7 *Soit H une partie de G, $\mu_H = H$ sa fonction caractéristique. Alors, H est un sous-groupe de G si et seulement si H est un sous-groupe flou non nul de (G, L).*

Démonstration.
• Supposons que H est un sous-groupe de G ; alors $\mu_H(e) = 1$, donc H n'est pas nul ; soit x, y de G, si $x \in H$ et $y \in H$, $xy^{-1} \in H$ et par suite $\mu_H(xy^{-1}) = 1 = \mu_H(x) \wedge \mu_H(y)$; si $x \notin H$ ou $y \notin H, \mu_H(x) = 0$ ou $\mu_H(y) = 0$, d'où $\mu_H(x) \wedge \mu_H(y) = 0 \leq \mu_H(xy^{-1})$; par conséquent, d'après 3 de propriétés (3.1.1) H est un sous-groupe flou de (G, L).
• Réciproquement, comme H n'est pas nul, il existe x de G tel que $\mu_H(x) \neq 0$,donc $\mu_H(x) = 1$, ce qui prouve que $H \neq \emptyset$; de plus, si $x, y \in H$, $\mu_H(x) = \mu_H(y) = 1$, d'où comme $\mu_H(xy^{-1}) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y)$, $\mu_H(xy^{-1}) = 1$ et par suite $xy^{-1} \in H$, ce qui prouve que H est un sous-groupe de G. ■

•Nous voici donc en possession d'une notion de sous-groupe flou qui "généralise" bien celle de sous-groupe. Mais quelles sont les considérations qui ont amené A. Rosenberg à poser cette définition ?

On peut imaginer des raisons "subjectives", chères à de nombreux auteurs d'articles sur le flou, du type suivant :

On sait que si E est un ensemble, A une partie floue de la structure floue$(E, [0, 1])$, x un élément de E, on peut interpréter $\mu_A(x)$ comme la "valeur de vérité" de l'assertion "x appartient à A" où A désigne une partie -au sens vulgaire du terme- de l'ensemble E, ou encore comme le "degré d'appartenance de x à A" ;

alors, la condition (1) de définition (3.1.1) traduirait la stabilité d'un sous-groupe (classique) suivant une formulation du type "plus le degré d'appartenance de x à H est grand, plus le degré d'appartenance de y à H est grand, plus celui de xy doit l'être". Démarche analogue pour (2) de définition (3.1.1).

Cependant une démarche plus mathématique s'impose qui conduit à envisager la chose sous l'angle de la notion de structure algébrique, c'est-à-dire de loi de composition.

3.2 Produit flou de deux sous-ensembles flous, loi de composition floue

Si, comme cela semble naturel (jusqu'à présent) en mathématique floue, on raisonne par analogie avec ce qui se passe en mathématiques (classiques), définir une loi de composition interne floue sur une partie floue A d'une structure floue (E, L) revient à définir une application floue d'un "produit flou" de A par lui-même dans A.

Etant données deux parties floues A et B des structures floues respectives (E, L) et (F, L), on sait définir canoniquement le produit $A \times B$ des applications A et B ; mais c'est une application de $E \times F$ dans $L \times L$ et nous souhaitons une partie floue de $(E \times F, L)$; cependant, pour passer de $L \times L$ dans L il suffit de connaitre une loi de composition

interne sur L, car si ε est l'une d'elle, on sait associer à A et B la partie floue $\varepsilon\circ\ A\times B$ de $(E\times F,L)$; c'est elle que nous appellerons $\varepsilon-$produit flou de A par B. cette notion de $\varepsilon-$produit flou conduit naturellement à celle de $\varepsilon-$loi de composition (externe/interne) floue[8]; ainsi, par exemple, si A est une partie floue de (E,L) appelle-t-on $\varepsilon-$loi de composition interne floue sur A toute application floue de $\varepsilon\circ\ A\times A$ dans A, c'est-à-dire toute application $\phi : E\times E\rightarrow E$ telle que $A\circ\phi\geq\varepsilon\circ\ A\times A$.[9]
Or sur un treillis L il existe deux lois de composition internes canoniques $\wedge$ et $\vee$ qui à tout (x,y) de $L\times L$ associent $x\wedge y$ et $x\vee y$ respectivement. Et la proposition suivante va nous conduire à privilégier l'une d'entre elles.

