Remerciements

Je tien en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à mon encadreur **Bougherara Brahime** pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis égaement reconnaissant pour la confiance qu'il ma accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelque lignes.

Je remercie vivement messieurs **C.Mihoubi**, le chef de département de mathématiques.

Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de prés ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Pour finir mes derniers mots de remerciments vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier mes parents et mes soeurs et frères pour teur soutient tout au long de mes études.

Merci.

Table des matières

Introduction

Les équations aux dérivées partielles font partie important des modèles mathématiques pour interpréter les phénomènes physique et biologiques, par exemple, dans l'étude des fluides non Newtoniens et dans les phénomènes de couche limite pour des fluides visqueux... etc. Par conséquent, les EDP représentent un champ d'étude très vast, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.

Dans ce mémoire, on s'intéresses à étudier les équations elliptiques linéaires et semi-linéaires singuliers, posés sur un domaine borné et régulier Ω dans $\mathbb{R}^n$, avec les conditions de dirichlet homogènes. Ce mémoire est organisée de la façon suivante :

Nous commençons par rappeler quelques définitions et techniques utilisées dans ce travail (les espaces fonctinnels par exemple les espaces de Sobolev, les espaces de Lebegue et les espaces de Hilbert, et quelque théorèmes comme les théorèmes de Fubini et de Tonelli, principe du maximum...etc). Ensuite dans le deuxième chapitre, aprés avoir donné la définition de la solution faible, on a démontré l'existence et l'unicité de la solution faible. Nous avons discuté aussi la régularité des solutions faibles dans les espaces de Sobolev et dans les espaces de Holder. Enfin, dans le dernier chapitre, nous avons étudier un problème elliptique semi-linéaire singulier qui présente dans le second membere de l'équation un terme singulier de la forme $u^{-\delta}$, $\delta > 0$, qui tend donc vers l'infini au bord du domaine Ω. On a démontré l'existence et l'unicité de la solution classique en utilisant la méthode d'apprixomation et le principe du maximum et ensuite on a démontré la régularité Holderienn de la solution, et ce résultat à été fait par Gui-Lin [13].

Chapitre 1

Rappels et définitions

1.1 Rappels sur les espaces de Lebesgue, les espace de Hilbert, et les espace de soboleve

Nous commençons par rappeler la définition des espaces $\mathcal{C}^m$.

1.1.1 Les espaces $\mathcal{C}^m$

Définition 1.1 *Soient $m \in \mathbb{N}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. On définit les espaces suivants :*
(i) pour $m = 0$, $\mathcal{C}^0(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continues.
(ii) pour $m > 0$, $\mathcal{C}^m(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ayant toutes leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre m continues ; c'est-à-dire $D^\alpha f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ pour tout $\alpha \in A_k$, $0 \leq k \leq m$, où A_k est l'ensemble des multi-indices d'ordre k.
(iii) $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ est l'ensemble des fonctions $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continues et bornées. Nous munissons cet espace de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})} := \sup_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)| .$$

(iv) $\mathcal{C}^m\left(\overline{\Omega}\right)$ est l'ensemble des fonctions bornées dans $\overline{\Omega}$ dont les dérivées jusqu'à l'ordre m peuvent être étendues continuement sur $\overline{\Omega}$ et sont bornées. Nous munissons cet espace de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{C}^m\left(\overline{\Omega}\right)} := \sum_{|\alpha|=0}^{m} \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})} .$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, nous omettons la dépendance en $\overline{\Omega}$ et écrivons simplement

$$\|f\|_{\mathcal{C}^m} = \sum_{|\alpha|=0}^{m} \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}^0} .$$

(v) $\mathcal{C}^m_{loc}(\Omega)$ *est l'ensemble des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que $f_{|K} \in \mathcal{C}^m(K)$ pour tout sous-ensemble compact $K \subset \Omega$.*

Nous donnons maintenant la définition des espaces de Hölder.

1.1.2 Les espaces $\mathcal{C}^{m,\alpha}$

Définition 1.2 *Soient un sous-ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$, une fonction $f : D \to \mathbb{R}$, et un réel $0 \leq \alpha \leq 1$. On définit la quantité*

$$[f]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(D)} := \sup_{\substack{x,y \in D \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} \right\} .$$

Soient un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et un entier $m \geq 0$. Nous définissons les espaces de Hölder comme étant les espaces de fonctions suivants:
(i) $\mathcal{C}^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ est l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^0\left(\overline{\Omega}\right)$ telles que

$$[f]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)} < \infty,$$

(ii) $\mathcal{C}^{m,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ est l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^m\left(\overline{\Omega}\right)$ telles que

$$[D^\alpha f]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)} < \infty,$$

(iii) $\mathcal{C}^{m,\alpha}_{loc}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^{m,\alpha}(K)$ pour tout sous-ensemble compact $K \subset \Omega$. Les fonctions de classe $\mathcal{C}^{0,\alpha}$ sont dites continues au sens de Hölder (ou simplement Hölder-continues ou encore Hölderiennes).

Remarque 1.3
(i) L'espace $\mathcal{C}^{m,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, muni de la norme $\|f\|_{\mathcal{C}^{m,\alpha}}$, est un espace de Banach.
(ii) Pour $\alpha = 0$, on notera $\mathcal{C}^{m,0}\left(\overline{\Omega}\right) = \mathcal{C}^m\left(\overline{\Omega}\right)$, c'est à dire que les fonctions hölderiennes d'exposant 0 sont identifiées avec les fonctions continues usuelles. Dans ce cas, nous convenons que

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{0,0}} = \|f\|_{\mathcal{C}^0}$$

et, pour $m \geq 1$,

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{m,0}} = \|f\|_{\mathcal{C}^{m}}.$$

1.1.3 Quelques résultats d'intégration

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

Définition 1.4

(i) *On désigne par* $L^1(\Omega)$ *l'espace des fonctions intégrables sur* Ω *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *avec la norme associée*

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)|\, dx.$$

(ii) *On désigne par* $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, *l'espace des fonctions* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *tel que* $|f|^p \in L^1(\Omega)$ *et on pose*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)|^p\, dx.$$

(iii) *Pour* $p = \infty$, *On désigne par* $L^\infty(\Omega)$, *l'espace des fonctions bornées*
$f : \Omega \to \mathbb{R}$ *et on pose*

$$\|f\|_{L^\infty}(\Omega) = ess \sup_{x \in \Omega} \|f(x)\|.$$

Définition 1.5 *On note par* $\mathcal{D}(\Omega)$ *l'espace de toutes les fonctions* f *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *et à support compact.*

Théorème 1.6 ***(Théorème de densité)*** *L'espace* $D(\Omega)$ *est danse dans* $L^p(\Omega)$. *C'est à dire pour tout* $\varepsilon > 0$ *et pour tout* $f \in L^p(\Omega)$, *il existe une fonction* $\varphi \in D(\Omega)$ *telle que :* $\|f - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$.

Théorème 1.7 ***(Inégalité de Hölder)*** *Soient* $f \in L^p(\Omega)$ *et* $g \in L^{p'}(\Omega)$ *où* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Alors* $fg \in L^1(\Omega)$ *et on a l'inégalité suivant :*

$$|fg|_{L^1(\Omega)}\, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Théorème 1.8 ***(Fischer-Riesz)*** *Pour tout* $p \in [1, \infty[$, *l'espace* $L^p(\Omega)$ *est un espace de Banach avec la norme associée.*

Théorème 1.9 ***(Fubini-Tonelli).*** *On suppose que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Alors pour presque tout $x \in \Omega_1$,*

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \ \ et \int F(x,y)\,dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

De méme, Alors pour presque tout $y \in \Omega_2$,

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \ \ et \int F(x,y)\,dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

De plus on a

$$\int_{\Omega_1} dx \left(\int_{\Omega_2} F(x,y)\,dy \right) = \int_{\Omega_2} dy \left(\int_{\Omega_1} F(x,y)\,dx \right) = \int \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x,y)\,dxdy \leq \infty$$

1.1.4 Espace de Hilbert

Définition 1.10 . *On appelle espace de Hilbert tout espace vectoriel H (réel ou complexe) muni d'un produit scalaire $(x,y) \longmapsto \langle x,y \rangle$ tel que la norme $x \longmapsto \sqrt{\langle x,x \rangle}$ rende cet espace complet.*

Si H est un espace de Hilbert, on notera $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$ pour tout $x \in H$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit alors $|\langle x,y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$

Exemple 1.11 *L'espace $L^2(\Omega, \mu)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$\langle f,g \rangle = \int f(s)\overline{g(s)}d\mu(s).$$

Théorème 1.12 ***(représentation de Riesz-Fréchet)*** *Soit H un espace de Hilbert et H' est son dual. Alors pour tout élément $f \in H'$, il existe un unique élément $x \in H$ tels que*

$$\langle f,y \rangle = (x,y) \ \ pour\ tout\ y \in H$$

et $\|f\| = \|x\|$, où $(,)$ désigne le produit scalaire sur H. De plus l'application $f \mapsto x$ est linéaire et continue.

1.1.5 Quelques résultats sur les espaces de Sobolev

Définition 1.13 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $p \in [1, \infty[$ et $k \in \mathbb{N}$. On définit l'espace de Sobolev :*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \ pour\ tout\ \alpha \in \mathbb{N}^n \ tel\ que\ |\alpha| \leq k\}.$$

(les dérivées ici sont au sens de distributions).

Et on définit sur $W^{k,p}(\Omega)$ la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{k,p}}(\Omega) = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

Tous les espaces ainsi définis sont des espaces de Banach.

Définition 1.14 *Avec les mêmes notations on définit les espace $W_0^{k,p}(\Omega)$ comme l'adhérence de l'espace $D(\Omega)$ dans $W^{k,p}(\Omega)$.*

Théorème 1.15 *Supposons que Ω est de classe C^1 avec $\Gamma = \partial\Omega$ borné (où bien $\Omega = \mathbb{R}_+^n$),$1 \leq p \leq \infty$. On a :*

1. *Si $1 \leq p < n$, alors : $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$, où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.*
2. *Soit $p = n$, alors : $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, pour tout $q \in [p, +\infty[$.*
3. *Si p>n alors : $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$. Avec injections continues.*

Théorème 1.16 *On suppose que Ω est borné de classe C^1.*

1. *Si $1 \leq p < n$, alors : $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, où $q < \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.*
2. *Si $p = n$, alors : $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, pour tout $q \in [1, +\infty[$.*
3. *Si p>n alors : $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.*

   Avec injections compactes.

Remarque 1.17 *pour $p = 2$, on note $H^k(\Omega) := W^{k,p}(\Omega)$ et $H_0^k(\Omega) := W_0^{k,p}(\Omega)$. Ces deux espaces sont des espaces de Hilbert.*

Théorème 1.18 ***(Inégalité de poincaré):*** *Supposons que Ω est borné, $1 \leq p \leq \infty$.Alors, il existe une constante $c = c(\Omega, p)$ telle que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

(Formule de Green): *Supposons que Ω est borné, de classe C^1 par morceaux. Alors, si $u, v \in H^1(\Omega)$ on a :*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_\Gamma uv\nu_i d\sigma(x)$$

Définition 1.19 *On désigne par $W^{-1,p'}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ et par $H^{-1}(\Omega)$ l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$.*

Exemple 1.20 *Soit* $I =]-1, +1[$.

