République Algérienne Démocratique Et Populaire
Université Mohamed BoudiafDe M'sila
Faculté Des Mathématiques Et De L'informatique
Département De Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Par

BOUHAFS Radia

Sujet

Sur les idéaux d'opérateurs lipschitziens

Date de soutenance **:29/05/2017**

Devant le jury :

Mr. E. DAHIA…….. M.C.B…….Univ de M'sila Président
Mr. D. ACHOUR Prof Univ de M'sila Rapporteur

Remerciements

Je remercie avant tous ALLAH pour son aide, ses innombrables dons, ALLAH qui m'a donné la force, la volonté et le moral pour terminer ce modeste travail .

Ainsi, je tiens également à exprimer mes vifsremerciements à mon promoteur ***Dr.ACHOURDahmane****pour avoir d'abord proposer ce thème, pour son suivi continuel tout le long de la réalisation de ce mémoireet qu'elle n'a pas cessée de me donner ses conseils.*

*Et en particulier, je remercie****Mr .YAHIRachid,****qu'il m'a aidé à mon travail.*

Mes remerciements vont au président du jury et aux membres du jury qui m'ont fait l'honneur de participer au jury.

Je remercie évidemment mes parents, mes frères et sœurs, qui depuis de si longues années, m'ont encouragé et soutenu dans la poursuite de mes études.

Enfin, je tiens à exprimer ma reconnaissance à tous mes amis et collègues pour le soutien moral …

A tous MERCI

Table des matières

Notations

$L(E;F)$	Espace des applications linéaires.
$\mathcal{L}(E;F)$	Espace des applications linéaires continues.
E^*	Espace dual de E.
i	Injection canonique.
e	Elément neutre ou distingué, on prend 0 si X est normé.
$\mathcal{M}_0$	Ensemble des espaces métriques complets pointés.
$\mathbb{K}$	Corps des scalaires ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
$Lip(X,E)$	Espace de toutes les fonctions lipschitziennes bornées de X dans E.
$Lip_0(X,E)$	Espace de toutes les applications lipschitziennes de X dans E nulles au point e.
$X^\#$	Espace des formes lipschitziennes sur X.
$\mathcal{F}(X)$	Espace de Lipschitz libre
$\ell_\infty(X)$	Espace des fonctions borneés de X dans $\mathbb{R}$.
B_X	Boule unité fermé de l'espace X.
$\mathcal{K}(E;F)$	Espace de tous les opérateurs linéaires compacts de E dans F.
$\mathcal{W}(E;F)$	Espace de tous les opérateurs linéaires faiblement compacts de E dans F.
T^*	Adjoint de l'opérateur linéaire.
$T^\#$	Adjoint de l'opérateur lipschitzien.

Introduction

La notion d'un idéal d'opérateurs apparait pour la première fois dans les travaux de Pietsch. Les concepts de base remontent à Pietsch [12]. Un premier résumé [13] a été donné en 1972, tandis que le monographie " Operator Ideals" [14] est apparue en 1978 (édition de l'Est) et en 1980 (édition de l'Ouest).

Suivant Pietsch, *un idéal d'opérateur* $\mathcal{I}$ est une sous classe de $\mathcal{L}$ des applications linéaires continues entre espaces de Banach, telle que les composants $\mathcal{I}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y) \cap \mathcal{I}$ satisfait

(i) $\mathcal{I}(X, Y)$ *est un sous espace vectoriel de* $\mathcal{L}(X, Y)$*, qui contient la classe* $\mathcal{L}_f$ *des opérateurs de rang finis.*

(ii) Propriété d'idéal : si $S \in \mathcal{L}(E, X)$, $T \in \mathcal{I}(X, Y)$ et $w \in \mathcal{L}(Y, F)$. Alors $w \circ T \circ S \in \mathcal{I}(E, F)$.

La version lipchitzienne des idéaux d'opérateurs linéaires a été introduit par Achour, Rueda, Yahi et Sánchez-Pérez dans [1]. Nous proposons dans ce travail de revoir cette généralisation en détail et d'essayer d'étudier quelques exemples et propriétés.

En 2009 Farmer et Johnson [6] ont introduit la version lipchitzienne des opérateurs p-sommants, ils ont prouvé la première propriété de base. Depuis lors, beaucoup d'autres auteurs introduisaient des versions lipschitziennes de quelques idéaux linéaires (voir, par exemple [2], [17], [1]).

Le mémoire est divisé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions concernant les espaces métriques, les fonctions lipchitziennes, l'espace de Lipschitz et l'espace de Arens-Eells.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté les opérateurs lipschitziens de rang fini, l'idéal lipschitzien et quelques exemples.

Le troisième chapitre qui s'intitule "méthodes de construction des ideaux d'opérateurs lipschitziens" contient des définitions et des propriétés. On commencera par une définition sur la méthode de composition. Puis on étudiera un exemple sur les opérateurs fortement p-sommant. Nous terminerons ce chapitre par la méthode de dualité, nous présentons d'abord la définition de la méthode de dualité et quelque proposition.

Chapitre 1

Préliminaire

Nous donnerons dans cette section quelques propriétés utiles concernant l'espace des fonctions lipschitziennes.

1.1 Espace métriques et l'espace Lip_0

Un espace métrique est la donné d'un ensemble dont les éléments sont considérés comme des points et d'une application qui permet de mesurer si deux points sont proches ou éloignés .

Définition 1.1 *Soit X un ensemble non vide. On dit que d est une distance sur X si et seulement si d est une application de X^2 dans $\mathbb{R}^+$ telle que pour tout $(x, y, z) \in X^3$, on a*

$$\begin{array}{ll} (i)\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y & (\textit{Séparation}). \\ (ii)\ d(x,y) = d(y,x) & (\textit{Symétrie}). \\ (iii)\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) & (\textit{Inégalité triangulaire}). \end{array}$$

Soit (X, d_X, e) est un espace métrique pointé (i.e., e un élément neutre ou distingué, on prend 0 si X est normé). On note par

$$\mathcal{M}_0 = \{\textit{espaces métriques complets pointés}\}.$$

Exemple 1.2 *(L'espace de Hölder)*

Soit (X, d) un espace métrique, on considère $0 \leq \alpha \leq 1$, alors (X, d^α) est un espace métrique.

1.1.1 L'espace Lip(X,E)

Définition 1.3 *Soit X un espace métrique et E un espace de Banach . On note par $Lip(X,E)$ l'espace de toutes les fonctions lipchitzienes bornées de X dans E .*

$$Lip(X,E) = \{fonctions\ lipschitziennes\ born\acute{e}es\ f : X \to E\}.$$

Muni de la norme

$$\|f\|_{Lip(X,E)} = \{\max \|f\|_\infty, Lip(f)\}.$$

Si $E = \mathbb{R}$ alors $Lip(X,\mathbb{R})$ =$Lip(X)$.

1.1.2 L'espace $\mathbf{Lip_0}$(X,E)

Définition 1.4 *Soit (X, d_X, e) un espace métrique pointé. Pour espace de Banach E, on note par $Lip_0(X,E)$ l'espace de toutes les applications lipschitziennes de X dans E nulles au point e .*

$$Lip_0(X,E) = \{fonction\ \ lipschitziennes\ \ f : X \to E \quad f(e) = 0\}.$$

Muni de la norme

$$Lip_0(f) = \sup_{x \neq y} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{d_X(x,y)}.$$

Si $E = \mathbb{R}$ alors $Lip_0(X,\mathbb{R})$ =$Lip_0(X)$.

1.1.3 Espace dual

Définition 1.5 *Soit X un espace métrique pointé . On appelle dual de Lipschitz et on note par $X^\#$ "l'espace de Banach des formes lipschitziennes sur X".*

$$X^\# = Lip_0(X,\mathbb{R}) = Lip_0(X).$$

Muni de la norme

$$Lip(x^\#) = \sup_{x \neq y} \frac{\left|x^\#(x) - x^\#(y)\right|}{d_X(x,y)}.$$

1.2 Espace de Arens-Eells

Adjoint des opérateurs lipschitziens

Soient X un espace métrique pointé et Y un espace de Banach. Sawashima [15] a défini l'adjoint lipschitzien $T^{\#} : Lip_0(Y) \longrightarrow Lip_0(X)$ d'une application lipschitzienne $T \in Lip_0(X,Y)$ par la formule

$$\begin{array}{rccc} T^{\#}: & Lip_0(Y) & \longrightarrow & Lip_0(X) \\ & g & \longmapsto & T^{\#}(g) = g \circ T \end{array}$$

L'opérateur $T^{\#}$est linéaire continue et $\left\|T^{\#}\right\| = Lip\,(T)$. La restriction de $T^{\#}$ sur Y^* (si Y un espace de Banach)définit un opérateur linéaire continue appelé l'opérateur transposer lipschitzien de T et noté ici par T^t, on a aussi $\|T^t\| = Lip\,(T)$.

