République Algérienne Démocratique Et Populaire
Université Mohamed Boudiaf De M'sila
Faculté Des Mathématiques Et De L'informatique
Département De Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Par

NAOUMI NADJOUA

Sujet

Sur les espaces de Morrey de type de Besov

Devant le jury :

Mr. Heraiz Rabah	M.C.A. Univ. de M'sila	Président
Mr. Djeriou Aissa	M.C.A. Univ. de M'sila	Rapporteur
Mr. Seghiri Fakhreddine	M.A.A. Univ. de M'sila	Examinateur

Promotion : 2020 / 2021

Table des matières

Remerciements

Je ne peux pas commencer et terminer mon travail sans remercier le plus grands et le plus puissant "Allah" pour m'avoir béni pour terminer ce mémoire. Je voudrais exprimer mon sincère gratitude à mon superviseur le professeur Aissa Djeriou pour le soutien, pour sa patience, pour ses conseils m'a aidé tout le temps de recherche et écriture de ce souvenir. Toute la gratitude au président du jury professeur Rabah Heraiz et le professeur des examinateurs Fakhreddine Seghiri pour avoir consacré leur temps et leurs efforts à lire et examinez mon travail. Je suis très reconnaissant à ma mère et à mon père. Leurs prières, des encouragements passionnés et des générosités m'ont suivi partout pour donner moi beaucoup de puissance. Mes sincères remerciements à mes chers sœurs et frères. tu étais le principaux soutiens de moi tout au long de mon étude, je vous en suis profondément reconnaissant. Mes remerciements à tous les membres de la famille pour leur encouragement pendant mes études.

Merci

Notation

- $\mathbb{N}$ est la collection de tous les nombres naturals.
- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble de tout les nombres entiers.
- $\mathbb{R}^n$ est l'espace Euclidien.
- $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad \alpha_i \in \mathbb{N}_0, i = 1, \cdots, n.$
- Si $J \in \mathbb{Z}$, alors on pose $J^+ = \max(0, J)$.
- $D^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}$.
- Le produit scalaire de $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n), i = 1, \cdots, n$ est définie par :

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i.$$

- $|B|$ la mesure de Lebesgue de $B \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Soient X_1 et X_2 deux espaces. $X_1 \hookrightarrow X_2$ s'il existe $c > 0$, telle que :

$$\|f\|_{X_2} \leq c \|f\|_{X_1}, \quad \forall f \in X_1.$$

- p' est l'exposant conjugué de p oú $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.
- Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. supp f est le support de f :

$$\text{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \neq 0\}}.$$

- $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^n$, intégrables sur tout compact de $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonction $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact. $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est le dual de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, appelé espace des distribution sur $\mathbb{R}^n$.

- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^n$ muni de semi norme classique

$$p_M(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{|\alpha|\leq M} (1+|x|)^M \left|\partial^\alpha f\right|, \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Le dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distribution tempérées.

- Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sa transformée de Fourier est

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx$$

et sa transformée de Fourier inverse est

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} f(\xi)d\xi$$

- $B(x,r)$ est la boule de centre x et de rayon r

$$B(x,r) = \left\{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| < r\right\}.$$

- La fonction caractéristique d'un ensemble E et notée par

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Introduction

En 1938, Morrey [14] a introduit les classes $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ qui sont des généralisations des espaces de Lebesgue ordinaires, puisque $\mathcal{M}_q^q(\mathbb{R}^n) = L^q(\mathbb{R}^n)$. Nous aimerions ensuite mentionner les travaux de John et Nirenberg, qui ont introduit BMO en 1961 (voir [10]). Au début des années soixante, dans une série d'articles [5, 6, 7], Campanato a introduit et étudié les espaces $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, qui portent aujourd'hui son nom ; voir aussi Meyers [13]. Ces dernières années, les espaces de douceur liés à les espaces de Morrey, en particulier les espaces de Morrey de type de Besov et de type Triebel-Lizorkin, ont attiré une certaine attention.

Les espaces non homogène de Morrey de type de Besov $MB_{p,q}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n), 0 < q \leq p \leq \infty, 1 < \beta \leq \infty$, ont été étudiés pour la première fois par Kozono et Yamazaki [11] en lien avec des applications à l'équation de Navier-Stokes. Egalement en relation avec des applications pour EDP, la version homogène $M\dot{B}_{p,q}^{s,\beta}, 0 < q \leq p \leq \infty, 1 < \beta \leq \infty$, ont été étudiées par Mazzucato [12].

Dans ce mémoire, on a basée sur le travail du Tang et Xu [23], qu'ils ont étudié les espaces de Morrey de type de Besov et de type Triebel-Lizorkin non homogène, où ils donnent certain normes equivalent.

Le but de ce mémoire est d'étudie les propriétés principaux de ces espaces. Plus précisément la caractérisation par la fonction maximale de Peetre. Le mémoire se divise en trois chapitres.

Le premier chapitre est constitué des notions fondamentales sur quelques espaces fonctionnels et inégalités qui seront utilisés dans les chapitres suivants.

