الجـــمهورية الجـــزائرية الديمـــقراطية الشـــعبية
People's Democratic Republic of Algeria

Ministry of Higher Education and Scientific Research
University Mohamed Boudiaf of M'sila
Faculty of Technology
Civil Engineering Department

وزارة التعليم العالي والبحث العلـمي
جـامـعة محمد بوضياف- المـسيلة
كـلية التكنولـــوجيا
قسم الهندسـة المدنيـة

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

الرقم:.....ق هـ م/2026 المسيلة في: 2026/06/10

شهادة إدارية
بخصوص تقييم المطبوعة البيداغوجية المنجزة من طرف الأستاذ: عماري الربيع

بعد الاطلاع على تقارير الخبراء المعينين من طرف أعضاء اللجنة العلمية لقسم الهندسة المدنية ضمن اجتماعها المنعقد في يوم الاثنين السابع والعشرون من شهر أفريل عام ألفين وستة وعشرون ميلادي، بهدف إنجاز خبرة حول المطبوعة البيداغوجية المقدمة من طرف الاستاذ **عماري الربيع**، أستاذ محاضر "أ" بقسم الهندسة المدنية بجامعة محمد بوضياف، والمعنونة ب:

Vibrations et Ondes Mécaniques

(Support pédagogique destiné aux étudiants de 2ème année Licence spécialité: Génie Civil)

وحيث أن جميع تقارير الخبراء كانت إيجابية، فقد تمت المصادقة على المطبوعة واعتمادها لطلبة السنة الثالثة مهندس في تخصص الهندسة المدنية.

وتتكون لجنة الخبراء المعينة من طرف أعضاء اللجنة العلمية للقسم من السادة الآتية أسماءهم:

الأستاذ: بورصاص عبد الحكيم أستاذ التعليم العالي بجامعة محمد بوضياف بالمسيلة

الأستاذة: غلاب تركية أستاذ التعليم العالي بجامعة محمد بوضياف بالمسيلة

الأستاذ: كحول عبد الحليم أستاذ التعليم العالي بجامعة برج بوعريريج

تستعمـل هذه الشهـادة فيما يسمـح به القانـون

رئيس اللجنة العلمية للقسم

براجح فؤاد

جامعة محمد بوضياف المسيلة
رئيس
اللجنة العلمية
لقسم الهندسة المدنية
كلية التكنولوجيا

رئيس القسم

عمريو عبد الرشيد

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
رئيس قسم الهندسة المدنية
كلية التكنولوجيا

تم المسح الضوئي بـ CamScanner

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de La Recherche Scientifique

Université : *Mohamed Boudiaf M'sila*
Faculté : *Technologie*
Département : *Génie Civil*
Domaine : *ST-SM*

POLYCOPIE :
Vibrations et Ondes Mécaniques

Module : PHYSIQUE 03
Niveau : 2ième Année Licence

Présentée par

Dr. Amari Rabie

Année Universitaire : 2025/2026

Avant-propos

بسم الله الرحمن الرحيم

Cette polycopié, intitulée « Vibrations et ondes » (Physique 3), est présentée pour couvrir le programme de deuxième année LMD-S3 dans le domaine "Sciences des matériaux (SM) et Science et technologie (ST)". Le cours qui présenté est conformité au canevas relatif à la formation.

Nous avons divisé ce travail en deux parties :

La première partie : est consacrée aux phénomènes vibrations et aux méthodes de traitement, divisée en cinq chapitres.

- *Chapitre I : Généralité sur les oscillations*
- *Chapitre II: Systèmes linéaires libres à un degré de liberté.*
- *Chapitre III : Système linéaire libres amortis à un degré de liberté.*
- *Chapitre IV : Systèmes linéaire forcés à un degré de liberté.*
- *Chapitre V : Systèmes linéaires à deux degrés de liberté.*

La deuxième partie : cette partie est consacrée à l'étude des ondes.

- *Chapitre VI : Généralités sur les ondes mécaniques.*
- *Chapitre VII : Ondes transversales sur une corde.*
- *Chapitre VIII : Ondes longitudinales dans les fluides.*

Enfin, nous avons ajouté une annexe dans laquelle nous présentées des examens de cette module « physique3 » provenant de différentes universités pour les années précédentes, ainsi que leurs solutions.

J'espère que ce travail sera un ajout scientifique qui profitera aux étudiants. Bonne chance à tous.

Dr : Rabie AMARI

Table de Matière

- ✓ Avant-propos

Partie I : Vibrations 5
Chapitre I : Généralités sur les oscillations 5
I.1. Définition d'une oscillation (Vibration) 6
I.2. Mouvement périodique 6
I.2.1. Définitions 6
I.3. Forces conservatives et non conservatives 8
I.4. Position d'équilibre 8
I.4.1. Equilibre stable 9
I.4.2. Equilibre instable 9
I.4.3 Exemple 9
I.5. Coordonnées généralisées 10
I.6. Degré de liberté 10
I.6.1. Degré de liberté d'un point matériel 10
I.6.2. Degré de liberté d'un corps solide 10
I.7. Modélisation physique 10
I.6.1. Association de deux ressorts 11
I.8. L'énergie mécanique (totale) 12
I.8.1. L'énergie cinétique 12
I.8.2. L'énergie potentielle 12
I.9. Méthode de calcul 14
I.9.1. Principe de conservation de l'énergie mécanique 14
I.9.2. Principe fondamentale de la dynamique (2eme loi de Newton) 14
I.9.3. Méthode de Lagrange 14
I.10. Exercice : 16
Chapitre II : Systèmes vibratoires linéaires libres à un degré de liberté 22
II.1 Oscillateurs libres 23
II.2 Oscillateur harmonique 23
II.2.1. Extraction de l'équation différentielle du mouvement de l'oscillateur harmonique 23
II.2.2. Généralisation 24
II.2.3. Force de rappel 25
II.2.4. Exemples 25
II.3. Solutions de l'équation harmonique 26
II.3.1. Conditions initiales 26
II.3.2. Pulsation propre 27

II.4. Méthode de Lagrange 27
II.4.1. Fonction de Lagrange (lagrangien) 28
II.4.2. Équations de Lagrange (ou équations d'Euler-Lagrange) 28
II.5. Exercice 29
Chapitre III : Systèmes Linéaires Libres Amortis à Un Degré de Liberté 33
III.1. Oscillateur linéaire libre amorti 34
III.2.1 Fonction de dissipation de Rayleigh 34
III.3. Équation de Lagrange des systèmes amortis 35
III.3 Équation différentielle de mouvement des systèmes vibratoires amortis 35
III.3.1. Exemple d'un système amorti - masse +ressort + amortissement fluide 36
III.4. Résolution de l'équation du mouvement 36
III.4.1. Régime d'amortissement fort ($\Delta' > \mathbf{0}$) 37
III.4.2. Régime d'amortissement critique ($\Delta' = \mathbf{0}$) 37
III.4.3. Régime d'amortissement faible ($\Delta' < \mathbf{0}$) 38
III.5. Décrément logarithmique 39
III.6. Facteur de qualité du système 39
Chapitre IV : Systèmes Linéaires Forcés à Un Degré de Liberté 41
IV.1 Oscillations forcées avec amortissement 42
IV.2. Équation de Lagrange des systèmes forcés 42
IV.2.1. Exemple 42
IV.4. Résolution de l'équation du mouvement 44
IV.4.1. Phase transitoire 44
IV.4.2. Phase permanente 44
IV.4.3. Méthode des nombres complexes 45
IV.5. Phénomène de résonnance 46
IV.6. Bande passante et facteur de qualité 48
IV.7. Puissance fournie et puissance dissipée 49
Chapitre V : Systèmes linéaires à deux degrés de liberté. 51
V.1. Systèmes à deux degrés de liberté 52
V.1.1. Condition d'équilibre 52
V.1.2 Types de couplage 53
V.2 Oscillation libre non amortie 54
V.2.a. Double pendule 54
V.2.b. Les équations différentielles de mouvement 55
V.2.c. Détermination des pulsations d'oscillation 56
V.2. Oscillations forcées amortie 58

Partie II : Les Ondes Mécaniques 62
Chapitre VI: Généralités sur les ondes mécaniques 62
VI.1. Introduction 63
VI.2. Définition d'une onde 63
VI.2.1. Les ondes longitudinales et transversales 63
VI.2.2. La longueur d'onde 64
VI.2. Equation de propagation 64
VI.3. Solution de l'équation de propagation 66
VI.4. Onde progressive sinusoïdale 66
Chapitre VII : Cordes vibrantes 68
VII.1. Equation des ondes 69
VII.2. Ondes progressives harmoniques 70
VII.2.1. Force en un point 70
VII.2.1. Impédance 70
VII.3. Oscillations libres d'une corde de longueur finie 71
VII.3.1. Modes propres pour des extrémités fixes 71
VII.3.1. Modes propres avec une extrémité libre 72
Chapitre VIII : Ondes acoustiques dans les fluides 74
VIII.1. Equation des ondes 75
VIII.2. Vitesse du son 77
VIII.3. Onde progressive sinusoïdale 77
VIII.3.1. Impédance acoustique 78
VIII.4. Réflexion-Transmission 78
Références 79

Partie I : Vibrations

Chapitre I : Généralités sur les oscillations

I.1. Définition d'une oscillation (Vibration)

En physique, le terme ***oscillation (vibration)*** désigne le mouvement (variation de l'état) d'un système qui reste voisin de son état de repos (mouvement autour de sa position d'équilibre). Une masse accrochée à un ressort, un circuit électrique RLC, un haut-parleur ou une molécule diatomique représentent quelques exemples de systèmes qui sont le siège de vibrations. Tous ces mouvements ont un trait commun : une répétition du mouvement sur un cycle. La figure ci-dessous (**Fig. I.1)** montre quelques oscillateurs mécaniques.

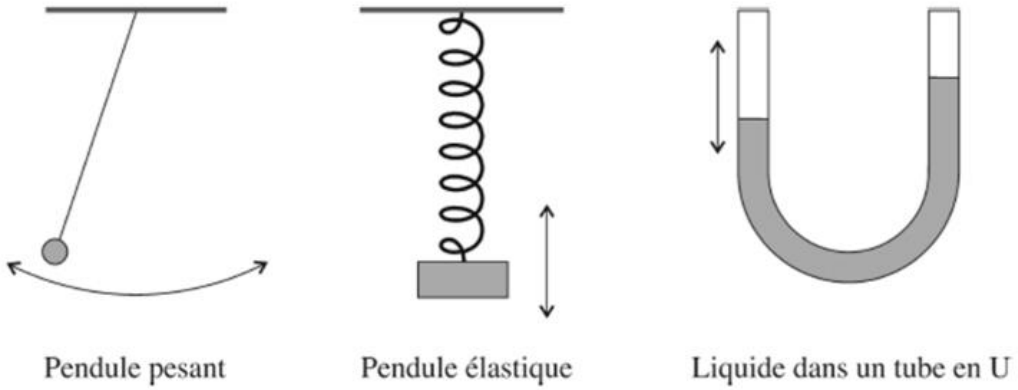


Figure I.1 : oscillateurs mécaniques

Un oscillateur mécanique effectue un mouvement d'aller-retour de part et d'autre de sa position d'équilibre stable. En électricité, un circuit dans lequel circule un courant alternatif est un exemple d'oscillateur électrique.

I.2. Mouvement périodique

I.2.1. Définitions

- ***Mouvement périodique*** : On appelle mouvement périodique un phénomène qui se répète de façon identique au bout d'un intervalle de temps régulier.
- ***Période :*** La période d'un phénomène périodique est la plus petite durée séparant deux reproductions à l'identique du phénomène ; elle est souvent notée T. On dit souvent qu'au cours d'une période le système effectue un cycle. La période d'un phénomène s'exprime en seconde (s).
- ***Fréquence*** : Le nombre de cycles effectués par unité de temps est appelé la **fréquence**, habituellement notée *f*. La fréquence s'exprime en Hertz (ou s^{-1}). La période et la fréquence sont l'inverse l'une de l'autre :

$$\boldsymbol{f = \frac{1}{T}} \quad \text{Ou} \quad \boldsymbol{T = \frac{1}{f}}$$

- ***Pulsation*** : Dans divers domaines, on préfère raisonner en termes de **pulsation** (appelée aussi fréquence angulaire), qui s'exprime en radians par seconde (rad/s). Fréquence et pulsation sont liées par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}}$$

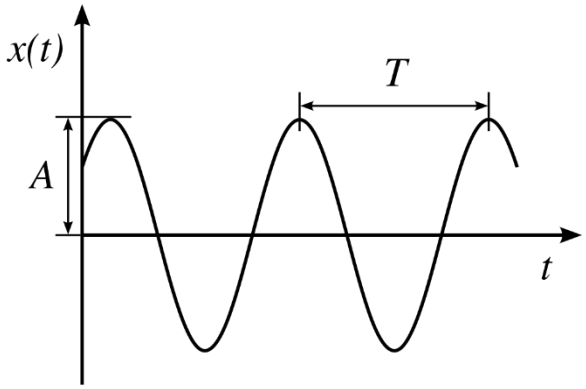


Figure I.2 : Mouvement périodique, T : période (s), A : Amplitude

Un système mécanique oscillant est un système mécanique qui a un mouvement périodique autour de sa position d'équilibre stable. Les oscillations d'une masse reliée à un ressort, le mouvement d'un pendule ou les vibrations d'un instrument à corde sont des exemples de mouvements oscillatoires.

Tout système mécanique, incluant les machines industrielles les plus complexes, peut être représenté par des modèles formés d'un ressort, un amortisseur et une masse.

La vibration la plus simple (**Fig. I.2**) peut être traduite mathématiquement à l'aide de la fonction sinusoïdale :

$$\boldsymbol{g(t) = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

Où, A est appelée amplitude, ω : la pulsation, φ : la phase initiale. Parmi les grandeurs physiques étudiées des systèmes oscillants, on trouve :

- le déplacement x.

- le déplacement angulaire θ.
- la charge q.
- le courant i.
- la tension U.

I.3. Forces conservatives et non conservatives

- **les forces conservatives** (les forces dérivantes d'un potentiel) : Lorsqu'un système est soumis à des forces conservatives, son énergie mécanique $\boldsymbol{E_M}$ se conserve. On a donc que les variations de l'énergie mécanique sont nulles ($\boldsymbol{\Delta E_M=0}$).

Une force dérivant d'un potentiel $\boldsymbol{U} \Longrightarrow \vec{\boldsymbol{F}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{U} = -\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\boldsymbol{U}$

$$\Longrightarrow \vec{\boldsymbol{F}} = -\left(\frac{\boldsymbol{\partial U}}{\boldsymbol{\partial x}}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\boldsymbol{\partial U}}{\boldsymbol{\partial y}}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{\boldsymbol{\partial U}}{\boldsymbol{\partial z}}\vec{\boldsymbol{k}}\right)$$

- **les forces non conservatives** (Les forces de frottements) : elles sont dites dissipatives donc il a une partie de l'énergie mécanique se transforme en chaleur. Il n'y a donc pas conservation de l'énergie mécanique.

I.4. Position d'équilibre

On dit qu'un système est dans un état d'équilibre si

$$\sum \vec{\boldsymbol{F}}\Big|_{\boldsymbol{q=q_0}} = \boldsymbol{0}.$$

Le système est alors, soit au repos soit il effectue un mouvement rectiligne uniforme (c'est le principe d'inertie). La notion d'équilibre d'un système en termes d'énergie potentielle $\boldsymbol{U}$ s'écrit :

$$\frac{\boldsymbol{dU}}{\boldsymbol{dq}}\Big|_{\boldsymbol{q=q_0}} = \boldsymbol{0}$$

q : coordonnée généralisée (x, y, z, θ,…).

q_0 : position d'équilibre.

C'est-à-dire à l'équilibre l'énergie potentiel doit être extrémale (minimale ou maximale).

Remarque : À l'équilibre, la vitesse de tous les points du système est nulle. Lorsque le système oscille, il n'est pas à l'équilibre : il y a alors écart de l'état d'équilibre (condition d'écart à l'équilibre).

I.4.1. Equilibre stable

Si le système est écarté de sa position d'équilibre stable (ou de repos), il tend à y revenir.

La condition d'équilibre ***stable*** s'écrit (**Figure I.3**) $\left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q=q_0} > 0$:

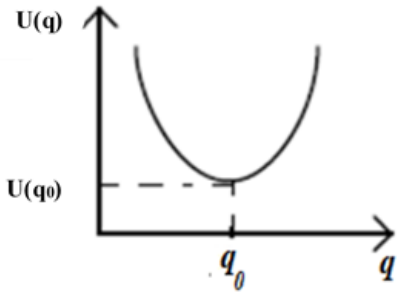


Figure I.3 : Equilibre stable

Remarque : Cette condition est aussi une ***condition d'oscillation libre***.

I.4.2. Equilibre instable

Si le système est écarté de cette position d'équilibre, le système n'y revient pas.

La condition d'équilibre ***instable*** s'écrit donc (**Figure I.4**) : $\left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q=q_0} < 0$

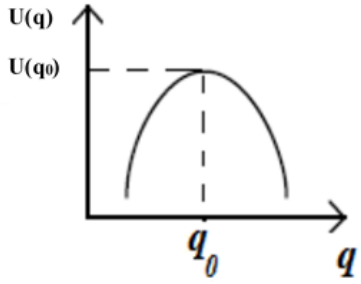


Figure I.4 : Equilibre instable

I.4.3 Exemple

Considérons ***un pendule*** constitué d'une masse ***m*** accrochée au bout d'une tige rigide de longueur l, l'autre extrémité étant articulée à un point fixe (**Figure I.5)**

L´énergie potentielle (gravitationnelle) :

$$U = mgz = mgl(1 - cos\theta)$$

$$\frac{dU}{d\theta} = mgl(sin\theta)$$

$\frac{dU}{d\theta} = 0 \Rightarrow sin\theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \pi \end{cases}$: deux positions d'équilibre

$$\Rightarrow \begin{cases} \left.\frac{dU}{d\theta}\right|_{\theta=0} = mgl(cos\theta)|_{\theta=0} = mgl > 0 : \text{position d'équilibre stable} \\ \left.\frac{dU}{d\theta}\right|_{\theta=\pi} = mgl(cos\theta)|_{\theta=\pi} = -mgl < 0 : \text{position d'équilibre instable} \end{cases}$$

I.5. Coordonnées généralisées

Un système physique oscillant peut être repéré par une coordonnée généralisée notée « q » désignant l'écart par rapport à sa position d'équilibre.

I.6. Degré de liberté

On définit le nombre de degrés de liberté par le nombre de mouvements indépendants d'un système physique.

Le nombre de degrés de liberté (N_d) est égale au nombre de coordonnées (N) moins (-) le nombre de liaisons (l).

$$N_d = N - l$$

I.6.1. Degré de liberté d'un point matériel

Un point matériel libre dans l'espace possède trois (3) degrés de liberté (coordonnées ou mouvements).

I.6.2. Degré de liberté d'un corps solide

Un solide libre dans l'espace possède six (6) degrés de liberté (voir **Figure I.6)** (coordonnées ou mouvementes) en l'occurrence :

3 degrés de translation.

3 degrés de rotation.