Espace de Arens-Eells

Dans cet section on va présenter le prédual de $Lip_0(X)$, c'est à dire l'existance d'un espace de Banach Z, telle que $Lip_0(X)$ est isométriquement isomorphe à Z .

Définition 1.6 *Soit (X, d_X) un espace métrique. Une molécule sur X est une fonction $m : X \to \mathbb{R}$ a support fini et satisfait $\sum\limits_{x \in supp(m)} m(x) = 0$. Désignons par $M(X)$ l'espace vectoriel de tous les molécules définies sur X*

Pour $x, x' \in X$, la molécule $m_{xx'}$ définie par

$$m_{xx'} = \mathcal{X}_x - \mathcal{X}_{x'}.$$

Où $\mathcal{X}_{\{A\}}$ désigne la fonction caractéristique de A.

Remarque 1.7 *On peut montrer que tout $m \in M(X)$, s'écrit sous la forme*

$$m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, m_{x_i x_i'}.$$

Cette écriture n'est pas unique .En effet. Soit

$$\begin{aligned} m &= \sum_{x \in supp(m)} m(x) \mathcal{X}_x \\ &= \sum_{i=1}^{n} m(x_i) \mathcal{X}_{x_i} \\ &= \sum_{i, m(x_i) > 0}^{n} m(x_i) \mathcal{X}_{x_i} - \sum_{i, m(x_i') < 0}^{n} m(x_i') \mathcal{X}_{x_i'} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\mathcal{X}_{x_i} - \mathcal{X}_{x_i'} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, m_{x_i x_i'} \end{aligned}$$

Soit (X, d_X) un espace métrique. Munissons l'espace des molécules $M(X)$ de la norme suivante
$$\|m\|_{M(X)} = \left\{ \inf \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \, d(x_i \, , x_i') : m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, m_{x_i x_i'} \right\}.$$
$\left(M(X), \|.\|_{M(X)}\right)$ est une espace normé. Notons Æ(X) la complètude de l'espace normé $\left(M(X), \|.\|_{M(X)}\right)$. Parfois l'espace Æ$(X)$ s'appelle l'espace de Lipschitz libre de X et on note aussi par $\mathcal{F}(X)$. Cet espace a été présenté a la premiere fois par Arens et Eells en 1956.

Proposition 1.8 *Soit X un espace métrique pointé. Les espaces $X^{\#}$ et Æ$(X)^*$sont isométriquement isomorphes. C'est-à-dire $X^{\#} \cong$ Æ$(X)^*$.*

Démonstration. (i) On définit l'application suivante
$$\begin{array}{rlcl} S: & Æ(X)^* & \longrightarrow & Lip_0(X) \\ & \varphi & \longmapsto & S(\varphi). \end{array}$$
Telle que $S(\varphi)(x) = \varphi(m_{xe})$,pour tout $x, x' \in X$. On a
$$\begin{aligned} |(S\varphi)(x) - (S\varphi)(x')| &= |\varphi(m_{xe}) - \varphi(m_{x'e})| \\ &= |\varphi(m_{xx'})| \\ &\leq \|\varphi\| \, d(x, x'). \end{aligned}$$
D'ou $Lip(S\varphi) \leq \|\varphi\|$. Ainsi $(S\varphi)(0) = \varphi(0)$, alors $S\varphi \in Lip_0(X)$.Nous concluons que S est une application linéaire et $\|S\| \leq 1$.

Maintenant on définit l'application suivante
$$\begin{array}{rlcl} R: & Lip_0(X) & \longrightarrow & Æ(X)^* \\ & f & \longmapsto & R(f). \end{array}$$

Telle que $(Rf)(m) = \sum\limits_{x} m(x) f(x)$,pour $f \in Lip_0(X)$ et $m \in$ Æ(X). Pour $m = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \, m_{x_i x_i'}$.On a donc
$$\begin{aligned} |(Rf)(m)| &= \left| (Rf)(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, m_{x_i x_i'}) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \, |f(x_i) - f(x_i')| \\ &\leq Lip(f) \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \, d((x_i, x_i'). \end{aligned}$$
En prenant l' infimum portée sur tous les réprésentations de m sous la forme $m = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \, m_{x_i x_i'}$, on trouve $|(Rf)(m)| \leq Lip(f) \, \|m\|$, d'ou $Rf \in$Æ$(X)^*$ et $\|Rf\| \leq Lip(f)$. Alors

nous concluons que R est une application linéaire non expansive ($\|R\| \leq 1$) à partir de $Lip_0(X)$ à $Æ(X)^*$.Enfin, un simple calcul indique que $R \circ S = id_{Æ(X)^*}$ et $S \circ R = id_{X^\#}$. Donc $X^\# \cong Æ(X)^*$. ■

Corollaire 1.9 *Soit X un espace métrique pointé.*

1) Pour toute molécule m,nous avons

$$\|m\|_{Æ} = \sup_{f \in B_{X^\#}} |\langle m, f \rangle| .$$

2) $\|.\|_{Æ}$ est une norme sur l'espace de molécules qui satisfait

$$\forall x, x' \in X : \|m_{xx'}\|_{Æ} = d_X(x, x').$$

Proposition 1.10 *Soient X et Y deux espaces métrique pointés. et soit $T : X \to Y$ un opérateur Lipschitzien qui préserve le point de base.*

1. *L'application $\delta_X : X \to Æ(X)$ définie par*

$$\delta_X(x) = m_{xe}$$

est une injection isométrique de X dans $Æ(X)$.

2. *[11, Lemma 3.1] Il existe une unique application lineaire $\hat{T} : Æ(X) \longrightarrow Æ(Y)$ vérifiant $\widehat{T} \circ \delta_X = \delta_Y \circ T$ et $\|\hat{T}\| = Lip(T)$. Autrement dit, le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\delta_X"] & Y \arrow[d, "\delta_Y"] \\ Æ(X) \arrow[r, "\hat{T}"] & Æ(Y) \end{tikzcd}$$

3. *[16, Théorème 2.2.4 (b)] Si $Y = E$ un espace de Banach. Alors, il existe une unique application linéaire $T_L : Æ(X) \longrightarrow E$ telle que $T = T_L \circ \delta_X$ et $\|T_L\| = Lip(T)$. Autrement dit, le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\delta_X"'] & & E \\ & Æ(X) \arrow[ur, "T_L"'] & \end{tikzcd},$$

Démonstration. (1) Pour tout $x, x' \in X$ an a

$\|\delta_X(x) - \delta_X(x')\|_{Æ(X)} = \|m_{xe} - m_{x'e}\|_{Æ(X)} = \|m_{xx'}\|_{Æ(X)} = d_X(x, x')$

(2) Voire ([11, Lemma 3.1, Page 179]).

(3) Voire ([16, Théorème 2.2.4 (b). Page 41]). ■

Chapitre 2

Idéal des opérateurs lipschitziens

2.1 Les opérateurs lipschitziens de rang fini

Définition 2.1 *Soient X un espace métrique pointé et E un espace de Banach. Un opérateur lipshitzien $T \in Lip_0(X,E)$ est de rang fini si le sous espace vectoriel*

$$vect\left\{\frac{T(x)-T(y)}{d(x,y)};\ x,y\in\ X, x\neq y\right\}\subset E$$

est de dimension finie.

On note $Lip_0(X,E)$ l'ensemble de tous les opérateurs lipschitziens de rang fini de X dans E. Soit F un espace de Banach, $\mathcal{L}_f\ (E,F)$ est l'espace de tous les opérateurs linéaire de rang fini de E dans F.

Proposition 2.2 *[9] Soient X un espace métrique pointé, E un espace de Banach et soit $T\in Lip_0(X,E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) T est lipschitzien de rang finie.

(ii) T est de rang finie.

(iii) $T_L\in\mathcal{L}(Æ(X),E)$ est de rang finie.

Proposition 2.3 *Soient X un espace métrique pointé, E un espace de Banach et soit $T\in Lip_0(X,E)$. Si T est de rang finie alors T admet une représentation sous la forme $T=\sum_{i=1}^{n}u_i f_i;\ (u_i)_{i\,\leq\,n}\in E\ ,\ (f_i)_{i\,\leq\,n}\ \in X^{\#}$.*

Démonstration. Soit $T\in Lip_0(X,E)$, alors d'après la Proposition (2.2) $T_L\ \in\mathcal{L}_f(Æ(X),E)$, d'ou T_L admet une représentation sous la forme $T_L=\sum_{i=1}^{n}m_i^{*}\otimes\ u_i$, $(u_i)_{i\,\leq\,n}\subset E$,

$(m_i^*)_{i \leq n} \subset Æ(X)^*$. Alors il existe $(f_i)_{i \leq n} \subset X^\#$ telle que $R(f_i) = m_i^*$,$1 \leq i \leq n$ (voire la preuve de la Proposition (1.8) pour la définition de l'application R). Pour tout $x \in X$ on a

$$\begin{aligned} T(x) &= T_L \circ \delta_X(x) = T_L(m_{x\ e}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i^* \otimes u_i(m_{x\ e}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i^*(m_{x\ e}) u_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} R(f_i)(m_{x\ e}) u_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f_i(x) - f(e))\, u_i. \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i(x) u_i. \end{aligned}$$

Donc $\quad T = \sum_{i=1}^{n} u_i\ f_i.$ ■

2.2 Idéal lipschitzien

Définition 2.4 *Un idéal d'opérateur lipschitzien $\mathcal{I}_{Lip}$ est un sous classe de Lip_0 tels que pour tout espace métrique pointé X et tout espace de Banach E, les composants*

$$\mathcal{I}_{Lip}(X, E) := Lip_0(X, E) \cap \mathcal{I}_{Lip},$$

satisfait

(i) $\mathcal{I}_{Lip}(X, E)$ est un sous espace vectoriel de $Lip_0(X, E)$,

(ii) $vg \in \mathcal{I}_{Lip}(X, E)$ pour $v \in E$ et $g \in X^\#$,

(iii) propriété d'idéal : si $S \in Lip_0(Y, X)$, $T \in \mathcal{I}_{Lip}(X, E)$ et $w \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $w \circ T \circ S$ $\in \mathcal{I}_{Lip}(Y, F)$.