1. *la fonction* $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$ *appartient à* $W^{1,p}(\Omega)$ *pour tout* $1 \leq p \leq \infty$ *et que* $u' = H$ *où*

$$H(x) = \begin{cases} +1 & si \;\; 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & si \;\; \text{-}1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Plus généralement une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ *et continûment dérivable par morceau sur* Ω *appartient à* $W^{1,p}(\Omega)$ *pour tout* $1 \leq p \leq \infty$.

2. *la fonction* H *n'appartient pas à* $W^{1,p}$ *pour tout* $1 \leq p \leq \infty$.

Remarque 1.21 *L'espace* $W^{1,p}$ *est muni de la norme suivante*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|\nabla u\|_{L^p}$$

1.2 Minimisation d'une fonctionnelle

Définition 1.22 *Soit* X *un espace Banach. Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *est une fonctionnelle.*

1) *On dit que* f *est semi-continue infèrieurement en* $x_0 \in X$ *si*

$$\lim_{x \to x_0} \inf f(x) \geq f(x_0)$$

2) *On dit que* f *est faiblement semi-continue infèrieurement en* x *si pour tout suite* $(x_n) \subset X$, *telle que* $x_n \rightharpoonup x$, *on*

$$\lim_{n \to \infty} \inf f(x_n) \geq f(x_0)$$

Définition 1.23 *Soient* V *est un espace de Banach,* $J : V \to \mathbb{R}$. *On dit que* J *est coèrcive si*

$$J(u) \to \infty \text{ Lorsque } \|u\|_V \to \infty.$$

Théorème 1.24 *Supposons que* V *est un espace de Banach reflexive. Soit* $J : V \to \mathbb{R}$ *une application coércive et faiblement semi-continue infèrieurment. Alors* J *est minoré et atteint son minimum dans* V.

1.3 Principe du maximum

Théorème 1.25 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et connexe, et soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tel que: $-\Delta u \geq 0$ dans Ω et $u \geq 0$ sur $\partial\Omega$, alors $u \geq 0$ dans $\overline{\Omega}$ et on a*

$$\min_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \min_{x\in\partial\Omega} u(x).$$

Lemme 1.26 ***(de Hopf)*** *Soit Ω un domaine borné satisfaisant la condition de boule intèrieure en $x_0 \in \partial\Omega$, c'est-à-dire : il existe une boule ouvert $B \subset \Omega$ tel que $x_0 \in \partial B$. Soit u une fonction de classe $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ sur harmonique*
i.e. $-\Delta u \geq 0$ dans Ω. On suppose de plus $u(x) > u(x_0)$ pour tout $x \in \Omega$.
Alors

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0,$$

où $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = \nabla u(x_0).\nu(x_0)$ et $\nu(x_0)$ est le vecteur normal extèrieur unitaire à B en x_0.

Corollaire 1.27 *Soit u une fonction de classe $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ sur harmonique dans Ω, $u \geq 0$ sur $\partial\Omega$. Alors*

$$u(x) \geq cd(x), \forall x \in \Omega$$

où c est une constant indépendante de x.

Chapitre 2

Existence et régularité d'une solution faible

Ce chapitre est consacré à l'étude des équations aux dérivées partielles linéaire uniformément elliptiques de seconde ordre. On s'intéresse à la résolutions de ce type d'équations avec les conditions aux limites homogènes de Dirichlet en utilisant la méthode d'énergie via les espaces de Sobolev. Les équations elliptiques du $2^{ème}$ ordre généralisent les équations de Laplace. L'inconnu u représente la densité de certains quantités, à savoir, concentration chemique à l'équilibre dans un région Ω.

2.1 Quelques définitions

2.1.1 Équations elliptiques

Nous intéressons à un problème d'EDP elliptique linéaire suivant

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est l'inconnu, $u := u(x)$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée. L est l'opérateur différentiel d'ordre 2 défini sous forme divergentielle

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u \tag{2.2}$$

où a_{ij}, b_i et c sont des fonctions définies sur Ω et les a_{ij} satisfont par ailleurs la condition d'ellipicité

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) y_i y_j \geq \alpha \left| y \right|^2 \tag{2.3}$$

pour un certain $\alpha > 0$ et pour tout $y = (y_1, y_2, \cdots, y_N) \in \mathbb{R}^n$.

2.1.2 Solution faible

Tout d'abord, on suppose que

$$a_{ij}, \; b_i, \; c \in L^{\infty} \quad (i, j = 1, ..., N) \tag{2.4}$$

et

$$f \in L^2(\Omega)$$

Supposons pour le moment que u est une solution assez régulière du problème (2.1). En multipliant l'EDP $Lu = f$ par une fonction test $v \in D(\Omega)$ et en intégrant par parties, on obtient :

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i} v + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} v + \int_{\Omega} c(x) uv = \int_{\Omega} f v dx$$

Le terme au bord s'annule car $v = 0$ sur $\partial\Omega$. Grâce à la densité de $D(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ cette identité reste valable pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$. On remarque que cette identité a un sens pour $u \in H_0^1(\Omega)$.(On a choisi l'espace $H_0^1(\Omega)$ pour donner un sens au condition aux limites ("$u = 0$ sur $\partial\Omega$ ").

Définition 2.1 *On dit que $u \in H^1(\Omega)$ est un solution faible de $Lu = f$ si*

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) u_{x_i} v_{x_j} + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} v + \int_{\Omega} c(x) uv = \int_{\Omega} f v$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$. De plus, si $u \in H_0^1(\Omega)$ alors on dit que u est une solution faible de

$$Lu = f \;\; , \quad u = 0 \; sur \; \partial\Omega$$

2.2 L'existence et l'unicité de la solution faible

Dans ce paragraphe, on montre l'existence et l'unicité de la solution faible du problème suivant:

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

2.2.1 Théorème de Lax-Milgram

Théorème 2.2 *Soit H un espace de Hilbert. Supposons que*

$$B : H \times H \to \mathbb{R}$$

est une application bilinéaire (forme bilinéaire), vérifiant les deux conditions suivantes
(i) B est continue, c'est à dire:

$$|B(u,v)| \leq c \, \|u\|_H \, \|v\|_H$$

(ii) B est coercive (ou elliptique) sur H, c'est à dire

$$\exists \beta > 0 : B(u,u) \geq \beta \|u\|^2 \ \forall u \in H.$$

Soit $f : H \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors il existe un élément unique $u \in H$ tel que

$$B(u,v) = \langle f, v \rangle, \ \forall v \in H$$

Théorème 2.3 *Soit L l'opérateure définit en (2.2), qui vérifie la condition de la coerciveité (2.3) et (2.4) et $f \in L^2(\Omega)$ alors le problème*

$$\begin{cases} Lu + u = f & \textit{dans } \Omega \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.5}$$

admet une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$.

Démonstration. La formulation vartionnelle associée au (2.5) est

$$B(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_i} dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} v dx + \int_\Omega cuv dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$$

Donc on va montre que $B(u,v)$ est continue: On a

$$\begin{aligned}
|B(u,v)| &\leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}u_{x_i}v_{x_i}|\,dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^n |b_i u_{x_i} v|\,dx + \int_\Omega |cuv|\,dx \\
&\leq \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u|\,|\nabla v|\,dx + \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u|\,|v|\,dx + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |u|\,|v|\,dx
\end{aligned}$$

Pour majorer le premièr terme à gauche, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz:

$$\int_\Omega |\nabla u|\,|\nabla v|\,dx \leq C_1 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Pour le deuxième et troisième terme, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz et poincaré:

$$|\nabla u|\,|v| \leq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$\int_\Omega |u|\,|v| \leq C_1 \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

D'où

$$\begin{aligned}
|B(u,v)| &\leq \left(C_1 \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} + C_2 \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} + C_3 \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&= C \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

Pour montrer que $B(u,v)$ est coercive on utilise la condition d'ellipticité (2.3). On a

$$\begin{aligned}
\alpha \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx &\leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\, u_{x_i} u_{x_i} dx \\
&= B(u,u) - \int_\Omega \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} u dx - \int_\Omega cu^2 dx \\
&\leq B(u,u) + \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u|\,|u|\,dx + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |u|^2\,dx
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy (avec ε), on a

$$\int_\Omega |\nabla u|\,|u|\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_\Omega u^2 dx$$

Où $\varepsilon > 0$ est choisi assez petit de sorte que

$$\frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{\alpha}{2}$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\,dx &\leq B(u,u)+\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\|b_i\|_{L^{\infty}(\Omega)}+\|c\|_{L^{\infty}(\Omega)}\right)\int_{\Omega}|u|^{2}\,dx \\ &= B(u,u)+C\int_{\Omega}|u|^{2}\,dx \end{aligned}$$

Alors d'aprés le théorème de lax-Miligrame il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ ■

2.3 Régularité elliptique

Nous allons discuter maintenant la régularité de cette solution faible. Tout d'abord on voit que sous des hypothèses raisonnables, la solution appartient à un espace de soboleve d'ordre plus élevé.

2.3.1 Régularité locale

Théorème 2.4 *Soit L un opérateur elliptique de la forme (2.2), où on suppose que:*

$$a_{ij} \in C^1(\Omega),\ b_i \in L^{\infty}(\Omega),\ c \in L^{\infty}(\Omega).$$

Supposon que $u \in H^1(\Omega)$ est une solution faible de

$$Lu = f$$

où $f \in L^2(\Omega)$, alors

$$u \in H^2_{loc}(\Omega)$$

et pour tout $\Omega_1 \subset\subset \Omega$

$$\|u\|_{H^2(\Omega_1)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right) \tag{2.6}$$

où C dépend seulement de Ω, Ω_1 et des coefficients de L.

Pour montrer que $u \in H^2_{loc}(\Omega)$, on a besoin de prouver que $\nabla u \in H^1_{loc}(\Omega)$ ou de manière équivalente $u_{x_i} \in H^1(\Omega_1)$ pour tout $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ et pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Nous allons montrer cela en utilisant le lemme qui suit basé sur la méthode des translation.

D'abord on donne cette définition:

Définition 2.5 *Pour une fonction* $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega_1 \subset \subset \Omega$, $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ *et* $0 < |h| < dist(\Omega, \partial\Omega)$, *on définit lopérateur de translation suivant:*

$$D_i^h u(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}, \quad x \in \Omega_1. \tag{2.7}$$

On définit aussi $D^h(u)$ *par,*

$$D^h u(x) = (D_1^h u(x), \cdots, D_n^h u(x)).$$

Avec cette définition, nous pouvons donner le lemme attendu.

Lemme 2.6

(i) *Supposons que* $u \in H^1(\Omega)$. *Alors pour tout* $\Omega_1 \subset \subset \Omega$ *et pour tout* $0 < h$ *vérifiant* $0 < |h| < \frac{1}{2} dist(\Omega_1, \partial\Omega)$, *on a* $D^h u \in L^2(\Omega_1)$ *et*

$$\left\| D^h u \right\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \left\| u \right\|_{H^1(\Omega)}$$

(ii) *Supposons que* $u \in L^2(\Omega)$ *et qu'il existe une constante* $\mathcal{C} > 0$ *telle que*

$$\left\| D^h u \right\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C$$

pour tout $0 < |h| < \frac{1}{2} dist(\Omega_1, \partial\Omega)$, *alors*

$$u \in H^1(\Omega_1)$$

et

$$\left\| \nabla u \right\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C.$$

Remarque 2.7 *Le sous -espace* $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ *est dense dans* $W^{k,p}(\Omega)$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *et* $p \in [1, \infty)$.