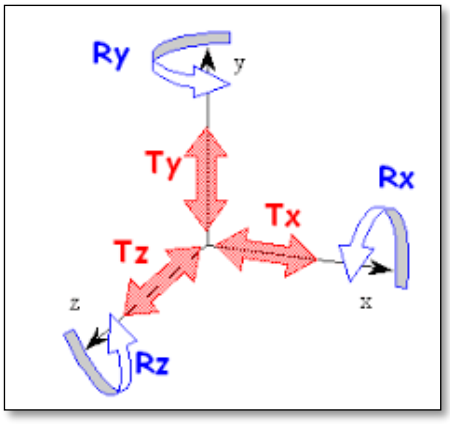


Figure I.6 : Mouvements possibles d'un corps solide sur les trois axes cartésiens

I.7. Modélisation physique

On associe à tous les systèmes physiques un système "masse-ressort" qui constitue un excellent modèle représentatif pour étudier les oscillations comme suit (**Figure I.7)** :

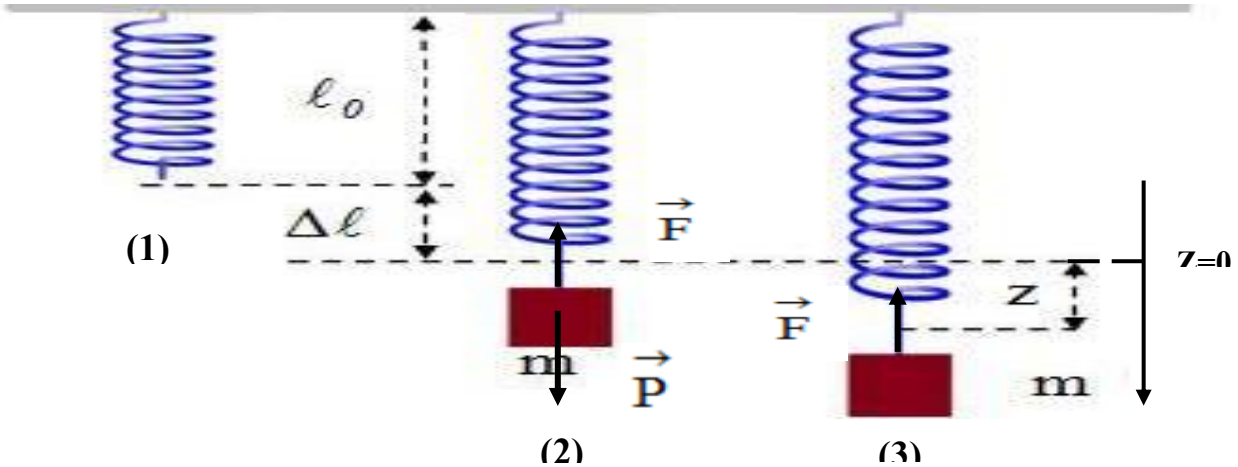


Figure I.7 : Système masse ponctuelle –ressort idéal. (1) ressort à vide de longueur l_0, (2) ressort + masse à l'état d'équilibre, (3) système masse + ressort écarter de sa position d'équilibre (en mouvement).

F(t) s'appelle la force de rappel qui est proportionnelle à l'allongement z(t) du ressort. ***K*** est appelée la constante de raideur du ressort.

$\overrightarrow{F} = -Kz\vec{k}$: selon la loi de Hooke.

I.6.1. Association de deux ressorts

a- En série

Les ressorts sont reliés comme indiqués sur la **figure I.8**

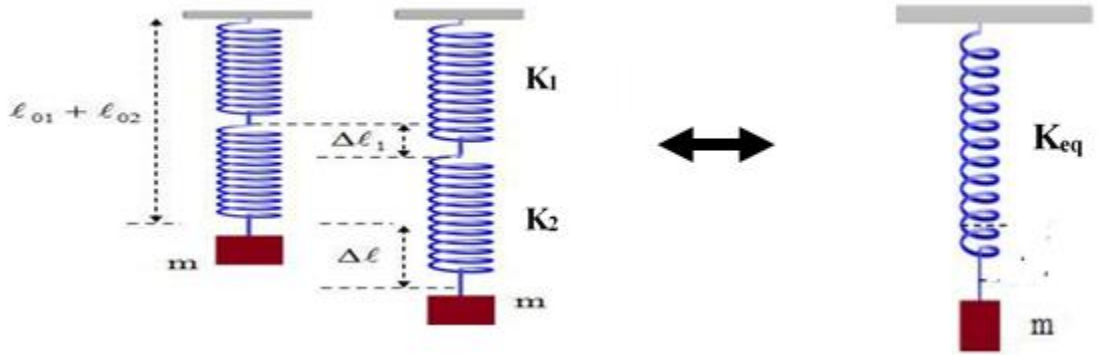


Figure I.8 : deux ressorts en série

- La raideur équivalente est :

$$\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \rightarrow K_{eq} = \frac{K_1.K_2}{K_1 + K_2}$$

b- En parallèle

Les ressorts sont reliés comme indiqués sur la **figure I.9**

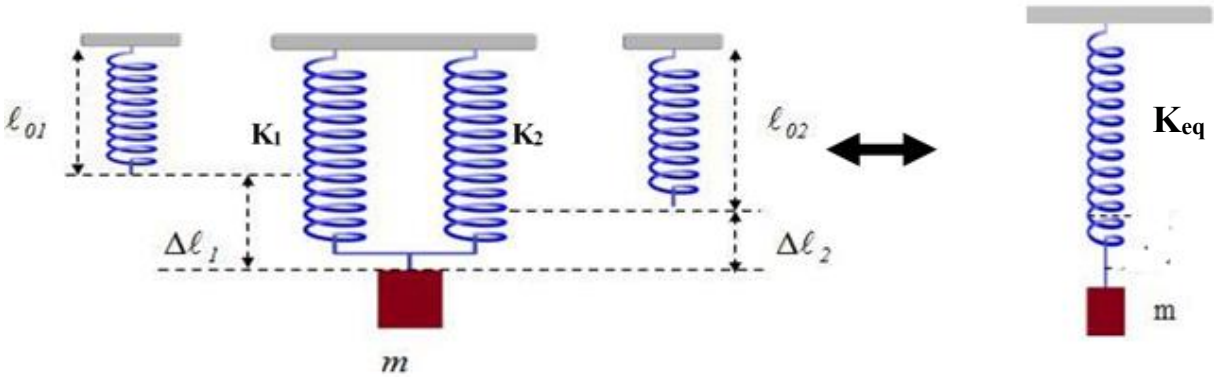


Figure I.9 : deux ressorts en parallèle.

- La raideur équivalente *:* $\boldsymbol{K_{eq} = K_1 + K_2}$

I.8. L'énergie mécanique (totale)

L'énergie mécanique du système est une quantité utilisée en mécanique classique pour désigner l'énergie d'un système emmagasinée sous forme d'énergie cinétique (***T***) et d'énergie potentielle (***U***). C'est une quantité conservée en l'absence de frottement.

$$\boldsymbol{E_m = T + U}$$

I.8.1. L'énergie cinétique

L'énergie cinétique est l'énergie, (exprimée en Joule), que possède un corps du fait de sa vitesse. Elle s'écrit sous la forme : $\boldsymbol{T = \sum_i \frac{1}{2} m_i\, q_i^2}$

I.8.2. L'énergie potentielle

Lorsqu'il existe une position d'équilibre stable (q_0) il est toujours possible d'avoir des oscillations autour de cette position qui est souvent choisis par commodité comme origine du repère donc $\boldsymbol{q_0}$=0.

Pour un système linéaire (quand il s'agit d'oscillations de faibles amplitudes) il est possible de développer l'énergie potentielle en série de Taylor au 2eme ordre du développement.

Rappel : développement limité (série de Taylor en 2eme ordre)

$$\boldsymbol{f(x)|_{x_0} = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2!}\cdot\frac{d^2f}{dx^2}\Big|_{x=x_0}}$$

Donc :

$$\boldsymbol{U(q)|_{q_{0=0}} = U(0) + \frac{q}{1!}\cdot\frac{dU}{dq}\Big|_{q_{0=0}} + \frac{q^2}{2!}\cdot\frac{d^2U}{dq^2}\Big|_{q_{0=0}}}$$

Où :

U(0) : est la valeur de l'énergie potentielle à l'équilibre (on peut choisir l'origine de l'énergie potentielle de sort que ***U(0)=0***)

$\boldsymbol{\frac{dU}{dq}\Big|_{q_{0=0}} = 0 \rightarrow}$ La condition d'équilibre.

$\boldsymbol{\frac{d^2U}{dq^2}\Big|_{q_{0=0}} > 0 \rightarrow}$ La condition de stabilité.

En pose : $\boldsymbol{\frac{d^2U}{dq^2}\Big|_{q_{0=0}} = B}$

Donc l'énergie potentielle prend la forme quadratique en fonction de l'écart par rapport à la position d'équilibre selon l'expression suivente :

$$\boldsymbol{U(q) = \frac{1}{2}Bq^2}$$

I.8.2.1. Exemple

Nous reprenons l'exemple précédent (§ : I.***3.4) :***

L'´énergie potentielle (gravitationnelle) est effectivement quadratique dans la limite des petits angles $\boldsymbol{(\theta \ll)}$ **:** $\boldsymbol{U = mgz = mgl(1 - cos\theta)}$

$$\boldsymbol{cos\theta|_{\theta_0} = cos\theta|_{\theta_0} - \frac{(\theta-\theta_0)}{1!}sin\theta|_{\theta_0} - \frac{(\theta-\theta_0)^2}{2!}cos\theta|_{\theta_0} + \cdots}$$

$\boldsymbol{\theta_0}$: position d'équilibre stable (Comme nous l'avons déjà vu dans l'exemple précédent $\theta_0 = 0$)

$$\boldsymbol{cos\theta|_{\theta_0=0} = 1 - \frac{(\theta - 0)}{1!} sin0 - \frac{(\theta - 0)^2}{2!} cos0 = 1 - \frac{\theta^2}{2}}$$

Donc l'énergie potentielle prend la forme quadratique :

$$\boldsymbol{U = mgl(1 - cos\theta) = mgl\left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2}\right) = \frac{1}{2} mgl\theta^2}$$

I.9. Méthode de calcul

On peut extraire les équations du mouvement pour les systèmes conservatifs (sans frottements) par trois méthodes différentes :

I.9.1. Principe de conservation de l'énergie mécanique

La conservation de l'énergie est un principe physique, selon lequel l'énergie mécanique d'un système isole est invariante au cours du temps i.e.

$$\boldsymbol{E_m = T + U = Constante \Longrightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0}$$

I.9.2. Principe fondamentale de la dynamique (2eme loi de Newton)

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un solide est égale à la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement :

$$\boldsymbol{\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}}$$

$$\boldsymbol{\sum \vec{F}_{ext} = m\frac{d(\vec{v})}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v}}$$

Si m est constante, comme c'est les cas des systèmes classiques alors :

$$\boldsymbol{\sum \vec{F}_{ext} = m\frac{d(\vec{v})}{dt} = m.\vec{a}}$$

$\boldsymbol{\vec{a}}$: le vecteur accélération du système étudié.

I.9.3. Méthode de Lagrange

a) Fonction de Lagrange (ou Lagrangien)

C'est une fonction des coordonnées généralisées $\boldsymbol{q}$, des vitesses généralisées $\boldsymbol{\dot{q}}$ qui permet de d'écrire la dynamique d'un système. Elle est définie par :

$$\boldsymbol{L(q,\dot{q}) = T - U}$$

Qui correspond à la différence entre l'énergie cinétique $\boldsymbol{T}$ et l'énergie potentielle $\boldsymbol{U}$ du système. Notons qu'au niveau du Lagrangien $\boldsymbol{\mathcal{L}(q,\dot{q})}$, les coordonnées généralisées $\boldsymbol{q}$ sont supposées être indépendantes des vitesses généralisées $\boldsymbol{\dot{q}}$. De plus, l'énergie potentielle ne dépend pas de $\boldsymbol{\dot{q}}$ ce qui se traduit par le fait que les forces appliquées au système et dérivant de $\boldsymbol{U}$ sont supposées être conservatives.

Dans l'étude des systèmes mécaniques, le principe de moindre action est un point de départ équivalent à la deuxième loi de Newton. En particulier, les équations de Lagrange peuvent être considérées comme une conséquence de ce principe

b) **Principe de moindre action**

Un système à $\boldsymbol{n}$ degrés de liberté est d´écrit par le lagrangien, $\boldsymbol{\mathcal{L}(q,\dot{q})}$, où $\boldsymbol{q= (q_1, ..., q_n)}$ est un vecteur à $\boldsymbol{n}$ composantes spécifiant la configuration du système à un instant donné. Supposons que le mouvement du système prend place entre un instant initial $\boldsymbol{t_i}$ et un instant final $\boldsymbol{t_f}$ et qu'à ces instants le système est dans des configurations bien déterminées : $\boldsymbol{q_i=q(t_i)}$ *et* $\boldsymbol{q_f =q(t_f)}$, respectivement. On peut alors définir une action associée à $\boldsymbol{\mathcal{L}(q,\dot{q})}$:

$$\boldsymbol{S = \int_{t_i}^{t_f} L(q,\dot{q})\,dt}$$

et le mouvement effectivement suivi par le système, compte tenu des conditions aux limites, sera celui qui minimise l'action $\boldsymbol{S}$.

c) Equations de Lagrange (Euler-Lagrange) :

Ce sont les équations du mouvement du système dans le cadre du formalisme de Lagrange. Pour un système à n degrés de liberté, décrit par le lagrangien $\boldsymbol{L(q_i,\dot{q}_i)}$, ces équations forment un ensemble d'équations différentielles données par :

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}_i}\right) - \frac{dL}{dq_i} = 0\,, \qquad (i = 1, 2, \dots, n)}$$

Les équations de Lagrange sont une reformulation des équations du mouvement de Newton faisant intervenir l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système via le lagrangien et s'exprimant en fonction des coordonnées généralisées.

Remarque :

Pour un système vibratoire de faibles amplitudes l'ensemble des équations différentielles extraites des équations de Lagrange forme un système d'équations différentielles linéaires du 2ème ordre, dont la solution admet n pulsations propres et 2n constantes d'intégration qui sont déterminées par les conditions initiales appliquées au système vibratoire.

d) Equations de Lagrange en présence de forces non conservatives

En présence de forces appliquées non conservatives, les équations de Lagrange deviennent :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}_i}\right) - \frac{dL}{dq_i} = F_i(q_i)\,, \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Où :

$F_i(q_i)$: est la force généralisée définie comme suit :

$$F_i(q_i) = \overrightarrow{F_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_i}$$

et

$\vec{r}_i$: sont les vecteurs position

I.10. Exercice :

Exercice01 :

Calculer les moments d'inertie des corps suivants :

1- Une tige homogène de masse M de longueur l par rapport à un axe passant par son centre de gravite G, puis par rapport à un axe passant par l'une de ses extrémités.
2- Un cylindre plein de rayon R et de masse M par rapport a son axe de symétrie puis d'un cylindre creux.

Solution :

Relation de moments d'inertie :

$$J_{xx} = \int (y^2 + z^2)dm$$

$$J_{yy} = \int (x^2 + z^2)dm$$

$$J_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm$$

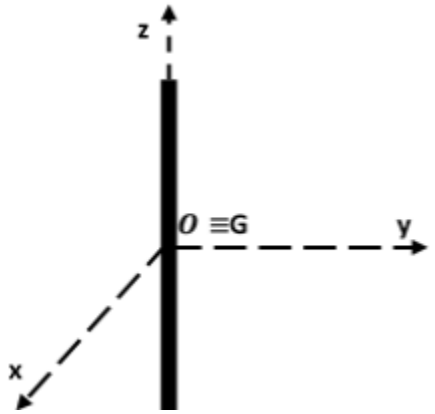
1- Une tige de masse ***m*** de longueur ***l*** par rapport à un axe

Cas a : passant par son centre de gravite ***G*** :

Une tige homogène → la distribution de masse linéaire est constante (λ=Constante)

$$\Rightarrow dm = \lambda dl = \lambda dz$$

$$\Rightarrow m = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \lambda dz \Rightarrow m = \lambda . l$$



Moments d'inertie : $(x = 0, y = 0)$

$$J_{xx} = J_{yy} = \int (z^2) dm \Rightarrow J_{xx} = J_{yy} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} z^2 \lambda dz$$

$$\Rightarrow J_{xx} = J_{yy} = \frac{1}{3} \lambda \, [z^3]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Rightarrow J_{xx} = J_{yy} = \frac{1}{12} \lambda l^3$$

$$\Rightarrow J_{/G} = \frac{1}{12} m l^2$$

Cas b : axe passant par l'une de ses extrémités :

$$\Rightarrow dm = \lambda dl = \lambda dz$$

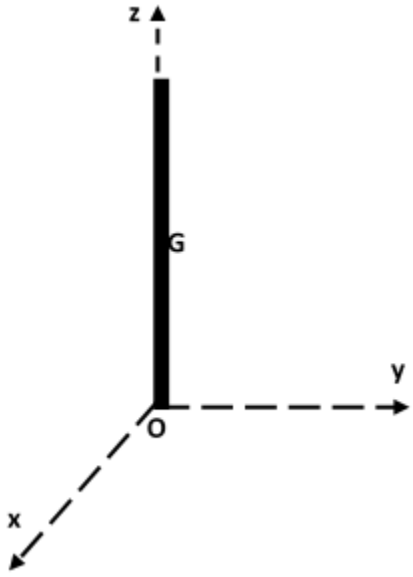
$$\Rightarrow m = \int_0^l \lambda dz \Rightarrow m = \lambda . l$$

Moments d'inertie : $(x = 0, y = 0)$

$$J_{xx} = J_{yy} = \int (z^2) dm \Rightarrow J_{xx} = J_{yy} = \int_0^l z^2 \lambda dz$$

$$\Rightarrow J_{xx} = J_{yy} = \frac{1}{3} \lambda \, [z^3]_0^l \Rightarrow J_{xx} = J_{yy} = \frac{1}{3} \lambda l^3$$

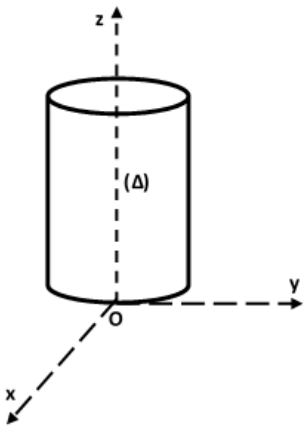
$$\Rightarrow J_{/O} = \frac{1}{3} m l^2$$



2- Un cylindre de rayon ***R*** et de masse ***M*** par rapport a son axe de symétrie

Cas a : un cylindre plain

La distribution de masse volumique est constante (ρ=Constante)



$$\Rightarrow \boldsymbol{dm = \rho . dv = \rho . dx . dy . dz}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{dm = \rho . r . dr . d\theta . dz} \quad \rightarrow \text{Coordonnées cylindriques} \begin{cases} \boldsymbol{x = r\,cos\theta} \\ \boldsymbol{y = r sin\theta} \\ \boldsymbol{z = z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{M = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^H \rho . r . dr . d\theta . dz} \quad \Rightarrow \boldsymbol{M = \pi \rho R^2 H}$$

Moments d'inertie : ($\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}$)

$$\boldsymbol{J_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm = \int r^2\, dm}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{J_{zz} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^H \rho . r^3 . dr . d\theta . dz} \quad \Rightarrow \boldsymbol{J_{zz} = \frac{1}{2} \pi \rho H . r^4 \Big|_0^R}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{J_{zz} = \frac{1}{2} \pi \rho H R^4} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{J_{/\Delta} = \frac{1}{2} M R^2}$$

Cas a : un cylindre creux

La distribution de masse surfacique est constante (σ=Constante)

$$\Rightarrow \boldsymbol{dm = \sigma . ds = \sigma . R . d\theta . dz}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{M = \int_0^{2\pi} \int_0^H \sigma . R . d\theta . dz} \Rightarrow \boldsymbol{M = 2\pi \sigma R H}$$

Moments d'inertie : ($x^2 + y^2 = R^2$)

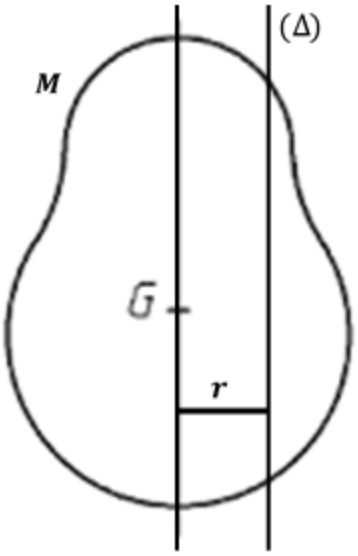
$$\boldsymbol{J_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm = \int R^2\, dm}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{J_{zz} = R^3} \int_0^{2\pi} \int_0^H \boldsymbol{\sigma . d\theta . dz} \Rightarrow \boldsymbol{J_{zz} = 2\pi \sigma R^3 H}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{J_{/\Delta} = M R^2}$$

Exercice02 :

Enoncer le théorème de Huguens.