De plus, si $\|.\|_{\mathcal{I}_{Lip}} : \mathcal{I}_{Lip} \longrightarrow [0, +\infty[$ satisfait

(i′) $(\mathcal{I}_{Lip}(X, E), \|.\|_{\mathcal{I}_{Lip}})$ est un espace normé (Banach) et $Lip(T) \leq \|T\|_{\mathcal{I}_{Lip}}$ pour tout $T \in \mathcal{I}_{Lip}(X, E)$

(ii′) $\|id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ id_{\mathbb{K}}(\lambda) = \lambda\|_{\mathcal{I}_{Lip}} = 1$

(iii′) $\|w \circ T \circ S\|_{\mathcal{I}_{Lip}} \leq Lip(S)\, \|T\|_{\mathcal{I}_{Lip}}\, \|w\|$, $\forall S \in Lip_0(Y, X)$, $T \in \mathcal{I}_{Lip}(X, E)$ et $w \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, $(\mathcal{I}_{Lip}(X, E), \|.\|_{\mathcal{I}_{Lip}})$ s'appelle l'idéal de Banach des opérateurs lipshitziens.

Définition 2.5 ***(Idéal injective)*** *On dit qu'un idéal d'opérateur lipschitzien $\mathcal{I}_{Lip}$ est injective si pour tout injection linéaire métrique $i : E \hookrightarrow F$ (i est linéaire et $\|i\ (x)\| = \|x\|$ pour* *tout $x \in E$) et chaque $T \in Lip_0(X, E\ ), T$ est dans $\mathcal{I}_{Lip}$ si et seulement si, $i \circ T \in \mathcal{I}_{Lip}(X, E)$. Un idéal d'opérateur lipschitzien normé est dit injective si $\|T\|_{\mathcal{I}_{Lip}} = \|i \circ T\|_{\mathcal{I}_{Lip}}$*

Définition 2.6 ***(Les opérateurs lipschitziens approximable) [9]*** *Soient X un espace métrique pointé et E un espace de Banach, un opérateur lipschitzien $T \in Lip_0(X, E)$ est dit approximable s'il est limite d'une suite d' opérateurs lipschitziens de rang fini de X dans E dont la norme lipschitzienne Lip.*

L'ensemble de tous les opérateurs lipschitziens approximable $T \in Lip_0(X, E)$ est désignée par $\overline{Lip_{0\mathcal{F}}(X, E)}$. Il est clair que $\overline{Lip_{0\mathcal{F}}(X, E)}$ un idéal lipschitzien.

Remarque 2.7 *[1]La classe $Lip_{0\mathcal{F}}$ est le plus petit idéal d'opérateur lipschitzien .*

Lemme 2.8 *Soit $T \in Lip_0(X, E)$, les propriétés suivantes sont équivalents*

1. $T \in Lip_{0\mathcal{F}}(X, E)$,
2. $T_L \in \mathcal{L}_f(\text{Æ}(X), E)$,
3. $T^t \in \mathcal{L}_f(E^*, X^\#)$.

Démonstration. L'équivalence entre (1) et (2) apparaît dans [9, Proposition (2.4)]. L'équivalence avec (3) découle du fait que $(T_L)^* = R \circ T^t$ et la propriété d'idéal. ■

Corollaire 2.9 *Soit $T \in Lip_0(X, E)$. Les propriétés suivantes sont équivalents*

1. $T \in \overline{Lip_{0\mathcal{F}}(X, E)}$,
2. $T_L \in \overline{\mathcal{L}_f(\text{Æ}(X), E)}$, *(les opérateurs linéaire approximable de Æ(X) dans E)*
3. $T^t \in \overline{\mathcal{L}_f(E^*, X^\#)}$,*(les opérateurs linéaire approximable de E^*dans $X^\#$)*

Démonstration. C'est une conséquence directe du lemme (2.8). Le fait que la correspondance $T \in Lip_0(X, E) \to T_L \in \mathcal{L}_f\ (\text{Æ}(X), E)$ est un isomorphisme, et [10, Theorem 2.1] assure que T_L peut-être approximé par un opérateur de rang fini si et seulement si, $(T_L)^*$ peut être approximé par un operateur de rang fini. ■

2.3 Exemples

Les opérateurs lipschitziens p-sommants

Les opérateurs lipschitziens p- sommants ont été introduite par Farmer et Johnson en 2009.

Définition 2.10 *[6] Une application lipschitziene $T : X \to E$ est dite lipschitzienne p-sommant $(1 \leq p < \infty)$, s'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, (x_i)_{1\leq\, i\, \leq n}, (y_i)_{1\leq\, i\, \leq n}$ $\subset X$, $\forall\, \{\alpha_i\}_{1\leq\, i\, \leq n} \subset \mathbb{R}_+$*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left\| T(x_i) - T(y_i) \right\|^p \leq\ C^p\ sup_{f\, \in\, X^\#} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left| f(x_i)\ - f(y_i) \right|^p . \qquad (*)$$

La classe des opérateurs lipschitziens p-sommants de X dans E est notée par

$$\Pi_p^L(X, E).$$

Muni de la norme

$$\pi_p^L(T) = inf \left\{ C\ : C\ \textit{vérifiant l'inégalité (*)} \right\} .$$

Théorème 2.11 *[6, Theorem 2] Soit $(1 \leq p < \infty)$, T est un opérateur linéaire borné de E dans F. Alors $\pi_p^L(T) = \pi_p(T)$.*

Remarque 2.12 *1) Dans la définition, on peut prendre les $\alpha_i = 1$.*

2) $Lip(T) \leq \pi_p^L(T)$, pour tout $T \in \Pi_p^L(X, E)$.

Proposition 2.13 *$(\ \Pi_p^L(X, E), \pi_p^L(.))$ est un idéal injectif de Banach lipschitzien.*

Démonstration.

— On montrons que $(\ \Pi_p^L(X, E), \pi_p^L(.))$ est un sous espace vectoriel normé de $Lip_0(X, E)$

a) Soit $T \in \Pi_p^L(X, E)$, telque $\pi_p^L(T) = 0$. On a $Lip(T) \leq \pi_p^L(T)$, D'ou $\pi_p^L(T) = 0 \Longrightarrow Lip(T) = 0 \Rightarrow T = 0$.

b) Soient $T_1, T_2 \in \Pi_p^L(X, E)$, pour tout : $(x_i)_{1\leq\, i\, \leq n}$, $(y_i)_{1\leq\, i\, \leq n} \in X$ et $(\alpha_i)_{1\leq\, i\, \leq n} \subset \mathbb{R}_+$, on a

$$(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left\| (T_1 + T_2)(x_i) - (T_1 + T_2)(y_i) \right\|^p)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left\| T_1(x_i) - T_1(y_i) \right\|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left\| T_2(x_i) - T_2(y_i) \right\|^p)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \pi_p^L(T_1) sup_{f\, \in\, X^\#} (\textstyle\sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i)\ - f(y_i) \right|^p)^{\frac{1}{p}} + \pi_p^L(T_2) sup_{f\, \in\, X^\#} (\textstyle\sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i)\ - f(y_i) \right|^p)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \left(\pi_p^L(T_1) + \pi_p^L(T_2) \right) sup_{f\, \in\, X^\#} (\textstyle\sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i)\ - f(y_i) \right|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Donc $T_1 + T_2 \in \Pi_p^L(X, E)$ et

$$\pi_p^L(T_1 + T_2) \leq \pi_p^L(T_1) + \pi_p^L(T_2).$$

c) Soient $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ et $T \in \Pi_p^L(X, E)$, on a

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left\|\lambda T(x_i) - \lambda T(x_i)(y_i)\right\|^p)^{\frac{1}{p}} &= |\lambda| (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left\|T(x_i) - T(x_i)(y_i)\right\|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq |\lambda| \, \pi_p^L(T) sup_{f \in X^{\#}} (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left|f(x_i) - f(y_i)\right|^p)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

D'où $\lambda T \in \Pi_p^L(X, E)$ et $\pi_p^L(\lambda T) \leq |\lambda| \, \pi_p^L(T)$. On d'autre part,

$$\pi_p^L(T) = \pi_p^L(\frac{1}{\lambda}\lambda T) \leq \frac{1}{|\lambda|}\pi_p^L(\lambda T) \Longrightarrow |\lambda| \, \pi_p^L(T) \leq \pi_p^L(\lambda T) \Longrightarrow \pi_p^L(\lambda T) = |\lambda| \, \pi_p^L(T).$$

Donc pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $T \in \Pi_p^L(X, E)$, on a

$$\pi_p^L(\lambda T) = |\lambda| \, \pi_p^L(T)$$

Donc d'après a), b) ,c) ; $\Pi_p^L(X, E)$ est un sous espace vectoriel normé.