Proposition 3.2.1 *Le $\wedge$-produit flou de deux parties nettes A par B de structures floues (E,L) et (F,L) respectivement est la partie nette $A\times B$ de $(E\times F,L)$; ce qui n'est pas, en général, le cas pour le $\vee-$produit flou.*

Démonstration.
•Soit (x,y) de $E\times F$; si $(x,y)\in A\times B$, $x\in A$ et $y\in B$, donc $\wedge\circ A\times B\,(x,y)=\mu_A\,(x)\wedge\mu_B\,(y)=1\wedge 1=1=A\times B\,(x,y)$; si $(x,y)\notin A\times B$,
$x\notin A$ ou $y\notin B$, donc $\mu_A\,(x)=0$ ou $\mu_B\,(y)=0$, ce qui entraine $\wedge\circ A\times B\,(x,y)=\mu_A\,(x)\wedge\mu_B\,(y)=0$, qui est encore égale à $A\times B\,(x,y)$. Donc $\wedge\circ A\times B=A\times B$.
•Il suffit de considérer un couple (x,y) tel que $x\in A$ et $y\notin B$ par exemple, car alors $\vee\circ A\times B\,(x,y)=\mu_A\,(x)\vee\mu_B\,(y)=0\vee 1=1$ alors que $\mu_{A\times B}\,(x,y)=0$ puisque $(x,y)\notin A\times B$.
Ce résultat conduit naturellement à choisir comme produit flou de A et B leur $\wedge$-produit flou. ■

Définition 3.2.2 *Soit A une partie floue d'une structure (E,L), B une partie floue d'une structure floue (F,L); on appelle **produit flou de** A **par** B la partie floue $\wedge\circ A\times B$de $(E\times F,L)$, notée $A\times B$ ou, lorsqu'aucune confusion n'est possible, $A\times B$.*

Définition 3.2.3 *On appelle* ***loi de composition interne floue sur une partie*** A *d'une structure floue* (E, L) *toute application floue du produit cartésien flou* $A \times A$ *dans* A*, c'est-à-dire toute loi de composition interne* ϕ *sur* E *telle que* $\mu_{A \circ \phi} \geq \mu_{A \times A}$.

Définition 3.2.4 *On appelle* ***loi de composition externe floue à droite sur une partie floue*** A *d'une structure floue* (E, L) *toute application floue du produit cartésien flou* $A \times B$ *dans* A*, où* B *est une partie floue d'une structure floue* (F, L)*, c'est-à-dire toute loi de composition externe* $\psi : E \times F \rightarrow E$ *telle que* $\mu_{A \circ \psi} \geq \mu_{A \times B}$.

Remarque 3.2.5 1. *La définition d'une loi de composition interne (respectivement externe) floue nécessite celle d'une loi de composition interne (resp. externe) sur l'ensemble* E *de la structure floue* (E, L).
2. *dés q' un ensemble* E *est muni d'une loi de composition interne (resp. externe)* ϕ*,* ***cette loi induit sur certaines parties floues*** *d'une structure floue* (E, L) *une loi de composition interne (resp. externe) floue ; ces parties sont précisément les parties floues fermées pour* ϕ.
3. *les structures algébriques floues ne sont donc par définies intrinsèquement, ce qui n'est guère étonnant dans le cadre actuel de la mathématique floue où l'on étudie des sous-objets flous d'objets mathématiques classiques.*

La condition (1) de définition (3.1.1) étant équivalente à l'existence d'une loi de composition interne floue induite sur H par la loi de groupe de G, nous pouvons formuler la définition d'un sous-groupe flou de la façon suivante :

Définition 3.2.6 *Soit* (G, L) *une structure floue ; on suppose que* G *est muni d'une loi de composition interne* ϕ *telle que* (G, ϕ) *soit un groupe.*
On appelle sous-groupe flou de (G, L) *toute partie floue* H *de* (G, L) *sur laquelle* ϕ *induit une loi de composition interne floue et telle que pour tout* x *de* G $\mu_H(x^{-1}) \geq \mu_H(x)$.

A partir de maintenant (G, L) désigne une structure floue dans laquelle G est un groupe et L un treillis complet avec 0 et 1.

3.3 Homomorphismes flous d'un sous-groupe flou dans un sous-groupe flou.

Définition 3.3.1 *Etant données deux structures floues* (G, L) *et* (G', L) *où* G *et* G' *sont des groupes, deux sous-groupes flous* H *et* H' *de* (G, L) *et* (G', L) *respectivement, on appelle* ***homomorphisme flou de*** H ***dans*** H' *tout homomorphisme* f *de* G *dans* G' *tel que* $\mu_{H' \circ f} \geq \mu_H$.

Définition 3.3.2 *Avec les hypothèses et les notations de la définition (3.3.1), on appelle* ***image homomorphe de*** H ***par*** f *la partie floue* $f(H)$ *de* $(f(G), L)$ *définie par :*

$$x \in f(G) \text{ et } \mu_{f(H)}(x) = \sup_{y \in f^{-1}(x)} \mu_H(y).$$

Remarque 3.3.3 *C'est seulement avec cette définition qu'apparait la nécessité de l'hypothèse de complétude faite sur* L.