Solution :

Le moment d'inertie par rapport à l'axe (Δ) égale :

$$J_{/\Delta} = J_{/G} + Mr^2$$

Avec :

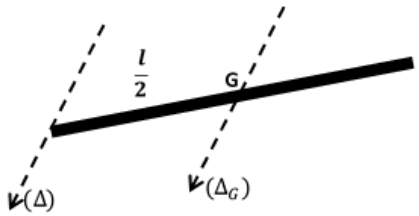
$J_{/G}$: moment d'inertie par rapport à l'axe passant par son centre de gravite G.

r :la distance perpendiculaire entre les deux axes.

Application :

1- Tige :

Le moment d'inertie d'une tige par rapport à un axe passant par l'extrémité :

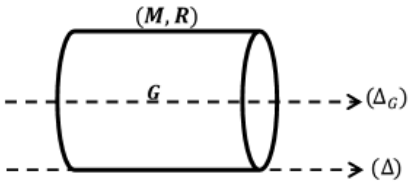


$$J_{/\Delta} = J_{/G} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow J_{/\Delta} = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2$$

$$\Rightarrow J_{/\Delta} = \frac{1}{3}ml^2$$

2- Cylindre :

Le moment d'inertie d'un cylindre par rapport à un axe tangentiel :



$$J_{/\Delta} = J_{/G} + M(R)^2 \Rightarrow J_{/\Delta} = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2$$

$$\Rightarrow J_{/\Delta} = \frac{3}{2}MR^2$$

Exercie03 :

Montrer que le pendule simple est un système à un degré de liberté. Faire le choix convenable de la coordonnée généralisée (notée θ). Montrer que le système admet deux positions d'équilibre une stable et l'autre instable et préciser la valeur de θ pour chaque cas. Si on admet que le système effectue des mouvements de petites amplitudes autour de la position d'équilibre stable, alors donner la forme quadratique du potentiel en fonction de θ. Ecrire alors le Lagrangien du système.

Solution :

- Les liens applique au pendule semple sont : $\begin{cases} \boldsymbol{x = 0} \\ \boldsymbol{y^2 + z^2 = l^2} \end{cases}$

et **m** masse ponctuelle alors : $\boldsymbol{d = 3 - 2 = 1} \longrightarrow$ le pendule simple est un système à un degré de liberté

- La masse décrit un cercle de centre $\boldsymbol{O}$ →on localise m par l'angle $\boldsymbol{\theta}$

$$\boldsymbol{q(t) = \theta(t)} \longrightarrow \text{la coordonnée généralisée}$$

- U : potentielle gravitationnel de $\boldsymbol{m}$ qui dépend que de $\boldsymbol{z}$

$$\vec{\boldsymbol{p}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\boldsymbol{U} \Rightarrow \boldsymbol{mg\vec{k}} = -\frac{\boldsymbol{\partial U}}{\boldsymbol{\partial z}}\vec{\boldsymbol{k}}$$

$$\int_{\boldsymbol{U(0)}}^{\boldsymbol{U(z)}} \boldsymbol{dU} = -\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{z}} \boldsymbol{mgdz} \Rightarrow \boldsymbol{U = -mgz + U(o)}$$

Avec : $\boldsymbol{z = l(cos\theta - 1)}$

Potentiel U en fonction θ : $\mathrm{U}(\theta) = \mathrm{mgl}(1 - \cos\theta) + \mathrm{U}(\mathrm{o})$, si on choisit $\boldsymbol{\theta}$=$\boldsymbol{\theta}$ comme origine des potentiels alors : $\boldsymbol{U = mgl(1 - cos\theta)}$.

pour des oscillations des faibles amplitudes $(\boldsymbol{\theta} \ll) \Rightarrow \boldsymbol{cos\theta} \approx \boldsymbol{1 - \frac{\theta^2}{2}}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{U(\theta) = \frac{1}{2} mgl\theta^2}$$

à l'équilibre : $\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta_0} = \boldsymbol{0}$

$$\Rightarrow \left.\frac{\boldsymbol{\partial U}}{\boldsymbol{\partial \theta}}\right|_{\boldsymbol{\theta_0}} = \boldsymbol{mgl.sin\theta}|_{\boldsymbol{\theta_0}} = \boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\sin\theta_0 = 0} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\theta_0 = 0} \\ \boldsymbol{\theta_0 = \pi} \end{cases} \rightarrow \text{Le système admet deux positions d'équilibre}$$

L'équilibre stable et instable :

$$\left.\frac{\boldsymbol{\partial^2 U}}{\boldsymbol{\partial \theta^2}}\right|_{\boldsymbol{\theta_0}} = \boldsymbol{mgl.cos\theta_0}$$

Si : $\boldsymbol{\theta_0 = 0} \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta_0 = 0} = \boldsymbol{mgl > 0}$ → position d'équilibre stable

Si : $\boldsymbol{\theta_0 = \pi} \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta_0 = \pi} = \boldsymbol{-mgl < 0}$ → position d'équilibre instable

Pour des oscillations des faibles amplitudes $(\boldsymbol{\theta} \ll) \Rightarrow \boldsymbol{cos\theta} \approx \boldsymbol{1 - \frac{\theta^2}{2}}$

$\Rightarrow \boldsymbol{U(\theta) = \frac{1}{2} mgl\theta^2} \rightarrow$ La forme quadratique du potentiel en fonction de θ

La fonction de Lagrange et l'équation de Lagrange :

Lagrangien : $\boldsymbol{\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m g l \theta^2}$

L'équation de Lagrange : $\boldsymbol{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0}$

Chapitre II : Systèmes vibratoires linéaires libres à un degré de liberté

II.1 Oscillateurs libres

Un système est le siège d'oscillations libres si celui-là après avoir été écarté de son état d'équilibre, acquiert un mouvement vibratoire sans aucun apport d'énergie de l'extérieur. Donc un oscillateur libre est un système oscillant sans aucune force d'excitation extérieure.

II.2 Oscillateur harmonique

II.2.1. Extraction de l'équation différentielle du mouvement de l'oscillateur harmonique

On considère une masse m ramenée à son centre d'inertie G, accrochée à un ressort linéaire sans masse et posée sur un support plan horizontal. Les frottements entre le plan horizontal et la masse sont supposés négligeables.

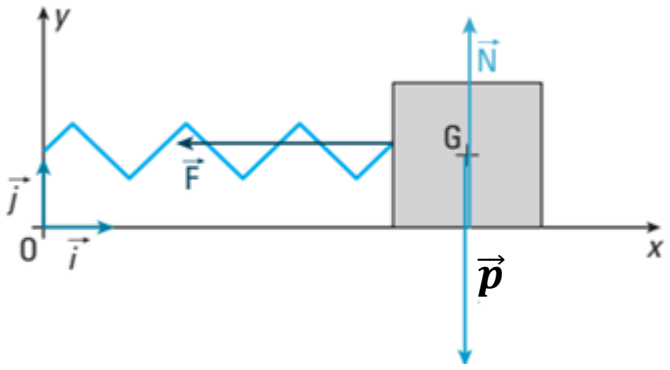


Figure II.1 : système masse + ressort

a- 2ème loi de Newton

En appliquant la seconde loi de Newton, on aura :

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$

En projetant cette relation suivant les axes (Ox) et (Oy), on obtient :

• suivant (Ox) : $ma_x = m\ddot{x} = -kx$

• suivant (Oy) : $ma_y = m\ddot{y} = -mg + N = 0$

Finalement et étant donné que l'accélération verticale est nulle, il reste :

$$m\ddot{x} = -kx$$

D'où:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire, homogène du 2ème ordre et à coefficient constants et positifs. Cette équation est appelée ***équation harmonique***.

b- Principe de conservation de l'énergie mécanique

L'expression de l'énergie potentielle élastique est donnée par :

$$\boldsymbol{U = \frac{1}{2}kx^2}$$

Tandis que l'énergie cinétique est :

$$\boldsymbol{T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2}$$

On en déduit que l'énergie mécanique du système est :

$$\boldsymbol{E_m = T + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2}$$

Les frottements étant supposés négligeable, il en découle que le système est conservatif et l'énergie mécanique est alors constante et sa dérivée par rapport au temps est par conséquent nulle i.e.

$$\boldsymbol{\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0}$$

Donc on obtient de nouveau l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique comme précédemment :

$$\boldsymbol{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

II.2.2. Généralisation

Un oscillateur ***harmonique*** est un système dont la grandeur $q(t)$ qui le caractérise vérifie l'équation différentielle :

$$\boldsymbol{\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0}$$

ω_0: est la ***pulsation propre*** de l'oscillateur et se mesure en rad · s^{-1}

Remarque :

- Il faut signaler que toutes les oscillations de faible amplitude autour de la position d'équilibre peuvent être assimilées à des oscillations linéaires et l'énergie potentielle peut être mise sous forme quadratique de la coordonnée généralisée $\boldsymbol{q}$
- L'équation $\boldsymbol{\ddot{q} - \omega_0^2 q = 0}$: ***est aussi une équation différentielle linéaire homogène du second ordre, mais ce n'est pas celle de l'oscillateur harmonique.***

II.2.3. Force de rappel

Un oscillateur harmonique qui dès qu'il est écarté de sa position d'équilibre d'une distance x (ou ongle θ), est soumis à une force de rappel opposée et proportionnelle à l'écartement x (ou θ) comme suit :

$$\boldsymbol{F = -cx}$$

Où c ***: est une constante positive.***

II.2.4. Exemples

1- Une masse accrochée à un ressort (**Figure II.2**) (dans la limite des petites élongations). On a vu qu'en utilisant la loi de Hooke la force de rappel est donnée par :

$$\vec{F} = -kx\vec{\imath}$$

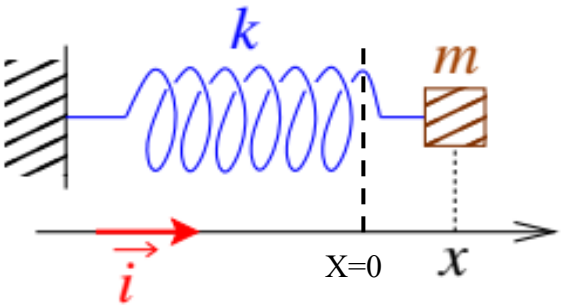


Figure II.2 : masse attachée à un ressort

2- Un pendule simple : une masse m accrochée au bout d'une tige de longueur ***l*** **(Figure II.3)**. La force de rappel est :

$$\boldsymbol{\vec{F} = P_x\vec{\imath} = -mgsin\theta\ \vec{\imath}}$$

Le pendule devient un oscillateur harmonique lorsque :

$$\boldsymbol{\theta \ll \Longrightarrow sin\theta \approx \theta}$$

Donc :

$$\mathbf{\vec{F} = P_x\vec{\imath} = -mg\theta\ \vec{\imath}}$$

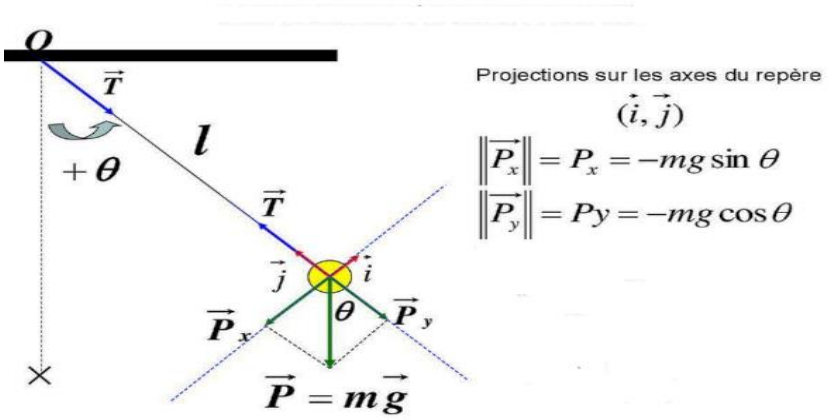


Figure II.3 : pendule simple

II.3. Solutions de l'équation harmonique

L'équation temporelle régissant le mouvement (l'état) d'un oscillateur harmonique est obtenue de la solution de l'équation différentielle linéaire :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

L'équation différentielle de l'oscillateur harmonique admet une solution sinusoïdale qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$q(t) = q_0\, cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Avec :

$q(t)$ **:** ***Élongation instantanée***

q_0 : ***Amplitude ou élongation maximale***

ω_0 : ***Pulsation propre*** (en rad/s)

φ : ***Phase initiale*** (en rad).

Les deux constantes d'intégration (q_0 et φ) s'obtiennent à l'aide des conditions initiales.

II.3.1. Conditions initiales

Deux conditions initiales sont nécessaires afin de déterminer les valeurs de q_0 et de φ. En général les conditions sont imposées sur l'élongation initiale et la vitesse initiale. Il en découle à résoudre le système à deux équations suivantes :

$$t = 0 \implies \begin{cases} q(0) = q_0 \cos\varphi \\ \dot{q}(0) = -q_0\omega_0 \sin\varphi \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\tan\varphi = -\frac{\dot{q}(0)}{\omega_0 q(0)} \quad \text{et} \quad q_0 = \sqrt{[q(0)]^2 + \left[\frac{\dot{q}(0)}{q_0\omega_0}\right]^2}$$

La figure II.4 représente le graphe représentant l'équation temporelle $\boldsymbol{q(t)}$ de l'oscillateur harmonique, qui est purement sinusoïdale. Sur la figure sont illustrées les deux constantes $\boldsymbol{q_0}$ et $\boldsymbol{\varphi}$ fixées par les deux conditions initiales et leur influence sur l'allure de la courbe.

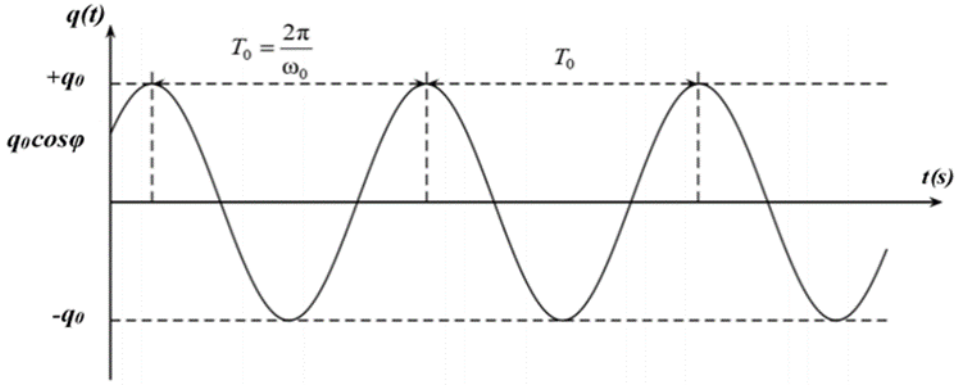


Figure II.4: Oscillation sinusoïdale (ou harmonique) $\boldsymbol{q(t) = q_0\, cos(\omega_0 t + \varphi)}$.

II.3.2. Pulsation propre

La pulsation propre d'un système est celle avec laquelle oscille ce système lorsqu'il est en mouvement libre, c'est-à-dire sans force excitatrice extérieure ni forces dissipatives (frottements). Elle ne dépend que des grandeurs propres de l'oscillateur.

Exemple

Dans le cas d'une masse accrochée à un ressort linéaire horizontal sans frottement, la pulsation propre des oscillations (en rad /s) est :

$$\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

avec $\boldsymbol{k}$ la constante de raideur du ressort (en N/m) et $\boldsymbol{m}$ la masse (en kg).

II.4. Méthode de Lagrange

La méthode de Lagrange sera appliquée pour le même système traité précédemment. Cette méthode consiste dans un premier temps à déterminer l'expression de l'énergie cinétique $\boldsymbol{T}$ et celle de l'énergie potentielle $\boldsymbol{U}$ en fonction de la coordonnée généralisée choisie et sa dérivée par rapport au temps et puis écrire l'équation de Lagrange par le biais du Lagrangien $\boldsymbol{L(q, \dot{q}) = T - U}$, qui désigne la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système

considérée. L'équation différentielle régissant les vibrations dans le système est ensuite extraite de l'équation de Lagrange après avoir exécuter tout calcul sur la Fonction de Lagrange.

II.4.1. Fonction de Lagrange (lagrangien)

Par définition la fonction de Lagrange est :

$$\boldsymbol{L(x,\dot{x}) = T - U}$$

- L'énergie potentielle élastique est :

$$\boldsymbol{U = \frac{1}{2}kx^2}$$

- Du moment que le système est un point matériel en mouvement de translation, l'énergie cinétique est :

$$\boldsymbol{T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2}$$

Donc :

$$\boldsymbol{L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + C^{st}}$$

II.4.2. Équations de Lagrange (ou équations d'Euler-Lagrange)

Le système analysé est un système libre à un degré de liberté (un seul mouvement selon l'axe des x) et sans frottement (conservatif). Ainsi, nous pouvons appliquer l'équation de Lagrange de la forme suivante :

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}}\right) - \frac{dL}{dq} = 0}$$

Étant donné que la coordonnée généralisée q n'est d'autre que la coordonnée cartésienne x, alors l'équation de Lagrange prendra la forme suivante :

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x}}\right) - \frac{dL}{dx} = 0}$$

Ce qui donne après dérivation :

$$\boldsymbol{m\ddot{x} + kx = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

La forme de l'équation différentielle obtenue est celle d'un oscillateur harmonique avec une pulsation propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

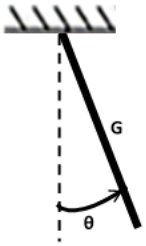
Donc la solution est purement sinusoïdale et s'écrit alors :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Les deux constantes A et φ sont déterminées à partir de conditions initiales fixées au préalable, comme nous l'avons déjà signalé dans le paragraphe II.3.1.

II.5. Exercice

Exercice01 :



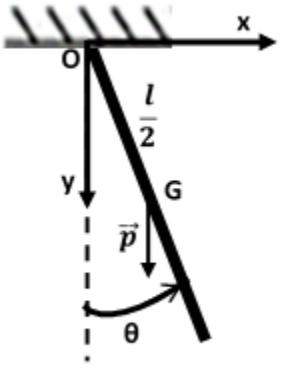
Considérons un pendule pesant forme par une tige rigide de masse M et de longueur l et suspendue par une de ses extrémités. La tige est écartée de sa position d'équilibre d'un angle θ, suppose faible.

1- Ecrire les expressions d'énergie cinétique et potentille.
2- Ecrire le Lagrangien du système.
3- Déduire l'équation du mouvement ainsi que l'expression de la pulsation propre ω_0.

Solution :

- L'énergie cinétique T :

Le mouvement est rotationnel pur $\Rightarrow T = \frac{1}{2} J_{/\Delta} \dot{\theta}^2$



$J_{/O}$: moment d'inertie par rapport d'axe de rotation 0

$$J_{/O} = J_{/G} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}Ml^2 + \frac{1}{4}Ml^2 \Rightarrow J_{/O} = \frac{1}{3}Ml^2$$

Donc :

$$T = \frac{1}{6}Ml^2\dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentille U :

L'énergie potentille de pesanteur $\Rightarrow \vec{p} = -\overrightarrow{grad}U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)$

$$Mg\,\vec{j} = -\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} \Rightarrow dU = -Mgdy$$

$$\int_{U_{int}}^{U(\theta)} dU = -Mg\int_{\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}\cos\theta} dy \Rightarrow U(\theta) - U_{int} = -Mg\left(\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{U(\theta) = \frac{1}{2} Mgl(1 - cos\theta)}$$

- Lagrangien du système $\boldsymbol{\mathcal{L}}$:

$$\boldsymbol{\mathcal{L} = T - U \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{6} Ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} Mgl(1 - cos\theta)}$$

Pour les faibles oscillations $(\boldsymbol{\theta} \ll) \Rightarrow \boldsymbol{cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}}$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{6} Ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{4} Mgl\theta^2}$$

- L'équation du mouvement :

L'équation de Lagrange du système a 1d.d.l non amorti : $\boldsymbol{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0}$

$$\boldsymbol{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{3} Ml^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{1}{3} Ml^2\ddot{\theta}}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} Mgl\theta}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \frac{1}{3} Ml^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2} Mgl\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{3g}{2l}\theta = 0}$$

On pose : $\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2l}}}$ → pulsation propre

$$\boldsymbol{\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0}$$

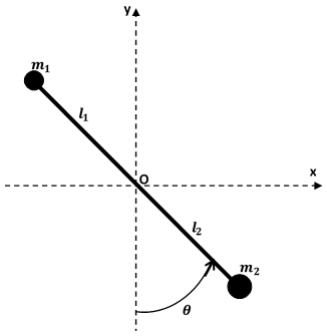
La solution c'est : $\boldsymbol{\theta(t) = A\, cos(\omega_t . t + \varphi)}$

Exercice02 :

Une tige rigide sans masse et de longueur $\boldsymbol{l_1 + l_2}$ porte à ses extrémités deux masse $\boldsymbol{m_1}$et $\boldsymbol{m_2}$.