2) Maintenant, soit (T_n) une suite de Cauchy dans $\Pi_p^L(X, E)$ alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon, \forall n, m \geq N_\epsilon : \pi_p^L(T_n - T_m) \leq \epsilon \Longrightarrow Lip(T_n - T_m) \leq \epsilon.$$

Donc la suite (T_n) est de Cauchy dans l'espace de Banach $Lip_0(X, E)$. Alors (T_n) converge vers un opérateur $T \in Lip_0(X, E)$. Donc $\forall m, n \geq N_\epsilon$ et $\forall \ (x_i)_{1 \leq \ i \ \leq k} \ , (y_i)_{1 \leq \ i \ \leq k} \in X$

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=1}^{k} \left\|(T_n - T)(x_i) - (T_n - T)(y_i)\right\|^p &= \lim_{m \to \infty} \textstyle\sum_{i=1}^{k} \left\|(T_n - T_m)(x_i) - (T_n - T_m)(y_i)\right\|^p \\
&\leq \epsilon sup_{f \in B_{X^{\#}}} (\textstyle\sum_{i=1}^{k} \left|f(x_i) - f(y_i)\right|^p .
\end{aligned}$$

D'où l'opérateur $T_n - T$ est lipschitzien p-sommant de X dans E, avec $\pi_p^L(T_n - T) \leq \epsilon$. On d'autre part on a $T = T - T_n + T_n \in \Pi_p^L(X, E)$. D'ou $(\Pi_p^L(X, E), \pi_p^L(T))$ est un espace de Banach.

— Propriété d'idéal : soient $T \in \Pi_p^L(X, E), u \in Lip_0(Y, X)$ et $v \in \mathcal{L}(E, F)$,alors pour $1 \leq p < \infty$, $(x_i)_{1 \leq i \ \leq n}$,$(y_i)_{1 \leq i \ \leq n} \subset Y$, on a

$$\begin{aligned}
& (\textstyle\sum_{i=1}^{n} \left\|((v \circ T \circ u)(x_i) - (v \circ T \circ u)(y_i))\right\|^p)^{\frac{1}{p}} \\
\leq \ & \|v\| \, (\textstyle\sum_{i=1}^{n} (\left\|((T \circ u)(x_i) - (T \circ u)(y_i))\right\|)^p)^{\frac{1}{p}} \\
\leq \ & \|v\| \, \pi_p^L(T) \sup_{f \in B_{X^{\#}}} \ (\textstyle\sum_{i=1}^{n} \left|f(u(x_i)) - f(u(y_i))\right|^p)^{\frac{1}{p}} . \\
\leq \ & \|v\| \, \pi_p^L(T) Lip(u) \sup_{f \in B_{X^{\#}}} \left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{(f \circ u)}{Lip(u)}(x_i) - \frac{(f \circ u)}{Lip(u)}(y_i))\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
\leq \ & (\|v\| \, \pi_p^L(T) Lip(u)) \sup_{g \in B_{Y^{\#}}} (\textstyle\sum_{i=1}^{n} \left|g(x_i) - g(y_i))\right|^p)^{\frac{1}{p}} .
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $v \circ T \circ u$ est Lipschitz p-sommant ($v \circ T \circ u \in \Pi_p^L(Y, F)$),et

$$\pi_p^L(v \circ T \circ u) \leq \|v\| \, \pi_p^L(T) Lip(u) \ .$$

— On montrons que $Lip_0(X, E) \subset \Pi_p^L(X, E)$. Soit $v \in E$ et $g \in X^{\#}$, on a

$$\begin{aligned}
(\textstyle\sum_{i=1}^n \|(vg)(x_i) - (vg)(y_i)\|^p)^{\frac{1}{P}} &\leq \|v\| \, (\textstyle\sum_{i=1}^n \|g(x_i) - g(y_i)\|^p)^{\frac{1}{P}} \\
&\leq \|v\| \, Lip(g) \left(\textstyle\sum_{i=1}^n \left\| \frac{g}{Lip(g)}(x_i) - \frac{g}{Lip(g)}(y_i) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|v\| \, Lip(g) \sup_{h \, \in \, B_{X^{\#}}} (\textstyle\sum_{i=1}^n |h(x_i) - \ h(y_i)|^p)^{\frac{1}{p}} \ .
\end{aligned}$$

Donc $vg \in \Pi_p^L(X, E)$ et $\pi_p^L(vg) \leq \|v\| \, Lip(g)$.

D'autre part

$$\|v\| \, Lip(g) = Lip(vg) \leq \pi_p^L(vg).$$

Donc $\pi_p^L(vg) = \|v\| \, Lip(g)$.

— Soit $Id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, Id_{\mathbb{K}}(\lambda) = \lambda$, d'après [6, Theorem 2] $\pi_p^L(Id_{\mathbb{K}}) = \pi_p(Id_{\mathbb{K}}) = 1$. Donc ($\Pi_p^L(X, E)$, $\pi_p^L(.)$) est un idéal de Banach lipschitzine.

— Soient $i : E \hookrightarrow F$ l'*injection linéaire,* et $T \in Lip_0(X, E)$ tel-que $i \circ T \in \Pi_p^L(X, E)$.Puisque i est une injection, donnée $(x_i)_{i \, \leq n}, (y_i)_{i \, \leq n}$ dans X nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i) - T(y_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^n \|iT(x_i) - iT(y_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_p^L(iT) \sup_{f \, \in \, X^{\#}} (\sum_{i=1}^n |f(x_i) \ - f(y_i)|^p)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent $T \in \Pi_p^L(X, E)$ et $\pi_p^L(T) \leq \pi_p^L(iT)$. Et la propriété d' idéal donnée l'inégalité inverse, et donc $\pi_p^L(T) = \pi_p^L(iT)$. Cela montre que Π_p^L est injective. ■

Les opérateurs lipschitziens p -intégrals

Soient X un espace métrique pointé et E un espace de Banach et $1 \leq p < \infty$. Les opérateur lipschitzien p-intégrale ont été introduite par Farmer et Johnson en 2009 (seulement l'ideé) en 2012 Chen et Zheng, publient leur article initulée "Lipschitz p-integral operators and Lipschitz p-nuclear operators".

Définition 2.14 *[2] Un opérateur $T \in Lip_0(X, E)$ est appelé un opérateur lipschitzien p-intégrale s'il existe un espace de mesure finie (Ω, Σ, μ), et deux opérateus lipschitziens*

$A \in Lip_0(L_P(\mu), E^{**})$, $B \in Lip_0(X, L_\infty(\mu))$ tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "B"] & E \arrow[r, "k_E"] & E^{**} \\ L_\infty(\mu) \arrow[rr, "i_p^\mu"] & & L_p(\mu). \arrow[u, "A"] \end{tikzcd}$$

Où $i_p^\mu : L_\infty(\mu) \to L_p(\mu)$ est l'opérateur d'inclusion.

La classe de tous les opérateurs lipschitziens p-intégrals de X dans E est notée par $\mathcal{I}_p^L(X, E)$. Muni de la norme

$$i_p^L(T) = \inf \{Lip(A)Lip(B)\}.$$

Proposition 2.15 *[1] $\left(\mathcal{I}_p^L(X, E), i_p^L(.)\right)$ est un idéal de Banach lipschitzien.*

Démonstration. Nous vérifions toutes les conditions dans la Définition (2.4).

— Nous commençons à vérifier que $Lip(T) \leq i_p^L(T)$ pour tout $T \in \mathcal{I}_p^L(X, E)$. Soit (A, i_p^μ, B) la factorisation pour $T \in \mathcal{I}_p^L(X, E)$. Clairement $k_E T \in Lip_0(X, E^{**})$ et $Lip(T) = Lip(k_E T) \leq Lip(A)Lip(B)$.D'ou $Lip(T) \leq i_p^L(T)$.

— Nous vérifions maintenant que $\mathcal{I}_p^L(X, E)$ est un sous espace vectoriel dans $Lip_0(X, E)$.