Proposition 3.3.4 *Soit* f *un homomorphisme flou d'un sous-groupe flou* H *d'une structure floue* (G, L) *dans un sous-groupe flou* H' *d'une structure floue* (G', L). *Alors :*

1/ Si H *est un sous-groupe de* G, $f(H)$ *est un sous-groupe flou de* $(f(G), L)$.

2/ Si H *satisfait à la propriété suivante : pour toute partie non vide* S *de* G *il existe* s *de* S *tel que* $\sup_{t \in S} \mu_H(t) = \mu_H(s)$, *alors* $f(H)$ *est un sous-groupe flou de* $(f(G), L)$, f *est un homomorphisme flou de* H *sur* $f(H)$ *et* $\mu_{f(H) \circ f} \leq \mu_{H' \circ f}$.

3/ Sous les hypothèses de 2. *On sait associer canoniquement à* $f(H)$ *un sous-groupe* $f(H)'$ *de* (G', L) *tel que* $\mu_{f(H)'} \leq \mu_{H'}$.

Démonstration.

1/ Nous allons démontrer que $f(H)$ est égal à $\widetilde{f(H)}$; la conclusion proviendra alors de prposition (3.1.7). Soit $x \in f(G)$, si $x \in f(H)$, si $x \in f(H)$ il existe y de H tel que $y \in \mu_{f^{-1}}(x)$ avec $\mu_H(y) = 1$; par suite $\sup_{y \in f^{-1}(x)} \mu_H(y) = 1$, d'où $\mu_{f(H)}(x) = \widetilde{f(H)}(x)$.

Si $x \notin f(H)$, pour tout y de $f^{-1}(x)$ $\mu_H(y) = 0$, donc $\mu_{f(H)}(x) = 0 = \widetilde{f(H)}(x)$. Et, finalement, $f(H) = \widetilde{f(H)}$.

2/ • Soit x, y de $f(G)$; alors $f^{-1}(x) \neq \emptyset$ et $f^{-1}(y) \neq \emptyset$, donc il existe $x_0 \in f^{-1}(x)$, $y_0 \in f^{-1}(y)$ tels que $\mu_{f(H)}(x) = \mu_H(x_0)$ et $\mu_{f(H)}(y) = \mu_H(y_0)$; mais $xy^{-1} = \mu_{f(x_0)f(y_0)^{-1}} \geq \mu_{f(x_0)f(y_0^{-1})} = \mu_f(x_0y_0^{-1})$ montre que $x_0y_0^{-1} \in f^{-1}(xy^{-1})$, d'où l'on déduit que $\mu_{f(H)}(xy^{-1}) \geq \mu_H(x_0y_0^{-1})$; comme H est un sous-groupe flou, $\mu_H(x_0y_0^{-1}) \geq \mu_H(x_0) \wedge \mu_H(y_0)$, donc $\mu_{f(H)}(xy^{-1}) \geq \mu_H(x_0) \wedge \mu_H(y_0)$, soit $\mu_{f(H)}(xy^{-1}) \geq \mu_{f(H)}(x) \wedge \mu_{f(H)}(y)$. Par conséquent, d'après 3.de propriétés (3.1.1) $f(H)$ est un sous-groupe flou de $(f(G), L)$.

• Pour tout x de G, il est évident que

$$\begin{aligned} \mu_{(f(H)\circ f)}(x) &= \mu_{f(H)}(f(x)) \\ &= \sup_{y \in f^{-1}(f(x))} \mu_H(y) \quad \geq \quad \mu_H(x) \end{aligned}$$

d'où $\mu_{f(H)\circ f} \geq \mu_H$, donc f est un homomorphisme flou de H sur $f(H)$.

• De plus, pour tout x de G, il existe $x_0 \in G$ tel que $\mu_f(x) = \mu_f(x_0)$ et $\mu_{f(H)}(x) = \mu_H(x_0)$ d'après l'hypothèse faite sur H; comme $\mu_{H'\circ f} \geq \mu_H$, $\mu_{H'\circ f}(x_0) \geq \mu_H(x_0)$; or $\mu_H(x_0) = \mu_{f(H)}(f(x))$ et $\mu_f(x_0) = \mu_f(x)$, donc $\mu_{H'\circ f}(x) \geq \mu_{f(H)\circ f(x)}$ d'où $\mu_{H\circ f} \geq \mu_{f(H)\circ f}$.