Démonstration. (i) Supposons d'abord que $u \in C^1 \cap H^1(\Omega)$, alors

$$\begin{aligned} D^h u(x) &= \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h \frac{d}{dr} u(x_1, x_{i-1}, x_i + r, x_{i+1}, ..., x_n)\, dr. \end{aligned}$$

D'où par l'inégalité de Holder, on a

$$\left| D^h u(x) \right|^p \leq \frac{1}{h} \int_0^h \left| D_i u(x_1, x_{i-1}, x_i + r, x_{i+1}, ..., x_n) \right|^p dr.$$

en intégrant sur Ω_1, on obtient

$$\int \left|D^h u\right|^p dx \leq \int_0^h \int_{\Omega_1} \left|D_i u\left(x_1,...,x_{i-1},x_i+r,x_{i+1},...,x_n\right)\right|^p dxdr$$

En utilisant le changement de variable suivant $y = \left(x_1,...,x_{i-1},x_i+r,x_{i+1},...,x_n\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}\int \left|D^h u\right|^p dx &\leq \int_0^h \int_{T_h(\Omega_1)} \left|D_i u\right|^p dxdr \\ &\leq \int_0^h \int_\Omega \left|D_i u\right|^p dxdr \int_\Omega \left|D_i u\right|^p dx.\end{aligned}$$

où $T_h(\Omega_1) = \{(x_1,...,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},...,x_n),\ (x_1,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_n) \in \Omega_1\}$ qui inclus dans Ω grâce à la condition $0 < h < dist(\Omega_1, \partial\Omega)$ Ensuite par la densité de $C^1(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ on trouve le résultat pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

(ii) Comme la suite $D^h u$ est bornée dans $L^2(\Omega_1)$, alors il existe une suite $\{h_n\}$ qui tend vers 0 telle que $D^{h_n}u$ converge faiblement vers une fonction $v \in L^2(\Omega_1)$. C'est -à-dire pour tout $\varphi \in C_0^1(\Omega_1)$

$$\int_\Omega \varphi D^{h_n} u dx \to \int \varphi v dx.$$

et on a

$$\|v\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \liminf \left\|D^{h_n} u\right\|_{L^2(\Omega_1)} \leq k$$

Maintenant pour $h_m \leq dist\left(sopp\varphi, \partial\Omega\right)$, nous avons

$$\int_\Omega \varphi D^{h_m} u dx = -\int_\Omega u D^{-h_m} \varphi dx \to -\int u D_i \varphi dx.$$

par conséquent

$$\int_\Omega \varphi v dx = -\int u D_i \varphi dx.$$

D'où $v = D_i u$. ■

Démonstration. **(du théoreme)**. Soit $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ telle que $\Phi = 1$ sur Ω_1 et $0 \leq \Phi \leq 1$. On définit alors

$$w = -D_k^{-h}(\Phi^2 D_k^h u)$$

où D_k^h est l'opérateur (de translation) définit en (2.7). On note que pour $|h|$ petit, w est bien défini et $w \in H_0^1(\Omega)$.

Puisque u est une solution faible de $Lu = f$, on a

$$\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} dx = \int_\Omega f v dx - \sum_{i=1}^n \int_\Omega b_i(x) u_{x_i} v dx - \int_\Omega c(x) u v dx \tag{2.8}$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$. On va prendre $v = w$ dans (2.8) et simplifier les termes pour obtenir l'estimation requise sur la différence relative. On ne présente ici que les éléments principaux de la preuve, pour plus de détails on renvoit à [3] . En faisant donc $v = w$ dans (2.8), on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x) u_{x_i} w_{x_j} dx &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}^h D_k^h u_{x_i} D_k^h u_{x_j} \Phi^2 dx \\
&+ \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} (a_{ij}^h D_k^h u_{x_i} D_k^h u 2\Phi\Phi_{x_j} + (D_k^h a_{ij}) u_{x_i} D_k^h u_{x_j} \Phi^2 \\
&+ (D_k^h a_{ij}) u_{x_i} D_k^h u_{x_i} 2\Phi\Phi_{x_j})) \\
&\geq \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} \Phi^2 \left| D_k^h \nabla u \right|^2 - C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 .
\end{aligned}$$

Maintenant le membre de droite de (2.8) avec $v = w$ peut étre estimé de la maniére suivante

$$\left| \int_{\Omega} f v - \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} b_i(x) u_{x_i} v - \int_{\Omega} c(x) u v \right| \leq \frac{\alpha}{4} \int_{\Omega} \Phi^2 \left| D_k^h \nabla u \right|^2 dx + C \int_{\Omega} \left(f^2 + u^2 + |\nabla u|^2 \right) dx.$$

En insérant ces estimations dans (2.8), cella donne

$$\int_{\Omega_1} \left| D_k^h \nabla u \right|^2 dx \leq C \int_{\Omega} (f^2 + u^2 + |\nabla u|^2) dx.$$

Dons $u \in H_{loc}^2(\Omega)$.

Maintenant pour prouver l'estimation (2.6) , on procéde comme suit. On choisit $\Omega_1 \subset \subset \Omega_2 \subset \subset \Omega$, alors d'aprés la discussion précédente avec $\Omega = \Omega_2$, on obtient

$$\|u\|_{H^2(\Omega_1)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega_2)} + \|u\|_{H^1(\Omega_2)} \right)$$

où C dépend seulement de Ω_1, Ω_2 et des coefficients de L. On choisit une fonction $\Phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$ telle que $\Phi = 1$ sur Ω_2 et $0 \leq \Phi \leq 1$.

Maintenant en prenant $v = \Phi^2 u$ dans (2.8), on obtient

$$\int_{\Omega} \Phi^2 |\nabla u|^2 \leq C \int_{\Omega} (f^2 + u^2).$$

■

Aprés cela, on va voir que si f est plus régulière alors la régularité de u s'améliore.

Théorème 2.8 *Soit L un opérateur elliptique comme donné en* (2.2) *, pour lequel on suppose*

$$a_{ij}, b_i, c \in C^{m+1}(\Omega) .$$

Supposons que $u \in H^1(\Omega)$ est une solution faible de

$$Lu = f$$

où $f \in H^m(\Omega)$, alors

$$u \in H^{m+2}_{loc}(\Omega)$$

et pour tout $\Omega_1 \subset\subset \Omega$

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega_1)} \leq C\left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right). \tag{2.9}$$

Démonstration. Nous allons montrer le théorème par récurrence.

Pour commencer, nous savons d'aprés le théorème précédent que le résultat est vrai pour $m = 0$.

Maintenant, supposons que le résultat est vrai pour un m quelconque. Nous voulons démontrer que cela est vrai pour $m+1$. Supposons donc que

$$a_{ij}, b_i, c \in C^{m+2}(\Omega).$$

et

$$f \in H^{m+1}(\Omega)$$

et u est une solution faible de $Lu = f$. De l'hypothèse de récurrence, nous avons que $u \in H^{m+2}_{loc}(\Omega)$ et satisfait l'estimation (2.9). Soit $w \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et β un multindice d'ordre $m+1$. En prenant $v = (-1)^{m+1}\nabla^\beta w$ dans (2.8), on est conduit à

$$\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x)\widetilde{u}_{x_i} w_{x_j} = \int_\Omega \widetilde{f} w - \sum_{i=1}^n \int_\Omega b_i(x)\widetilde{u}_{x_i} w - \int_\Omega c(x)\widetilde{u} w$$

où $\widetilde{u} = \nabla^\beta u \in H^1(\Omega)$ et

$$\widetilde{f} = \nabla^\beta f - \sum_{\gamma\langle\beta} C_{\beta,\gamma}\left(-\sum_{i,j=1}^n (\nabla^{\beta-\gamma} a_{ij} \nabla^\beta u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n \nabla^{\beta-\gamma} b_i \nabla^\gamma u_{x_i} + \nabla^{\beta-\gamma} c \nabla^\gamma u\right)$$

où $C_{\beta,\gamma}$ sont des constantes qui ne dépendent que de β et γ. Soient $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega$, alors par hypothèse de récurrence,

$$\widetilde{f} \in L^2(\Omega_2)$$

et

$$\left\|\widetilde{f}\right\|_{L^2(\Omega_2)} \leq C\left(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega_2)} + \|u\|_{H^{m+2}(\Omega_2)}\right)$$

$$\leq C\left(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

On a donc que $\widetilde{u}$ est une solution faible de $L\widetilde{u} = \widetilde{f}$ dans Ω_2 et $\widetilde{f} \in L^2(\Omega_2)$.

Donc, $\widetilde{u} \in H^2_{loc}(\Omega_2)$ et

$$\|\widetilde{u}\|_{H^2(\Omega_1)} \leq C\left(\left\|\widetilde{f}\right\|_{L^2(\Omega_2)} + \|\widetilde{u}\|_{L^2(\Omega_2)}\right)$$

$$\leq C\left(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

Puisque β est un multiindice quelconque d'ordre $m+1$, on obtient

$$\|u\|_{H^{m+3}(\Omega_1)} \leq C\left(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

Ceci termine la récurence. ■

Comme corollaire, nous avons

Corollaire 2.9 *Soit L une opérateur du type (2.2), où les coefficients*

$$a_{ij}, b_i, c \in \mathcal{C}^\infty(\Omega).$$

Supposons que $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$ est une solution faible de

$$Lu = f$$

alors

$$u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega).$$

2.3.2 Régularité globale.

Dans les théorèmes précédents, nous avons discuté la régularité des solutions faible à l'intérieur du domaine. Maintenant, nous allons étudier la régularité prés du bord. En général, la régularité espérée est vraie si le bord est suffisamment régulier. On poura consulter [5] pour une discussion détaillée sur l'ettet de la régularité du bord. On rappelle la définition suivante:

Définition 2.10 *Pour un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, on dit que $\partial\Omega$ est $\mathcal{C}^k, k \in \{0, 1, 2...\}$ si pour tout point $x_0 \in \partial\Omega$ il existe $r > 0$ et une fonction $\Psi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ telle que modulo un chongement de coordonnées, on a*

$$\Omega \cap B(x_0, r) = \{x \in B(x_0, r) : x_n > \Psi(x_1, \cdots, x_{n-1})\}.$$

On dit que $\partial\Omega$ est $\mathcal{C}^\infty$ si il est $\mathcal{C}^k$ pour tout k.

Théorème 2.11 *Supposons que $\partial\Omega$ est $\mathcal{C}^2$ et soit L un opérateur elliptique donné comme en* (2.2) *, pour lequel on suppose que*

$$a_{ij} \in \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}\right), B_i \in L^\infty(\Omega), c \in L^\infty(\Omega).$$

On suppose par ailleurs qu'il existe une solution faible u dans $H_0^1(\Omega)$ de

$$Lu = f, \quad u = 0 \quad on\ \partial\Omega$$

où $f \in L^2(\Omega)$, alors

$$u \in H^2(\Omega)$$

et satisfait

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}) \tag{2.10}$$

où C dépend seulement de Ω et des coefficients de L.

Remarque 2.12 *Si $u \in H_0^1(\Omega)$ est solution faible unique (par exemble si le problème satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité donné en cours) de*

$$Lu = f, \quad u = 0 \quad on\ \partial\Omega$$

alors l'estimation (2.10) *se simplifie:*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

Démonstration. Dans les théorèmes précédents, nous avons développé des estimations intérieures pour la solution u. Donc il reste à établir des estimations de u prés du bord. Tout d'abord, nous considérons le cas du "bord plat".