Elle est articulée ou point **O** situe à $\boldsymbol{l_1}$ de $\boldsymbol{m_1}$et occupe au repos une position verticale.

1- Ecrire l'énergie potentille de pesanteur des deux masses et déduire la condition d'équilibre stable du système.
2- Donner son Lagrangien et en tirer l'équation différentielle de son mouvement.



Solution :

- L'énergie potentille de pesanteur : $\boldsymbol{U = U_1 + U_2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{p_1} = -\overrightarrow{grad}U_1 = -\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U_1}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U_1}{\partial z}\vec{k}\right) \\ \overrightarrow{p_2} = -\overrightarrow{grad}U_2 = -\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U_2}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U_2}{\partial z}\vec{k}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m_1 g\,\vec{j} = -\frac{\partial U_1}{\partial y}\vec{j} \\ -m_2 g\,\vec{j} = -\frac{\partial U_2}{\partial y}\vec{j} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} dU_1 = m_1 g\,dy \\ dU_2 = m_2 g dy \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_1(\theta) = m_1 g \int_{l_1}^{l_1 cos\theta} dy \\ U_2(\theta) = m_2 g \int_{-l_2}^{-l_2 cos\theta} dy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_1(\theta) = m_1 g l_1 (cos\theta - 1) \\ U_2(\theta) = m_2 g l_2 (1 - cos\theta) \end{cases}$$

$$U = [m_2 l_2 - m_1 l_1] g (1 - cos\theta)$$

Condition d'équilibre : $\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0$

Condition d'équilibre stable : $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=0} > 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \theta} = [m_2 l_2 - m_1 l_1] g (-sin\theta) \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = [m_2 l_2 - m_1 l_1] g cos\theta$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=0} > 0 \Rightarrow [m_2 l_2 - m_1 l_1] > 0$$

- Lagrangien : $\mathcal{L} = T - U$

L'énergie cinétique **T** :

$$T = T_1 + T_2$$

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \\ T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} v_1 = l_1 \dot{\theta} \\ v_2 = l_2 \dot{\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}^2 \\ T_2 = \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}^2 \end{cases} \Rightarrow T = \frac{1}{2}(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\dot{\theta}^2$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\dot{\theta}^2 - [m_2 l_2 - m_1 l_1] g (1 - cos\theta)$$

- L'équation différentielle de son mouvement :

L'équation de Lagrange du système a 1d.d.l non amorti : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -[m_2 l_2 - m_1 l_1] g \sin\theta$$

$$\Rightarrow (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\ddot{\theta} + [m_2 l_2 - m_1 l_1] g \sin\theta = 0$$

Pour les faibles oscillations ($\theta \ll$) $\Rightarrow \sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\ddot{\theta} + [m_2 l_2 - m_1 l_1] g\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + g\frac{(m_2 l_2 - m_1 l_1)}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)}\theta = 0$$

Cette équation admet une solution de la forme : $\theta(t) = A\cos(\omega_t . t + \varphi)$,
si $g\frac{(m_2 l_2 - m_1 l_1)}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)} > o \Leftrightarrow (m_2 l_2 - m_1 l_1) > 0$ (un équilibre stable).

Dans ce cas : $\omega_0 = \sqrt{g\frac{(m_2 l_2 - m_1 l_1)}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)}} \rightarrow$ pulsation propre

Chapitre III : Systèmes Linéaires Libres Amortis à Un Degré de Liberté

III.1. Oscillateur linéaire libre amorti

L'oscillateur est abandonné a lui-même et est soumis à un amortissement dû à la présence d'une force de frottement dissipant l'énergie mécanique.

Dissipation de l'énergie signifie que l'énergie mécanique, en l'occurrence la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de l'oscillateur n'est pas conservée en raison d'un transfert d'une partie ou la totalité de cette énergie au milieu ambiant sous forme de chaleur.

III.2. Force d'amortissement

Le modèle d'amortissement que nous considérons ici est utilisé pour décrire l'oscillateur mécanique lorsque sa masse se déplace dans un milieu visqueux (un gaz ou un liquide). L'expérience montre que la viscosité de ce milieu provoque une force proportionnelle à la vitesse de déplacement de la masse et, bien sûr, dirigée dans le sens opposé à cette vitesse. La force est alors de la forme :

$$\vec{F}_f = -\alpha\vec{v} \qquad \text{avec } \alpha > 0$$

α : est une constante positive appelé coefficient linéaire de frottement visqueux (fluide) et $\vec{v}$ est la vitesse linéaire du corps en mouvement.

En mécanique, l'amortissement est décrit par un boitier hermétiquement fermé et rempli d'un fluide, caractérisé par le même coefficient, et au sein duquel se déplace un piston solidaire à un bras se terminant à l'extérieure du boitier, pour permettre à celui-ci d'être intercalé entre la masse en mouvement et un point du système. L'amortisseur ainsi obtenu est schématisé comme le montre la figure III.1

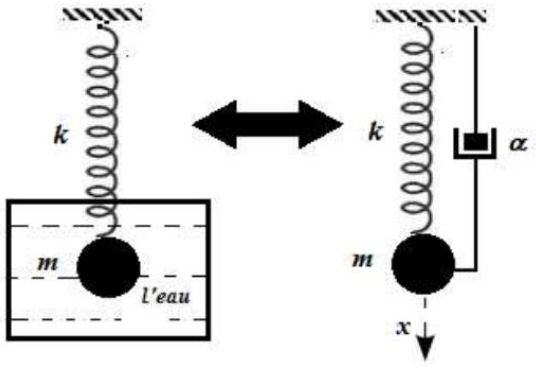


Figure III.1. Schéma d'un amortisseur mécanique

III.2.1 Fonction de dissipation de Rayleigh

La fonction de dissipation de Rayleigh notée D_a est introduite de la façon suivante :

$$\boldsymbol{F_f = -\frac{\partial D_a}{\partial \dot{q}} \rightarrow dD_a = -F_f d\dot{q}}$$

$$\boldsymbol{F_f = -\alpha v = -\alpha \dot{q} \rightarrow dD_a = \alpha \dot{q} d\dot{q}}$$

Donc :

$$\boldsymbol{D_a = \frac{1}{2}\alpha \dot{q}^2}$$

III.3. Équation de Lagrange des systèmes amortis

L'équation de Lagrange d'un système non conservatif soumis à une force de frottement visqueux (amortissement visqueux) de type $\boldsymbol{F_f = -\alpha \dot{q}}$ est :

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\alpha \dot{q}}$$

En introduisant la fonction de dissipation $\boldsymbol{D_a}$ dans l'équation de Lagrange précédente on écrit alors :

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial D_a}{\partial \dot{q}} \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D_a}{\partial \dot{q}} = 0}$$

III.3 Équation différentielle de mouvement des systèmes vibratoires amortis

En admettant que l'énergie cinétique et potentielle prennent une forme quadratique alors l'équation différentielle ainsi obtenue sera linéaire et à coefficients constants et positifs donc de la forme :

$$\boldsymbol{a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0}$$

Que l'on écrit préférentiellement :

$$\boldsymbol{\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0}$$

avec : $\begin{cases} \boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}}} \\ \boldsymbol{\delta = \frac{b}{2a}} \end{cases}$ où;

$\boldsymbol{\omega_0}$: est la pulsation propre des oscillations libres non amortie (en rad/s)

$\boldsymbol{\delta}$ **:** est un coefficient positif et est appelé facteur d'amortissement (en s^{-1}).

On définit aussi le rapport d'amortissement noté ξ par :

$$\xi = \boldsymbol{\frac{\delta}{\omega_0}}$$

III.3.1. Exemple d'un système amorti - masse +ressort + amortissement fluide

Soit un système vibratoire constitué d'une masse $\boldsymbol{m}$, d'un ressort de constante de raideur $\boldsymbol{k}$ et d'un amortisseur de coefficient linéaire de frottement $\boldsymbol{\alpha}$ **(fig.III.2).**

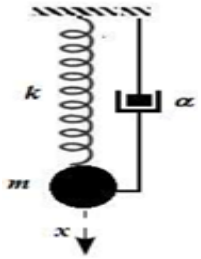


Figure III.2

L'énergie cinétique du système est : $\boldsymbol{T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2}$

L'énergie potentielle élastique est : $\boldsymbol{U = \frac{1}{2}mx^2}$

L'expression du lagrangien sera : $\boldsymbol{L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}mx^2}$

La fonction de dissipation a pour expression : $\boldsymbol{D_a = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2}$

Sachant que l'équation de Lagrange en présence des frottements visqueux a pour forme :

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D_a}{\partial \dot{q}} = 0}$$

Après dérivation L'équation du mouvement obtenue est donc :

$$\boldsymbol{m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0 \implies \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

Équation qui peut s'écrire :

$$\boldsymbol{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

avec $\begin{cases} \boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \\ \boldsymbol{\delta = \frac{\alpha}{2m}} \end{cases}$

C'est une équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants et positifs

III.4. Résolution de l'équation du mouvement

L'équation différentielle ci-dessus admet donc une solution de la forme :

$$\boldsymbol{x(t) = Ae^{rt}}$$

En injectant cette exponentielle dans l'équation différentielle précédente, on voit immédiatement que c'est une solution satisfaisante $\forall\ \boldsymbol{t}$ à condition que $\boldsymbol{r}$ soit une racine du polynôme caractéristique :

$$\boldsymbol{r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = 0}$$

C'est une équation algébrique du deuxième degré appelé équation caractéristique, dont le discriminant réduit est :

$$\Delta' = \boldsymbol{\delta^2 - \omega_0^2}$$

On distingue alors selon le signe de Δ', trois régimes d'oscillations :

III.4.1. Régime d'amortissement fort ($\Delta' > 0$)

L'amortissement fort (serré) est caractérisé par :

$$\Delta' > 0 \Longrightarrow \delta > \omega_0 \quad (\xi > 1)$$

La solution de l'équation de mouvement, est par conséquent de la forme :

$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$

Où les deux racines de l'équation caractéristique sont :

$$r_1 = -\delta - \sqrt{\Delta'} \text{ et } r_2 = -\delta + \sqrt{\Delta'}$$

r_1 et r_2 sont deux racines réelles et négatives ($r_1, r_2 < 0$)

A_1 et A_2 deux constantes d'intégration déterminées par les conditions initiales imposées au mouvement du système.

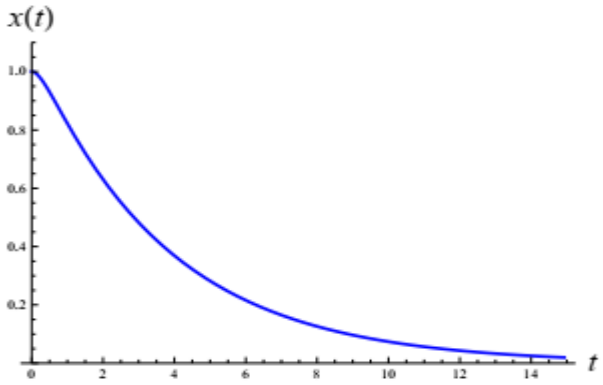


Figure III.2. Régime d'amortissement fort

Le graphe de la figure III.2 montre l'absence totale d'oscillations du système fortement amorti. On dit par conséquent que ce régime est ***apériodique*** i.e. le système revient à sa position d'équilibre pour un temps infini, mais sans oscillations. Pratiquement le système met un temps assez long pour revenir à sa position d'équilibre.

Remarque : Les conditions initiales dans le cas de la figure III.2 sont : $x_0 = 1$ et $v_0 = 0$

III.4.2. Régime d'amortissement critique ($\Delta' = 0$)

L'amortissement ***critique*** est caractérisé par :

$$\Delta' = 0 \Longrightarrow \delta = \omega_0 \ (\xi = 1)$$

L'équation caractéristique dans ce cas admet une racine double $r_1 = r_2 = -\delta$

La solution de l'équation est alors de la forme :

$$x(t) = (A_1 t + A_2) e^{-\delta t}$$

où A_1 et A_2 deux constantes d'intégration qui dépendent des conditions initiales.

Le retour à l'équilibre se fait ***sans oscillations*** (***régime apériodique***), et l'allure de la courbe $\boldsymbol{x(t)}$ ressemble à celle du régime d'amortissement fort, cependant on peut montrer que le retour vers la position d'équilibre est ***le plus rapide.***

III.4.3. Régime d'amortissement faible ($\Delta' < 0$)

L'amortissement ***faible*** est caractérisé par :

$$\Delta' < 0 \Longrightarrow \delta < \omega_0 \ (\xi < 1)$$

La solution de l'équation garde toujours la forme :

$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$

cependant les deux racines r_1 et r_2 sont deux nombres complexes conjugués dont les expressions sont :

$$r_1 = -\delta + j\omega_a$$

$$r_2 = -\delta - j\omega_a$$

Du moment que la solution $x(t)$ doit être complétement réelle, il faut que les deux constantes d'intégration A_1 et A_2 figurant dans l'expression de $x(t)$ soient deux nombres complexes conjugués. De cette considération et en tenant compte de l'identité d'Euler, l'expression de $x(t)$ peut-être réécrite sous la forme :

$$x(t) = Be^{-\delta t} cos(\omega_a t + \varphi)$$

où B et φ sont les deux constantes d'intégration qui remplacent les deux constantes initiales A_1 et A_2, et où ω_a est ***la pseudo-pulsation*** donnée par :

$$\omega_a = \sqrt{|\Delta'|} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

La pseudo-période associée est :

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

où $T_0 = {2\pi}/{\omega_0}$ est la période des oscillations non amorties en l'absence des frottements.

L'allure de la courbe $x(t)$ est illustrée sur la fig. III.3, où l'aspect oscillatoire du mouvement au sein du système est bien visible, cependant l'amplitude décroît exponentiellement avec une constante de temps $\tau = \frac{1}{\delta}$ qui est la durée au bout de laquelle l'amplitude et divisée par e. Cette constante de temps augmente si l'amortissement diminue. Pour les raisons citées ci-dessus le régime d'amortissement faible est qualifié de pseudo-périodique.

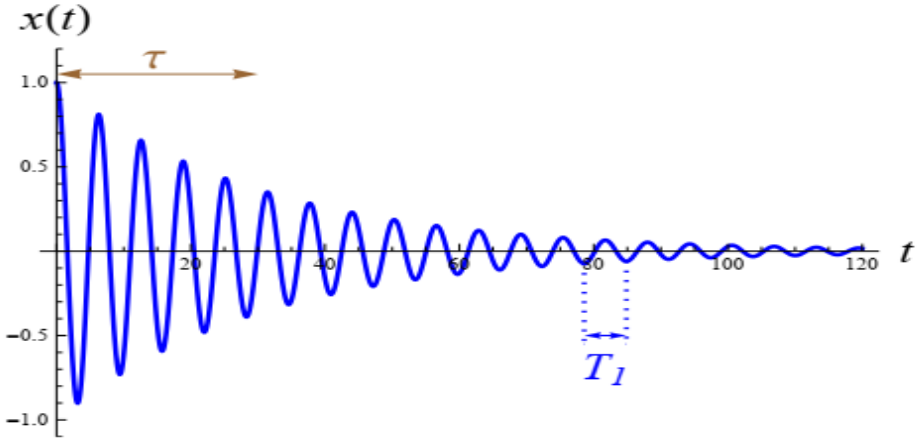


Figure III.3 Régime d'amortissement faible

III.5. Décrément logarithmique

Le décrément logarithmique noté $\boldsymbol{D}$ est une grandeur qui nous renseigne sur le taux de décroissance de l'amplitude et est définie par :

$$\boldsymbol{D = ln\left(\frac{q(t)}{q(t+T_a)}\right) = \frac{1}{n} ln\left(\frac{q(t)}{q(t+nT_a)}\right)}$$

Où $\boldsymbol{n}$ désigne la nième amplitude et de même signe. Après avoir remplacé $\boldsymbol{q(t)}$ et $\boldsymbol{q(t+T_a)}$ par leur expression correspondante on aboutit à :

$$\boldsymbol{D = ln\left(\frac{Be^{-\delta t}cos(\omega_a t+\varphi)}{Be^{-\delta(t+T_a)}cos(\omega_a(t+T_a)+\varphi)}\right) = \delta T_a}$$

C'est une grandeur constante qui ne dépend que des caractéristiques du système. L'expression précédente nous permet d'exprimer $\boldsymbol{D}$ en fonction du rapport d'amortissement $\boldsymbol{\xi}$ selon :

$$\boldsymbol{D = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

c.-à-d. la mesure de $\boldsymbol{D}$ permet de calculer le rapport d'amortissement $\boldsymbol{\xi}$**.**

III.6. Facteur de qualité du système

Le facteur de qualité $\boldsymbol{Q}$ d'un système est une grandeur qui tient compte de la faculté du système considéré à osciller, il est défini par :

$$\boldsymbol{Q = \frac{\omega_0}{2\delta}}$$

Par suite:

- Si $\boldsymbol{\delta > \omega_0}$; c'est-à-dire si $\boldsymbol{Q < 0.5}$, le système est fortement amorti (apériodique).
- Si $\boldsymbol{\delta = \omega_0}$; c'est-à-dire si $\boldsymbol{Q = 0.5}$, le régime est critique (apériodique).

- Si $\boldsymbol{\delta < \omega_0}$; c'est-à-dire si $\boldsymbol{Q > 0.5}$, le système est faiblement amorti (pseudo-périodique).

Chapitre IV : Systèmes Linéaires Forcés à Un Degré de Liberté

IV.1 Oscillations forcées avec amortissement

On dit qu'un système physique est le siège d'oscillations forcées (système forcé), s'il est soumis à une force d'excitation extérieure périodique notée $\vec{F}(t)$. Le système reçoit dans ce cas de l'énergie en continu de l'extérieure (tant que la force lui est appliquée), lui permettant d'osciller d'une façon permanente. On parle alors d'oscillations entretenues dans le système. Dans le cas contraire il est considéré comme libre. On va traiter dans un premier temps le cas d'une force excitatrice sinusoïdale d'amplitude F_0, et de pulsation Ω appelée ***pulsation d'excitation*** :

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

La forme complexe de l'excitation est :

$$F(t) = F_0 e^{j\Omega t} \text{ avec } j^2 = -1$$

IV.2. Équation de Lagrange des systèmes forcés

Si en plus du frottement visqueux, il existe une force d'excitation externe F(t) comme il montre la figure ci-dessous (figure IV-1). Rappelons que l'équation de Lagrange d'un système forcé avec amortissement s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{\partial D_a}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = F_q(t)$$

où $F_q(t)$ est la force généralisée associée à la force excitatrice extérieur $\vec{F}(t)$ qui se calcule par :

$$F_q(t) = \vec{F}(t) \cdot \frac{\partial \vec{r}_F}{\partial q}$$

$\vec{r}_F$: est le vecteur qui pointe vers le point d'application de la force $\vec{F}(t)$.