3/ On définit $f(H)'$ par : $x \in G'$ et $\mu_{f(H)'}(x) = \mu_{f(H)}(x)$ si $x \in f(G)$ et $f(H) = 0$ si $x \notin f(G)$.

• $f(H)'$ est un sous-groupe flou de (G', L) car si x, y appartiennent à G', soit $x \in f(G)$ et $y \in f(G)$, donc $xy^{-1} \in f(G)$ et $\mu_{f(H)'}(xy^{-1}) = \mu_{f(H)}(xy^{-1}) \geq \mu_{f(H)}(x) \wedge \mu_{f(H)}(y) = \mu_{f(H)'}(x) \wedge \mu_{f(H)'}(y)$; soit $x \notin f(G)$ ou $y \notin f(G)$, alors $\mu_{f(H)'}(x) = 0$ ou $\mu_{f(H)'}(y) = 0$, d'où $\mu_{f(H)'}(x) \wedge \mu_{f(H)'}(y) = 0 \leq \mu_{f(H)'}(xy^{-1})$.

• D'après la définition de $f(H)'$, $f(H)' \circ f = f(H)$.

• Soit $x \in G'$; si $x \in f(G)$, $\mu_{f(H)'}(x) = \mu_{f(H)}(x) = f(H)(f(y))$ avec $x = f(y)$; $\mu_{f(H)}(f(y)) \leq \mu_{H'}(f(y))$ et $\mu_{H'}(f(y)) = \mu_{H'}(x)$, donc $f(H)' \leq H'$. ■

3.4 Caractéristiques de niveaux de flou d'un sous-groupe flou

Proposition 3.4.1 *Soit (G, L) une structure floue où G est un groupe. Alors :*
1/ H est un sous-groupe flou de (G, L) si et seulement si pour tout α de L si H_α n'est pas vide, H_α est un sous-groupe de G.
2/ Si H est un sous-groupe flou et $\mu_H(e) = \varepsilon$, H_ε est le plus petit niveau de flou non vide de H.

Démonstration.
1. Supposons que H est un sous-groupe flou de (G, L) et que $H_\alpha \neq \emptyset$; soit x, y de H_α, alors, comme H est un sous-groupe flou $\mu_H(xy^{-1}) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y)$ or $\mu_H(x) \geq \alpha$ et $\mu_H(y) \geq \alpha$, donc $\mu_H(xy^{-1}) \geq \alpha$, soit $xy^{-1} \in H_\alpha$; par suite H_α est un sous-groupe de G.
Réciproquement, soit x, y de G; si $\mu_H(x) = \alpha$ et $\mu_H(y) = \beta$, x et y appartiennent à $H_{\alpha\wedge\beta}$ qui est donc non vide ; alors, d'après l'hypothèse c'est un sous-groupe de G, donc xy^{-1} lui appartient, soit $\mu_H(xy^{-1}) \geq \alpha \wedge \beta$ ou encore $\mu_H(xy^{-1}) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(y)$; cela prouve que H est un sous-groupe flou de G.
2. Par définition de e, $e \in H_\varepsilon$ qui est donc non vide ; si $H_\alpha \neq \emptyset$, H_α est un sous-groupe de G, donc $e \in H_\alpha$. d'où $\alpha \leq \mu_H(e) = \varepsilon$; et $\alpha \leq \varepsilon$ entraine $H_\varepsilon \subseteq H_\alpha$. on a $H_\varepsilon = \bigcap_{\alpha\in K} H_\alpha$ où K est l'ensemble des éléments α de L tels que $H_\alpha \neq \emptyset$. ■

Proposition 3.4.2 *Soit H un sous-groupe flou d'une structure floue (G, L) ; alors l'application H est constante sur toute classe d'équivalence module H_ε*
Démonstration. *On considère par exemple les classes à gauche modulo H_ε : si $x \equiv y$ modulo H_ε, $x^{-1}y \in H_\varepsilon$, donc $\mu_H(xy^{-1}) \geq \varepsilon$; comme H est un sous-groupe flou pour tout x de G $\mu_H(x) \leq \varepsilon$ ($\varepsilon = \mu_H(e) \geq \mu_H(x), \forall x \in G$) et $\mu_H(xx^{-1}y) \geq \mu_H(x) \wedge \mu_H(x^{-1}y)$, d'où $\mu_H(y) \geq \mu_H(x)$; comme $x^{-1}y \in H_\varepsilon$ entraine $y^{-1}x \in H_\varepsilon$,*
on prouverait de la même manière que $\mu_H(x) \geq \mu_H(y)$; d'où finalement $\mu_H(x) = \mu_H(y)$
■

Corollary 3.4.3 *Pour tout α de L, tout sous-groupe H d'une structure floue (G, L), la ligne de flou de degré α de H est réunion des classes à gauche (resp. à droite) modulo H_ε de ses éléments.*

Démonstration. Cela est évident.