Supposons

$$\Omega = B\,(0,1) \cap \{x : x_n > 0\}$$

et

$$\Omega_1 = B\left(0, \frac{1}{2}\right) \cap \{x : x_n > 0\}$$

Nous allons montrer que $u \in H^2(\Omega_1)$.

Soit $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(B\,(0,1))$ tel que $\Phi = 1$ sur $B\left(0, \frac{1}{2}\right)$ et $0 \leq \Phi \leq 1$. On définit alors pour $1 \leq k \leq n-1$,

$$w = -D_k^{-h}(\Phi^2 D_k^h u)$$

où D_k^h est l'opérateur défini en (2.7). On note que puisque $1 \leq k \leq n-1$, pour $|h|$ assez petit, w est bien défini et $w \in H_0^1(\Omega)$. Puisque u est solution faible de $Lu = f$; (2.8) est vraie pour $v = w$. En simplifiant comme dans la preuve du théorème 2.4, on obtient

$$\int_{\Omega_1} \left|D_k^h \nabla u\right|^2 \leq C \int_{\Omega} (f^2 + u^2 + |\nabla u|^2).$$

Ceci montre que

$$u_{x_k} \in H^1(\Omega_1)$$

pour tout $1 \leq k \leq n-1$; Donc $u \in H^2(\Omega_1)$ pourvu que l'on ait $u_{x_n x_n} \in L^2(\Omega_1)$.

On rappelle que $u_{x_n x_n}$ existe d'aprés les résultats de régularité locale. De plus, des hypothèses d'ellipticité, on peut aisément déduire que $a_{nn} > \alpha > 0$. On peut alors écrire

$$u_{x_n x_n} = \frac{-1}{a_{nn}} \left\{ \sum_{i+j<2n} a_{i,j} u_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{n} \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} (a_{ij})_{x_j} \right) u_{x_i} - cu + f \right\}$$

et le membre de droite est dans $L^2(\Omega_1)$. Donc $u \in H^2(\Omega_1)$ et nous avons l'estimation

$$\|u\|_{H^2(\Omega_1)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Maintenant nous allons considérer notre domaine Ω (qui est $\mathcal{C}^2$). Soit donc $x_0 \in \partial\Omega$.

Par définition, et modulo un changement de coordonnées, on a

$$\Omega \cap B(x_0, r) = \{x \in B(x_0, r) : x_n \; > \; \Psi(x_1, \cdots, x_{n-1})\}.$$

Mantenant on peut effectuer un changement de variable

$$\Psi : \widetilde{\Omega} := B(0, s) \cap \{y \in \mathbb{R}^n : y_n > 0\} \to \Omega \cap B(x_0, r).$$

on définit

$$\widetilde{u}(y) = u(\Psi(y)), \; y \in \widetilde{\Omega} \; ,$$

on peut alors vérifier que $\widetilde{u} \in H^1(\widetilde{\Omega})$, $\widetilde{u} = 0$ sur $\widetilde{\Omega} \cap \{y \in \mathbb{R}^n : y_n = 0\}$ et est solution faible de

$$\widetilde{L}\widetilde{u} = \widetilde{f} \;\text{ dans } \widetilde{\Omega}$$

où

$$\widetilde{f}\,(y) = f(\Psi(y))$$

et

$$\widetilde{L}\widetilde{u} = \sum_{i,j=1}^{n} (\widetilde{a}_{ij} \widetilde{u}_{y_i})_{y_j} + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{b}_i u_{y_i} + \widetilde{c}\widetilde{u}$$

pour des $\widetilde{a}_{ij}$, $\widetilde{b}_i$ et $\widetilde{c}$ qui vérifient $\widetilde{a}_{i,j} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, $\widetilde{b}_i$, $\widetilde{c} \in L^\infty(\widetilde{\Omega})$. On peut vérifier que $\widetilde{L}$ est elliptique.

Donc, d'aprés l'estimation précédente, nous obtenons $\widetilde{u} \in H^2\left(\widetilde{\Omega} \cap B\left(0, \frac{s}{2}\right)\right)$. En revenant aux coordonnées de départ, on obtient

$$\|u\|_{H^2(\Omega_1)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega \cap B(x_0,r))} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

où $\Omega_1 = \Psi\left(\widetilde{\Omega} \cap B\left(0, \frac{s}{2}\right)\right)$. Puisque $\partial\Omega$ est compact, un nombre fini d'Ω_1 recouvre $\partial\Omega$.

Donc, l'estimation au bord ajoutée aux estimations locale preuvr (2.10). ■

Remarque 2.13 *Des résultats analogues dans $W^{2,p}$ ont été donnés pour les solutions faibles connus sous le nom d'estimations L^p. Pour des résultats et preuves détaillés, on renvoit aux références* [5, 6] .

2.4 Régularité Holdérienne

Soit Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$. On considére le problème

$$-\Delta u = f \quad \text{dans} \quad \Omega \tag{2.11}$$

Si $u \in H^{m+2}(\Omega)$, alors $\Delta u \in H^m(\Omega)$. Comme propriété inverse, nous avons vu dans le paragraphe précédente que si $u \in H^1(\Omega)$ est une solution faible de (2.11) et $f \in H^m(\Omega)$ alors $u \in H^{m+2}_{loc}(\Omega)$, pour $m = 0, 1, 2, \cdots$ Nous allons regarder maintenant l'analogue classique de ce résultat.

Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, alors $\Delta u \in \mathcal{C}^0(\Omega)$. Inversement, si $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ et u et une solition faible de (2.11) alors a t-on $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$?

En dimension un (i.e. $n = 1$) on peut facilement voir que cela est vrai. Mais en dimension supérieure (i.e. $n \geq 2$), l'exemple suivant montre qu'une solution faible peut ne etre dans $\mathcal{C}^2(\Omega)$.

Exemple 2.14 *Soit $\Omega = B\left(0, \frac{1}{2}\right) \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2$, on définit*

$$f = \begin{cases} \frac{x_1^2 - x_2^2}{2|x|^2}\left\{\frac{4}{(-\log|x|)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2(-\log|x|)^{\frac{3}{2}}}\right\} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

et

$$u = \begin{cases} (x_1^2 - x_2^2)(-\log|x|)^{\frac{1}{2}} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Alors $u \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}) \setminus \{0\})$ *et est une solution faible de* (2.11). *Notons que* $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ *mais la solution* u *n'est pas dans* $\mathcal{C}^2(\Omega)$.

Analysons maintenant cette question d'un peu plus prés. Supposons que u et $\widetilde{u}$ sont solutions faibles de (2.11) pour un mème f, alors $v = u - \widetilde{u}$ est une solution faible $-\Delta v = 0$ dans Ω. Nous savons d'aprés le corollaire 2.9, on a $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, i.e. si u et $\widetilde{u}$ sont solution faible de (2.11) pour f donné, alors $u - \widetilde{u}$ est $\mathcal{C}^\infty$. Toutes les solution ont donc mème régularité et il sufit donc d'etudier cette question de régularité pour une solution donné. Notre premier pas va etre alors de construire une solution faible de (2.11) , Nous commençons par rappeler la définition de la solution fondamentale du laplacien, que l'on dénote par Γ et quelques de ses propriétés,

$$\Gamma(x) \overset{déf}{=} \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log|x| & \text{si} \quad n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)w_n}|x|^{2-n} & \text{si} \quad n > 2 \end{cases} \tag{2.12}$$

où w_n est la mesure de Lebesgue de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$. On a

Lemme 2.15 Γ *est* $\mathcal{C}^\infty$ *dans* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *et satisfait*

(i) $\Delta\Gamma(x) = 0$ *si* $x \neq 0$,

(ii) $|\Gamma_{x_i}(x)| \leq \frac{1}{nw_n}|x|^{1-n}$,

(iii) $\left|\Gamma_{x_i x_j}(x)\right| \leq \frac{1}{w_n}|x|^{-n}$.

Démonstration. Il claire que $\Delta\Gamma(x) = 0$ si $x \neq 0$, donc on va mentrer que (ii) et (iii)

(i) on va détèrminer $\Gamma_{x_i}(x)$:

$$\Gamma_{x_i}(x) = \frac{1}{nw_n}(x_i)|x|^{-n};$$

Nous avons $|x_i| \leq |x|$

donc on multiplions en $\frac{1}{nw_n}|x|^{-n}$ on obtient

$$\frac{1}{nw_n}(x_i)|x|^{-n} \leq \frac{1}{nw_n}|x|^{1-n}$$

Alors $\Gamma_{x_i}(x) \leq \frac{1}{nw_n}|x|^{1-n}$

(ii) De mème on va déterminer $\Gamma_{x_ix_j}(x)$:

$$\Gamma_{x_ix_j}(x) = \frac{1}{nw_n}\left\{|x|^2 \delta_{i,j} n x_i x_j\right\}|x|^{-n-2}.$$

Nous avons

$$|x_ix_j| \leq |x|^2$$

donc on multiplions en $\frac{1}{nw_n}|x|^{-n-2}$ on obtient

$$\left|\Gamma_{x_ix_j}(x)\right| \leq \frac{1}{w_n}|x|^{-n}.$$

■

Définition 2.16 *Pour une fonction mesurable f définie sur Ω, nous définissons le potentiel newtonien w de f, par*

$$w(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y) f(y) dy \tag{2.13}$$

quand l'intégrale ci dessus a un sens.

Théorème 2.17 *Supposons que $f \in L^1(\Omega)$. Alors presque pour tout $x \in \Omega$ la fonction $y \to \Gamma(x-y) f(y)$ est dans $L^1(\Omega)$ et le potentiel newtonien w est défini presque partout dans Ω, $w \in L^1(\Omega)$ et est une solution au sens des distributions de (2.11).*

Démonstration. La fonction $(x,y) \to \Gamma(x-y) f(y)$ est mesurable sur $\Omega \times \Omega$. Par ailleurs, par le théorème de Fubini-Tonelli

$$\int_\Omega |w(x)| dx \leq \int_\Omega \int_\Omega |\Gamma(x-y) f(y)| dydx = \int_\Omega \int_\Omega |\Gamma(x-y) f(y)| dxdy.$$

On peut démontrer aisément que $\int_\Omega |\Gamma(x-y)| dx \leq C$ pour une certaine constante C et pour tout $y \in \Omega$.

L'intégrabilité de w est alors une conséquence du fait que $f \in L^1(\Omega)$.

Nous voulons montrer maintenant que

$$-\int_\Omega w(\Delta\Phi) = \int_\Omega f\ \Phi$$

pour tout $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Substituant la définition de w et en utilisant à nouveau le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned} -\int_\Omega w(\delta\Phi) &= -\int_\Omega \left(\int_\Omega \Gamma(x-y) f(y) dy\right) \Delta\Phi(x) dx \\ &= -\int_\Omega \left(\int_\Omega \Gamma(x-y) \Delta\Phi(x) dx\right) f(y) dy. \end{aligned}$$

Maintenant la conclusion découle du fait que

$$-\int_{\Omega} \Gamma(x-y)\, \Delta\Phi(x)\, dx = \Phi(y).$$

Ceci termine la preuve du théorème. ■

Nous allons montrer ensuite que sous des conditions raisonnables sur f, le potentiel newtonien w est dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ et est une solution faible de (2.11).