Dans le deuxième chapitre on donne les défnitions et les propriétés des espaces de Morrey $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$, quelques lemmes quíon utilisera par la suite et en termine par étudie la continuité de la fonction maximale de Hardy-Littlewood et de Peetre sur ces espaces.

Dans le troisième chapitre on donne une caractérisation pour les espaces de Morrey de type de Besov par la fonction maximale de Peetre et autre Normes équivalente.

Chapitre 1

Quelques resultats préliminaires

L'objectif de ce chapitre est de rappeler les notions essentielles, dans le cadre générale quelques propriétés sur certains espaces fonctionnels, les séries de Littlewood-Paley, et les outils que nous aurons à utiliser dans ce mémoire. Nous rappelons aussi quelques inégalités classiques de l'analyse harmonique.

1.1 Décomposition de Littlewood-Paley

Soit $\Phi(\mathbb{R}^n)$ la collection de tous les systèmes $\phi = \{\phi_j\}_{j=0}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de la fonction paire à valeur réelle par rapport à l'origine, telle que $\phi_j(x) = \phi_j(-x)$ si $x \in \operatorname{supp} \phi_j$ où

$$\operatorname{supp} \phi_0 \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2\}$$

et

$$\operatorname{supp} \phi_j \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n : 2^{j-1} \leq |x| \leq 2^{j+1}\right\} \quad \text{pour} \quad j = 0, 1, \ldots,$$

pour chaque multi-index α il existe un nombre positif C_α tel que

$$2^{j|\alpha|} |D^\alpha \phi_j(x)| \leq C_\alpha \text{ pour tous } j = 0, 1, \ldots, \text{ et tout } x \in \mathbb{R}^n,$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j(x) = 1$$

est appellée la partition de l'unité.

A cette partition, on associe une suite d'opérateurs de convolutions $\Delta_j : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$, définis par

$$\mathcal{F}(\Delta_j f)(\xi) = \phi_j(\xi) \hat{f}(\xi), \quad \text{pour} \quad j = 0, 1, \ldots$$

Pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, la décomposition de Littlewood-Paley de f est

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j f.$$

Cette série est converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Exemple 1.1

Soit $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ une fonction, telle que $0 \leq \varphi_0(x) \leq 1$ et

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| \leq 1 \\ 0 & , \quad |x| \geq 2 \end{cases}.$$

On pose

$$\begin{array}{rcl} \varphi_0(x) & = & \varphi_0(x) \\ \varphi_1(x) & = & \varphi_0\left(\frac{x}{2}\right) - \varphi_0(x) \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \varphi_j(x) & = & \varphi_1\left(2^{1-j}x\right), \qquad j = 2, 3, .. \end{array}$$

alors ce systeme est une décomposition de l'unité, où

$$\operatorname{supp} \varphi_j \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n : 2^{j-1} \leq |x| \leq 2^{j+1}\right\}.$$

1.2 Définition de certains espaces fonctionnels

Définition 1.1

Un espace vectoriel E est dit quasi-Banach s'il est complet pour la métrique $d(x, y) = \|x - y\|$, avec $\|\cdot\| : E \to [0, +\infty[$ est une quasi-norme c'est- $\bar{a}$ -dire une fonction qui vérifie les propriétés suivantes :

1. *$\|x\| = 0$ si est seulement si $x = 0$.*
2. *$\forall x \in E, \forall a \in \mathbb{K} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}) : \|ax\| = |a|\|x\|$.*
3. *$\exists k \geq 1$, tel que $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq k(\|x\| + \|y\|)$.*

Remarque 1.1

Si $k = 1$, la quasi-norme $\|.\|$ soit une norme et l'espace E soit de Banach.

1.2.1 Les espaces de suites p-sommable

Définition 1.2

Soit $0 < p \leq \infty$. On appelle $\ell^p(\mathbb{N})$ l'espace de suites $\{f_j\}_{j\geq 0}$ à valeurs réelles ou complexes telles que

$$\left\|\{f_j\}_{j\geq 0} \mid \ell^p(\mathbb{N})\right\| = \left(\sum_{j\geq 0} |f_j|^p\right)^{1/p} < \infty, \quad si \quad 0 < p < \infty$$

et

$$\left\|\{f_j\}_{j\geq 0} \mid \ell^\infty(\mathbb{N})\right\| = \sup_{j\in\mathbb{N}_0} |f_j| < \infty$$

Ces espaces sont des Banach.

Théorème 1.1

Si $0 < p \leq q \leq \infty$, alors on a $\ell^p \hookrightarrow \ell^q$.