On remarque que $L_\varepsilon(H) = H_\varepsilon$; mais en général les lignes de flou d'un sous-groupe flou ne sont pas des classes d'équivalence modulo H_ε, comme le montre l'exemple suivant :
$G = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $L = [0, 1]$,
H défini par $\mu_H(0) = 1$, $\mu_H(1) = \mu_H(3) = \mu_H(5) = \mu_H(7) = 1/3$, $\mu_H(2) = \mu_H(4) = \mu_H(6) = 1/2$ est un sous-groupe flou d'après le corollaire (3.1.5) $L_1(H) = H_1 = \{\overline{0}\}$, $L_{1/2}(H) = \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$, $L_{1/3}(H) = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\}$ ■

Proposition 3.4.4 *Soit f un homomorphisme flou d'un sous-groupe flou H de (G, L) dans un sous-groupe H' de (G', L).*
On désigne par K l'ensemble des α de L tels que $H_\alpha \neq \emptyset$.
Alors :
1/ *pour tout α de K, $f(H_\alpha) \subseteq f(H)_\alpha$ pour tout α de K $f(H_\alpha) \subseteq f(H)_\alpha$*
2/ *$\alpha \in K$ si et seulement si $f(H)_\alpha \neq \emptyset$*
3/ *Si H satisfait à la condition 2 de proposition (3.3.4), pour tout α de $f(H_\alpha) = f(H)_\alpha$.*

Démonstration.
1. Supposons $H_\alpha \neq \emptyset$ et soit $x \in H_\alpha$; comme $f(H) f(x) = \sup\limits_{y \in f^{-1}(f(x))} \mu_H(y) \geq \mu_H(x)$, $\mu_{f(H)}(f(x)) \geq \alpha$, soit $f(x) \in f(H_\alpha)$, donc $f(H_\alpha) \subseteq f(H)_\alpha$.
2. • Si e' désigne l'élément neutre de G', comme $\mu_{f(H)}(e') = \sup\limits_{y \in f^{-1}(e')} \mu_H(y), \mu_f(e) = e'$ et $\mu_H(y) \geq \varepsilon$ pour tout y de G, $\mu_{f(H)}(e') = \mu_H(e) = \varepsilon$, et pour tout x de $f(G)$, $\mu_{f(H)}(x) = \sup\limits_{y \in f^{-1}(x)} \mu_H(y) \leq \varepsilon$.
• Si $\alpha \in k$, $H_\alpha \neq \emptyset$, donc, comme $f(H_\alpha) \subseteq f(H)_\alpha$, $f(H)_\alpha \neq \emptyset$; réciproquement, si $f(H)_\alpha \neq \emptyset$, il existe $x \in G'$ tel que $f(H)(x) \geq \alpha$, donc comme $\varepsilon \geq \mu_{f(H)}(x), \varepsilon \geq \alpha$, or, cela entraine $H_\varepsilon \subseteq H_\alpha$, donc, d'après le proposition (3.4.1), $H_\alpha \neq \emptyset$, soit $\alpha \in k$.

3. Soit $y \in f(H)_\alpha$, $y \in f(G)$ et $\mu_{f(H)}(y) = \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_H(x) \geq \alpha$; d'après l'hypothèse faite sur H, il existe $x_0 \in f^{-1}(y)$ tel que $\mu_{f(H)}(y) = \mu_H(x_0)$, donc $x_0 \in H_\alpha$ et $y = \mu_f(x_0)$, $y \in f(H_\alpha)$;

finalement $f(H)_\alpha \subseteq f(H_\alpha)$; et de 1) nous permet alors de conclure. ∎

Remarque 3.4.5 *de 2/3 de les proposition (3.4.4) et 1 de (3.4.1) on déduit facilement le 2 de (3.3.4).*

3.5 Treillis des sous-groupes flous d'une structure floue

Proposition 3.5.1 *L'intersection d'une famille de sous-groupes flous d'une structure floue est un sous-groupe flou. Cependant la réunion de deux sous-groupes flous n'est pas, en général, un sous-groupe flou.*

Démonstration.

• Soit $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-groupes flous de (G, L).

$*$ Si $I = \emptyset$, $\bigcap\limits_{i \in I} H_i = K$ est un sous-groupe flou.