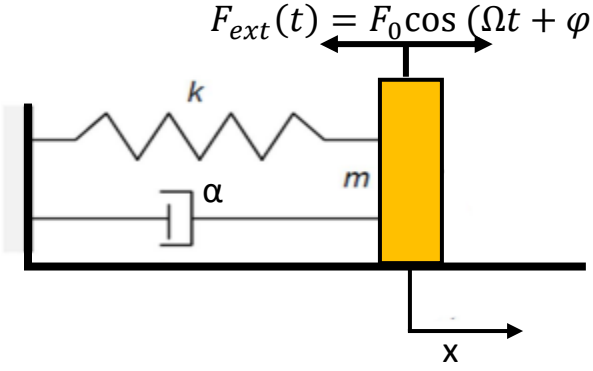
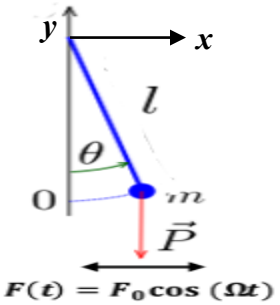


Figure IV-1 : système forcé

IV.2.1. Exemple

Un pendule simple se déplace sans frottement on applique une force ***F(t)*** horizontale sur la masse ***m***

La force généralisée $\boldsymbol{F_q}$ associée à la force excitatrice extérieur $\vec{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{t})$: $\boldsymbol{F_q = \frac{\partial w}{\partial q}}$



$\boldsymbol{w}$: travail→ $\boldsymbol{w = \vec{F}(t).\vec{r}}$

$\vec{\boldsymbol{r}}$ **:** est le vecteur qui pointe vers le point d'application de la force

Coordonnée généralise pour le pendule est $\boldsymbol{\theta}$

$$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{F(t)\vec{\imath}} \\ \vec{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{l sin\theta \vec{\imath} + l cos\theta \vec{\jmath}} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{w = \vec{F}(t).\vec{r} = F(t) l\, sin\theta}$$

$\boldsymbol{F_q = \frac{\partial w}{\partial q} \Longrightarrow F_q = F(t) l\, cos\theta}$: la force généralisée

IV.3. Équation du mouvement des systèmes forcés

Pour déterminer l'équation différentielle décrivant un système forcé avec amortissement à un degré de liberté (ddl) on utilise les expressions suivantes :

- L'énergie cinétique : $\boldsymbol{T = \frac{1}{2} a\, \dot{q}^2}$
- L'énergie potentielle : $\boldsymbol{U = \frac{1}{2} b\, q^2}$
- Fonction de dissipation : $\boldsymbol{D_a = \frac{1}{2} c\, \dot{q}^2}$
- La force généralisée : $\boldsymbol{F_q(t) = F_{0q} cos\Omega t}$

En dérivant ces expressions selon l'équation de Lagrange d'un système forcé signalée en haut on obtient :

$$\boldsymbol{a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = F_{0q} cos\Omega t \Longrightarrow \ddot{q} + \frac{b}{a}\dot{q} + \frac{c}{a} q = \frac{F_{0q}}{a} cos\Omega t}$$

Équation qui peut être écrite sous la forme :

$$\boldsymbol{\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{F_{0q}}{a} cos\Omega t}$$

Avec :

$\boldsymbol{\delta = \frac{b}{2a}}$: coefficient d'amortissement (s^{-1})

$\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}}}$: pulsation du système libre non amorti (rad. s^{-1})

IV.4. Résolution de l'équation du mouvement

L'équation obtenue est une équation différentielle non homogène du 2ème ordre, dont la solution générale $\boldsymbol{q_g(t)}$ est la somme de deux solutions ; la solution homogène $\boldsymbol{q_h(t)}$ de l'équation sans second membre et la solution particulière $\boldsymbol{q_p(t)}$ avec second membre :

$$\boldsymbol{q_g(t) = q_h(t) + q_p(t)}$$

Sachant que la solution $\boldsymbol{q_h(t)}$ s'atténue de plus en plus avec le temps pour s'annuler à l'infinie, le régime d'oscillations peut être divisé en deux phases :

IV.4.1. Phase transitoire

La solution homogène $\boldsymbol{q_h(t)}$ décrit le régime oscillatoire libre amorti qui s'atténue de plus en plus au cours du temps quel que soit le type d'amortissement (***voir chapitre. III)***. Tant que l'amplitude de cette solution est comparable à celle de la solution particulière les oscillations dans le système ne peuvent être que la somme des deux solutions. Le régime vibratoire dans ce cas est appelé ***transitoire*** car sa durée est limitée dans le temps.

IV.4.2. Phase permanente

Après l'extinction des vibrations libres amorties exprimées par $\boldsymbol{q_h(t)}$, il ne reste pratiquement dans le système que les vibrations qui sont dues à l'excitation extérieure $\boldsymbol{\vec{F}(t)}$ et qui sont représentées par la solution $\boldsymbol{q_p(t)}$. Ces vibrations persistent dans le système tant que la force excitatrice reste appliquée au système. Pour cette raison le régime vibratoire correspondant est appelée ***permanent***.

Donc la solution générale $\boldsymbol{q_g(t)}$ de l'équation différentielle se réduit à la solution particulière $\boldsymbol{q_p(t)}$ et on écrit par conséquent :

$$\boldsymbol{q_h(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow q_g(t) = q_h(t) + q_p(t) \approx q_p(t)}$$

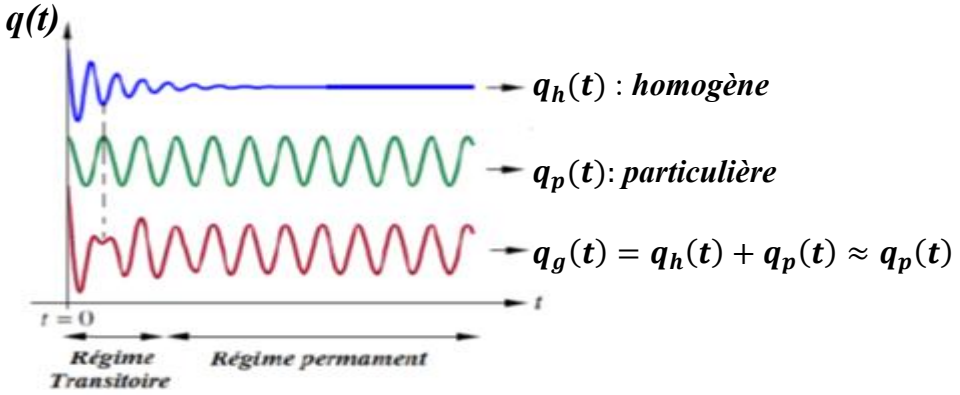


Figure IV-2 : Régime transitoire - Régime permanent

IV.4.3. Méthode des nombres complexes

Pour trouver la solution de l'équation différentielle d'une manière plus facile, on passe à la représentation complexe :

c-à-d :

$$\boldsymbol{F_q(t) = F_{0q} cos\Omega t \Longrightarrow \overline{F}_q(t) = \overline{F}_{0q} e^{j\Omega t} \quad avec \quad \overline{F}_{0q} = F_{0q} e^{j0}}$$

Alors que la solution particulière qui est de la forme :

$$\boldsymbol{q_q(t) = q_0 cos(\Omega t + \varphi)}$$

Aura la forme complexe :

$$\boldsymbol{\overline{q}_q(t) = \overline{q}_0 e^{j\Omega t} \quad avec \quad \overline{q}_0 = q_0 e^{j\varphi}}$$

Donc :

$\boldsymbol{\dot{\overline{q}_q}(t) = \overline{q}_0 (j\Omega) e^{j\Omega t}}$; et $\boldsymbol{\ddot{\overline{q}_q}(t) = \overline{q}_0 (j\Omega)^2 e^{j\Omega t} = -\overline{q}_0 \Omega^2 e^{j\Omega t}}$

En remplaçant l'équation différentielle :

$$\boldsymbol{\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{F_{0q}}{a} cos\Omega t}$$

par sa forme complexe i.e. on remplace chaque membre de l'équation par le nombre complexe correspondant on obtient :

$$\boldsymbol{-\overline{q}_0 \Omega^2 e^{j\Omega t} + 2\delta \overline{q}_0 (j\Omega) e^{j\Omega t} + \omega_0^2 \overline{q}_0 e^{j\Omega t} = \frac{F_{0q}}{a} e^{j\Omega t}}$$

Après avoir simplifié les facteurs communs entre les deux membres de l'équation différentielle, celle-ci se réduit à une équation algébrique simple dans l'ensemble des nombre complexes comme suit :

$$\overline{q}_0\left[(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2\delta\Omega j\right] = \frac{F_{0q}}{a} = A_0$$

Le seul inconnu étant $\overline{q}_0$ on obtient finalement la solution complexe :

$$\overline{q}_0 = \frac{A_0}{[(\omega_0^2 - \Omega^2) + (2\delta\Omega)j]}$$

Alors la solution générale décrivant le système forcé avec amortissement à 1ddl est :

$$q_q(t) = q_0 cos(\Omega t + \varphi)$$

Avec :

- L'amplitude : $q_0 = |\overline{q}_0| = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}$
- Le déphasage : $\varphi = -Arctan(\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2})$

Rappelons que Ω est la pulsation de la force excitatrice $F_q(t)$.

IV.5. Phénomène de résonnance

Le phénomène de résonance est la propriété partagée par un très grand nombre d'objets et de systèmes physiques d'absorber préférentiellement de l'énergie, généralement sous forme mécanique ou électromagnétique, lorsqu'ils sont soumis à des forces périodiques à une certaine pulsation particulière appelée ***pulsation de résonance*** notée Ω_r.

Le phénomène de résonance en amplitude correspond à l'augmentation maximale de l'amplitude d'oscillation q_0 d'un système physique lorsque celui-ci est excité à la pulsation de résonance Ω_r.

q_0 Est maximale lorsque :

$$\left.\frac{dq_0}{d\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_r} = 0$$

$$\frac{dq_0}{d\Omega} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\Omega}\left(\frac{A_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + (2\delta\Omega)^2}}\right) = 0$$

Alors :

$$\frac{[-4\Omega(\omega_0^2-\Omega^2)+8\delta^2\Omega]A_0}{2[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2]^{3/2}}=0\Rightarrow[(\omega_0^2-\Omega^2)-2\delta^2]=0$$

$$\Rightarrow \Omega^2=\omega_0^2-2\delta^2$$

Cette valeur qui annule la dérivée n'est pas toujours définie, elle est sujet de la condition :

$$\omega_0^2-2\delta^2>0\Rightarrow\frac{\delta}{\omega_0}<\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\xi<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Cette condition est dite condition de résonnance et la pulsation de résonnance correspondante est :

$$\Omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}$$

Ou

$$\Omega_r=\omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$$

Dans ce cas l'amplitude et déphasage de résonnance :

$$q_{0max}=q_0(\Omega_r)=\frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega_r^2)^2+(2\delta\Omega_r)^2}}$$

$$\varphi=-Arctan(\frac{2\delta\Omega_r}{\omega_0^2-\Omega_r^2}$$

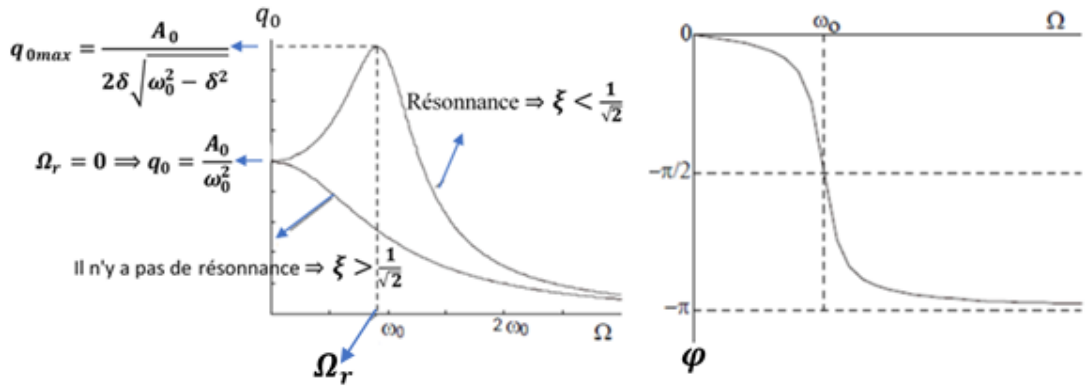


Figure IV-3 Amplitude et déphasage en fonction de Ω

La figure IV-3 illustre la variation de l'amplitude q_0 et le déphasage φ en fonction de la pulsation d'excitation Ω. On remarque que l'amplitude q_0 possède un maximum pour une pulsation Ω_r réelle si et seulement si l'amortissement est faible et remplit la condition : $\boldsymbol{\xi = \frac{\delta}{\omega_0} < \frac{1}{\sqrt{2}}}$

Remarque :

- Si on remplace $\boldsymbol{\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}} \Rightarrow \boldsymbol{q_0(\Omega_r) = q_{0max} = \frac{A_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}} = \frac{A_0}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}}$
- Pour les faibles amortissements ($\delta \ll \omega_0$) :

$$\boldsymbol{q_0(\Omega_r) = \frac{A_0}{2\delta\omega_0} = \frac{A_0}{2\xi}}$$

IV.6. Bande passante et facteur de qualité

- Le facteur de qualité noté $\boldsymbol{Q}$ d'un système est défini par :

$$\boldsymbol{Q = 2\pi \left.\frac{E_d}{E_s}\right|_{\Omega_r}}$$

$\boldsymbol{E_d}$= énergie dissipée par amortissement dans le système pendant une période d'oscillation

$\boldsymbol{E_s}$=énergie totale du système

D'où on tire :

$$\boldsymbol{Q = \frac{\Omega_r}{2\delta}}$$

- La bande passante $\boldsymbol{\Delta\Omega}$ est égale à la largeur de la courbe de résonnance pour l'amplitude : $\boldsymbol{q_0(\Omega) = \frac{q_{0max}}{\sqrt{2}}}$

$\boldsymbol{\Delta\Omega = \Omega_+ - \Omega_-}$

$\boldsymbol{\Omega_+}$ et $\boldsymbol{\Omega_-}$: les deux pulsations de coupure pour lesquelles l'amplitude associée est :

$$\boldsymbol{q_0(\Omega) = \frac{q_{0max}}{\sqrt{2}}}$$

Remarque : Pour les faibles amortissements c.-à-d. $\boldsymbol{\xi \ll}$ on aura :

$$\boldsymbol{\Delta\Omega \approx 2\delta}$$

$$\boldsymbol{Q = \frac{\Omega_r}{2\delta} \Rightarrow Q = \frac{\Omega_r}{\Delta\Omega}}$$

Donc :

$$\Delta\Omega \approx \frac{\omega_0}{Q}$$

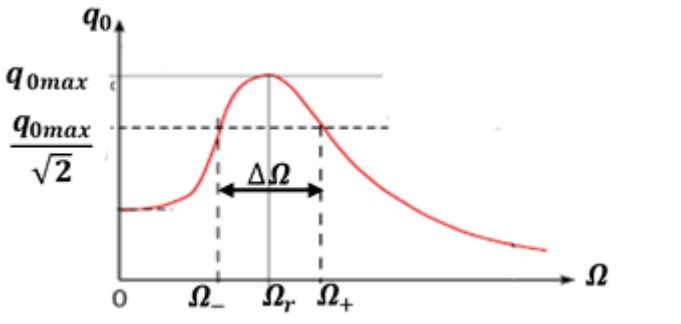


Figure IV-3 Bande passante

IV.7. Puissance fournie et puissance dissipée

- ***La puissance instantanée***

La puissance fournie par la force extérieure est calculée à partir de la relation :

$$P_F(t) = F_{ext}(t).v(t)$$

où

F_{ext} : est la force extérieure

$v(t)$: la vitesse du point où la force est appliquée

$$v(t) = \dot{q}(t) \text{ et } q_q(t) = q_0 cos(\Omega t + \varphi)$$

$$P_F(t) = [F_0 cos(\Omega t)][-q_0 \Omega sin(\Omega t + \varphi)]$$

$$\Rightarrow P_F(t) = [F_0 cos(\Omega t)]\left[q_0 \Omega cos(\Omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})\right]$$

$$\Rightarrow P_F(t) = F_0 q_0 \Omega [cos(\Omega t)][cos(\Omega t + \varphi')]$$

Avec :

$$\varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

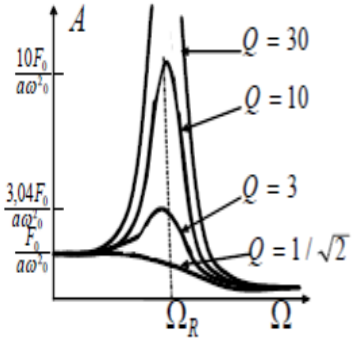
- ***La puissance moyenne***

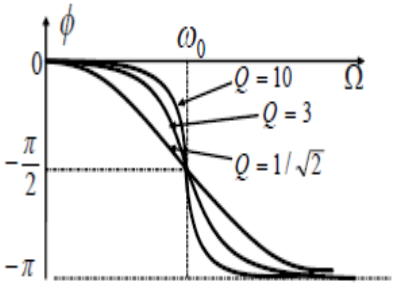
La puissance moyenne, notée P_{moy}, est par définition :

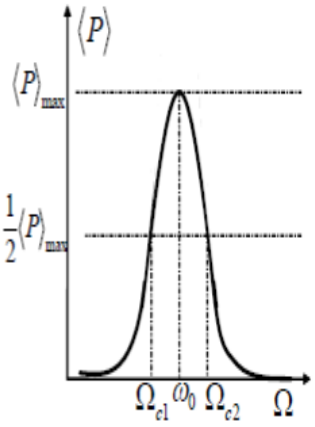
$$P_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T P_F(t)\, dt$$

$$P_{moy} = \frac{1}{2}F_0 q_0 \Omega \left[cos(\varphi + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2}F_0 q_0 \Omega [sin(\varphi)]$$

$$\begin{cases} tan\varphi = -(\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}) \\ sin\varphi = \frac{tan\varphi}{\sqrt{1+tan^2\varphi}} \\ q_0 = \frac{\frac{F_{0q}}{a}}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}} \end{cases} \qquad \Rightarrow P_{moy} = \frac{\delta\Omega^2 \frac{F_{0q}}{a}}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}$$







$$q_0 = \frac{\frac{F_{0q}}{a}}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}} \qquad \varphi = -Arctan(\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}) \qquad P_{moy} = \frac{\delta\Omega^2 \frac{F_{0q}}{a}}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}$$

Figure IV.4 q_0, φ *et* P_{moy} en fonction de la pulsation d'excitation Ω

Chapitre V : Systèmes linéaires à deux degrés de liberté.

V.1. Systèmes à deux degrés de liberté

V.1. Systèmes à deux degrés de liberté

Un système a 2 degrés de liberté peut être considérer comme 2 systèmes à un seul degré de liberté couples. Un tel système nésite l'utilisation de deux coordonnées généralise q_1 et q_2 pour être parfaitement décrit. Par conséquence on a besoin de deux équations déférentielles, ces équations sont obtenues à partir de système d'équation de Lagrange (dans le cas générale) :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) + \dfrac{\partial D_a}{\partial \dot{q}_1} - \dfrac{\partial L}{\partial q_1} = F_{q1} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) + \dfrac{\partial D_a}{\partial \dot{q}_2} - \dfrac{\partial L}{\partial q_2} = F_{q2} \end{cases}$$

- L'énergie cinétique : $T = T(\dot{q}_1, \dot{q}_1)$
- L'énergie potentielle : $U = U(q_1, q_1)$
- Lagrangien totale du système : $L = L(\dot{q}_1, \dot{q}_1, q_1, q_1)$
- Fonction de dissipation totale : $D_a = D_a(\dot{q}_1, \dot{q}_1)$
- La force généralisée agissent sur la masse m_1 : F_{q1}
- La force généralisée agissent sur la masse m_2 : F_{q2}

V.1.1. Condition d'équilibre

Pour que le système oscille il doit vérifier les conditions d'équilibre et de stabilité

Equilibre :

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial U}{\partial q_1}\right|_{q1=q2=0} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial U}{\partial q_2}\right|_{q1=q2=0} = 0 \end{cases}$$

Stabilité :

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial^2 U}{\partial {q_1}^2}\right|_{q1=q2=0} > 0 \\ \left.\dfrac{\partial^2 U}{\partial {q_2}^2}\right|_{q1=q2=0} > 0 \end{cases}$$

Remarque : on a supposé qu'à l'équilibre $q_1=0$ et $q_2=0$.