Lemme 2.18 *Soit $f \in L^\infty(\Omega)$, alors le potentiel newtonien w est dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ et les dérivées partielles sont données par*

$$w_{x_i} = \int_{\Omega} \Gamma_{x_i}(x-y)\, f(y)dy, \qquad i = 1, \cdots, n; \tag{2.14}$$

De plus, w est une solution faible de (2.11).

Démonstration. On choisit tout d'abord une fonction de cut-off $\Psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ telle que

.

$$\Psi(s) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad s \le 1 \\ 1 & \text{pour} \quad 2 \le s \end{cases} \qquad \text{et} \qquad 0 \le \Psi(s) \le 1$$

¨Pour m assez grand, on définit alors

$$w_m(x) = \int_{\Omega} \Gamma(x-y)\, \Psi(m|x-y|)\, f(y)dy.$$

Puisque Γ est différentiable et que les dérivées partielles sont bornées dans $\mathbb{R}^n \backslash B(x, \frac{1}{m})$, on voit aisément que w_m est $\mathcal{C}^1$ et que les dérivées partielles sont données par

$$(w_m)_{x_i}(x) = \int_{\Omega} \left(\Gamma_{x_i}(x-y)\, \Psi(m|x-y|) + m\Gamma(x-y)\, \Psi'(m|x-y|)\, \frac{(x_i - y_i)}{|x-y|} \right) f(y)dy.$$

pour $i = 1, \cdots, n$. En utilisant maintenant les estimations du lemme 2.15, w_n converge localement uniformément vers w et $(w_n)_{x_i}$ converge localement uniformément vers le membre de droite de (2.14).

Donc w est $\mathcal{C}^1$, Nous savons d'aprés le lemme précédent que w est une solution au sens des distributions de 2.11. Puisque w et $\mathcal{C}^1$, par intégration par partie on montre que w est en fait une solution faible de (2.11). ■

Théorème 2.19 *Suppoons que $f \in \mathcal{C}^\alpha_{loc}(\Omega)$ et soit bornée, alors le potentiel newtonien $w \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ et les dérivées partielles d'ordre 2 de w sont données par*

$$w_{x_i x_j} = \int_{B(0,R)} \Gamma_{x_i x_j}(x-y)\, (f(x) - f(y))dy - \frac{f(x)}{R} \int_{\partial B(0,R)} \Gamma_{x_i}(x-y)\, y_j ds(y)$$

pour tout $i,\ j\in\{1,\cdots,\ n\}$ *, où* $B(0,R)$ *est la boule de centre* 0 *et de rayon* R *et contenant* Ω*, et* f *est prolongée par* 0 *sur* $B(0,R)$ *en dehors de* Ω*.*

Démonstration. Soit Ψ la fonction définie dans la preuve du lemme 2.18. Soit

$$v_i^m(x)=\int_\Omega \Gamma_{x_i}(x-y)\,\Psi(m|x-y|)\,f(y)dy.$$

Alors, v_i^m est une fonction $\mathcal{C}^1$ et $v_i^m\to w_{x_i}$ localement uniformément.

Le théorème sera alors démontré une fois que l'on aura prouvé que $(v_i^m)_{x_j}$ converge localement uniformément.

D'abord, peut se réécrire de la manière suivante

$$v_i^m(x)=\int_{B(0,R)} \Gamma_{x_i}(x-y)\,\Psi(m|x-y|)\,f(y)dy.$$

En dérivant v_i^m par rapport à x_j,

$$\begin{aligned}
(v_i^m)_{x_j}(x) &= \int_{B(0,R)} \left(\Gamma_{x_i}(x-y)\,\Psi(m|x-y|)\right)_{x_j} f(y)dy\\
&= \int_{B(0,R)} \left(\Gamma_{x_i}(x-y)\,\Psi(m|x-y|)\right)_{x_j} (f(y)-f(x))dy\\
&\quad +f(x)\int_{B(0,R)} \left(\Gamma_{x_i}(x-y)\,\Psi(m|x-y|)\right)_{x_j} dy\\
&= \int_{B(0,R)} \Gamma_{x_ix_j}(x-y)\,\Psi(m|x-y|)\,(f(y)-f(x))dy\\
&\quad +m\int_{B(0,R)} \Gamma_{x_i}(x-y)\,\Psi'(m|x-y|)\,\frac{(x_j-y_j)}{|x-y|}(f(y)-f(x))dy\\
&\quad -\frac{f(x)}{R}\int_{\partial B(0,R)} \Gamma_{x_i}(x-y)\,\Psi(m|x-y|)\,y_j ds(y).
\end{aligned}$$

où dans le dernier terme on a utilisé la formule de Gauss-Green. On remarque maintenant que $\left|\Gamma_{x_ix_j}(x-y)\,(f(y)-f(x))\right|\le C\,|x-y|^{(\alpha-n)}$ et donc intégrable. On remarque également que pour m assez grand et $x\in\Omega$, $\Psi(m|x-y|)=1$ pour tout $y\in\partial B(0,R)$. Donc on peut passer à la limite quand $m\to\infty$ et on obtient que $(v_i^m)_{x_j}$converge localement uniformément vers

$$\int_{B(0,R)} \Gamma_{x_ix_j}(x-y)\,(f(y)-f(x))dy-\frac{f(x)}{R}\int_{\partial B(0,R)} \Gamma_{x_i}(x-y)\,y_j ds(y).$$

Ceci achéve la preuve du théorème. ■

On a le corollaire immédiat suivant :

Corollaire 2.20 *Supposons que $f \in \mathcal{C}^{\alpha}_{loc}(\Omega)$ et u est une solution faible de* (2.11) *, alors u est dans $\mathcal{C}^2(\Omega)$ et une solution classique de* (2.11) *.*

Le théorème suivant nous dit en fait que si $f \in \mathcal{C}^{\alpha}_{loc}(\Omega)$ pour un certain $\alpha \in [0,1]$ alors le potentiel newtonien n'est pas juste dans $\mathcal{C}^2(\Omega)$, il est en fait dans $\mathcal{C}^{2,\alpha}_{loc}(\Omega)$.

Théorème 2.21 *Soit $B_1 = B(x_0, R)$, $B_2 = B(x_0, 2R)$ deux boules concentriques dans $\mathbb{R}^n$. Supposons que $f \in \mathcal{C}^{\alpha}\left(\overline{B_2}\right)$ pour un certain $\alpha \in (0,1)$*
Soit w le potentiel newtonien de f dans B_2, alors $w \in \mathcal{C}^{2,\alpha}\left(\overline{B_1}\right)$ et

$$\left\| w_{x_i x_j} \right\|_{\mathcal{C}^{\alpha}\left(\overline{B_1}\right)} \leq C \left\| f \right\|_{\mathcal{C}^{\alpha}\left(\overline{B_2}\right)} \quad i = 1, \cdots, n$$

où C est une constante dépendant uniquement de n, α et R.

Démonstration. D'aprés le théorème 2.19, pour tout $x \in B_1$, on a

$$w_{x_i x_j}(x) = \int_{B_2} \Gamma_{x_i x_j}(x-y)\,(f(y) - f(x))dy - \frac{f(x)}{2R} \int_{\partial B_2} \Gamma_{x_i}(x-y)\, y_j ds(y).$$

En utilisant maintenant les estimation de lemme 2.15, on obtient

$$\left| w_{x_i x_j}(x) \right| \leq C(|f(x)| + \|f\|_{\mathcal{C}^{\alpha}\left(\overline{B_2}\right)}) \tag{2.15}$$

Nous allons montrer que $w_{x_i x_j}$ est dans $\mathcal{C}^{\alpha}\left(\overline{B_1}\right)$. Soient x_1 et x_2 dans B_1.

En utilisant maintenant l'expression pour $w_{x_i x_j}$ du théorème 2.19, on obtient

$$w_{x_i x_j}(x_1) - w_{x_i x_j}(x_2)$$

$$= f(x_1)\, I_1 + (f(x_1) - f(x_2))\, I_2 + I_3 + I_4 + (f(x_1) - f(x_2)) I_5 + I_6$$

où

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2R} \int_{\partial B_2} (\Gamma_{x_i}(x_1 - y) - \Gamma_{x_i}(x_2 - y)) y_j ds(y) \\
I_2 &= \frac{1}{2R} \int_{\partial B_2} \Gamma_{x_i}(x_2 - y)\, y_j ds(y) \\
I_3 &= \int_{B(\overline{x}, |x_1 - x_2|)} \Gamma_{x_i x_j}(x_1 - y)\,(f(x_1) - f(y))dy \\
I_4 &= \int_{B(\overline{x}, |x_1 - x_2|)} \Gamma_{x_i x_j}(x_2 - y)\,(f(y) - f(x_2))dy \\
I_5 &= \int_{B_2 - B(\overline{x}, |x_1 - x_2|)} \Gamma_{x_i x_j}(x_1 - y)\, dy \\
I_6 &= \int_{B_2 - B(\overline{x}, |x_1 - x_2|)} (\Gamma_{x_i x_j}(x_1 - y) - \Gamma_{x_i x_j}(x_2 - y))(f(x_2) - f(y))dy
\end{aligned}$$

où $\overline{x} = \frac{x_1+x_2}{2}$.

En utilisant à nouveau les estimations du lemme 2.15, on peut démentrer que (voir [6], lemme 4,4)

$$|I_1| \leq C\,|x_1 - x_2|^{\alpha},$$

$$|I_3| + |I_4| + |I_6| \leq C\,\|f\|_{\mathcal{C}^{\alpha}\left(\overline{B_2}\right)}\,|x_1 - x_2|^{\alpha}$$

et

$$|I_2| + |I_5| \leq C$$

Ceci acheve la preuve du théorème. ■

Une conséquence immédiate du résultat précédent est le théorème suivant :

Théorème 2.22 *Supposons que $f \in \mathcal{C}^{\alpha}_{loc}(\Omega)$ pour un certain $\alpha \in (0,1)$ et $u \in H^1(\Omega)$ une solution faible de*

$$-\Delta u = f \quad dans \quad \Omega$$

alors $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}_{loc}(\Omega)$ et est une solution classique.

Les résultats prouvés pour l'opérateur de Laplace peuvent etre étendus pour des opérateurs elliptique du second ordre plus généraux avec des coefficients ayant une régularité $\mathcal{C}^{\alpha}$.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On considère l'opérateur elliptique du second ordre

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u \tag{2.16}$$

où $a_{i,j}$, b_i, et c sont des fonctions définies sur Ω et $a_{i,j}$ satisfait la condition d'ellipticité

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}y_i y_j \leq \alpha\,|y|^2 \tag{2.17}$$

avec $\alpha > 0$ et pour tout $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Théorème 2.23 *Soit L un opérateur de type (2.16) vérifiant (2.17) dont les coefficients*

$$a_{i,j}, b_i, c \in \mathcal{C}^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right),\ i,\ j = 1, \cdots, n.$$

pour un $\alpha \in$ (2.11). Supposons que $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ est une solution classique de

$$Lu = f \quad dans \quad \Omega$$

où $f \in \mathcal{C}^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$. *Alors* $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}_{loc}(\Omega)$ *et satisfait l'éstimation*

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}(\Omega_1)} \leq C\left(\|f\|_{\mathcal{C}^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)} + \|u\|_{L^{\infty}(\Omega)}\right)$$

pour tout $\Omega_1 \subset\subset \Omega$, *où la constante* C *dépend seulement de* Ω, Ω_1, n, α *et les normes des coefficients de* L *dans* $\mathcal{C}^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Comme dans le cas de la régularité L^2, *si on a besoin de la régularité* $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ *de la solution jusqu'au bord de* Ω, *alors il est nécessaire de supposer que le bord de* Ω *est de régularité* $\mathcal{C}^{2,\alpha}$.