$*$ Si $I \neq \emptyset$, $\bigcap\limits_{i \in I} H_i = K$ est une partie floue fermée pour la loi de composition de G ;

de plus, pour tout $x \in G$, $\mu_{(\bigcap\limits_{i \in I} H_i)}(x^{-1}) = \bigwedge\limits_{i \in I} \mu_{H_i}(x^{-1}) = \bigwedge\limits_{i \in I} \mu_{H_i}(x) = \mu_{(\bigcap\limits_{i \in I} H_i)}(x)$, donc $\bigcap\limits_{i \in I} H_i$ est un sous-groupe flou.

• Si on considère les sous-groupes $2\mathbb{Z}$ et $3\mathbb{Z}$ et leurs fonctions caractéristiques $2\mathbb{Z}$ et $3\mathbb{Z}$ qui sont des sous-groupes flous (proposition (3.1.7)), $\mu_{(2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z})}(5) = \mu_{2\mathbb{Z}}(5) \vee \mu_{3\mathbb{Z}}(5) = 0$, $\mu_{(2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z})}(2) = 1 = \mu_{(2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z})}(3)$ montrent que $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ n'est même pas une partie floue fermée pour l'addition de $(\mathbb{Z}, [0, 1])$.

On est alors conduit à s'intéresser à la notion de sous-groupe flou engendré par une partie floue. ∎

Définition 3.5.2 *Soit $\widetilde{X}$ une partie floue d'une structure floue (G, L) où G est un groupe. On appelle sous-groupe flou engendré par $\widetilde{X}$, et on désigne par $\overline{\widetilde{X}}$, l'intersection des sous-groupes flous qui contiennent X.*

Proposition 3.5.3 *Les sous-groupe flou engendré par une partie nette X d'une structure floue (G, L) est la partie nette $\langle X \rangle$ où $\langle X \rangle$ est le sous-groupe de G engendré par X.*

Démonstration. Nous savons d'après la proposition (3.1.7) que $\langle X \rangle$ est un sous-groupe flou ; de plus $\langle X \rangle$ contient X puisque si $x \in X$, $\mu_X(x) = 1 = \mu_{\langle X \rangle}(x)$ et si $x \notin X, \mu_X(x) = 0 \leq \mu_{\langle X \rangle}(x)$

Par conséquent, si $x \notin \langle X \rangle$, $\mu_{\langle X \rangle}(x) = 0$ entraine que, si H_X Désigne l'ensemble des sous-groupe flous de (G, L) qui contiennent X, $\underset{H \in H_X}{\wedge} \mu_H(x) \leq \mu_{\langle X \rangle}(x) = 0$
soit $\mu_{\overline{\widetilde{X}}}(x) = 0$; si $x \in \langle X \rangle$, $x = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ où $\alpha_i = \pm 1$ et $x_i \in X$; alors, si $H \in H_X, \mu_H(x_i^{\alpha_i}) = \mu_H(x_i) \geq \mu_H(x_i) = 1$, donc $\mu_H(x_i^{\alpha_i}) = 1$; par ailleurs $\mu_H\left(x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}\right) \geq \mu_H\left(x_1^{\alpha_1} \ldots x_{n-1}^{\alpha_n - 1}\right) \wedge \mu_H(x_n^{\alpha_n})$ donc $\mu_H\left(x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}\right) \geq \mu_H\left(x_1^{\alpha_1} \ldots x_{n-1}^{\alpha_n - 1}\right)$ et finalement $\mu_H(x) \geq \mu_H\left(x_1^{\alpha_1}\right) = 1$, donc $\mu_H(x) = 1$ et $\underset{H \in H_X}{\wedge} \mu_H(x) = 1$, soit $\mu_X(x) = 1$. Il en résulte que $\overline{\widetilde{X}} = \langle X \rangle$. ■

Remarque 3.5.4 *Désignons par $H_L(G)$ l'ensemble des sous-groupes flous de (G, L), d'après la proposition (3.5.1), $(H_L(G), \cap)$ est un inf-demi-treillis complet, de plus $H_L(G)$ admet un plus grand élément $\widetilde{G}$, par conséquent [6] c'est un treillis complet avec, comme borne supérieure d'une famille $(H_i)_{i \in I}$, où $I \neq \emptyset$,*

$$\bar{\bigcup_{i \in I}} H_i = \bigcap_{\substack{H \in H_L(G) \\ H \underset{i \in I}{\geq} H_i}} H.$$

Il admet un plus petit élément $\widetilde{G}_0 = \widetilde{\emptyset}$.
On désigne par $\mathcal{H}(G)$ l'ensemble des sous-groupes de G, par $\mathcal{H}_L(G)^*$ l'ensemble des applications $f : L \longrightarrow \mathcal{H}(G) \cup \{\emptyset\}$ telles que $f(0) = G$ et, pour toute famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ d'élément de L, $f(\underset{i \in I}{\vee} \alpha_i) = \underset{i \in I}{\cap} f(\alpha_i)$.