(1) Soit $T \in \mathcal{I}_p^L(X, E)$, et (A, i_p^μ, B) est la décomposition pour T. Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $k_E(\alpha T) = (\alpha A)B$. Puisque $\alpha A \in Lip_0(L_p(\mu), E^{**})$, alors αT est lipschitzien p-intégrale et

$$i_p^L(\alpha T) \leq Lip\ (\alpha A) Lip\ (B) = |\alpha|\, Lip(A)Lip(B).$$

Ce qui implique que $i_p^L(\alpha T) \leq |\alpha|\, i_p^L(T)$.

— Pour $\alpha \neq 0$, on a $i_p^L(T) = i_p^L(\alpha^{-1}\alpha T) \leq |\alpha^{-1}|\, i_p^L(\alpha T)$, par conséquent $|\alpha|\, i_p^L(T) \leq i_p^L(\alpha T)$. Et donc

$$i_p^L(\alpha T) = |\alpha|\, i_p^L(T).$$

(2) Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{I}_p^L(X, E)$ et $\epsilon > 0$. Considérant les factorisations $(A_i, i_p^{\mu_i}, B_i)$ pour T_i,tel que $Lip(B_i) = \frac{1}{2}$ et $Lip\ (A_i) < i_p^L(T_i) + \frac{\epsilon}{2}$, pour $i = 1, 2$. On peut supposer aussi que $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \phi$.

— Soit $\Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2, \sum := \{S \subset \Omega : S \cap \Omega_i \in \sum_i, i = 1, 2\}$ et on définit la mesure de probabilité μ sur Ω par

$$\mu(S) := \frac{Lip\ (A_1)\mu_1(S \cap \Omega_1) + Lip\ (A_2)\mu_2(S \cap \Omega_2)}{Lip\ (A_1) + Lip\ (A_2)}.$$

On définie $A : L_p\ (\mu) \to E^{**}$et $B : X \to L_\infty(\mu)$ par

$$\begin{aligned} A(f) &= A_1(f|_{\Omega_1}) + A_2(f|_{\Omega_2}). \\ B(x) &= B_1(x)\cdot\delta_{\Omega_1} + B_2(x)\cdot\delta_{\Omega_2}. \end{aligned}$$

Où δ_Ω, est un fonction caractéristique de Ω_i, $i = 1, 2$. On a $A(0) = 0$. D'après l'inégalité de Hölder ($\frac{1}{P} + \frac{1}{q} = 1$), pour tout $f, g \in L_p(\mu)$ on a

$$\begin{aligned} \|A(f) - A(g)\| &\leq \sum_{i=1}^{2} \|A_i(f|_{\Omega_i}) + A_i(g|_{\Omega_i})\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{2} Lip(A_i)^{\frac{1}{p}} Lip(A_i)^{\frac{1}{q}} \|(f-g)|_{\Omega_i}\|_{L_p(\mu_i)} \\ &\leq (\sum_{i=1}^{2} Lip\ (A_1))^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{2} Lip\ (A_i\ )^{\frac{1}{q}} \|(f\ - g)|_{\Omega_i}\|_{L_p(\mu_i)}) \\ &\leq (\sum_{i=1}^{2} Lip\ (A_i))^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{2} Lip\ (A_i\ ))^{\frac{1}{q}} (\sum_{i=1}^{2} \|(f\ - g)|_{\Omega_i}\|^p_{L_p(\mu_i)})^{\frac{1}{p}} \\ &= (Lip\ (A_1) + Lip(A_2))\, \|(f\ - g)\|_{L_p(\mu)}\,. \end{aligned}$$

Par conséquent $A \in Lip_0\ (L_p(\mu)\ , E^{\ **})$ et

$$Lip(A) \leq Lip(A_1) + Lip(A_2)$$

d'ailleurs $B \in Lip_0(X, L_\infty(\mu\ ))$ avec $Lip(B) \leq 1$ parce que $B\ (0) = 0$ et pour tout $x, y \in X$.

$$\begin{aligned} \|B\ (x) - B\ (y)\| &\leq \|B_1(x) - B_1(y)\|_{L_\infty(\mu_1)} + \|B_2(x) - B_2(y)\|_{L_\infty(\mu_2)} \\ &\leq (Lip\ (B_1) + Lip\ (B_2))d\ (x, y) \\ &= d\ (x, y). \end{aligned}$$

Pour chaque $x \in X$, on a

$$\begin{aligned} A\ i_p^\mu B(x) &= A\ i_p^\mu(B_1(x)\ \delta_{\Omega_1} + B_2(x)\ \delta_{\Omega_2})) \\ &= A_1 i_p^{\mu_1} B_1(x) + A_2 i_p^{\mu_1} B_2(x) \\ &= k_E T_1(x) + k_E T_2(x) \\ &= k_E(T_1 + T_2)(x). \end{aligned}$$

Et donc $Ai_p^\mu B = k_E\ (T_1 + T_2)$. Par conséquent $T_1 + T_2 \in \mathcal{I}_p^L(X, E)$ et

$$i_p^L(T_1 + T_2) \leq Lip(A)Lip(B) \leq Lip(A) \leq i_p^L(T_1) + i_p^L(T_2) + \epsilon\ .$$

Puisque ϵ est arbitraire, il s'ensuit que $i_p^L(T_1 + T_2) \leq\ i_p^L(T_1) +\ i_p^L(T_2)$.

(3) Pour prouver que T est complet. Prendre une suite (T_n) dans $\mathcal{I}_p^L(X, E)$ tel que $\sum_{n=1}^{\infty} i_p^L(T_n\ ) < \infty$.

— Comme $Lip(.) \leq i_p^L(.)$ et $(Lip_0(X,E), Lip(.))$ est un espace de Banach, il existe $T := \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n \in Lip_0(X,E)$.

Nous montrons que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n = T$ pour $i_p^L(.)$.

Soit $\epsilon > 0$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, nous trouvons un espace de probabilité $(\Omega_n, \sum_n, \mu_n)$, des opérateurs lipschitziens $B_n \in Lip_0(X, L_\infty(\mu_n)), A_n \in Lip_0(L_p(\mu_n), E^{**})$ avec $Lip(B_n) = \frac{1}{2^n}$ et $Lip(A_n) \leq i_p^L(T_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$ tel que $k_E T_n$ factorise par

$$k_E T_n \quad = \quad A_n i_p^{\mu_n} B_n \quad : \quad X \quad \xrightarrow{B_n} \quad L_\infty(\mu_n) \quad \xrightarrow{i_p^{\mu_n}} \quad L_p(\mu_n) \quad \xrightarrow{A_n} \quad E^{**} \ .$$

On peut supposer que les Ω_n sont disjoints et définissons $\Omega := \cup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ et

$$\sum := \left\{ S \subset \Omega : S \cap \Omega_n \in \sum_n, \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

Définir la mesure de probabilité μ sur $\sum$ par

$$\mu(S) := \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_n(S \cap \Omega_n) Lip(A_n)}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} Lip(A_n)}, S \in \sum .$$

Définir $A : L_p(\mu) \to E^{**}$ et $B : X \to L_\infty(\mu)$ par

$$\begin{aligned} A(f\ ) \quad &= \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n(f|_{\Omega_n}). \\ B(x) \quad &= \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x)\delta_{\Omega_n}. \end{aligned}$$

Clairement $A(0) = 0$ et $B(0) = 0$. Quand $p = \infty$ il est clair que $Lip(A) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} Lip(A_n) < \infty$.

Pour $1 \leq p < \infty$,en utilisant un argument similaire à celui que nous obtenons

$$\|A\ (f\ ) - A\ (g)\| \leq \left(\sum_{n\ =1}^{\infty} Lip\ (A_n) \right) \|f - g\|_{L_p(\mu)}$$

Et

$$\|B(x) - B(y)\|_{L_\infty(\mu)} \leq d(x,y).$$

Pour tout $f,\, g \in L_p(\mu)$ et pour tout $x, y \in X$.

Par conséquent, $A \in Lip_0(L_p(\mu), E^{**})$ avec $Lip(A) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} Lip(A_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} i_p^L(T_n) + \epsilon$,et $B \in Lip_0(X, L_\infty(\mu))$ avec $Lip(B) \leq 1$.

Pour tout $x \in X,$ on a

$$\begin{aligned} Ai_p^{\mu}B(x) &= A\left(\sum_{n=1}^{\infty} i_p^{\mu}(B_n(x)\delta_{\Omega_n})\right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} A_m\left((\sum_{n=1}^{\infty} i_p^{\mu}(B_n(x)\delta_{\Omega_n}))|_{\Omega_m}\right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} A_m i_p^{\mu_m} B_m(x) = \sum_{m=1}^{\infty} k_E T_m(x) = k_E T(x). \end{aligned}$$

Et donc $Ai_p^{\mu}B = k_E T$. Par conséquent,$T \in \mathcal{I}_p^L(X, E)$ et

$$i_p^{\mu}(T) \leq Lip(A)Lip(B) \leq Lip(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} i_p^L(T_n) + \epsilon.$$

Puisque ϵ était arbitraire, il s'ensuit que $i_p^L(T) \leq \sum_{n=1}^{\infty} i_p^L(T_n)$.