1.2.2 Les espaces de Lebesgue

Définition 1.3

Soient $0 < p \leq \infty$ et $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. On pose $L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C}$, telle que f mesurable et $\|f \mid L^p(\Omega)\| < \infty\}$, avec

$$\|f \mid L^p(\Omega)\| = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, \quad si \quad 0 < p < \infty$$

et

$$\sup_{x\in\Omega} \operatorname{ess} |f(x)|, \quad si \quad p = \infty.$$

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, on pose $L^p(\mathbb{R}^n) = L^p$. Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$

Définition 1.4

Si Ω est un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$, nous écrivons

$$L^{q,\Omega} = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} \mathcal{F}f \subset \Omega, \|f|L^q\| < \infty\}$$

Proposition 1.1 (*Inégalité de Hölder*)

Soient $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^{q'}(\mathbb{R}^n)$, avec $1 \leq q, q' \leq \infty$ et $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'} = 1$. Alors $f\cdot g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

et

$$\left\| f \cdot g | L^1(\mathbb{R}^n) \right\| \leq \| f | L^q(\mathbb{R}^n) \| \left\| g | L^{q'}(\mathbb{R}^n) \right\|.$$

Proposition 1.2 (***Inégalité de Minkowski***)

Soient $f, g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ *et* $1 \leq q \leq \infty$. *Alors* $f + g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ *et*

$$\| f + g | L^q(\mathbb{R}^n) \| \leq \| f | L^q(\mathbb{R}^n) \| + \| g | L^q(\mathbb{R}^n) \| .$$

Théorème 1.2 (***Inégalité de Minkowski généralisée***)

Soient $0 < \gamma \leq \beta \leq \infty$ *et* $\{f_j\}_{j=0}^{\infty} \subset L^{\gamma}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, *alors on a*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_j(x)|^{\gamma} dy \right)^{\beta/\gamma} dx \right)^{1/\beta} \leq c \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)|^{\beta} dx \right)^{\gamma/\beta} dy \right)^{1/\gamma}.$$

1.2.3 Les espace de Bessel

Définition 1.5

Soient $s \in \mathbb{R}$ *et* $0 < p \leq \infty$. *L'espace* $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ *est l'ensemble de toutes les fonctions* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *telles que*

$$\| f | H^s_p(\mathbb{R}^n) \| = \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\left(1 + |\xi|^2 \right)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F} f(\xi)(.) \right] \right\|_p < \infty.$$

1.2.4 Les espace de Zygmund

Définition 1.6

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. *L'espace* $\mathcal{Z}^m(\mathbb{R}^n)$ *est l'ensemble de toutes les fonctions* $f \in C^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ *telles que* $\|f\|_{\mathcal{Z}^m(\mathbb{R}^n)} < \infty$, *avec*

$$\|f\|_{Z^m(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{\mathcal{C}^{m-1}(\mathbb{R}^n)} + \max_{|\alpha|=m} \sup_{h \neq 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|\partial^{\alpha} f(x+2h) - 2f\partial^{\alpha}(x+h) + \partial^{\alpha} f(x)|}{|h|}.$$

1.2.5 Les espace de Hölder

Définition 1.7

Soient $m \in \mathbb{N}$ et $m < s < m+1$. L'espace $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble de toutes les fonctions $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\|f\|_{\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{c^m(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=m} \sup_{x \neq y} \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|}{|x-y|^{s-m}} < \infty.$$

1.2.6 Les espace de Sobolev

Définition 1.8

Soient $p \in [1, \infty[$ et $s \in \mathbb{N}^*$. L'espace de Sobolev $W_p^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble de toutes les fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ telles que $\partial^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $|\alpha| \leq s$.

L'espace de Sobolev est normé par $\|f|W_p^s(\mathbb{R}^n)\| = \sum_{|\alpha| \leq s} \|\partial^\alpha f\|_p$.

1.2.7 Les espaces de Slobodeckij

Définition 1.9

Soient $p \in [1, \infty[$, $s \in]0, \infty[$ non entier et $m \in \mathbb{N}$ tels que $s \in]m, m+1[$. L'espace de Slobodeckij est l'espace de toutes les fonctions $f \in W_p^m(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\|f\|_{W_p^s(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\alpha|=m} \left(\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|^p}{|x-y|^{n+(m+1-s)p}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

1.2.8 Les espaces de Besov et de type Besov

Définition 1.10

Soient $s \in \mathbb{R}$ et $0 \leq p, q \leq +\infty$. L'espace de Besov noté $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ telles que $\|f|B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)\| < \infty$, avec

$$\|f|B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)\| := \left\| \left\{ 2^{sj} \|\Delta_j f|L^p(\mathbb{R}^n)\| \right\}_{j \in \mathbb{N}_0} |\ell_q \right\|,$$

avec les modifications habituelles lorsque $p = \infty$ et / ou $q = \infty$

Définition 1.11 (***Espace de type Besov***)

Soient $s \in \mathbb{R}$, $J \in \mathbb{Z}$, $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$ et $0 \leq \tau < \infty$. L'espace de type Besov $B_{p,q}^{s,\tau}$, est l'ensemble des $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\left\| f | B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n) \right\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, J \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|B(x, 2^{-J})|^{\tau}} \left\| \left\{ 2^{js} \left\| \Delta_j f | L^p(B(x, 2^{-J})) \right\| \right\}_{j \geq J^+} |\ell^q \right\| < \infty,$$

avec les modifications habituelles lorsque $p = \infty$ et / ou $q = \infty$.

Proposition 1.3

Les espaces $B_{p,q}^{s}(\mathbb{R}^n)$ et $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ sont des quasi-Banach pour $0 < p, q < 1$, et des Banach pour $p, q \in [1, +\infty]$.

Remarque 1.2

Les espaces $B_{p,q}^{s}$ et $B_{p,q}^{s,\tau}(\mathbb{R}^n)$ sont indépendants du choix de la fonction ϕ_j.