Proposition 3.5.5 *$H_L(G)^\star$ est un treillis complet avec plus petit et plus grand élément.*

Démonstration.

• $\mathcal{H}_L(G)^\star$ est ordonné par un $f, g \in \mathcal{H}_L(G)^\star$ et $f \leq g$ si et seulement si pour tout α de L $f(\alpha) \subseteq g(\alpha)$.

• Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille non vide d'élément de $\mathcal{H}_L(G)^\star$, on définit $\underset{i\in I}{\wedge} f_i$ par $\alpha \in L$ et $\left(\underset{i\in I}{\wedge} f_i\right)(\alpha) = \underset{i\in I}{\cap} f_i(\alpha)$.

-$\underset{i\in I}{\wedge} f_i \in \mathcal{H}_L(G)^\star$ car $\left(\underset{i\in I}{\wedge} f_i\right)(0) = \underset{i\in I}{\cap} f_i(0) = G$ et si $(\alpha_j)_{j\in J}$ est une famille d'éléments de L, $\left(\underset{i\in I}{\wedge} f_i\right)\left(\underset{j\in J}{\vee}\alpha_j\right) = \underset{i\in I}{\cap} f_i\left(\underset{j\in J}{\vee}\alpha_j\right) = \underset{i\in I}{\cap}\left(\underset{j\in J}{\cap} f_i(\alpha_j)\right) = \underset{j\in J}{\cap}\left(\underset{i\in I}{\cap} f_i(\alpha_j)\right)$

$= \underset{j\in J}{\cap}\left(\left(\underset{i\in I}{\wedge} f_i\right)(\alpha_j)\right)$.

-Et il est facile de vérifier que $\underset{i\in I}{\wedge} f_i$ est la borne inférieur de la famille $(f_i)_{i\in I}$.

Par conséquent $(\mathcal{H}_L(G)^\star, \wedge)$ est un inf-demi-treillis complet.

• $\mathcal{H}\ _L(G)^\star$ à un élément universel f_i définir par $\alpha \in L$ et $f_1(\alpha) = G$. Par conséquent[6] $(\mathcal{H}_L(G)^\star, \wedge, \triangledown)$ est une treillis complet où $\triangledown$ est définit par, si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille non vide d'élément de $\mathcal{H}_L(G)^\star$, $\underset{i\in I}{\triangledown} f_i = \underset{\substack{f \in \mathcal{H}_L(G)^\star \\ f \geq f_i \\ i \in I}}{\wedge} f$.

• $\mathcal{H}_L(G)^\star$ admet un plus petit élément : soit f_0 définit sur L par $f_0(0) = G$ et $f_0(\alpha) = \phi$ pour $\alpha \neq 0. f_0 \in \mathcal{H}_L(G)^\star$ car : $-f_0(0) = G$.

$-$Soit $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille non vide d'élément de L ; si pour tout i de I $\alpha_i \neq 0$, $\underset{i\in I}{\vee}\alpha_i \neq 0$ donc $f_0\left(\underset{i\in I}{\vee}\alpha_i\right) = \phi = \underset{i\in I}{\cap} f_0(\alpha_i)$; sinon, il existe j de I tel que $\alpha_j = 0$, alors, si $\underset{i\in I}{\vee}\alpha_i = 0$, pour tout i de I $\alpha_i = 0$ et $f_0\left(\underset{i\in I}{\vee}\alpha_i\right) = G = \underset{i\in I}{\cap} f_0(\alpha_i)$, sinon il existe k de I tel que $\alpha_k \neq 0$ et $f_0\left(\underset{i\in I}{\vee}\alpha_i\right) = \phi = \underset{i\in I}{\cap} f_0(\alpha_i)$.

Si $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille vide , $\underset{i\in I}{\vee}\alpha_i = 0$, donc $f_0\left(\underset{i\in I}{\vee}\alpha_i\right) = f_0(0)$:

par ailleurs $\underset{i\in I}{\cap} f_0(\alpha_i) = G$, donc $f_0\left(\underset{i\in I}{\vee}\alpha_i\right) = \underset{i\in I}{\cap} f_0(\alpha_i)$. ■

Proposition 3.5.6 *Pour toute structure floue* (G, L) *il existe un isomorphisme de treillis entre* $(\mathcal{H}_L(G)^\star, \cap, \overline{\cup})$ *et* $(\mathcal{H}_L(G)^\star, \wedge, \overline{\vee})$.

Démonstration.