Théorème 2.24 *Soit* Ω *une ouvert borné telle que* $\partial\Omega$ *soit* $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ *et* L *vérifait* (2.16) *et* (2.17) *avec les coefficients*

$$a_{ij}, b_i, c \in \mathcal{C}^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right),\ \ i,\ \ j = 1, \cdots, n.$$

pour un $\alpha \in$ (2.11). *Supposons que* $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap\, \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ *soit une solution classique de*

$$Lu = f \quad dans \quad \Omega$$

où $f \in \mathcal{C}^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$. *De plus, on suppose que*

$$u = u_0 \quad on \quad \partial\Omega$$

pour un $u_0 \in \mathcal{C}^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$. *Alors* $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ *et satisfait l'estimation*

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\left(\|f\|_{\mathcal{C}^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)} + \|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} + \|u_0\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})}\right)$$

où la constante C *ne dépend que de* Ω, n, α *et les normes des coefficients de* L *dans* $\mathcal{C}^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Chapitre 3

Régularité d'un problème elliptique avec une non-linéarité singulière

Nous allons étudier dans ce chapitre un problème elliptique semi-linéaire singulier avec les conditions aux limites de Dirichlet homogènes. La singularitéest est dans le sens où l'équation présente un terme de la forme $u^{-\delta}$, $\delta > 0$ qui tend vers l'infinie au voisinage du bord du domaine Ω. On va établir l'existence, l'unicité et la régularité Holderienne de la solution.

On considère le problème elliptique singulier suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{-\delta}, \quad u > 0, \ x \in \Omega \\ \quad u_{|\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où Ω est un domaine bornée régulier dans $\mathbb{R}^n$, $n \geqq 2$, δ est une constante positive. La principale caractéristique d'intérêt ici est que la valeur limite donnée rend équation singulière à la frontière. Il est clair que (3.1) n'a pas de solution $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$.

Les équations du type (3.1) ont été étudiées par divers auteurs, voir par exemple, [7,9] et [10, 12].

Dans [7] les auteurs ont considéré une classe plus générale d'équations avec le côté gauche de (3.1) remplacé par des opérateurs linéaires uni-coefficients suffisamment lisses (par exemple, C^{α}) et le côté droit par suffisamment lisser les fonctions non linéaire $g(x,u)$ dont le comportement au voisinage de la limite de Ω est comme $u^{-\delta}$, pour certains $\delta > 1$.

Ils ont établi l'existence et l' unicité d'une solution $u \in C^{a}(\overline{\Omega}) \cap C^2\left(\Omega\right)$, $\alpha = \frac{2}{(1+\delta)}$.

Récemment, dans [8], del Pino a prouvé l'existence d'une solution unique $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ de (3.1). Il a également établi la limite de ∇u sous un hypothèse essentiellement optimale.

3.1 Existence de la solution

Nous allons montrer l'éxistence de la solution classique $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ pour le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{-\delta} & \text{dans} \quad \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

La méthode que l'on va utiliser est l'approximation : on étudie le problème approché suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = (u_\varepsilon + \varepsilon)^{-\delta} & \text{dans} \quad \Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2}$$

ensuite on passe à la limite en ε.

3.1.1 Existence de la solution approché u_ε

On considère la fonctionnelle suivante:

$$\begin{aligned} F: \ & H_0^1(\Omega) && \to \mathbb{R} \\ & v && \to \tfrac{1}{2}\int |\nabla v|^2 \, dx - \tfrac{1}{1-\delta}\int (v+\varepsilon)^{1-\delta} \, dx \end{aligned}$$

tout d'abort on va montre que F est coèrcive et semi-continue c'est-à-dire

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} F(u) = +\infty$$

et

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

Nous avons

$$F(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 \, dx - \frac{1}{1-\delta}\int (u+\varepsilon)^{1-\delta} \, dx$$

On a

$$\frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 \, dx = \frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1}^2 \to +\infty$$

et

$$\left|\frac{1}{1-\delta}\right| \int (u+\varepsilon)^{1-\delta} dx \leq \left|\frac{1}{1-\delta}\right| \int \varepsilon^{1-\delta} dx \leq C$$

On obtient

$$F(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|_{H_0^1}^2 - C$$

Donc

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} F(u) = +\infty$$

Donc F est coèrcive

Gràce à l'injection compacte de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on peut montrer facilement faiblement semi-continue infèrierement.

Donc, d'aprés le théorème (1.24). F admet une minimisante $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ qui est la solution faible unique du problème (3.2)

3.1.2 Passage à la limite

Soient $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$. On montre que

$$u_{\varepsilon_1} \leq u_{\varepsilon_2} \tag{3.3}$$

on a

$$-\Delta u_{\varepsilon_1} = (u_{\varepsilon_1} + \varepsilon_1)^{-\delta}$$

$$-\Delta u_{\varepsilon_2} = (u_{\varepsilon_2} + \varepsilon_2)^{-\delta} \leq (u_{\varepsilon_1} + \varepsilon_1)^{-\delta}$$

d'où

$$-\Delta (u_{\varepsilon_2} - u_{\varepsilon_1}) \leq (u_{\varepsilon_2} + \varepsilon_2)^{-\delta} - (u_{\varepsilon_1} + \varepsilon_1)^{-\delta}$$

On multiplie par $(u_{\varepsilon_2} - u_{\varepsilon_1})^+ = \max\{u_{\varepsilon_2} - u_{\varepsilon_1}, 0\}$, et on intégre par parties, on obtient:

$$\int_\Omega \left|\nabla (u_{\varepsilon_2} - u_{\varepsilon_1})^+\right|^2 dx \leq \int_\Omega \left((u_{\varepsilon_2} + \varepsilon_2)^{-\delta} - (u_{\varepsilon_1} + \varepsilon_1)^{-\delta}\right) (u_{\varepsilon_2} - u_{\varepsilon_1})^+ dx \leq 0.$$

d'où

$$(u_{\varepsilon_2} - u_{\varepsilon_1})^+ \equiv 0;$$

donc

$$u_{\varepsilon_1} \leq u_{\varepsilon_2}$$

Montrons maintenant que

$$u_{\varepsilon_1} + \varepsilon_1 \leq u_{\varepsilon_2} + \varepsilon_2 \tag{3.4}$$

On a :

$$\begin{cases} -\Delta\left(u_{\varepsilon_1}+\varepsilon_1\right) & =\left(u_{\varepsilon_1}+\varepsilon_1\right)^{-\delta} \quad \text{dans } \Omega \\ u_{\varepsilon_1}+\varepsilon_1 & =\varepsilon_1 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta\left(u_{\varepsilon_2}+\varepsilon_2\right) & =\left(u_{\varepsilon_2}+\varepsilon_2\right)^{-\delta} \quad \text{dans } \Omega \\ u_{\varepsilon_2}+\varepsilon_2 & =\varepsilon_2 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On note $v=u_{\varepsilon_1}+\varepsilon_1$ et $w=u_{\varepsilon_2}+\varepsilon_2$. on a

$$\begin{cases} -\Delta\left(v-w\right) & =v^{-\delta}-w^{-\delta} \quad \text{dans } \Omega \\ v-w & =\varepsilon_1-\varepsilon_{2,} \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On note: $\Omega^+=\{x\in\Omega:\ v(x)\geq w(x)\}$, d'où

$$\begin{cases} -\Delta\left(v-w\right)=v^{-\delta}-w^{-\delta} & \leq 0 \quad \text{dans } \Omega^+ \\ v-w & =0 \quad \text{sur } \partial\Omega^+ \end{cases}$$

donc

$$v-w\equiv 0 \quad \text{sur} \quad \Omega^+$$

et par conséquent:

$$v\leq w \quad \text{sur} \quad \Omega$$

et donc

$$u_{\varepsilon_1}+\varepsilon_1\leq u_{\varepsilon_2}+\varepsilon_2$$

De (3.3) et (3.4) on déduit que

$$0\leq u_{\varepsilon_1}-u_{\varepsilon_2}\leq\varepsilon_2-\varepsilon_1\to 0$$

Donc $\left(u_\varepsilon\right)_\varepsilon$ est de Cauchy dans $L^\infty(\Omega)$, comme $L^\infty(\Omega)$ est complet alors:

$$u_\varepsilon\overset{\varepsilon\to 0}{\to}u\in L^\infty(\Omega)$$

et on a $\left(u_\varepsilon\right)_\varepsilon$ est croissante et positive, donc

$$u>0 \quad \text{sur} \quad \overline{\Omega}$$

D'autre part d'aprés la régularité elliptique locale on a

$$\left\|u_\varepsilon\right\|_{H^2(\Omega_1)}\leq c\left\|\left(u_\varepsilon+\varepsilon\right)^{-\delta}\right\|_{L^\infty(\Omega_2)} \tag{3.5}$$

où $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega$ et comme $u_\varepsilon \overset{L^\infty(\Omega)}{\rightarrow} u$

$$u_\varepsilon \rightarrow u > 0 \quad \text{dans} \quad L^\infty(\Omega_2)$$

alors

$$(u_\varepsilon + \varepsilon)^{-\delta} \overset{\varepsilon \to 0}{\rightarrow} u^{-\delta} < +\infty \;\; \text{dans } L^\infty(\Omega_2) \tag{3.6}$$

D'aprés (3.5) et (3.6) (u_ε) est bornée dans $H^2(\Omega_1)$ d'où $u_\varepsilon \overset{H^1}{\rightarrow} u$ (car $H^2 \hookrightarrow_c H^1$) et par conséquent

$$\nabla u_\varepsilon \rightarrow \nabla u \quad \text{dans} \quad H^1_{loc}(\Omega)$$

C'est-à-dire

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon \nabla \varphi dx \overset{\varepsilon \to 0}{\rightarrow} \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx \qquad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

et on a

$$\int_\Omega (u_\varepsilon + \varepsilon)^{-\delta} \varphi dx \overset{\varepsilon \to 0}{\rightarrow} \int_\Omega u^{-\delta} \varphi dx$$

donc

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega u^{-\delta} \varphi$$

alors u est une solution faible de notre problème

$$\begin{cases} -\Delta u &= u^{-\delta} \quad \text{dans } \Omega \\ \quad u &= 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

pour la régularité il est claire que

$$-\Delta u = u^{-\delta} \leq c \quad \text{sur} \quad \Omega_1 \subset \Omega$$

donc d'aprés la régularité Holderienne $u \in C^{2,\alpha}(\Omega_1)$ pour tout $\Omega_1 \subset \Omega$ donc

$$u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right).$$

3.2 Régularité de la solution

Le résultat principale de cette section est le suivant :

Théorème 3.1 *Soit $d(x) = d(x, \partial\Omega)$, et soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ la solution du problème (3.1). Alors on a :*

(i) Si $\delta < 1$, alors $u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, où $\beta = 1 - \delta$ si $\delta > 0$.

(ii) Si $\delta = 1$, alors $u \in C^{\beta}(\overline{\Omega})$, pour tout $0 < \beta < 1$.