Démonstration : Voir [26, 27]. ■

1.3 La fonction maximale

La fonction maximale est un outil important pour caractériser certains espaces fonctionnel. Nous allons rappeler quelques propriétés de cette fonction.

Définition 1.12

Pour tout fonction f localement intégnable, on définit la fonction maxi- male par

$$Mg(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |g(y)| dy \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Si $t \in (0, \infty)$, alors nous définissons $M_t g(x) = \left[M|g|^t \right]^{1/t}(x)$ pour les $x \in \mathbb{R}^n$.

Proposition 1.4

Soit $1 < p < \infty$ et $1 < q \leq \infty$. Alors

(i) Si $\theta \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\left| \left(t^{-n} \theta\left(\frac{\cdot}{t}\right) \right) * g(x) \right| \leq \|\theta\|_1 Mg(x), \qquad (\forall t > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n).$$

(ii) Il existe une constante $c = c(n, p) > 0$ telle que pour tout $g \in L^p$ on a

$$\|Mg\|_p \leq c \|g\|_p .$$

(iii) Il existe une constante $c > 0$ telle que l'inégalité suivante

$$\Big\|\Big(\sum_{j=0}^{\infty} (Mg_j)^q\Big)^{1/q}\Big\|_p \leq c \,\Big\|\Big(\sum_{j=0}^{\infty} |g_j|^q\Big)^{1/q}\Big\|_p$$

est vérifiée, pour toute suite des fonctions de distributions $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ localement Lebesgue-intégrables.

Démonstration : Voir par exemple [22, p. 55-57] et [17, p. 21] ou [26, p. 89]. ■

Proposition 1.5

Soient $0 < t, b < \infty$ et f une fonction telle que $\operatorname{supp}\widehat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq b\}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \frac{|f(x-y)|}{(1+|y|)^{n/t}} \leq c\,(M_t f(x)) .$$

Démonstration : Voir [21, Théorème 1.3.1]. ■

1.4 Interpolation

Théorème 1.3 (*Théorème de Riesz-Thorin*)

Soient $(X, \mu), (Y, \nu)$ deux espaces mesurés et $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty]$ avec $p_0 \neq p_1, q_0 \neq q_1$. On suppose que T est un opérateur qui renvoie $L^{p_0}(X, \mu)$ dans $L^{q_0}(Y, \nu)$ et $L^{p_1}(X, \mu)$ dans $L^{q_1}(Y, \nu)$ tel que, pour tout fonction simples f :

$$\|Tf\,|L^{q_i}\| \leq C_i \|\, f|\, L^{p_i}\| \quad (i = 0, 1)$$

Alors T renvoie $[L^{p_0}, L^{p_1}]_\theta = L^p$ dans $[L^{q_0}, L^{q_1}]_\theta = L^q$ tels que $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$ et $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\theta}{q_0} + \dfrac{\theta}{q_1}$. $(0 < \theta < 1)$ de plus

$$\Big\|Tf\Big|L^q\Big\| \leq C_0^{1-\theta} C_1^{\theta} \Big\|\, f\Big|\, L^p\Big\|$$

Démonstration Preuve : Voir [4, 24]. ■

Chapitre 2

Définitions et quelques propriétés des espaces de Morrey

Nous allons rappeler la définition des espaces de Morrey qu'ils ont été introduits par Morrey en 1938 (voir[14]) et qui font partie de la classe la plus large des espaces Morrey-Campanato, cf. [15]. Ils peuvent être considérés comme un complément aux espaces $L^q(\mathbb{R}^n)$.

2.1 Définition et quelques propriétés des espaces de Morrey

2.1.1 Espace de Morrey

Il existe plusieurs notations pour désigner les espaces de Morrey mais nous utilisons la lettre $\mathcal{M}$ au lieu de $\mathcal{L}$ de manière cohérente dans ce mémoire.

Définition 2.1

Soient $0 < q < \infty, n \geqslant 1$ et $0 < \lambda < n$, l'espace de Morrey $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions $f \in L^q_{Loc}(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\left\| f|\mathcal{L}^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)\right\| := \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} |B|^{-\frac{\lambda}{q}} \left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^q dy \right)^{1/q} < \infty.$$

Remarque 2.1

1. *On a $\mathcal{L}^{q,0}(\mathbb{R}^n) = L^q(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{L}^{q,n}(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$*
2. *Pour $1 < q < \infty$ et $\lambda > n$, on a $\mathcal{L}^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \{0\}$*
3. *La notation $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ a été utilisée par Peetre [15].*

Pour $\lambda = \left(1 - \frac{q}{p}\right)$ on trouve la définition qui nous utilisons dans ce mémoire .