V.1.2 Types de couplage

V.1.2.a. Couplage par élasticité

Le couplage entre les deux systèmes est à travers un ressort (capacité).

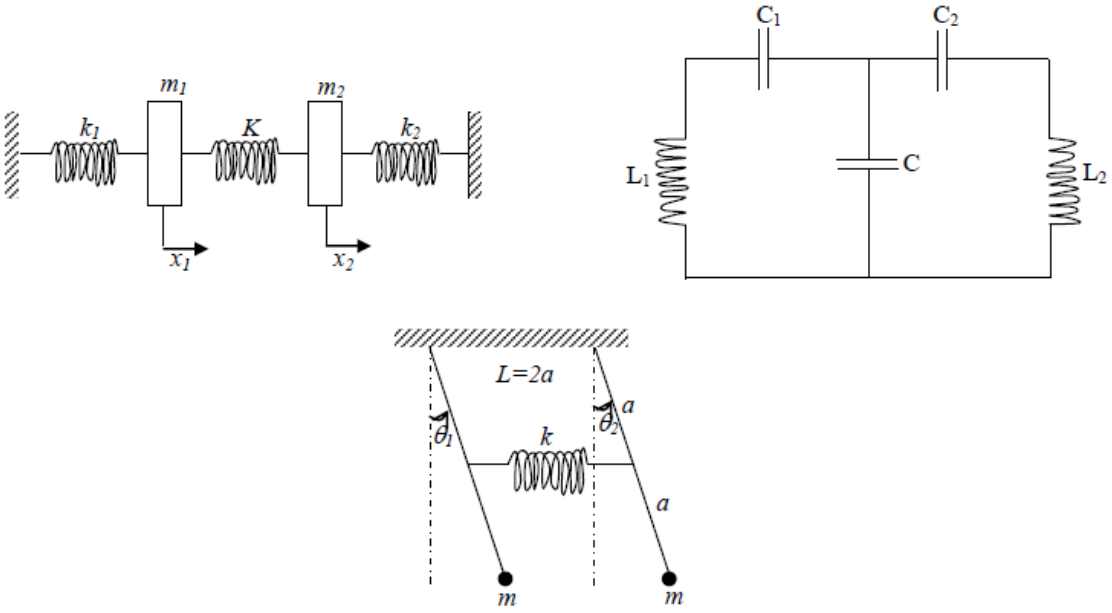


Figure V.1 : Différents systèmes mécanique et électrique couplés par élasticité

V.1.2.b. Couplage inertiel

Le couplage entre les deux systèmes est à travers une masse (bobine).

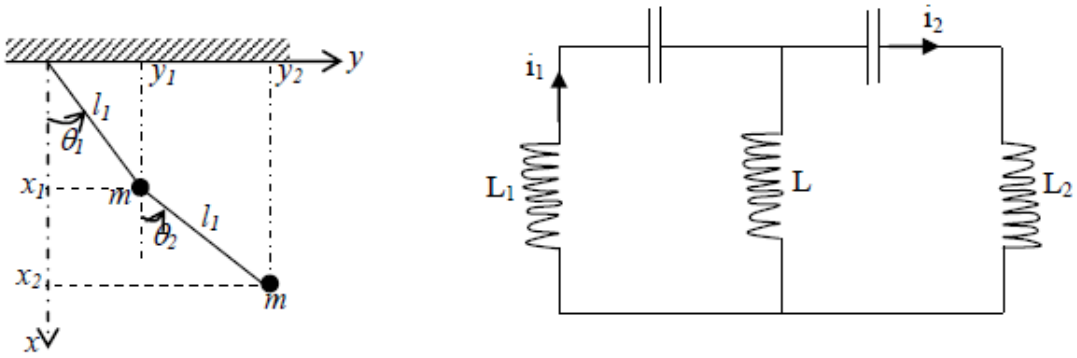


Figure V.2 : Systèmes mécaniques et électriques couplés par inertie

V.1.2.c. Couplage visqueux

Le couplage entre les deux systèmes est à travers un amortisseur (résistance).

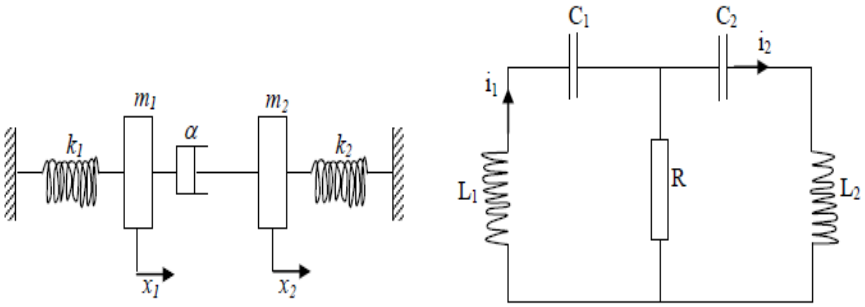


Figure V.3 : Couplage visqueux des différents systèmes mécaniques et électriques

V.2 Oscillation libre non amortie

Nous allons traiter le cas particulaire d'un système symétrique ($m_1=m_2$, $k_1=k_2$) on sait que le système d'équation de Lagrange va se réduire à : ($F_q=0$, $D_a=0$)

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \end{cases}$$

Le but principal est la détermination des solutions $q_1(t)$ et $q_2(t)$

- On prendre comme exemple le système suivant :

V.2.a. Double pendule

$m_1=m_2=m$

$l_1=l_2=l$

Type de couplage : Couplage inertiel

- L'énergie cinétique :

$$T = T_{m1} + T_{m2} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

$$\vec{r}_1 = \vec{l}_1 = \begin{cases} x_1 = l_1 sin\theta_1 \\ y_1 = l_1 cos\theta_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_1 = \vec{v}_1 = \begin{cases} \dot{x_1} = l_1\,\dot{\theta}_1 cos\theta_1 \\ \dot{y_1} = -l_1\,\dot{\theta}_1 sin\theta_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{\dot{x_1}^2 + \dot{y_1}^2} = l_1\dot{\theta}_1$$

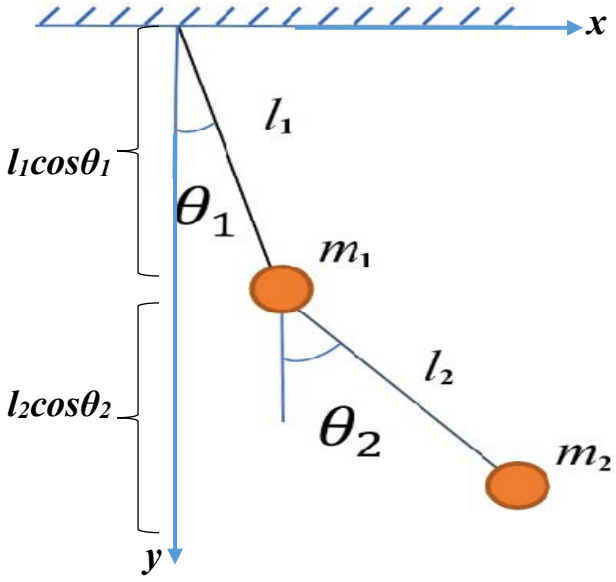


Figure V.4 : Système double pendule.

$$\vec{r}_2 = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \begin{cases} x_2 = l_1 sin\theta_1 + l_2 sin\theta_2 \\ y_2 = l_1 cos\theta_1 + l_2 cos\theta_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_2 = \vec{v}_2 = \begin{cases} \dot{x_2} = l_1\,\dot{\theta}_1 cos\theta_1 + l_2\ \dot{\theta}_2 cos\theta_2 \\ \dot{y_2} = -l_1\,\dot{\theta}_1 sin\theta_1 - l_2\,\dot{\theta}_2\, sin\theta_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{\dot{x_2}^2 + \dot{y_2}^2} = l_1\,\dot{\theta}_1 + l_2\,\dot{\theta}_2; (\theta_1 \ll, \theta_2 \ll)$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 (l_1\,\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_1\,\dot{\theta}_1 + l_2\,\dot{\theta}_2)^2$$

- L'énergie potentielle :

$$U = U_{m1} + U_{m2}$$

$$U_{m1} = -m_1 g l_1\, cos\theta_1$$

$$U_{m2} = -m_2 g (l_1 cos\theta_1 + l_2 cos\theta_2)$$

$$(\theta_1 \ll, \theta_2 \ll) \Rightarrow \begin{cases} cos\theta \approx 1 - \dfrac{\theta^2}{2} \\ sin\theta \approx \theta \end{cases}$$

Donc :

$$U_{m1} = \frac{1}{2} m_1 g l_1\, \theta_1^{\,2} - m_1 g l_1$$

$$U_{m2} = \frac{1}{2} m_2 g l_1\, \theta_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 g l_2\, \theta_2^{\,2} - m_1 g l_1\ - m_2 g l_2$$

$$U = U_{m1} + U_{m2} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) g l_1\, \theta_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 g l_2\, \theta_2^{\,2} + cst$$

Puisque : $m_1=m_2=m$, $l_1=l_2=l$

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \left[(\dot{\theta}_1)^2 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \right] = \frac{1}{2} m l^2 (2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2)$$

$$U = \frac{1}{2} mgl(2\theta_1^2 + \theta_2^2) - 2mgl = \frac{1}{2} mgl(2\,\theta_1^2 + \theta_2^2) + cst$$

- Lagrangien :

$$L = T - U = \frac{1}{2} ml\left(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2\right) - \frac{1}{2} mgl(2\,\theta_1^2 + \theta_2^2) + cst$$

V.2.b. Les équations différentielles de mouvement

On obtient les équations différentielles partir du les équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ml^2(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + 2mgl\,\theta_1 = 0 \\ ml^2(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1) + mgl\,\theta_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2ml^2\ddot{\theta}_1 + ml^2\ddot{\theta}_2 + 2mgl\,\theta_1 = 0 \\ ml^2\ddot{\theta}_1 + ml^2\ddot{\theta}_2 + mgl\,\theta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 + 2g\theta_1 = 0 \\ l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 + g\theta_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l}\theta_1 + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l}\theta_2 + \ddot{\theta}_1 = 0 \end{cases}$$

On pose : $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \omega_0^2\theta_1 + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \omega_0^2\theta_2 + \ddot{\theta}_1 = 0 \end{cases}$$

terme de couplage

V.2.c. Détermination des pulsations d'oscillation

On suppose que les solution $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ ont les formes générales suivant :

$$\theta_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \ddot{\theta}_1(t) = -A_1\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\theta_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \ddot{\theta}_2(t) = -A_2\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

On remplace dans les systèmes des équations :

$$\Rightarrow \begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)A_1 - \frac{1}{2}\omega^2 A_2 = 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2)A_2 - \omega^2 A_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)A_1 - \frac{1}{2}\omega^2 A_2 = 0 \\ -\omega^2 A_1 + (\omega_0^2 - \omega^2)A_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} (\omega_0^2 - \omega^2) & -\frac{1}{2}\omega^2 \\ -\omega^2 & (\omega_0^2 - \omega^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow det \begin{vmatrix} (\omega_0^2 - \omega^2) & -\frac{1}{2}\omega^2 \\ -\omega^2 & (\omega_0^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \frac{1}{2}\omega^4 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\omega^4 - 2\omega_0^2\,\omega^2 + \omega_0^4 = 0 \Rightarrow \omega^4 - 4\omega_0^2\,\omega^2 + 2\omega_0^4 = 0$$

Cette équation est appelée l'équations caractérise que ou l'équation aux pulsation propre

C'est une équation de la forme :

$y^2 - 4\omega_0^2\, y + 2\omega_0^4 = 0$; ou $y = \omega^2$

$\Delta' = 4\omega_0^4 - 2\omega_0^4 = 2\omega_0^4 > 0$

$y_{-,+} = 2\omega_0^2 \mp \sqrt{\Delta'} = (2 \mp \sqrt{2})\omega_0^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_- = \sqrt{2-\sqrt{2}}\ \omega_0 = \omega_1 \\ \omega_+ = \sqrt{2+\sqrt{2}}\ \omega_0 = \omega_2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 0.765\ \omega_0 \\ \omega_2 = 1.848\ \omega_0 \end{cases}$$

ω_1 : (la plus petite pulsation) la pulsation fondamentale (1ere mode).

ω_2 :la 1ere pulsation harmonique (2eme mode).

- ***Premier mode propre*** *:* Pour $\omega = \omega_1$, le système implique que :

$\frac{A_{1(1^{ere}\ mode)}}{A_{2(1^{ere}\ mode)}} = \frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{\omega_1^2} = 0.709 > 0$. La vibration est dite en ***phase*** car la solution s'écrit dans ce cas :

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_{1(1^{ere}\ mode)}(t) = A_{1(1)}\cos(\omega t + \varphi) \\ \theta_{2(1^{ere}\ mode)}(t) = A_{2(1)}\cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

- ***Deuxième mode propre*** *:* Pour $\omega = \omega_2$, le système implique que :

$\frac{A_{1(1^{ere}\ mode)}}{A_{2(1^{ere}\ mode)}} = \frac{\omega_0^2 - \omega_2^2}{\omega_2^2} = -0.7072 < 0.$ La vibration est dite en ***opposition de phase*** car la solution s'écrit dans ce cas :

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_{1(2^{eme}\ mode)}(t) = A_{1(2)}\cos(\omega t + \varphi) \\ \theta_{2(2^{eme}\ mode)}(t) = -A_{2(2)}\cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

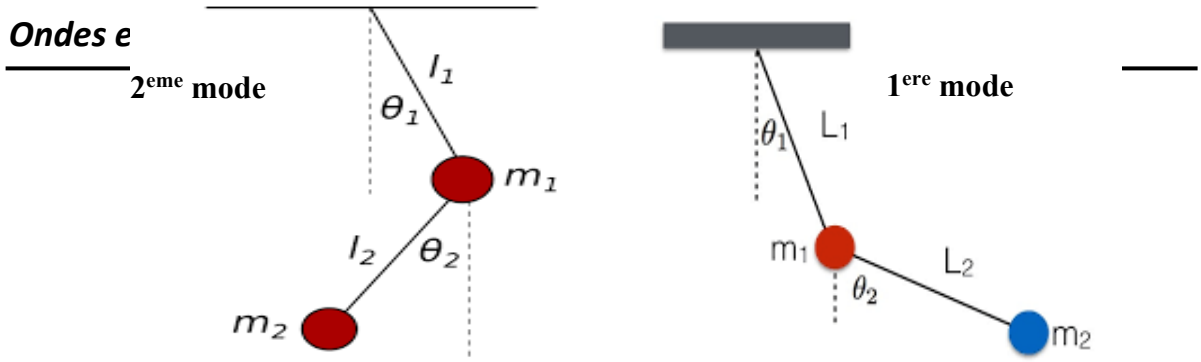


Figure V.5 : Les modes des oscillations.

V.2. Oscillations forcées amortie

- On prendre comme exemple le système suivant :

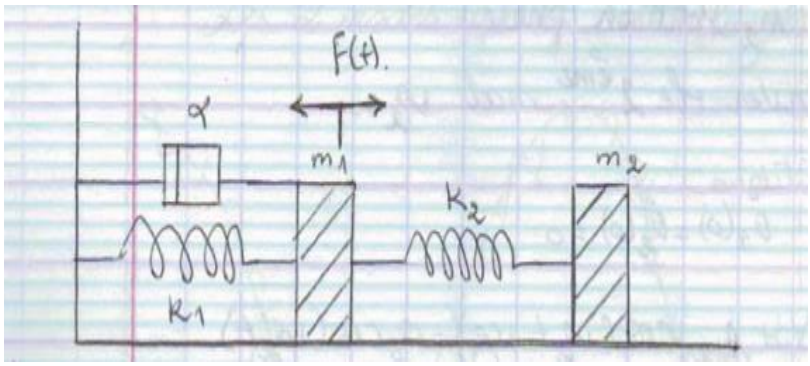


Figure V.6 : Système masse+ ressort (deux degrés de liberté).

La force applique est : $\boldsymbol{F(t) = F_0 cos(\Omega t)}$

Le but c'est la détermination de solution $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

V.2.a. les équations de mouvement et les solutions :

- L'énergie cinétique : $\boldsymbol{T = T_{m1} + T_{m2} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2}$
- L'énergie potentielle :

$$\boldsymbol{U = U_{k1} + U_{k2} = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_1 - x_2)^2}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow U = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_1^2 + x_2^2 - 2 x_1 x_2)}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow U = \frac{1}{2} (k_1 + k_2) x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 - k_2 x_1 x_2}$$

- Lagrangien :

$$\boldsymbol{L = T - U = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x_1^2 - \frac{1}{2}k_2x_2^2 + k_2x_1x_2}$$

- Fonction de dissipation : $\boldsymbol{D_a = \frac{1}{2}\alpha v_a^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_1^2}$

- La force généralisée :

$$\boldsymbol{F_{x1} = \vec{F}(t).\frac{d\vec{r}_F}{dx_1}}$$

$$\begin{cases} \vec{r}_F = x_1\vec{\imath} \rightarrow \frac{d\vec{r}_F}{dx_1} = \vec{\imath} \\ \vec{F}(t) = F(t).\vec{\imath} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{F_{x1} = F(t)}$$

On obtient les équations différentielles partir du les équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) + \frac{\partial D_a}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = F_{x1} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) + \frac{\partial D_a}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2} = F_{x2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = F(t) \\ m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 - k_2x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{\alpha}{m_1}\dot{x}_1 + \frac{(k_1 + k_2)}{m_1}x_1 - \frac{k_2}{m_1}x_2 = \frac{F(t)}{m_1} \\ \ddot{x}_2 + \frac{k_2}{m_2}x_2 - \frac{k_2}{m_2}x_1 = 0 \end{cases}$$

On s'intéresse seulement au régime permanant :

- Méthode de nombre complexe :

$$\boldsymbol{F(t) = F_0cos(\Omega t) \Rightarrow \overline{F} = \overline{F}_0e^{j\Omega t}\ ;\ \overline{F}_0 = F_0}$$

donc les solutions sont :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1cos(\Omega t + \varphi_1) \\ x_2(t) = A_2cos(\Omega t + \varphi_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{x}_1 = \overline{A}_1e^{j\Omega t}\ ;\ \overline{A}_1 = A_1e^{j\varphi_1} \\ \overline{x}_2 = \overline{A}_2e^{j\Omega t}\ ;\ \overline{A}_2 = A_2e^{j\varphi_2} \end{cases}$$

On remplace dans les systèmes des équations :

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{A}_1(-\Omega^2)e^{j\Omega t} + \frac{\alpha}{m_1}\overline{A}_1(j\Omega)e^{j\Omega t} + \frac{(k_1 + k_2)}{m_1}\overline{A}_1e^{j\Omega t} - \frac{k_2}{m_1}\overline{A}_2e^{j\Omega t} = \frac{F_0e^{j\Omega t}}{m_1} \\ \overline{A}_2(-\Omega^2)e^{j\Omega t} + \frac{k_2}{m_2}\overline{A}_2e^{j\Omega t} - \frac{k_2}{m_2}\overline{A}_1e^{j\Omega t} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\left(\frac{(k_1+k_2)}{m_1}-\Omega^2\right)+\frac{\alpha}{m_1}\Omega j\right]\bar{A}_1-\frac{k_2}{m_1}\bar{A}_2=\frac{F_0}{m_1} \\ -\frac{k_2}{m_2}\bar{A}_1+\left[\frac{k_2}{m_2}-\Omega^2\right]\bar{A}_2=0 \rightarrow \bar{A}_2=\frac{k_2}{k_2-m_2\Omega^2}\bar{A}_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\left(\frac{(k_1+k_2)}{m_1}-\Omega^2+\frac{k_2}{k_2-m_2\Omega^2}\right)+\frac{\alpha}{m_1}\Omega j\right]\bar{A}_1=\frac{F_0}{m_1} \\ \bar{A}_2=\frac{k_2}{k_2-m_2\Omega^2}\bar{A}_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a+bj)\bar{A}_1=\frac{F_0}{m_1} \\ \bar{A}_2=c\bar{A}_1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} a=\left(\frac{(k_1+k_2)}{m_1}-\Omega^2+\frac{k_2}{k_2-m_2\Omega^2}\right) \\ b=\frac{\alpha}{m_1}\Omega \\ c=\frac{k_2}{k_2-m_2\Omega^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{A}_1=\frac{F_0/m_1}{(a+bj)} \\ \bar{A}_2=c\bar{A}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1=|\bar{A}_1|=\frac{F_0/m_1}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ A_2=|\bar{A}_2|=cA_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1=-Arctan(\frac{b}{a}) \\ \varphi_2=\varphi_1 \end{cases}$$

Alors les solutions sont :

$$\begin{cases} x_1(t)=A_1cos(\Omega t+\varphi_1) \\ x_2(t)=A_2cos(\Omega t+\varphi_2) \end{cases}$$

V.2.b. Résonance et antirésonance

Cas où : $m_1=m_2=m$ *et* $k_1=k_2=k$

Avec $D_a=0$ et $F\neq 0$:système force mais non amorti.