Nous montrons maintenant que $T = \sum_{k=1}^{\infty} T_k$ pour la norme i_p^L.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $t_n : L_p(\mu) \to E^{**}$ par $t_n(f) = \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k(f \mid_{\Omega_k})$. Par le même argument utilisé ci-dessus, nous obtenons $t_n \in Lip_0(L_p(\mu), E^{**})$ avec $Lip(t_n) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} Lip(A_k)$ et donc $\lim_{n\to\infty} Lip(t_n) = 0$.

Il est facile de voir que $T - \sum_{k=1}^{n} T_k = t_n i_p^{\mu} B$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} i_p^L(T - \sum_{k=1}^{n} T_k) = 0.$$

(4) Fixé un point $x_0 \in X$ et prenons $\Omega = \{x_0\}, \sum = \{\Omega, \emptyset\}$ et $\mu : \sum \to \mathbb{R}$ défini par $\mu(\Omega) = 1$, $\mu(\emptyset) = 0$.

Comme $(\sum, \Omega, \mu)$ est un espace de probabilité. Clairement, $L_{\infty}(\mu)$ et $L_p(\mu)$ contiennent les fonctions constantes.

Soient $g \in X^{\#}$ et $v \in E$ .Définir $B \in Lip_0(X, L_{\infty}(\mu))$ et $A \in Lip_0(L_p(\mu_i), E^{**})$ par$A(t1) = t\ k_E(v)$ pour tout $t \in \mathbb{K}$ et $B(x) = g(x)1$ pour tout $x \in X$,où 1 est une fonction constante égal 1 sur Ω.

— Il est clair que

$$(k_E(vg))(x) = g(x)k_E(v) = g(x)A(1) = A(g(x)1) = Ai_p^{\mu}(g(x)1) = Ai_p^{\mu}B((x), \text{ pour tout } x \in X.$$

Alors $vg \in \mathcal{I}_p^L(X, E)$ et $i_p^L(vg) \leq Lip(A)Lip(B) = \|v\|\ Lip(g)$.

(5) Soit $Id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, Id(\lambda) = \lambda$. on a $i_p^L(Id_{\mathbb{K}}) = i_p(Id_{\mathbb{K}}) = 1$.

(6) Soient $v \in Lip_0(Y, X), T \in \mathcal{I}_p^L(X, E)$ et $w \in \mathcal{L}(E, F)$.Puisque T est Lipschitz

$p-$integral, alors nous avons la factorisation suivante

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "v"] & X \arrow[r, "T"] \arrow[dd, "B"] & E \arrow[r, "w"] \arrow[dr, "k_E"] & F \arrow[r, "k_F"] & F^{**} \\
& & & E^{**} \arrow[ur, "w^{**}"] & \\
& L_\infty(\mu) \arrow[r, "i_p^\mu"] & L_p(\mu) \arrow[ur, "A"] & &
\end{tikzcd}$$

Puisque les opérateurs $B \circ v$ et $w^{**} \circ A$ sont Lipschitz puis $w \circ T \circ v$ est Lipschitz p-intégral et

$$i_p^L(\omega \circ T \circ v) = i_p^L(\omega^{**} \circ A \circ i_p^\mu \circ B \circ v) \leq \|\omega\| \, Lip(A) Lip(B) Lip(v).$$

$$i_p^L(\omega \circ T \circ v) \leq \|\omega\| \, i_p^L(T) Lip(v).$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Les opérateurs lipschitziens p -nucléairs

Soit $1 \leq p \leq \infty$. Un opérateur $T \in Lip_0(X, E)$ est lipschitzien $p-$nucléair (voir [2]) s'il existe deux opérateurs lipschitziens $A : \ell_p \to E$ et $B : X \to \ell_\infty$ et $\lambda = (\lambda_n)_n \in \ell_p$ telles que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "B"] & E \\
\ell_\infty \arrow[r, "M_\lambda"] & \ell_p \arrow[u, "A"]
\end{tikzcd}$$

Où $M_\lambda((x_n)_n) := (\lambda_n x_n)_n$, pour tout $(x_n)_n \in \ell_\infty$.

La classe de tous les opérateurs lipschitziens p-nucléairs de X dans E est noté par

$$\mathcal{N}_p^L(X, E).$$

Muni de la norme

$$\nu_p^L(T) = \inf \{Lip(B) \, \|M_\lambda\| \, Lip(A)\}.$$

Noter que $\|M_\lambda\| = \|\lambda\|_{\ell_p}$.

Proposition 2.16 *[1, Proposition 2.7]* $(\mathcal{N}_p^L(X, E), \nu_p^L(.))$ *est un idéal de Banach lipschitzien*

.

Les opérateurs Lipschitz compacts et faiblement compacts

Soient X un espace métrique pointé et E un espace de Banach, et soit l'application $T : X \to E$. L'ensemble$\left\{ \frac{T(x)-T(y)}{d(x,y)} : x, y \in X, x \neq y \right\}$ est appelé image lipschitzienne de T. Elle est clair que l'application $T : X \to E$ est lipschitzienne si son image lipschitzienne est borné dans E, en effet si $\left\{ \frac{T(x)-T(y)}{d(x,y)} : x, y \in X, x \neq y \right\}$ est borné alors il existe une constante $C \geq 0$ tel que

$\left\| \frac{T(x)-T(y)}{d(x,y)} \right\| \leq C$,pour tout $x, y \in X$.

Ce qui implique que $\|T(x) - T(y)\| \leq Cd\ (x, y)$. C'est-à-dire$T$ est lipschitzienne.

Définition 2.17 *Soient X un espace métrique pointé et E un espace de Banach . On dit que un opérateur $T \in Lip_0(X, E)$ est Lipschitz compact (resp .Lipschitz faiblement compact), si son image lipschitzienne est relativement compact (resp .relativement faiblement compact) dans E. On note par $Lip_{0K}(X, E)$ et $Lip_{0W}(X, E)$ les ensembles des opérateurs lipschitziens compact et faiblement compact entre X et E, respectivement.*

On a

$$Lip_{0k}(X, E) \subset Lip_{0W}(X, E) \subset Lip_0(X, E).$$

$Lip_{0K}(X, E)$ (resp .$Lip_{0W}(X, E)$) contient les opérateurs lipschitziens de rang finis.

Exemple 2.18 *Si T est un opérateur de rang fini, alors T_L, est un opérateur de rang fini et donc est compact (resp .Lipschitz faiblement compact).*

Proposition 2.19 *[1] Les ensembles des opérateurs lipschitziens compacts $Lip_{0K}(X, E)$ et faiblement compacts $Lip_{0W}(X, E)$. Sont des idéaux lipschitziens.*

Chapitre 3

Méthodes de construction des idéaux d'opérateurs lipschitziens

3.1 Méthode de Composition

Définition 3.1 *Soit $\mathcal{I}$ un idéal des opérateurs linéaires, un opérateur lipshitzien $T \in Lip_0(X, E)$ appartient à $\mathcal{I} \circ Lip_0$ notée $T \in \mathcal{I} \circ Lip_0(X, E)$, s'il existes un espace de Banach F, un opérateur lipschitzien $S \in Lip_0(X, F)$ et un opérateur linéaire $u \in \mathcal{I}(F, E)$, telle que $T = u \circ S$.*

Si $(\mathcal{I}, \|.\|_{\mathcal{I}})$ est un opérateur d'idéal normé nous écrivons

$$\|T\|_{\mathcal{I} \circ Lip_0} = \inf \|u\|_{\mathcal{I}} \, Lip(S).$$

Proposition 3.2 *Soit $\mathcal{I}$ un idéal d'opérateur linéaire, pour $T \in Lip_0(X, E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*
(1) $T \in \mathcal{I} \circ Lip_0(X, E)$.
(2) $T_L \in \mathcal{I}(Æ(X), E)$.
Si $(\mathcal{I}, \|.\|_{\mathcal{I}})$ est un idéal d'opérateur normé, on a $\|T\|_{\mathcal{I} \circ Lip_0} = \|T_L\|_{\mathcal{I}}$.

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) Supposons que $T \in \mathcal{I} \circ Lip_0(X, E)$. Alors il existes un espace Banach F, un opérateur lipschitzien $S \in Lip_0(X, F)$ et un opérateur linéaire $u \in \mathcal{I}(F, E)$ tel que $T = u \circ S$.