Définition 2.2

Soient $0 < q \leq p \leq \infty$. L'espace de Morrey $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions $f \in L_{Loc}^q(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\left\| f|\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)\right\| := \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(x,r)|^{1/p-1/q} \left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^q dy\right)^{1/q} < \infty.$$

Remarque 2.2

- *Les espaces $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ sont des quasi-Banach pour $0 < q \leq p < 1$ et des Banach pour $p \geq q \geq 1$.*
- *Si $0 < p < q < \infty$, alors $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n) = \{0\}$.*

Exemple 2.1

Soient $1 < q \leq p \leq \infty$ et B être une balle ouverte. Alors

$$\chi_B \in \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n). \tag{2.1}$$

D'une part, par le théorème 2.1 et 2.3 on a

$$\left\|\chi_B|\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)\right\| \leq c\left\|\chi_B|\mathcal{M}_p^p(\mathbb{R}^n)\right\| = c\left\|\chi_B|L^p(\mathbb{R}^n)\right\|. \tag{2.2}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\left\|\chi_B|\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)\right\| &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(x,r)|^{1/p-1/q} \left(\int_{B(x,r)} |\chi_B(y)|^q dy\right)^{1/q} \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(x,r)|^{1/p-1/q} |B(x,r)\cap B|^{1/q} \\ &\geq c\,|B|^{1/p} = c\left\|\chi_B|L^p(\mathbb{R}^n)\right\|. \end{aligned} \tag{2.3}$$

En combinant (2.2) et (2.3), nous obtenons (2.1).

2.1.2 Propriétés de base

Dans cette sous-section, on va donnée certains propriétés des espaces de Morrey.

Théorème 2.1 ([19])

Soit $0 < p \leq \infty$ *, alors*

$$\mathcal{M}_p^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n).$$

Démonstration : **Etape 1.** Nous prouvons qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\left\| f|\mathcal{M}_p^p(\mathbb{R}^n) \right\| \leq c \, \| f|L^p(\mathbb{R}^n) \| \tag{2.4}$$

Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Alors

$$\| f|\mathcal{M}_p^p(\mathbb{R}^n) \| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(x,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p}} \| f|L^p(B(x,r)) \| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \| f|L^p(B(x,r)) \|$$

et on a :

$$\| f|\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n) \| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} = \| f|L^p(\mathbb{R}^n) \|. \tag{2.5}$$

Etape 2. Nous prouvons l'assertion inverse de (2.4). Soit $f \in \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$, alors, par le théorème de convergence monotone, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\| f|L^p(\mathbb{R}^n) \| = \lim_{m\to\infty} \| f|L^p(B(x,m)) \| \leq \sup_{r>0} \| f|L^p(B(x,r)) \| = \| f|\mathcal{M}_P^p(\mathbb{R}^n) \|. \tag{2.6}$$

En combinant (2.5) et (2.6), on obtenons le résultat souhaité. ∎

Théorème 2.2 ([19])

Pour tout $0 < q \leq p \leq \infty$*, on a*

$$\| \, f(b\cdot)|\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n) \, \| = b^{-\frac{n}{p}} \, \| \, f|\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n) \, \|,$$

pour tout $b > 0$ *et* $f \in \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration : Par le changement de variables $z = by$ et comme $b^n|B(x,r)| = |B(bx,br)|$, nous avons

$$\begin{aligned}
\| \, f(b\cdot)|\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n) \, \| &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(x,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_{B(x,r)} |f(by)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} b^{-\frac{n}{p}} |B(bx,br)|^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{b^{-n}|B(bx,br)|} \int_{B(bx,br)} |f(z)|^q b^{-n} dz \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= b^{-\frac{n}{p}} \, \| \, f|\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n) \, \| .
\end{aligned}$$

∎

Théorème 2.3 ([19])

Si $1 < q_1 \leq q_0 \leq p \leq \infty$, *on a*

$$\| f|\mathcal{M}^p_{q_1}(\mathbb{R}^n) \| \leq \| f|\mathcal{M}^p_{q_0}(\mathbb{R}^n) \| .$$

En particulier,

$$\mathcal{M}^p_{q_0}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{M}^p_{q_1}(\mathbb{R}^n).$$

Démonstration : Comme $q_1 \leq q_0$, alors

$$\begin{aligned} \| f|\mathcal{M}^p_{q_1}(\mathbb{R}^n) \| &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(x,r)|^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q_1}} \Big(\int_{B(x,r)} |f(y)|^{q_1} dy \Big)^{\frac{1}{q_1}} \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(x,r)|^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q_0}} \Big(\int_{B(x,r)} |f(y)|^{q_1} dy \Big)^{\frac{1}{q_1}}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Par l'inégalité de Hölder, nous avons

$$\Big(\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|^{q_1} dy \Big)^{\frac{1}{q_1}} \leq \Big(\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|^{q_0} dy \Big)^{\frac{1}{q_0}}. \tag{2.8}$$

Ainsi, en insérant l'inégalité (2.8) dans (2.7) , on obtient le résultat désiré. ■

L'interpolation sert comme outil fort pour l'étude de la continuité d'un opérateur linéaire. Nous rappelons les résultats connus sur l'interpolation des espaces de Morrey.