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{2k}{m}-\Omega^2\right)\bar{A}_1-\frac{k_2}{m_1}\bar{A}_2=\frac{F_0}{m} \\ -\frac{k}{m}\bar{A}_1+(\frac{k}{m}-\Omega^2)\bar{A}_2=0 \end{cases}$$

En posant $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$, l'équation devient :

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(2\omega_0^2-\Omega^2\right)\bar{A}_1-\omega_0^2\bar{A}_2=\frac{F_0}{m} \\ -\omega_0^2\bar{A}_1+(\omega_0^2-\Omega^2)\bar{A}_2=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A_1 = \dfrac{F_0}{m} \dfrac{(2\omega_0^2 - \Omega^2)}{[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 - \omega_0^4]} \\ A_2 = \dfrac{F_0}{m} \dfrac{\omega_0^2}{[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 - \omega_0^4]} \end{cases}$$

- $\Omega = \omega_0 = \Omega_r \Rightarrow A_1 \rightarrow \infty$ (et $A_2 \rightarrow \infty$) : appelée 1ere pulsation de résonnance.
- $\Omega = \sqrt{3}\omega_0 = \Omega_r \Rightarrow A_1 \rightarrow \infty$ (et $A_2 \rightarrow \infty$) : appelée 2eme pulsation de résonnance.

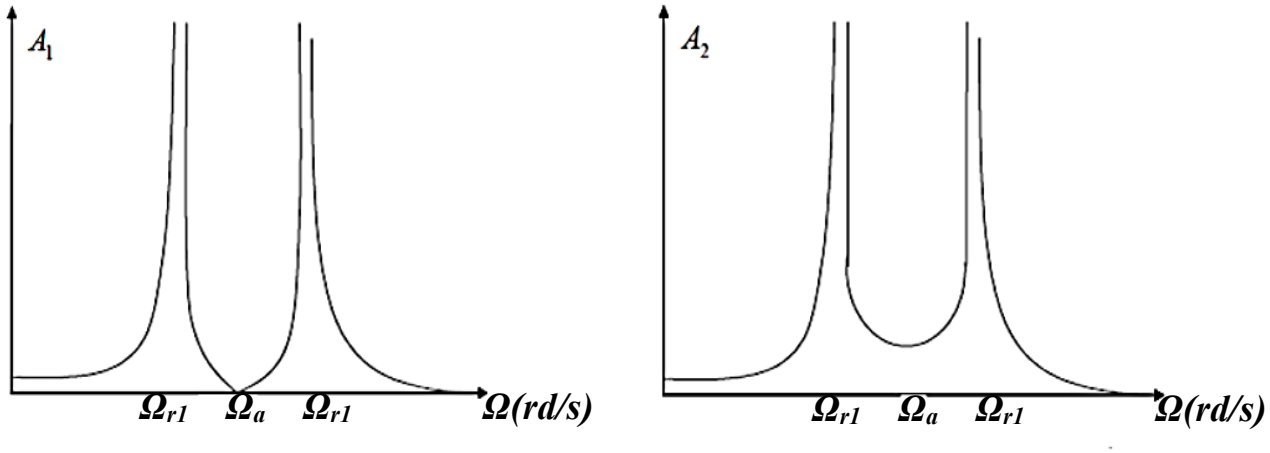


Figure V.7 : Graphe de résonnance et anti-résonnance pour un système de deux degrés de liberté.

Partie II : Les Ondes Mécaniques

Chapitre VI: Généralités sur les ondes mécaniques

VI.1. Introduction

On a vu dans la partie précèdent les phénomènes vibratoires liées à des systèmes a 1 au 2 degrés de liberté (on peut généraliser par des systèmes a plusieurs degrés de liberté). On va voir dans la deuxième partie de notre cours les phénomènes liés à la propagation de ces vibrations, c'est à qu'an appelle ***phénomènes ondulatoires***.

VI.2. Définition d'une onde

Une onde mécanique est une propagation de la vibration sans qu'il y ait une propagation de la matière. Le mot ***propagation*** indique que c'est perturbation qui se déplace mais que le milieu, lui, ne se déplace pas globalement.

Elle peut être classée en deux familles : ondes mécaniques et ondes électromagnétiques.

VI.2.1. Les ondes longitudinales et transversales

Le caractère longitudinal ou transversal d'une onde mécanique résulte de la comparaison entre la direction dans laquelle la perturbation se propage et la direction dans laquelle le milieu est déformé dans la perturbation.

- L'onde est dite *longitudinale* lorsque la perturbation est une déformation du milieu parallèle à la direction de propagation de l'onde.

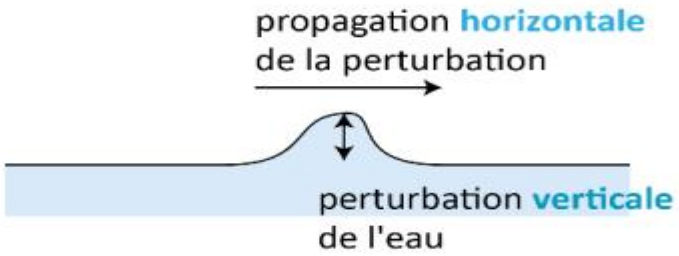


Figure.VI.1 : les ondes longitudinales

- L'onde est ***transversale*** lorsque la perturbation est une déformation du milieu perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde.

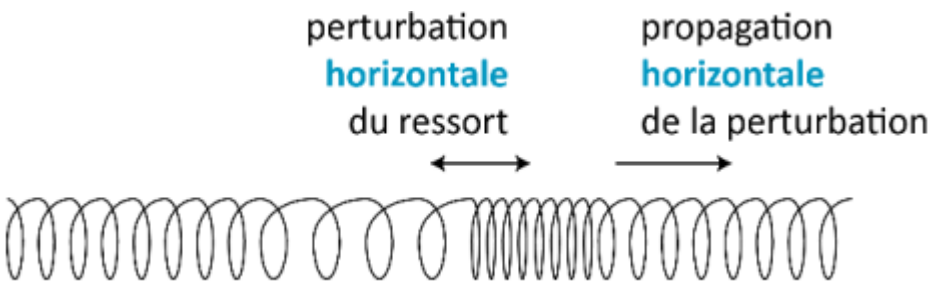


Figure.VI.2 : les ondes transversales

VI.2.2. La longueur d'onde

Si la perturbation du milieu est périodique. On appelle longueur d'onde la plus petite distance, à un instant donné, au bout de laquelle le milieu se retrouve dans le même état de perturbation. La longueur d'onde est notée λ (en m).

$\boldsymbol{\lambda = v.T}$

Où $\boldsymbol{v}$: vitesse de propagation de l'onde.

$\boldsymbol{T}$: période.

Le nombre d'onde peut être défini comme suit : $\boldsymbol{\gamma = \frac{1}{\lambda}}$

VI.2. Equation de propagation

Une onde se propage sous forme d'une perturbation décrite par une fonction qui dépend du temps (t) et de la position dans l'espace (x).

On suppose généralement des milieux idéaux, sans viscosité ni dissipation, et sans forces extérieures (comme la pesanteur). Dans ces conditions, l'onde se propage à une vitesse constante V et conserve sa forme.

On considère une onde transversale se propageant le long de l'axe x. À l'instant t_0, elle présente une forme localisée autour de la position x_0, qui correspond à l'abscisse de son maximum. La forme de l'onde est décrite par une fonction $u = f(t, x)$, où t est le temps d'observation et x la position. La fonction $f(t, x)$ donne la hauteur de l'onde (positive ou négative) au point x à l'instant t, mesurée selon l'axe vertical z. L'onde décrite est représentée schématiquement sur la **Figure (VI.3a)** à l'instant t_0.

À l'instant t_0, l'onde est décrite par la fonction $f(t_0, x)$. En particulier, $f(t_0, x_0)$ représente sa hauteur maximale à la position x_0.

Aux instants suivants, l'onde se propage le long de l'axe des x vers les valeurs croissantes. À un instant $t_1 > t_0$, elle garde la même forme mais se déplace vers une nouvelle position $x_1 > x_0$. Elle est alors décrite par $f(t_1, x)$, et sa hauteur maximale est donnée par $f(t_1, x_1)$. Cette situation est illustrée sur la **Figure (VI.3b)**.

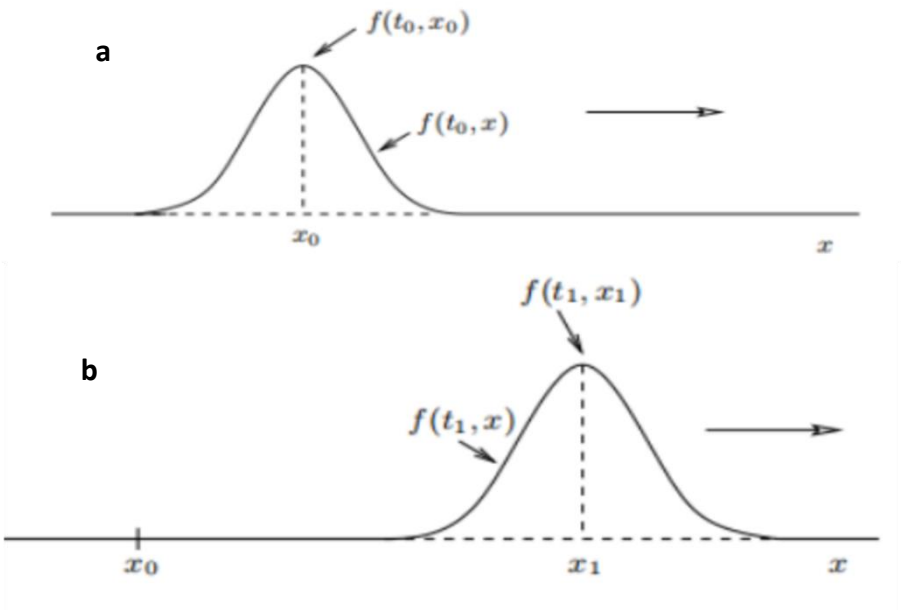


Figure.VI.3 : a) Une onde transversale observée à l'instant t_0 et représentée par la fonction $f(t_0,x_0)$. L'onde est localisée autour de l'abscisse x_0 ;b) Représentation de l'onde à l'instant t_1

En comparant la forme de l'onde aux instants t_0 et t_1, on peut tirer des conclusions générales sur la fonction f. Comme le milieu est non dissipatif, l'onde se propage sans changer de forme : il s'agit donc d'une simple translation vers les x croissants. En particulier, en comparant les positions des maximas aux instants t_0 et t_1, on obtient : $f(t_1, x_1) = f(t_0, x_0)$

La perturbation $f(x, t)$ est décrite par une équation aux dérivées partielles appelée équation de d'**Alembert** (ou équation d'onde). Dans le cas unidimensionnel, elle s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2}$$

Dans laquelle $f(x,t)$ représente l'amplitude de cette perturbation et V la vitesse de propagation.

VI.3. Solution de l'équation de propagation

Pour résoudre l'équation de propagation en une dimension, on effectue le changement de variable $\boldsymbol{u = x - Vt}$. On montre alors que toute fonction de la forme $\boldsymbol{g(x - Vt)}$ constitue une solution de l'équation d'onde, c'est-à-dire $\boldsymbol{f(x,t) = g(x - Vt)}$.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}.\frac{\partial g}{\partial u} = -V.\frac{\partial g}{\partial u} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -V\frac{\partial u}{\partial t}.\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = V^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial u} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$$

Avec : $\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial t^2} = V\ \frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2}$

On trouve : $V^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = V^2\ \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$

Ainsi, on vérifie que $\boldsymbol{g(x - Vt)}$ satisfait l'équation de d'Alembert ; c'est donc une solution de l'équation de propagation. De même, $\boldsymbol{h(x + Vt)}$constitue également une solution.

On peut ainsi écrire la solution générale de l'équation des ondes sous la forme suivante, en se basant sur les résultats précédents :

$$\boldsymbol{f(x,t) = g(x - Vt) + h(x + Vt)}$$

VI.4. Onde progressive sinusoïdale

Une onde progressive est la propagation d'une perturbation locale dans un milieu matériel (comme une corde). Sa principale caractéristique est que cette perturbation se répète identique à elle-même après un temps $\boldsymbol{T}$ (période) et sur une distance $\boldsymbol{\lambda}$ (longueur d'onde). Pour cela, le milieu doit être très étendu par rapport à la longueur d'onde. Des exemples d'ondes progressives sont les vagues, les ondes sonores et les ondes lumineuses.

On considère une onde progressive se propageant le long de l'axe $\boldsymbol{x}$. Le point situé en $x = 0$ est animé d'une vibration sinusoïdale de la forme suivante : $\boldsymbol{S(x = 0, t) = S_0 sin\ (\omega t)}$

Le point se trouvant à l'abscisse $\mathbf{x > 0}$ aura la même vibration que celle du point $\boldsymbol{x = 0}$ mais avec un retard égal à $\boldsymbol{x/V}$:

$$\boldsymbol{S(x,t) = S_0 sin\ (\omega(t - x/V))} = \boldsymbol{S_0 sin\ (\omega t - \frac{\omega x}{V})} \Rightarrow \boldsymbol{S(x,t) = S_0 sin\ (\omega t - \varphi(x))}$$

Où : $\boldsymbol{\varphi(x)}$, représente le déphasage lié au temps de propagation $\boldsymbol{x/V}$.

L'onde progressive sinusoïdale s'écrit sous la forme suivante qui permet de mettre en évidence la double périodicité (dans le temps et dans l'espace) : $\boldsymbol{S(x,t) = S_0 sin\ (2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})}$

La quantité $\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{\omega}}$ est la période temporelle tandis que la quantité $\boldsymbol{\lambda = V.T}$ est la longueur d'onde qui constitue la période spatiale. On peut vérifier aisément que :

$$\begin{cases} \boldsymbol{S(x + n\lambda, t) = S_0 sin\,(x, t)} \\ \boldsymbol{S(x, t + nT) = S_0 sin\,(x, t)} \end{cases}$$

Où : n est un nombre entier.

L'onde progressive s'écrit souvent : $\boldsymbol{S(x,t) = S_0 sin\,(\omega t - kx)}$

Où : $\boldsymbol{S_0}$: est l'amplitude qui s'exprime en m.
$\boldsymbol{\omega}$: est la pulsation du mouvement qui s'exprime en rad/s.
$\boldsymbol{k = \frac{\omega}{V} = \frac{2\pi}{\lambda}}$: est appelé le module du vecteur d'onde qui s'exprime en m

Chapitre VII : Cordes vibrantes

VII.1. Equation des ondes

On considère une corde tendue, rectiligne le long de l'axe x et de longueur infinie. On étudie la propagation d'une petite perturbation le long de cette corde. Cette perturbation se fait suivant une direction perpendiculaire (par exemple l'axe y). Considérons un élément de corde compris entre x et x + dx, soumis à deux tensions appliquées à ses extrémités **Figure (VII.1)**.

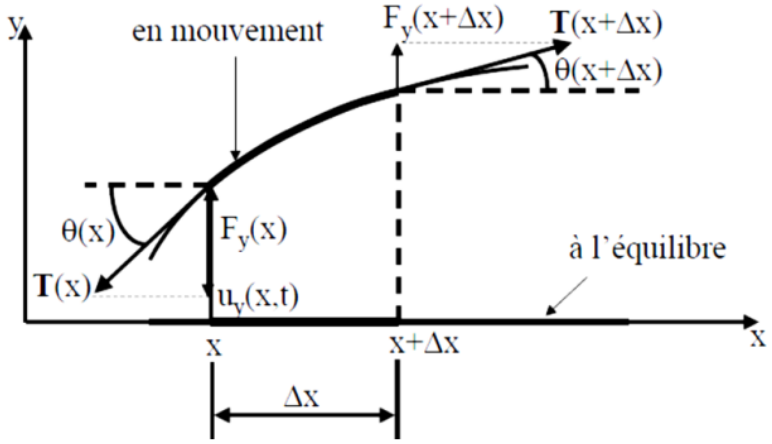


Figure.VII.1 : Corde vibrant transversalement.

Pour établir l'équation du mouvement de la corde, on considère un petit élément de corde situé à l'abscisse x et de longueur $\boldsymbol{dx}$. La masse $\boldsymbol{dm}$ de cet élément est donnée par : $\boldsymbol{dm = \mu\, dx}$

Où $\boldsymbol{\mu}$ est la densité linéique de masse de la corde.

Si l'on néglige la force de pesanteur devant la tension de la corde et que l'on applique le principe fondamental de la dynamique, on obtient :

$$\boldsymbol{\Delta m.\vec{a} = \vec{T}(x-dx) - \vec{T}(x) \Rightarrow \mu\, dx.\vec{a} = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} dx}$$

Donc : $\boldsymbol{\mu\, \vec{a} = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x}}$

Comme il n'y a pas de déplacement selon $\boldsymbol{x}$, alors, par projection sur l'axe des on trouve :

$$\boldsymbol{\frac{\partial T_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow T_x = T_0 cos\theta = cte}$$

Par conséquent, on trouve : $\boldsymbol{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x}}$……(1)

$\boldsymbol{\theta \ll\Rightarrow cos\theta \cong 1 \Rightarrow T = T_0 = cte}$ →La tension en module reste constante pour de faibles vibrations.

Projetons sur l'axe des $\boldsymbol{y}$: $\boldsymbol{\theta \ll\Rightarrow sin\theta \approx tan\theta = \frac{\partial u}{\partial x}}$

D'où $\boldsymbol{T_y = T_0 sin\theta \Rightarrow T_y = T_0 \frac{\partial u}{\partial x}}$

Donc : $\boldsymbol{\frac{\partial T_y}{\partial x} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$……(2)

A partir de l'équation (1) et (2), on obtient : $\boldsymbol{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$

Si on définit $\boldsymbol{V = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}}$, qui a la dimension d'une vitesse, on constate que : $\boldsymbol{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$

Qui est l'équation d'onde de la corde. Est V la vitesse de propagation de cette onde.

VII.2. Ondes progressives harmoniques

Une onde progressive harmonique se propage le long d'une direction donnée et peut être décrite par l'expression suivante : $\boldsymbol{u(x,t) = u_0 sin\,(\omega t - kx)}$

Où : $\boldsymbol{k = \frac{\omega}{V} = \frac{2\pi}{\lambda}}$ est le module du vecteur d'onde, étant la longueur d'onde.