Comme $T_L = u \circ S_L$, la propriété d'idéal garantit que $T_L \in \mathcal{I}(Æ(X), E)$. Si $(\mathcal{I}, \|.\|_{\mathcal{I}})$ est normé alors,

$$\|T_L\|_{\mathcal{I}} = \|u \circ S_L\|_{\mathcal{I}} \leq \|u\|_{\mathcal{I}} \|S_L\| = \|u\|_{\mathcal{I}} \, Lip(S).$$

En prenant l' infimum sur toutes les factorisations de T, nous obtenons $\|T_L\|_{\mathcal{I}} \leq \|T\|_{\mathcal{I}\circ Lip_0}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Considérons la factorisation de T donnée par $T = T_L \circ \delta_X$. Comme δ_X est lipschitzien et $T_L \in \mathcal{I}(Æ(X), E)$, alors $T \in \mathcal{I}\circ Lip_0(X, E)$. Si $(\mathcal{I}, \|.\|_{\mathcal{I}})$ est normé nous avons,

$$\|T\|_{\mathcal{I}\circ Lip_0} = \|T_L \circ \delta_X\|_{\mathcal{I}\circ Lip_0} \leq \|T_L\|_{\mathcal{I}} \, Lip(\delta_X) = \|T_L\|_{\mathcal{I}}.$$

Ce qui termine la démonstration . ∎

Corollaire 3.3 *[1] Si $\mathcal{I}$ est un idéal d'opérateur (normé, fermé , Banach) alors, $\mathcal{I}\circ Lip_0(X, E)$ est un idéal d'opérateur lipschitzien (normé , fermé , Banach).*

Démonstration. On utilise la Proppósition (3.2)

$$\begin{aligned} T, S \in \mathcal{I}\circ Lip_0(X, E) \quad &\Longleftrightarrow \quad T_L, S_L \in \mathcal{I}(Æ(X), E) \\ &\Longrightarrow \quad (\alpha T + \beta S)_L = \alpha T_L + \beta S_L \in \mathcal{I}(Æ(X), E), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}. \\ &\Longrightarrow \quad \alpha T + \beta S \in \mathcal{I}\circ Lip_0(X, E), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

En tant que conséquence de la Proposition (3.2), $\mathcal{I}\circ Lip_0(X, E)$ contient les opérateurs lipschitziens de rang finie.

Pour prouver la propriété d' idéale, considérons $v \in Lip_0(Y, X), T \in \mathcal{I}\circ Lip_0(X, E)$ et $w \in \mathcal{L}(E, F)$. Il existes un espace de Banach G, un opérateur lipschitzien $S \in Lip_0(X, G)$ et un opérateur $u \in \mathcal{I}(G, E)$ tel que $T = u \circ S$. De la propriété d' idéale, $w \circ u \in \mathcal{I}(G, E)$ et $S \circ v \in Lip_0(Y, E)$ et nous concluons que $w \circ T \circ v \in \mathcal{I}\circ Lip_0(Y, F)$. Ce qui implique que $\mathcal{I}\circ Lip_0$ est un idéal d'opérateur lipschitzien.

Maintenant nous montrons que $\mathcal{I}\circ Lip_0$ est fermé pour $\mathcal{I}$ est soit fermé.

Considérer une suite $(T_i)_i \in \mathcal{I}\circ Lip_0(X, E)$ convergeante vers T dans $Lip_0(X, E)$. De

$$\lim_{i \to \infty} \|(T_i)_L - T_L\| = \lim_{i \to \infty} \|(T_i - T)_L\| = \lim_{i \to \infty} Lip(T_i - T) = 0.$$

Il s'ensuit que $T_L \in \mathcal{I}(Æ(X), E)$ et donc, $T \in \mathcal{I}\circ Lip_0(X, E)$.

Clairement, $(\mathcal{I}\circ Lip_0, \|.\|_{\mathcal{I}\circ Lip_0})$ est un idéal lipschitzien normé, chaque fois que $(\mathcal{I}, \|.\|_{\mathcal{I}})$ est normé

Si $v \in Lip_0(Y, X), T \in \mathcal{I}\circ Lip_0(X, E)$ et $w \in \mathcal{L}(E, F)$ alors, par [11, Lemma 3.1] la linéairisation de $w \circ T \circ v$ est $w \circ T_L \circ \hat{v}$ où $\hat{v} \in \mathcal{L}(Æ(Y), Æ(X))$ avec $\|\tilde{v}\| = Lip(v)$.

$$\begin{aligned} \|w \circ T \circ v\|_{\mathcal{I}\circ Lip_0} &= \|w \circ T_L \circ \hat{v}\|_{\mathcal{I}\circ Lip_0} \\ &\leq \|w\| \, \|T_L\|_{\mathcal{I}} \, \|\hat{v}\| \\ &= \|w\| \, \|T\|_{\mathcal{I}\circ Lip_0} \, Lip(v). \end{aligned}$$

Donc si ($\mathcal{I}, \|.\|_{\mathcal{I}}$) est un opérateur Banach idéal, alors ($\mathcal{I} \circ Lip_0, \|.\|_{\mathcal{I} \circ Lip_0}$) est un idéal de Banach lipschitzien. ■

Définition 3.4 *Soit $1 \leq p \leq \infty$. On dit que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est Cohen fortement $p-$sommant (voir [3]) s'il existe $C \geq 0$ tel que pour tout, $n \in \mathbb{N}, x_1, ..., x_n \in E$ $y_1^*, ..., y_n^* \in F^*$ on ait*

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{\varphi \in B_{F^{**}}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\varphi(y_i^*)|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} .$$

L' espace de tout les opérateurs linéaires fortement $p-$sommants est désigné par $\mathcal{D}_p(E, F)$ et l' infimum de tout C par $d_p(T)$.

On sait que $T \in \mathcal{D}_p(E, F)$ si, et seulement si, $T^* \in \Pi_{p'}(F^*, E^*)$ pour tout $1 < p \leq \infty$.

Exemple 1 : les opérateurs lipschitzien fortement $p-$sommants

En [17] les opérateurs lipschitzien fortement $p-$sommants sont introduits.

Définition 3.5 *Un opérateur $T \in Lip_0(X, E)$ est lipschitzien fortement $p-$sommant* ($1 < p \leq \infty$)*, s'il existe un espace de Banach F et un opérateur $u \in \mathcal{D}_p(F, E)$ tel que*

$$|\langle y^*, T(x) - T(x') \rangle| \leq d(x, x') \|u^*(y^*)\| \ . \tag{1.1}$$

pour tout $x, x' \in X; y^* \in E^*$. La classe de touts les opérateurs lipschitziens fortement $p-$sommants de X dans E est noté par

$$\mathcal{D}_{st,p}^L (X, E) .$$

Munit de la norme

$$d_{st,p}^L (T) = \{\inf d_p (S) . \textit{Tels que } C \textit{ vérifie l'inégalité } (1.1)\} .$$

($\mathcal{D}_p(E, F), d_{st,p}^L (T)$) *est un espace de Banach.*

De plus, il est prouvé que T est lipschitzien fortement $p-$sommant si, et seulement si, T_L est fortement $p-$sommant. Ensuite, par proposition(3.2), chaque opérateur lipschitzien fortement $p-$sommant T peut être considérée comme la composition d'un opérateur lipschitzien et un opérateur fortement p-sommant, c'est-à-dire

$$\mathcal{D}_{st,p}^L = \mathcal{D}_p \circ Lip_0.$$

Exemple 2 : les opérateurs lipschitzien compacts est faiblement compacts.

Proposition 3.6 *[9]Soient X un espace métrique pointé et E un espace de Banach . On a*

1) $Lip_{0\mathcal{K}}(X,E) = \mathcal{K} \circ Lip_0(X,E)$ isométriquement.

2) $Lip_{0\mathcal{W}}(X,E) = \mathcal{W} \circ Lip_0(X,E)$ isométriquement.

Corollaire 3.7 *Soitent X un espace métrique pointé et E un espace de Banach.*

Les espaces $Lip_{0K}(X,E)$ et $Lip_{0W}(X,E)$, sont des idéaux de Banach lipschitziens injectives, pour la norme $Lip(.)$.

3.2 Méthode de dualité

Définition 3.8 *Le dual lipschitzien d'un opérateur d'idéal $\mathcal{I}$ est défini par*

$$\mathcal{I}^{Lip_0-dual}(X,E) = \left\{T \in Lip_0(X,E) : T^t \in \mathcal{I}(E^*, X^\#)\right\}.$$

Théorème 3.9 *Soit $\mathcal{I}$ un idéal d'opérateur linéaire. Alors,*

$$\mathcal{I}^{Lip_0-dual} = \mathcal{I}^{dual} \circ Lip_0.$$

De plus, si $(\mathcal{I}, \|.\|_{\mathcal{I}})$ est normé, alors

$$\|.\|_{\mathcal{I}^{Lip_0-dual}} = \|.\|_{\mathcal{I}^{dual} \circ Lip_0}.$$

Démonstration. Supposons que $T \in \mathcal{I}^{Lip_0-dual}$, c'est-à-dire, $T^t \in \mathcal{I}(E^*, X^\#)$. Considérons l'opérateur linéaire, continu $R : X^\# \to Æ(X)^*$ et $\|R\| \leq 1$. Puisque $(T_L)^* = R \circ T^t \in \mathcal{I}(E^*, Æ(X)^*)$, alors $T_L \in \mathcal{I}^{dual}(Æ(X), E)$ (par proposition(3.2)), donc $T \in \mathcal{I}^{dual} \circ Lip_0$. En d'autre part

$$\begin{aligned} \|T\|_{\mathcal{I}^{dual} \circ Lip_0} &= \|T_L\|_{\mathcal{I}^{dual}} = \|(T_L)^*\|_{\mathcal{I}} = \left\|R \circ T^t\right\|_{\mathcal{I}} \\ &\leq \|R\| \left\|T^t\right\|_{\mathcal{I}} = \|T\|_{Lip_0-dual}. \end{aligned}$$

Supposons que $T \in \mathcal{I}^{dual} \circ Lip_0(X,E)$. Alors $T = u \circ S$ avec $u^* \in \mathcal{I}(E^*, F^*)$ et $S \in Lip_0(X,F)$ pour certains espace de Banach F. Nous avons $T^t = S^t \circ u^*$. Par la propriété d'idéale, nous concluons que $T^t \in \mathcal{I}(E^*, X^\#)$, c'est $T \in \mathcal{I}^{Lip_0-dual}$.