(iii) Si $\delta > 1$, alors $u \in C^{\beta}(\overline{\Omega}), \beta = 2/(\delta + 1)$.

3.2.1 Comportement de la solution au voisinage du bord

Comme on a vu dans la section précédente, le problème (3.1) admet une solution unique $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

On s'intéresse maintenant au comportement de cette solution au voisinage du bord. En effet, on démontre le résultat suivant :

Théorème 3.2

(i) Si $\delta < 1$, alors il existe des constantes positives c_1, c_2 telle que

$$c_1 d(x) \leqq u(x) \leqq c_2 d(x), \ \ x \in \Omega. \tag{3.7}$$

(ii) Si $\delta = 1$, alors il existe des constantes positives c_1, c_2 , D telle que

$$c_1 d(x)(D - \ln d(x))^{1/(\delta+1)} \leqq u(x) \leqq c_2 d(x)(D - \ln d(x))^{1/(\delta+1)}, \ x \in \Omega. \tag{3.8}$$

(iii) Si $\delta > 1$, alors il existe des constantes positives $c_{1,} c_2$ telle que

$$c_1 d(x)^{2/(\delta+1)} \leqq u(x) \leqq c_2 d(x)^{2/(\delta+1)}, \quad x \in \Omega. \tag{3.9}$$

Démonstration. Nous démontrons d'abord le théorème (3.2) pour le cas particulier $\Omega = B_1$, à savoir pour l'équation suivante:

$$\begin{cases} \Delta u_1 + u_1^{-\delta} = 0, \quad x \in B_1, \\ \quad u_1 \mid_{\partial B_1} = 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Par l'unicité de la solution du problème (3.10) (ou en utilisant méthode de "moving plane"), on a la solution $u_1(x)$ est radiale. Soit $\phi(x)$ la première Fonction propre du problème suivant:

$$\begin{cases} \Delta \phi + \lambda \phi & = 0 \quad x \in B_1 \\ \qquad \phi & = 0 \quad x \in \partial B_1 \end{cases} \tag{3.11}$$

Notons ici que au voisinage du bord ∂B_1 on a

$$d\,(x) := d\,(x, \partial B_1) = 1 - |x|$$

Alors d'aprés le lemme de Hopf , on a $\phi(x) \geq c_0(1-|x|)$ pour certaine constante $c_0 > 0$ pour tout $x \in \overline{B_1}$. Par ailleurs, la fonction $w = c\phi$ satisfait

$$\Delta w + w^{-\delta} = c\phi^{-\delta}(-\lambda\phi^{1+\delta} + c^{-(1+\delta)}) \geqq 0. \tag{3.12}$$

où $c > 0$ est assez petit. D'où

$$-\Delta w \leq w^{-\delta}, \quad \text{dans } \Omega$$

et

$$u_1(x) > w(x), \quad \text{pour} \quad x \in \partial B_{\frac{1}{2}},$$

En retranchant (3.10) de (3.12), on obtient $\Delta(w-u_1) + c(x)(w-u_1) \geqq 0$, $x \in B_1$ où $c(x) \leqq 0$.

Puis par par le Principe du maximum, on obtient

$$u_1\,(x) \geqq c\phi(x) \geqq c_1(1-|x|), \quad \forall x \in B_1 \tag{3.13}$$

pour certains $c_1 > 0$. Maintenant, on considère les trois cas suivants,

(i) $\delta < 1$. En intégrant (3.10) sur $B_r := B(0,r),\ 0 < r < 1$ et en utilisant la formule de Green, on obtient

$$-\int_{B_r} \Delta u_1 dx = -\int_{\partial B_r} \nabla u_1(x).\frac{x}{r}dS = \int_{B_r} u_1(x)^{-\delta}dx. \tag{3.14}$$

Comme u_1 est radiale, alors en notant: $u_1(x) := u_1(|x|)$, on aura

$$\nabla u_1(x) := \frac{u_1'(r)}{r}x, \ r = |x|.$$

d'où

$$-\int_{\partial B_r} \nabla u_1(x).\frac{x}{r}dS = -\int_{\partial B_r} u_1'(r)\frac{x}{r}.\frac{x}{r}dS = -\int_{\partial B_r} dS\ u_1'(r) \tag{3.15}$$

et on a

$$\begin{aligned} \int_{B_r} u_1(x)^{-\delta}dx &= \int_0^r \int_{\partial B_r} u_1(x)^{-\delta}t^{n-1}dtdS \\ &\leq \int_0^r \int_{\partial B_r} (r-t)^{-\delta}t^{n-1}dtdS \\ &= \int_{\partial B_r} dS \int_0^r (r-t)^{-\delta}t^{n-1}dt. \end{aligned} \tag{3.16}$$

En remplaçant (3.15) et (3.16) dans (3.14), on obtient

$$-u_1'(r) \leq \int_0^r (r-t)^{-\delta}t^{n-1}dt \leq C \leq \infty$$

pour $\delta < 1$, où$C > 0$ est indépendant de r. Ensuite en utilisant le théorème des accroissements finis, on déduit que

$$u_1(x) \leq c_2(1-|x|), \forall x \in B_1$$

où $c_2 > 0$ est suffisamment grand. On a donc prouvé (3.7) pour la solution de (3.10).

(ii) $\delta = 1$. Soit $w(x) := w(|x|) = cs(1-\ln s)^{1/(\delta+1)}$, où $s = 1-|x|$, $x \in B_1$, Alors $w(x)$ vérifie,

$$\begin{aligned} \Delta w + w^{-\delta} = \;& \tfrac{c}{s}\,(1-\ln s)^{-\delta/(\delta+1)}\,(-\tfrac{1}{\delta+1} - \tfrac{\delta}{(\delta+1)^2}\,(1-\ln s)^{-1} \\ & -\tfrac{n-1}{1-s}\left[-s\ln s + \tfrac{\delta}{\delta+1} + c^{-(\delta+1)}\right]), \quad x \in B_1 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Lorsque c est suffisamment faible, w est une sous-solution de (3.10) sur $B_1 \backslash B_2$ et $w(x) \leqq u_1(x)$ Pour $x \in \partial B_{\frac{1}{2}}$.

Ansi, par le principe de comparaisons, on obtient

$$u_1(x) \geq \; c_1 d(x)(1-\ln d(x))^{1/(\delta+1)} \quad Pour \quad x \in B_1 \backslash B_{\frac{1}{2}}$$

pour $x \in B_1$ si c_1, est choisi assez petit . D'autre part, lorsque c est suffisamment grand, w est une sursolution de (3.10) dans $B_1 \backslash B_{\frac{1}{2}}$et $w(x) \geqq u_1(x)$ pour $x \in \partial B_{\frac{1}{2}}$. Ainsi , par le principe du maximum,

$$u_1(x) \leqq c_2 d(x)(1-\ln d(x))^{1/(\delta+1)} \quad \text{Pour} \quad x \in B_1,$$

pour c_2 suffisamment grande. Par conséquent, nous avons prouvé (3.8) pour la solution de (3.10).

(iii) Posons $w(x) = c(1-|x|)^{2/(\delta+1)}$, $x \in B_1$ alors $w\ (x)$ satisfait

$$\begin{aligned} \Delta w\,(x) + w^{-\delta} \;&= \tfrac{2}{\delta+1} c(1-|x|)^{1-\delta/(\delta+1)-1}\left[\tfrac{1-\delta}{(\delta+1)} - \tfrac{(n-1)(1-|x|)}{|x|} + c^{-\delta}\right], \\ & x \in B_1. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Ensuite , si c est assez petit, $w(x)$ est un sursolution de (3.10) dans $B_1 \backslash B_{\frac{1}{2}}$et $w \leqq u_1$ sur $\partial B_{\frac{1}{2}}$, et le principe du maximum implique $u_1(x) \geqq c_1\ d(x)^{2/(\delta+1)}$, $x \in B_1$ pour c_1 suffisamment petite . De même, lorsque c_2 est choisie suffisamment grande, nous avons $u_1(x) \leqq c_2 d(x)^{2/(\delta+1)}$, $x \in B_1$. Ceci prouve le théorème (3.2) pour l'équation (3.10). De même, nous pouvons prouver le théorème (3.2) pour le cas $\Omega = B_K \backslash B_1$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \Delta u_2 + u_2^{-\delta} &= 0; \quad x \in B_K \backslash B_1, \\ \qquad\quad u_2 &= 0. \quad \partial\,(B_K \backslash B_1) \end{cases} \tag{3.19}$$

Maintenant, on est pret à déontrer le théorème (3.2) dans le cas général. Grace à la régularité du domaine Ω, il existe $\sigma > 0$ tel que pour toute $x_0 \in \Omega_\sigma = \{z \in \Omega \;/\; d(z) \leqq \sigma\}$, $\exists\, y \in \Omega$ tel que

$$d(x_0) = \sigma - |y - x_0|\,, \text{ et } \; B_\sigma(y) \subset \overline{\Omega} \tag{3.20}$$

Posons maintenant: $w(x) = cu_1((x-y)/\sigma)$, où $c = (\sigma^2)^{1/(\delta+1)}$, Alors $w(x)$ satisfait

$$\begin{cases} \Delta w + w^{-\delta} & = 0 \quad x \in B_\sigma(y) \\ \qquad\quad w & = 0 \quad \partial B_\sigma\,(y) \end{cases}$$

Par conséquent $u - w$ satisfait

$$\begin{cases} \Delta\,(u-w) + c\,(x)\,(u-w) & \leqq 0, \quad x \in B_\sigma(y) \\ \qquad\qquad\qquad\quad u - w & \geqq 0 \quad\; \partial B_\sigma\,(y) \end{cases} \tag{3.21}$$

où

$$c\,(x) = \frac{u^{-\delta} - w^{-\delta}}{u - w} \leqq 0, \quad x \in B_\sigma(y)$$

Par le principe du maximum, on déduit

$$u\,(x) \geqq cu_1\left(\frac{x-y}{\sigma}\right), \quad x \in B_\sigma(y) \tag{3.22}$$

et en particulier $u\,(x_0) \geqq cu_1\left(\frac{x_0-y}{\sigma}\right)$. On obtient donc de (3.20) borne inférieure de $u(x)$ comme dans le théorème (3.2). D'autre part, grace à la régularité de $\partial\Omega$, il existe $\sigma > 0, R > 0$ tel que pour tout $x_0 \in \Omega_\sigma$, nous avons $\Omega \in (B_R \backslash B_\sigma)\,(y)$, et

$$d\,(x_0) = |x_0 - y| - \delta \tag{3.23}$$

et

$$w\,(x) = cu_2\left(\frac{x-y}{\sigma}\right), \quad x \in \Omega$$

Alors $w(x)$ satisfait

$$\Delta w + c^{\delta+1}\delta^2 w^{-\delta} = 0, \quad x \in \Omega. \tag{3.24}$$

et est une sursolution de 3.1 , lorsque $c > \Lambda$, où Λ ne dépend seulement de σ et R (pas de x_0).

Puis par le principe de maximum, on obtient

$$u\,(x) \leqq cu_2\left(\frac{x-y}{\sigma}\right), \quad x \in \Omega. \tag{3.25}$$

en particulier , $u\,(x_0) \leqq cu_2\left(\frac{x_0-y}{\sigma}\right)$ pour $c > \Lambda$.