VII.2.1. Force en un point

On appelle force en un point la composante, selon l'axe x, de la force exercée en ce point par la partie gauche de la corde sur la partie droite : $\boldsymbol{F = -T \frac{\partial u}{\partial x}}$

Dans le cas d'une onde progressive sinusoïdale, la relation devient : $\boldsymbol{F = ikTu_0 e^{i(\omega t - kx)}}$

La vitesse de particules s'écrit : : $\boldsymbol{\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} = i\omega u_0 e^{i(\omega t - kx)}}$

On constate que pour une onde progressive la vitesse de particules est en phase avec la force ***F.***

VII.2.1. Impédance

On appelle impédance en un point le rapport de la l'amplitude complexe de la force à l'amplitude complexe de la vitesse de particule : $\boldsymbol{Z(x) = \frac{F_y}{\dot{u}_y}}$

Dans le cas d'une onde progressive, on obtient : $\boldsymbol{Z(x) = \mu V = \sqrt{\mu T}}$ définit l'impédance caractéristique de la corde

VII.3. Oscillations libres d'une corde de longueur finie

On considère une corde de longueur L, fixée aux extrémités x=0 et x=L. On cherche des solutions stationnaires de l'équation $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$ (l'équation de D'Alembert) sous la forme suivante : $u(x,t) = f(t).g(x)$. En reportant dans l'équation on obtient :

$$\Rightarrow g\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} = V^2 f\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} = V^2\frac{1}{g}\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} = k$$

Où κ est une constante, seule façon d'obtenir l'égalité entre une fonction qui ne dépend que du temps t et d'une fonction qui ne dépend que de l'espace x.

Le cas physique $\kappa = -\omega^2 < 0$ conduit aux solutions :

$f(t) = F\cos(\omega t + \varphi)$ et $g(x) = G\cos(kx + \emptyset)$

avec $\omega = kc$, où F et G sont des amplitudes arbitraires et φ et $\emptyset$ des phases arbitraires. Les solutions stationnaires de l'équation de D'Alembert sont donc de la forme :

$$u(x,t) = A\cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \emptyset)$$

VII.3.1. Modes propres pour des extrémités fixes

On suppose ici que les extrémités de la corde, de longueur L, de tension T et de masse m, sont fixes. Les petites oscillations sont donc régies par l'équation de D'Alembert avec les conditions limites $u(0;\ t) = u(L;\ t) = 0$ pour tout temps t. Les solutions stationnaires forment une famille dénombrable qui s'écrit :

$$u_n(x,t) = A\cos(\omega_n t + \varphi)\sin(k_n x)$$

avec $k_n = n\frac{\pi}{L}$ et $\omega_n = Vk_n$ pour n **entier**, où A est une amplitude arbitraire et φ une phase arbitraire. La **Figure VII.2** représente le tracé de $u(x,t)$ pour différentes valeurs de n et de t. On montre que toute solution $u(x,t)$ de l'équation de D'Alembert avec ces conditions aux limites se décompose de manière unique sur la base des modes propres sous la forme :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x,t)$$

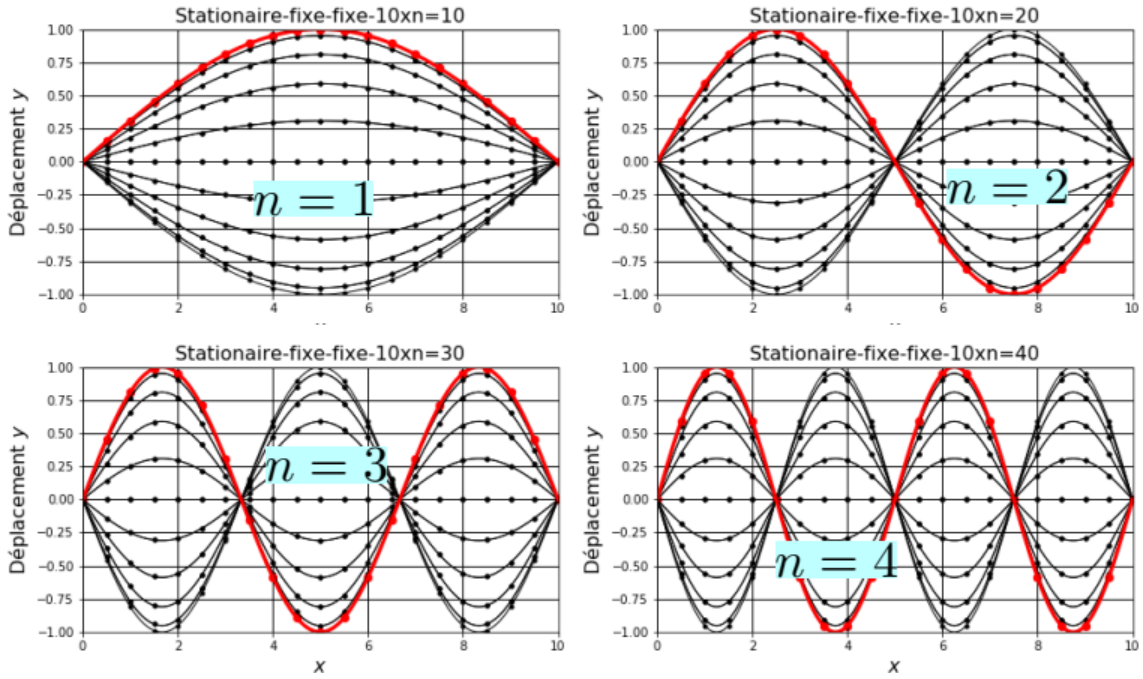


Figure.VII.2 : Modes propres d'oscillations $\boldsymbol{n} \in \{\mathbf{1};\ \mathbf{2};\ \mathbf{3};\ \mathbf{4}\}$ dans le cas des extrémités fixes.

VII.3.1. Modes propres avec une extrémité libre

On suppose maintenant que l'extrémité située en x = L est libre de glisser sans frottement. La résolution de l'équation de D'Alembert avec les conditions aux limites $\boldsymbol{u(0;\ t) = 0}$ et $\frac{\partial u\,(L,t)}{\partial x} = \mathbf{0}$ pour tout temps $\boldsymbol{t}$ conduit aux solutions :

$$\boldsymbol{u_n(x,t) = A\,cos(\omega_n t + \varphi)\,sin(k_n x)}$$

avec $\boldsymbol{k_n = n\,\frac{\pi}{L}}$ et $\boldsymbol{\omega_n = Vk_n}$ pour $\boldsymbol{n}$ **demi-entier**, où $\boldsymbol{A}$ est une amplitude arbitraire et $\boldsymbol{\varphi}$ une phase arbitraire. La **Figure VII.3** représente le tracé de $\boldsymbol{u(x,t)}$ pour différentes valeurs de $\boldsymbol{n}$ et de t. On montre que toute solution $\boldsymbol{u(x,t)}$ de l'équation de D'Alembert avec ces conditions aux limites se décompose de manière unique sur la base des modes propres sous la forme :

$$\boldsymbol{u(x,t) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{p+\frac{1}{2}}\, u_{p+\frac{1}{2}}(x,t)}$$

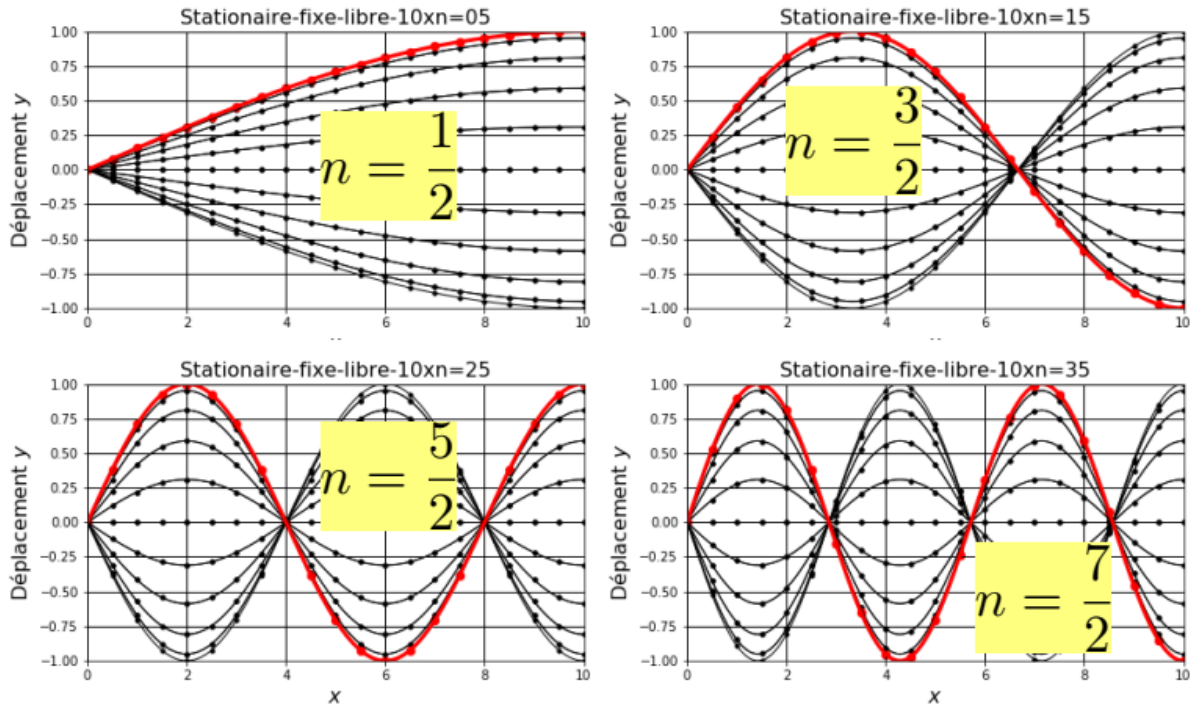


Figure.VII.3: Modes propres d'oscillations $\boldsymbol{n} \in \left\{\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right\}$ dans le cas des extrémités liber.

Chapitre VIII : Ondes acoustiques dans les fluides

VIII.1. Equation des ondes

Les ondes acoustiques sont des ondes mécaniques de nature élastique qui se propagent dans les milieux fluides, tels que les gaz et les liquides. Par conséquent, l'équation décrivant la propagation des ondes planes dans un fluide peut être établie en suivant une démarche analogue à celle employée pour dériver l'équation des ondes transversales se propageant le long d'une corde.

Pour établir cette équation, il est nécessaire de partir de l'équation fondamentale de l'acoustique. Considérons ainsi un tube de section ***S*** contenant un fluide, comme illustré sur la **Figure VIII.1**. On y isole un élément de volume renfermant un très grand nombre de molécules, de sorte que le milieu puisse être assimilé à un milieu continu. Cet élément est néanmoins suffisamment petit pour que les grandeurs acoustiques, telles que la pression, la masse volumique et la vitesse des particules, puissent y être considérées comme uniformes.

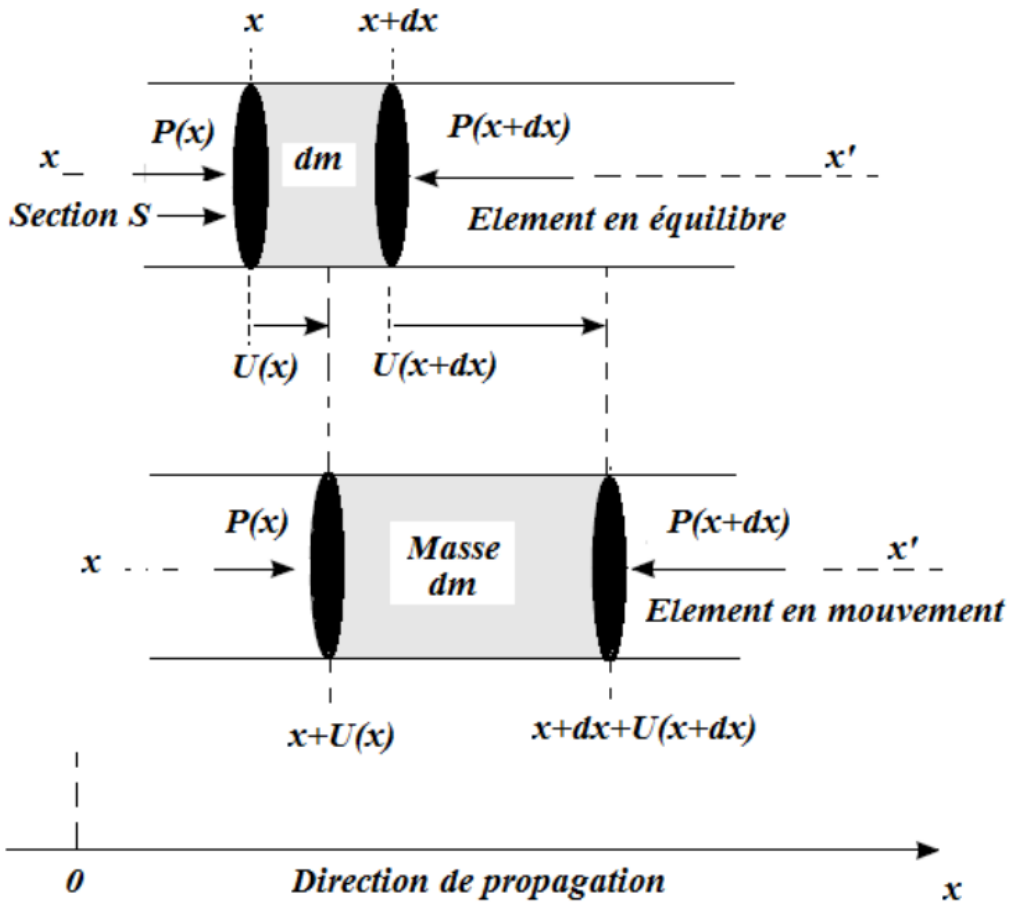


Figure.VIII.3 : Propagation d'une onde acoustique

Considérons une tranche de fluide de faible épaisseur Δx, située à la position x. Lorsqu'une perturbation atteint cette région, les forces qui s'y exercent cessent de se compenser, ce qui provoque la mise en mouvement de la tranche. On note $u_x(x,t)$ le déplacement, à l'instant t, du plan initialement situé en x. Les forces appliquées sur cette tranche aux positions x et $x+dx$ sont respectivement notées $F_x(x,t)$ et $F_x(x+dx,t)$. Ces forces peuvent alors s'exprimer de la manière suivante :

$$F_x(x,t) = S.P(x,t)$$

$$F_x(x+dx,t) = -S.P(x+dx,t)$$

La résultante de ces deux forces est :

$$\Delta F_x = F_x(x+dx,t) - F_x(x,t) \Rightarrow \Delta F_x = S[P(x,t) - P(x+dx,t)]$$

$$\Rightarrow \Delta F_x = -S[P(x+dx,t) - P(x,t)]$$

En faisant un développement en série de Taylor au premier ordre de $P\ (x,t)$, on obtient :

$$P(x+dx,t) = P(x,t) + \frac{\partial P}{\partial x}dx \ \Rightarrow P(x+dx,t) - P(x,t) = dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx$$

donc : $\Delta F_x = -S\frac{\partial p}{\partial x}dx$

En appliquant la loi de la dynamique de Newton : $dm\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_x(x+dx,t) - F_x(x,t) = \Delta F_x$

D'où : $dm\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -S\frac{\partial p}{\partial x}dx$ avec : $dm = \rho.s.dx$

On définit la surpression p d'un fluide compressible comme suit : $p = -\frac{1}{\beta}.\frac{\partial u}{\partial x}$

Ou β est appelé le coefficient de compressibilité.

En injectant la valeur de surpression à l'équation du mouvement ; on obtient :

$$\rho.S.dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = S.\frac{1}{\beta}.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\beta\rho}.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

D'où l'équation de la propagation des ondes sonores dans le fluide s'écrit : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \boldsymbol{V^2}.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Avec $\boldsymbol{V} = \sqrt{\frac{1}{\beta\rho}}$ est appelé la célérité de l'onde sonore dans le fluide.

VIII.2. Vitesse du son

Comme la propagation des ondes acoustiques dans un fluide se fait sans échange de chaleur, elle est considérée comme un phénomène adiabatique. Dans ce cadre, on définit la vitesse du son dans le fluide en fonction des propriétés thermodynamiques du milieu.

$$\boldsymbol{V} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$$

$\boldsymbol{\gamma}$ est le coefficient adiabatique (rapport des capacités calorifiques)

Exemple : Dans l'air, dans les conditions normales $T = 20℃$ et $P_0 = 105N \cdot m^{-2}$, $\boldsymbol{\gamma = 1.4}$ et $\rho_0 = 1.29\ kg \cdot m^{-3}$, on en déduit $V \approx 330\ m.s^{-1}$

- La valeur de la vitesse de propagation à l'équilibre dépend fortement de la température. Pour une mole de gaz parfait, on a :

$$\boldsymbol{V} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

Où ***M*** est la masse molaire du gaz.

R est la constante des gaz parfaits.

T est la température absolue.

VIII.3. Onde progressive sinusoïdale

Une onde acoustique sinusoïdale, s'écrit : $\boldsymbol{p(x,t) = p_0\, cos(\omega\left(t - \frac{x}{V}\right))}$

On définit le module du vecteur d'onde k par : $k = \frac{\omega}{V}$

D'où $\boldsymbol{p(x,t) = p_0\, cos(\omega t - kx)}$

En notation complexe, l'onde progressive sinusoïdale s'écrit : $\boldsymbol{\bar{p}(x,t) = p_0 e^{i(\omega t - kx)}}$

La relation liant la pression acoustique et la compressibilité, à savoir : $\boldsymbol{p = -\frac{1}{\beta}.\frac{\partial u}{\partial x}}$

permet d'écrire :

$$\boldsymbol{u(x,t) = -\beta \int p\,(x,t)dx \Rightarrow u(x,t) == -\beta \int p_0 e^{i(\omega t - kx)} dx}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow u(x,t) == \frac{\beta p_0}{ik}\, e^{i(\omega t - kx)} \Rightarrow u(x,t) == \frac{p_0}{i\omega V \rho_0}\, e^{i(\omega t - kx)}}$$

La dérivation de cette dernière expression par rapport au temps permet d'obtenir la vitesse de particules :

$$\boldsymbol{\dot{u}(x,t) == \frac{p_0}{V\rho_0}\, e^{i(\omega t - kx)}}$$

On constate que pour une onde progressive la vitesse de particules est en phase avec la pression acoustique.

VIII.3.1. Impédance acoustique

On appelle impédance acoustique en un point le rapport de l'amplitude complexe de la pression à l'amplitude complexe de la vitesse de particule

$$\boldsymbol{Z\,(x) = \frac{p(x,t)}{\dot{u}(x,t)}}$$

Dans le cas d'une onde progressive, on obtient : $\boldsymbol{Z\,(x) = V\rho_0}$

Le produit $\rho 0V$ définit l'impédance acoustique caractéristique du fluide.

VIII.4. Réflexion-Transmission

Références

[1] H. DJELOUAH, Vibration et ondes manuel de cours, Université des sciences et technologies Houari Boumediene, 2006-2007.

[2] N. BILLY, J. DESBOIS, M.A. DUVAL, M. ELIAS, P. MONCEAU, A. PLASZCZYNSKI, M. TOULMOND, CAPES de Sciences physiques. Tome 1. Physique, cours et exercices, Paris 3emeEdition, 2004.

[3] H. J. PAIN, the physics of vibrations and waves, Imperial College of Science and Technology, London, UK, Sixth Edition, 2005.

[4] S. GRAHAM KELLY, theory and problems of mechanical vibrations, schaum's outline series, New York,1996.

[5] D.A. WELLS, theory and problems of Lagrangian dynamics, schaum's outline series, New York, 1987.

[6] A.P. FRENCH, vibrations and waves, the M.I.T. introductory physics series, New York, 1971.

[7] T. FREEGARDE., "Introduction to the Physics of Waves", Cambridge University Press (2013).

[8] JEAN MARC RICHARD, « Ondes et Vibrations », Laboratoire de Physique Subatomique et Cosmologie, http //lpsc.in2p3.fr/théorie/Richard, (2009).

[9] L. RONAN. « Ondes et vibrations : fondamentaux et applications à l'acoustique et à la diffusion de la chaleur ». Edition Dunod, (2017).