• Pour $H \in \mathcal{H}_L(G)^\star, \alpha \in L$, on pose $\Phi(H)(\alpha) = H_\alpha$; nous avons vu le prposition (3.4.1) que $H_\alpha \in \mathcal{H}(G) \cup \{\phi\}$; et , d'aprèsle premier séminaire, $\Phi(H)$ appartient à $\mathcal{H}_L(G)^\star$ et Φ est une application injective.

• Φ est surjective : soit $f \in \mathcal{H}_L(G)^\star$;
en posant pour x de G, $\mu_H(x) = \sup\{\beta/\beta \in L$ et $x \in f(\beta)\}$,
H est une partie floue de (G, L) fermée pour la loi de composition de G et $\Phi(H) = f$.
Il reste à prouver ici que pour tout x de G, $\mu_H(x) \geq \mu_H(x)$;
or $H(x^{-1}) = \sup\{\beta/\beta \in L$ et $x^{-1} \in f(\beta)\}$; si $x^{-1} \in f(\beta)$, $f(\beta)$ est sous-groupe de G, donc $x \in f(\beta)$ et par conséquent $\{\beta/\beta \in L$ et $x^{-1} \in f(\beta)\} \subseteq \{\beta/\beta \in L$ et $x \in f(\beta)\}$ on démontrait d'une manière analogue l'inclusion opposée ; et finalement $\mu_H(x) = \mu_H(x)$.
Par conséquent Φ est une bijection.

• Φ est une application croissante : si H et $\widetilde{k}$ appartiennent à $H_L(G)$ et si $H \leq \widetilde{k}$, pour tout x de G, $\mu_H(x) \leq \widetilde{k}(x)$, donc, pour tout α de L , $\Phi(H)(\alpha) = H_\alpha \subseteq N_\alpha\left(\widetilde{K}\right) = \Phi\left(\widetilde{K}\right)(\alpha)$, soit $\Phi(H) \leq \Phi\left(\widetilde{K}\right)$.

• Φ^{-1} est une application croissante : si f, g appartiennent à $\mathcal{H}_L(G)^\star$ et $f \leq g$, pour tout α de L $f(\alpha) \subseteq g(\alpha)$; donc, pour x de G, $\{\beta/\beta \in L$ et $x \in f(\beta)\} \subset \{\beta/\beta \in L$ et $x \in g(\beta)\}$ et, comme $\Phi^{-1}(f)(x)$ est la borne supérieure du premier et $\Phi^{-1}(g)(x)$celle du second, $\Phi^{-1}(f)(x) \leq \Phi^{-1}(g)(x)$, donc $\Phi^{-1}(f) \leq \Phi^{-1}(g)$.

Il en résulte que Φ est un isomorphisme de treillis. ■

Bibliographie

[1] S. Ambapour, *Théorie des ensembles flous : application à la mesure de la pauvreté au Congo*, BAMSI B.P. 13734 Brazzaville, DT 16/2009.

[2] A. Amroune, *Logique algébrique non classique*, Cours du deuxième Année Master, Université de Msila, 2014.

[3] M. Benlarbi-delai, E. Jabbouri, A. Lbekourri, *Cours d'algèbreII*, 2006/2007.

[4] B. Bouchon-Meunie, *la logique floue et ses applications*, Addison-Wesley, Paris, 1995.

[5] J. Calais, *Eléments de la théorie des groupes*, Presses Universitaires de France, 1984.

[6] M. L. Dubreil-Jacobin, L.Lesieur, et R.Croisor, *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques*, Paris, Gauthier-Villars, 1953.

[7] D. Mokeddem, Contrôle flou des processus biotechnologiques à base d'algorithmes génétiques, Thèse doctorat, *Universite Ferhat Abbas*, Sétif, 2010.

[8] C. V. Negoita, D. A. Ralescu, *Applications of fuzzy sets to systems analysis*, basel and stuttgart, birkhadiser verlag, 1975.

[9] D. Ponasse, *Mathématique floue*, Séminaire, Lyon, 1978.

[10] H. Radja, Généralisation floue des treillis de Galois Alpha, Mémoire de magister, *Universite Mouloud Mammeri, Tizi-ouzou*, 2014.

[11] A. Rosenfled, *Fuzzy groups*, journal of mathématical analysis and applications, 36, 512-517, 1971.

[12] D. Schaub, *Eléments de la théorie des groupes*, Licence de Mathématiques, Université d'Angers, 1997/98.

[13] F. Sur, Présentation de la Logique Floue, *Ecole Normale Supérieure de Cachan*, Magistère de Mathématiques Mémoire de première année, 1997/1998.

[14] Théorie des groupes. http ://perso.wanadoo.fr/cyd60000. theoriedes-groupes@orange.fr.

[15] L. A. Zadeh, fuzzy sets, Inform and control, 1965.