Cela prouve l'estimation de $u(x)$ comme dans le théorème (3.2) grace à (3.23) et le fait que x_0 est arbitraire dans Ω_σ. Ce qui finit la preuve. ■

3.2.2 Estimation pour le gradion de la solution

On s'intéresse maintenant à la régularité globale de la solution $u(x)$ du problème (3.1) en prouvant le théorème (3.1).Tout d'abord, nous rappelons la définition de la fonction de Green pour le Laplacien.

Définition 3.3 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On définit la fonction du Green G pour le Laplacien par l'expression suivantre*

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x,y)\, f(y)\, dy$$

où $-\Delta u = f$ sur Ω et $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

On donne maintenant quelque propriétées de cette fonction.

Proposition 3.4 *Pour $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, de la fonction de Green $G(x,y)$ de $-\Delta$ dans Ω vérifie:*

$$|G(x,y)| \leqq \begin{cases} \frac{c}{|x-y|^{n-2}}, & n > 2, \\ c\left(|\ln|x-y|| + 1\right), & n = 2; \end{cases} \tag{3.26}$$

$$|G(x,y)| \leqq \begin{cases} \frac{cd(y)}{|x-y|^{n-1}}, & n > 2, \\ cd(y)\,\frac{(|\ln|x-y||+1)}{|x-y|}, & n = 2; \end{cases} \tag{3.27}$$

$$|G_x(x,y)| \leqq \min\left\{ \frac{c}{|x-y|^{n-1}}, \frac{cd(y)}{|x-y|^{n}} \right\}, \quad n \geqq 2; \tag{3.28}$$

$$|G_{xx}(x,y)| \leqq \min\left\{ \frac{c}{|x-y|^{n}}, \frac{cd(y)}{|x-y|^{n+1}} \right\}, \quad n \geqq 2; \tag{3.29}$$

Où la constante c ne dépend que de Ω .Pour la preuve, le lecteur peut voir [10] et [11]. Le lemme suivant est un fait technique facile à voir.

Lemme 3.5 *tous les $x_1, x_2 \in \Omega$. satisfaisant $d(x_1, x_2) < \sigma$, nous pouvons trouver un chemin $\varepsilon(t) : [0,1] \to \Omega$ satisfaisant*

$$|\varepsilon'(t)| \leqq cd(x_1, x_2).$$

Démonstration.

(du théorème (3.1)) (i) Lorsque $\delta < 1$, d'aprér la formule de Green, nous avons

$$u(x) = \int_{\Omega} (-G(x,y))\, u(y)^{-\delta}\, dy, \quad x \in \Omega. \tag{3.30}$$

et

$$\nabla u(x) = \int_{\Omega} (-G_x(x,y)) u^{-\delta}(y) dy, \quad x \in \Omega.$$

(Voir [6]). Ensuite, si $x_1, x_2 \in \Omega$. et $d(x_1,x_2) < \sigma$, nous avons

$$\begin{aligned} |\nabla u(x_1) - \nabla u(x_2)| &\leqq \int_{\Omega} |G_x(x_1,y) - G_x(x_2,y)|\, u^{-\delta}(y) dy \\ &= \int_{\Omega \backslash B_R(x_1)} \Big| \underbrace{G_x(x_1,y) - G_x(x_2,y)}_{I} \Big| u^{-\delta}(y) dy \\ &\quad + \int_{B_R(x_1)} \Big| \underbrace{G_x(x_1,y) - G_x(x_2,y)}_{II} \Big| u^{-\delta}(y) dy, \end{aligned} \tag{3.31}$$

où $R = 2d(x_1,x_2)$, comme dans le lemme (3.5).

$$\begin{aligned} I &\leqq \int_{\Omega \backslash B_R(x_1)} |G_{xx}(\varepsilon(t), y)| . |\varepsilon'(t)|\, dt u^{-\delta}(y) dy \\ &\leqq cd(x_1,x_2) \int_{\Omega \backslash B_R(x_1)} \int_0^1 \frac{\min\{|\varepsilon(t) - y|, d(y)\}}{|\varepsilon(t) - y|^{n+1}} dt u^{-\delta}(y) dy \\ &\leqq cd(x_1,x_2) \int_{\Omega \backslash B_R(x_1)} \frac{\min\{|x_1 - y|, d(y)\}}{|x_1 - y|^{n+1}} u^{-\delta}(y) dy. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Ici nous avons utilisé

$$|\varepsilon(t) - y| \geq |x_1 - y| - |x_1 - \varepsilon(t)|$$

et on a par le théorème des acroissemant finis

$$|x_1 - \varepsilon(t)| = d(x_1,x_2) = \frac{R}{2} \leq \frac{1}{2} |x_1 - y|, \ \forall y \in \Omega \backslash B_R$$

d'où, on a

$$|\varepsilon(t) - y| \geq \frac{1}{2} |x_1 - y|$$

D'autre parte, on peut vérifier facilement que

$$\min\{|x_1 - y|, d(y)\}\, d(y)^{-\delta} \leq |x_1 - y|^{t-\delta} \quad \text{pour } 1 > \delta.$$

Alors

$$
\begin{aligned}
I &\leq cd(x_1,x_2)\int_{\Omega\setminus B_R(x_1)} \frac{1}{|x_1-y|^{n+\delta}}dy \quad (\text{ où } 1-\delta>0) \\
&\leq cd(x_1,x_2)\int_R^{\infty} r^{-(n+\delta)}.r^{n-1}dr \\
&\leq cd(x_1,x_2)R^{-\delta} = cd^{1-\delta}(x_1,x_2)\,.
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

Nous estimons maintenant II

$$
\begin{aligned}
II &\leq \int_{B_R(x_1)} |G_x(x_1,y)-G_x(x_2,y)|\, u^{-\delta}(y)d \\
&\leq \int_{B_R(x)} |G_x(x_1,y)|\, u^{-\delta}(y)dy \\
&\quad + \int_{B_{R+d(x_1,x_2)}(x_2)} |G_x(x_2,y)|\, u^{-\delta}(y)dy \\
&\leqq c\int_{B_R(x_1)} \frac{\min\{|x_1-y|\,,d\,(y)\}}{|x_1-y|^n} d^{-\delta}\,(y)\,dy \\
&\quad +c\int_{B_{R+d(x_1,x_2)}(x_2)} \frac{\min\{|x_2-y|\,,d\,(y)\}}{|x_2-y|^n} d^{-\delta}\,(y)\,dy.
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

et par concéquent,

$$
\begin{aligned}
II &\leq c\int_{B_R(x_1)} |x_1-y|^{-n-\delta+1}\,dy + c\int_{B_{R+d(x_1,x_2)}(x_2)} |x_2-y|^{-n-\delta+1}\,dy \\
&\quad (\text{Par } 1-\delta>0) \\
&\leq c\int_0^{R+d(x_1,x_2)} r^{\alpha-\nu}dr \leqq cd^{1+\alpha-\nu}(x_1,x_2).
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

alors, les estimations (3.33) et (3.35), nous permet facilement de conclure le théorème (3.1) (i).

Il reste à démontrer (ii) et (iii) pour cela, on a besoin de montrer une estimation locale pour le gradient de la solution ∇u. Soient $x_0\in\Omega$, $2r=d\,(x_0)$. Posons $v\,(y)=u\,(x)$, àù $y=x_0+ry$, alors v est bien défini sur $B_2\,(0)$ et on a d'aprés la régularité de la solution $(\textit{voir chapitre } II)$:

$$
|\nabla v\,(y)| \leq C\left(\|\Delta v\|_{L^\infty(B_2(0))}+\|v\|_{L^\infty(B_2(0))}\right). \tag{3.36}
$$

(ii) Lorsque $\delta = 1$, par (3.8), nous avons

$$u^{-\delta}(x) \leq Cd^{-1}(x)\left(D - \ln d(x)\right)^{-\delta/(\delta+1)}, \quad x \in \Omega. \tag{3.37}$$

En utilisant le théorème des accroiements finis et estimation interieur (**??**) et (3.37), on obtient

$$\begin{aligned} |u(x_1) - u(x_2)| &\leq Cd(x_1,x_2)\frac{1}{3}d(x_1,x_2)^{-1}\left(D - \ln(x_1,x_2)\right)^{1/2} \\ &\leq Cd(x_1,x_2)\left(D - \ln d(x_1,x_2)\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.38}$$

et cela nous parmet de conclure le théorème (3.1) (ii).

Nous pouvons prouver (iii) de la même manière avec une certaines modifications évidentes.

■

Conclusion

On a étudié dans ce mémoire des problèmes elliptiques linéaire et semi-linéaire. On a démontré des résultats d'existence et d'unicité de la solution et notamment la régularité précise de la solution dans les espaces de Sobolev et les espaces de Holder. La fonction de Green et la fonction Gamma etaient la clé pour démontre la régularité. D'autre travaux ont montré des résultats sémilaires pour des problème non lineaires, où on la fonction de Green et de Gamma ne peuvent pas utilisable mais il y a d'autre techniques et methode à été developpées pour cela on conseille le lecteur à consulter : Lieberman[14] et Giacomoni-Shindler-Takac[15].

Bibliography

[1] Saadi, EDP elliptique , $2^{\text{éme}}$ année master/MI, Université de M'sila.

[2] H. Brezis, "Analyse Fonctionnelle Théorie et application", Collection Mathématiques Appliquées pour la matrise, Masson, 1983.

[3] Lawarence C. Evans, Partial Differential Equation, Graduate Studies in Mathématics, 19. American Mathématical Society, Providence, RI, 1998.

[4] k. Deimling "Nonlinear Functional Analysis", Spriger-Verlag, Berlin-Heidrlberg-New York, 1985.

[5] P. Grisvard, Elliptic Problems in non smoth domains. Monographs and Studies in Mathematics, 24. Pitman (Advanced Publishing Program), MA, 1985.

[6] D. Gilbarg et N.Trudinger, elliptic partial differential equations of second ordre. Reprint of the 1998 edition.Classics in Mathematics. Spring Verlag, Berlin, 2001.

[7] M. G. Crandall,P. H. Rabinowitz and L. Tarter. On a Dirichlet problem with a singular nonlinearity. Comm. Partial Differential Equation2 (1977), 193-222.

[8] M. A. Del Pino. A global estimate for the gradient in a singular elliptic boundary value problem.P. R. S. Edinburgh Sect. A 122 (1992), 341-352.

[9] S. M. Gomes. On a singular nonlinear elliptic problem. SIAM J. Math. Anal. 17 (1986), 1359-1369.

[10] K. O. Widman. Inequalities for the Green function and boundary continuity of the gradient of solutions of elliptic differential equations. M. S. 21 (1967), 17-37.

[11] Ju. P. Krasovski. Isolation of the singularity in Green's function. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Math. 31 (1967), 977-1010.

[12] J. A. Gatica, V. Oliker and P. Waltman. Singular nonlinear boundary value problems for second order differential equations. J. Differential Equations 79 (1989), 62-78.

[13] Gui-Lin Courant. Institute of Mathematical Sciences, New York University, 251 Mercer St, New York, NY 10012, U.S.A.

[14] G. M. Lieberman. Boundary and initial regularity for solutions of degenerate parabolic equations. Nonlinear Anal., 20(5) :551–569, 1993.

[15] J. Giacomoni, I. Schindler, and P. Takác. Sobolev versus Hölder local minimizers and existence of multiple solutions for a singular quasilinear equation. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), 6(1) :117–158, 2007.