Théorème 2.4 ([16])

Soit $1 < q_0 \leq p_0 < \infty$ *et* $1 < q_1 \leq p_1 < \infty$. *Soit* $0 < \theta < 1$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ *et* $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$. *Alors :*

1. *On a* $\left[\mathcal{M}^{p_0}_{q_0}(\mathbb{R}^n), \mathcal{M}^{p_1}_{q_1}(\mathbb{R}^n)\right]_\theta \subset \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ *(interpolation complexe)*
2. *On a* $\left[\mathcal{M}^{p_0}_{q_0}(\mathbb{R}^n), \mathcal{M}^{p_1}_{q_1}(\mathbb{R}^n)\right]_\theta = \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ *si et seulement si* $\frac{p_0}{q_0} = \frac{p_1}{q_1}$
3. *On a* $\left[\mathcal{M}^{p_0}_{q_0}(\mathbb{R}^n), \mathcal{M}^{p_1}_{q_1}(\mathbb{R}^n)\right]_{\theta,p} \subset \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ *(interpolation réelle)*
4. *On a* $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) \subset \left[\mathcal{M}^{p_0}_{q_0}(\mathbb{R}^n), \mathcal{M}^{p_1}_{q_1}(\mathbb{R}^n)\right]_{\theta,\infty}$ *si et seulement si* $\frac{p_0}{q_0} = \frac{p_1}{q_1}$
5. $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) \subset \left[\mathcal{M}^{p_0}_{q_0}(\mathbb{R}^n), \mathcal{M}^{p_1}_{q_1}(\mathbb{R}^n)\right]_{\theta,\infty} \subset \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ *si et seulement si* $q_0 = q_1$.

2.2 Étude de la continuité de certains fonctions sur les espaces de Morrey

Les fonction maximale de Hardy-Littlewood et de Peetre ils jouent un rôle très important en analyse harmonique.

2.2.1 Continuité de la fonction maximale

Dans cette sous-section, on va étudié la continuité de la fonction maximale de Hardy-Littlewood sur les espaces de Morrey.

Théorème 2.5 (*[23]*)

Soit $1 < \beta < \infty$ *et* $1 < q \leq p \leq \infty$. *Si* $\{f_j\}_{j=0}^{\infty}$ *une suite de fonctions localement intégrables sur* $\mathbb{R}^n$, *alors il existe une constante* $c > 0$, *telle que*

$$\left\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} |Mf_j|^\beta \Big)^{\frac{1}{\beta}} | \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n) \right\| \leq c \left\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^\beta \Big)^{\frac{1}{\beta}} | \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n) \right\|,$$

où la constante c *est indépendante de* $\{f_j\}_{j=0}^{\infty}$.

Démonstration : Soit $\Big(\sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^\beta \Big)^{1/\beta} \in \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$f_j(x) = f_j^0(x) + \sum_{i=1}^{\infty} f_j^i(x),$$

où $f_j^0 = \chi_{B(x_0,2r)} f_j$, $f_j^i = \chi_{B(x_0,2^{i+1}r)\setminus B(x_0,2^i r)} f_j$ pour $i \geq 1$. Par la proposition 1.4 , on a

$$\begin{aligned} \left\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \left|Mf_j^0\right|^\beta \Big)^{\frac{1}{\beta}} | L^q(\mathbb{R}^n) \right\| &\leq C \left\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \left|f_j^0\right|^\beta \Big)^{\frac{1}{\beta}} | L^q(\mathbb{R}^n) \right\| \\ &\leq C r^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \left\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^\beta \Big)^{\frac{1}{\beta}} | \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n) \right\|. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left[\int_{B(x_0,r)} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} M^\beta \left(f_j^0\right)(x) \Big)^{q/\beta} dx \right]^{1/q} &\leq \left\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \left|Mf_j^0\right|^\beta \Big)^{\frac{1}{p}} | L^q(\mathbb{R}^n) \right\| \\ &\leq C r^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \left\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^\beta \Big)^{\frac{1}{\beta}} | \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n) \right\|. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\left\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} |Mf_j^0|^\beta \Big)^{\frac{1}{\beta}} | \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n) \right\| \leq C \left\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^\beta \Big)^{\frac{1}{\beta}} | \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n) \right\|.$$

Il reste à estimer $\Big(\sum_{j=0}^{\infty}|Mf_j^i(x)|^\beta\Big)^{1/\beta}$ sur $B(x_0,r)$. Pour $i\geq 1$ et $x\in B(x_0,r)$, par l'inégalité de Minkowski généralisée, on a

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}|Mf_j^i(x)|^\beta\Big)^{1/\beta} &\leq C\Big[\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\left(2^ir\right)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}|f_j^i(y)|dy\Big)^\beta\Big]^{1/\beta}\\ &\leq C\left(2^ir\right)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}|f_j^i(y)|^\beta\Big)^{1/\beta}dy\end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}\Big[\int_{B(x_0,r)}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}M^\beta\Big(\sum_{i=1}^{\infty}f_j^i(x)\Big)\Big)^{q/\beta}dx\Big]^{1/q} &\leq \Big[\int_{B(x_0,r)}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{\infty}M\left(f_j^i\right)(x)\Big)^\beta\Big)^{q/\beta}dx\Big]^{1/q}\\ &\leq \Big[\int_{B(x_0,r)}\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}M^\beta\left(f_j^i\right)(x)\Big)^{1/\beta}\Big)^{q}dx\Big]^{1/q}\\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty}\Big[\int_{B(x_0,r)}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}M^\beta\left(f_j^i\right)(x)\Big)^{q/\beta}dx\Big]^{1/q}\\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty}\left(2^i\right)^{-n/q}\Big[\int_{B(x_0,2^{i+1}r)}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}|f_j(x)|^\beta\Big)^{q/\beta}dx\Big]^{1/q}\\ &\leq C\sum_{i=1}^{\infty}\left(2^i\right)^{-\frac{n}{p}}r^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)n}\Big\|\Big(\sum_{j=0}^{\infty}|f_j|^\beta\Big)^{\frac{1}{p}}|\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)\Big\|.\end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons

$$\Big\|\sum_{j=0}^{\infty}\Big(M^\beta\Big(\sum_{i=1}^{\infty}f_j^i\Big)\Big)^{\frac{1}{\beta}}|\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)\Big\|\leq C\Big\|\Big(\sum_{j=0}^{\infty}|f_j|^\beta\Big)^{\frac{1}{\beta}}|\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)\Big\|.$$

Donc le théorème 2.5 a été prouvé. ∎

Remarque 2.1

Nous remarquons que lorsque $\beta=\infty$, le théorème 2.5 est également vrai. En effet, soit $\overline{M}_\infty f(x)=\sup_j|Mf_j(x)|$, alors $\overline{M}_\infty f\leq M\left(|f|_\infty\right)$.

Corollaire 2.1

Soit $1<\beta<\infty$ et $1<q\leq p<\infty$. Alors il existe une constante $c>0$, telle que

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\Big\|Mf_j|\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)\Big\|^\beta\Big)^{\frac{1}{\beta}}\leq c\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\Big\|f_j|\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)\Big\|^\beta\Big)^{\frac{1}{\beta}}$$

pour chaque suite de fonctions mesurables $\{f_j\}_{j=0}^{\infty}$.

Corollaire 2.2

Si $0 < t < q \leq p < \infty$ *et* $t < \beta < \infty$*. Alors il existe une constante* $c > 0$ *telle que*

$$\left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} |M_t f_j|^{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}} |\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n) \right\| \leq c \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}} |\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n) \right\|$$

pour chaque suite de fonctions mesurables $\{f_j\}_{j=0}^{\infty}$.

2.2.2 Continuité de la fonction maximale de Peetre

Dans cette sous-section, on va étudié la continuité de la fonction maximale de Peetre sur les espaces de Morrey.

Définition 2.3

Soit $0 < q \leq \infty$*. Si* Ω *est un ensemble compact de* $\mathbb{R}^n$*, nous écrivons*

$$L^{q,\Omega} = \{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} \mathcal{F} f \subset \Omega, \| f | L^q \| < \infty \}$$

Définition 2.4

Soit $0 < \beta \leq \infty$ *et* $0 < q \leq p < \infty$*. On appelle* $M_{p,q}^{\beta}$ *l'espace des suites des fonctions* $\{f_j\}_{j=0}^{\infty} \subseteq L_{loc}^q(\mathbb{R}^n)$*, qui vérifie*

$$\left\| f_j | M_{p,q}^{\beta} \right\| = \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^{\beta} \right)^{1/\beta} |\mathcal{M}_q^p \right\| < \infty.$$

Définition 2.5

Soit $0 < \beta \leq \infty$, $0 < q \leq p < \infty$ *et* $\Omega = \{\Omega_j\}_{j=0}^{\infty}$ *est une suite d'ensembles compacts sur* $\mathbb{R}^n$*. Si* $f_j \in L^{q,\Omega_j}$ *pour* $j \in \mathbb{N}_0$*, alors on note par* $M_{p,q}^{\beta,\Omega}$ *l'ensemble des suites des fonctions* $\{f_j\}_{j=0}^{\infty} \in M_{p,q}^{\beta,\Omega}$.

Théorème 2.6 ([23])

Soit $0 < q \leq p < \infty, 0 < \beta \leq \infty$*, et* $\Omega = \{\Omega_j\}_{j=0}^{\infty}$ *une suite d'ensembles compacts* $f_j \in L^{q,\Omega_j}$*,* $j \in \mathbb{N}_0$*. Soit* $d_j > 0$ *le rayon de* Ω_j*. Si* $0 < t < \min\{q, \beta\}$*, alors il existe une constante* C *telle que*

(i)

$$\left\| \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \frac{|f_j(\cdot - z)|}{1+|d_j z|^{\frac{n}{t}}} | M_{p,q}^{\beta} \right\| \leq C \left\| f_j | M_{p,q}^{\beta} \right\|$$

(ii)

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} \left\| \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \frac{|f_j(\cdot - z)|}{1+|d_j z|^{\frac{n}{t}}} | \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n) \right\|^{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}} \leq C \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}} | \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n) \right\|$$

Démonstration : Nous prouvons seulement (i). Pour (ii) peut être obtenu en interchangeant $\|\cdot|\ell_\beta\|$ et $\|\cdot|\mathcal{M}_q^p\|$ dans la preuve présentée ci-dessous.