Pour terminer la preuve, nous montrons l'égalité des normes, soit $\epsilon > 0$, nous choisissons F, S et u tel que $\|u\|_{\mathcal{I}^{dual}} \cdot Lip(S) \leq (1+\epsilon) \|T\|_{\mathcal{I}^{dual} \circ Lip_0}$, on obtient

$$\begin{aligned} \|T\|_{\mathcal{I}^{Lip_0-dual}} &= \|T^t\|_{\mathcal{I}} = \|S^t \circ u^*\|_{\mathcal{I}} \leq \|u^*\|_{\mathcal{I}} \|S^t\| \\ &= \|u\|_{\mathcal{I}^{dual}} Lip(s) \\ &\leq (1+\epsilon) \|T\|_{\mathcal{I}^{dual} \circ Lip_0} . \end{aligned}$$

Soit $\epsilon \to 0$ nous obtenons $\|T\|_{Lip_0-dual} \leq \|T\|_{\mathcal{I}^{dual} \circ Lip_0}$. ■

Corollaire 3.10 *Un opérateur lipschitzien est compact (faiblement compact) si, et seulement si, sa transposée est compact (faiblement compact).*

Démonstration. Nous obtenons les résultats directement à partir de la Proposition (3.6) et le Théorème (3.9). En effet, ils donnent les égalités

$$Lip_{0\mathcal{K}} = \mathcal{K} \circ Lip_0 = \mathcal{K}^{dual} \circ Lip_0 = \mathcal{K}^{Lip_0-dual}$$

et

$$Lip_{0\mathcal{W}} = \mathcal{W} \circ Lip_0 = \mathcal{W}^{dual} \circ Lip_0 = \mathcal{W}^{Lip_0-dual}.$$

Ceci termine la preuve. ■

Conclusions

Suivant l'article de Achour, Rueda, Yahi et Sánchez-Pérez [1], *un idéal d'opérateur lipschitzien* $\mathcal{I}_{Lip}$ est un sous classe de Lip des applications lipschitziennes entre espace métrique et espace de Banach, tels que les composants $\mathcal{I}_{Lip}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y) \cap \mathcal{I}_{Lip}$ satisfait

(i) $\mathcal{I}_{Lip}(X,E)$ *est un sous espace vectoriel de* $Lip_0(X,E)$

(ii) $vg \in \mathcal{I}_{Lip}(X,E)$ pour $v \in E$ et $g \in X^{\#}$

(iii) **Propriété d'idéal :** si $S \in Lip_0(Y,X)$, $T \in \mathcal{I}_{Lip}(X,E)$ et $w \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $w \circ T \circ S \in \mathcal{I}_{Lip}(Y,F)$.

De plus, $(\mathcal{I}_{Lip}(X,E), \|.\|_{\mathcal{I}_{Lip}})$ est idéal Lipschitz de Banach, si $\|.\|_{\mathcal{I}_{Lip}} : \mathcal{I}_{Lip} \longrightarrow [0,+\infty[$ satisfait

$(i\prime)$ $(\mathcal{I}_{Lip}(X,E), \|.\|_{\mathcal{I}_{Lip}})$ est un espace normé (Banach) et $Lip(T) \leq \|T\|_{\mathcal{I}_{Lip}}$ pour tout $T \in \mathcal{I}_{Lip}(X,E)$

$(ii\prime)$ $\|id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ id_{\mathbb{K}}(\lambda) = \lambda\|_{\mathcal{I}_{Lip}} = 1$

$(iii\prime)$ $\|w \circ T \circ S\|_{\mathcal{I}_{Lip}} \leq Lip(S)\, \|T\|_{\mathcal{I}_{Lip}}\, \|w\|$.

Dans ce travail, nous avons effectué une étude détaillé relative à ce thème et nous avons présenté des exemples et des méthodes de construction sur ce sujet.

Bibliographie

[1] D. Achour, P. Rueda, E. A. Sánchez-Pérez and R. Yahi, Lipschitz operator ideals and the approximation property. J. Math. Anal. Appl. 436 (2016), 217–236

[2] D. Chen, B. Zheng. Lipschitz p-integral operators and Lipschitz p-nuclear operators, Nonlinear Anal. 75 (13) (2012), 5270–5282.

[3] J. S. Cohen, Absolutely p-summing, p-nuclear operators and their conjugates. Math. Ann. 201 (1973), 177-200

[4] J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge. *Absolutely summing operators"* Cambridge Studies in Advanced mathematics **43** Cambridge University Press, Cambridge, 199

[5] T. Fiegiel and N. Tomczack-Jaegermann. *Projections onto hilbertian subspaces of Banach spaces*, Israel J. Math. **33** (1979), 155-171.

[6] J. D. Farmer and W.B. Johnson. *Lipschitz p-summing operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (9) (2009), 2989-2995.

[7] Friedrich-Schiller .Theorie der Operatorenideale-Universitat, Jena, 1972.

[8] Gesellschaft DDR. Ideale von Operatoren in Banachraumen, Mitteilungen Math. , 1968, 1-13

[9] A. Jiménez-Vargas, J. M. Sepulcre, Moisés Villegas-Vallecillos, Lipschitz compact operators, J. Math. Anal. Appl. 415 (2) (2014) 889-901.

[10] Hutton,On the approximation numbers of an operator ideal and its adjoint ,Math.Ann.210 (1974) 277-280.

[11] N. J. Kalton. *Spaces of Lipschitz and Hölder functions ant their applications*, Collect. Math. **55**(2) (2004), 171-217.

[12] A. Pietsch, Ideale von Operatoren in Banachraumen, Mitteilungen Math. Gesellschaft DDR, 1968, 1-13

[13] A. Pietsch, Theorie der Operatorenideale, Friedrich-Schiller-Universitat, Jena, 1972.

[14] A. Pietsch, Operator Ideals, Deutsch. Verlag Wiss., Berlin, 1978 ; North-Holland, Amsterdam-London-New York-Tokyo, 1980.

[15] I. Sawashima. *Methods of Lipschitz duals*, in Lecture Notes Ec. Math. Sust, **419**, Springer Verlag (1975), 247-259

[16] N. Weaver. *Lipschitz Algebras*, World Scientific, Singapore 1999.

[17] R. Yahi, D. Achour and P. Rueda. Absolutely summing Lipschitz conjugates. Mediterranean J. Math. 10.1007/s00009-015-0623-2.

Résumé

On s’intéresse dans ce mémoire à l’étudedes idéaux d’opérateurslipschitziens . Au début nous avons donnél a définition d’un idéal lipschitzien avec quelque propriétés élémentaires.Ensuite nous avonsdonné quelques exemples d’idéaux lipchitziens (p-sommants□ p-intégral □ p-nucléaire et compact).Enfin nous avons donné les méthodes de construction des idéaux d’opérateurs lipchitziens.

Mots clés

Opérateurs Lipchitziens□ Espace lipchitzien□ Espace de ArensEells□ idéal lipchitzien□ Opérateur lipchitzien de rang fini □ OpérateursLipchitzsommants.

Abstract

In this memory□we study Lipschitz operators ideals. At first we gave some properties on the Lipschitz ideal.We have given some examples of the Lipschitz ideal .
Finally we have given the methods to produce Lipschitzoperator ideals.

Key words

Lipschitz mapping□ Lipschitz space□ Arens-Eellsspace□ Lipschitz ideal□ Lipschitzfinite dimensional rank□Lipschitzsumming operators.

الملخص بالعربية

في هذا العمل قمنا بدراسة المؤثرات الليبشيتزيةالمثالية.

البداية كانت بإعطاء, بعض الخصائص حول المؤثرات الليبشيتزية وبعض الامثلة عليها.

أخيرا قمنا بإعطاءبعض الطرق من اجل انشاء مؤثرات ليبشيتزية مثالية.

الكلمات المفتاحية

مؤثرات ليبشيتزية, فضاء ليبشيتزي, فضاء ارنس الس, مثالية غير خطية(ليبشيتزي), المؤثرات اللبشيتزية ذات الصور المنتهية,المؤثراتالليبشيتزيةالبيجمعية.