Soint $\{f_j\}_{j=0}^{\infty} \in M_{p,q}^{\beta,\Omega}, y^j \in \Omega$ et $h_j(x) = e^{-ixy^j} f_j(x)$, alors nous avons

$$(\mathcal{F}h_j)(x) = (\mathcal{F}f_j)(x + y^j).$$

Par conséquent, supp $\mathcal{F}h_j \subset \Omega_j - y^j$.

Si $\{f_j\}_{j=0}^{\infty} \in M_{p,q}^{\beta,\Omega}, y^j \in \Omega$ satisfaisant (i) du théorème 2.6, alors $\{h_j\}_j$ font aussi, où Ω est remplacé par $\left\{\Omega_j - y^j\right\}_{j=0}^{\infty}$, et l'inverse est également valable. Ainsi, on peut laisser $0 \in \Omega_j$, il suffit de considérer le cas $\Omega_j = D_j = \{y : |y| \leq d_j\}$.

Deuxièmement, nous devons prouver que (ii) tient quand $\Omega_j = d_j = \{y : |y| \leq d_j\}$ et $d_j > 0$. Si $\{f_j\}_{j=0}^{\infty} \in M_{p,q}^{\beta,\Omega}$, $y^j \in \Omega$, puis $f_j \in L^{q,\Omega_j}$. Si $g_j(x) = f_j\left(d^{-1}x\right)$, alors $(\mathcal{F}g_j)(x) = d_j^n (\mathcal{F}f_j)(d_j x)$ et supp $\mathcal{F}g_j \subset \{y : |y| \leq 1\}$.

Par la proposition 1.5, on a

$$\frac{|f_j(x-z)|}{1+|d_j z|^{\frac{n}{t}}} \leq C \left[M\left(|f_j|^t\right)(x)\right]^{\frac{1}{t}} \quad \text{pour tous} \quad x, z \in \mathbb{R}^n \tag{2.9}$$

où la constante C est indépendante de x, z, j. Si $0 < \beta < \infty$, alors par (2.9)

$$\left\| \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \frac{|f_j(\cdot - z)|}{1+|d_j z|^{\frac{n}{t}}} | M_{p,q}^{\beta} \right\| \leq C \left\| \left[M\left(|f_j|^t\right)\right]^{\frac{1}{t}} | M_{p,q}^{\beta} \right\| = C \left\| M\left(|f_j|^t\right) | M_{p/t,q/t}^{\beta/t} \right\|^{\frac{1}{t}}$$

Puisque $0 < t < \min\{q, \beta\}$, on a $p/t \geq q/t > 1, \beta/t > 1$. Par le théorème 2.5,

$$\left\| \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \frac{|f_j(\cdot - z)|}{1+|d_j z|^{\frac{1}{t}}} | M_{p,q}^{\beta} \right\| \leq C \left\| [M(|f_j|)] | M_{p,q}^{\beta} \right\| \leq C \left\| f_j | M_{p,q}^{\beta} \right\|$$

Si $\beta = \infty$, par (2.9), on a

$$\sup_{j\in\mathbb{N}_0} \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \frac{|f_j(x-z)|}{1+|d_j z|^{\frac{1}{n}}} \leq C \sup_j \left[M\left(|f_j|^t\right)(x)\right]^{\frac{1}{t}} \leq C\Big[M\Big(\sup_j |f_j|^t\Big)(x)\Big]^{\frac{1}{t}}.$$

Ainsi,

$$\left\| \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \frac{|f_j(\cdot - z)|}{1+|d_j z|^{\frac{n}{t}}} | \mathcal{M}_q^p \right\| \leq C \left\| \sup_j \left[M\left(|f_j|^t\right)\right]^{\frac{1}{t}} | \mathcal{M}_q^p \right\| \leq C \left\| M\Big(\sup_j |f_j|^t\Big) | \mathcal{M}_{q/t}^{p/t} \right\|^{\frac{1}{t}}$$

En utilisant la remarque 2.1, nous obtenons

$$\left\| \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \frac{|f_j(\cdot - z)|}{1+|d_j z|^{\frac{1}{t}}} |\mathcal{M}_q^p \right\| \leq C \left\| \sup_j |f_j| \, |\mathcal{M}_q^p \right\|.$$

Ainsi (ii) est vrai quand $\beta = \infty$. ■

Par le théorème 2.6 et la preuve de Triebel en [25, page 31-32] , il est facile d'obtenir le théorème suivant.

Théorème 2.7 (*[23]*)

Soit $0 < q \leq p < \infty, 0 < \beta \leq \infty$, *soit* $\Omega = \{\Omega_j\}_{j=0}^{\infty}$ *une suite d'ensembles compacts sur* $\mathbb{R}^n$ *et* $f_j \in L^{q,\Omega_j}, j \in \mathbb{N}_0$. *Soit* $d_j > 0$ *le rayon de* Ω_j. *Si* $\nu > n/2 + n/\min\{q,\beta\}$, *alors existe une constante* C *telle cette*

$$\left\| \mathcal{F}^{-1}(M_j \mathcal{F} f_j) \right\|_{M_{p,q}^{\beta}} \leq C \sup_j \left\| M_j\left(d_j \cdot\right) \right\|_{H_2^{\nu}} \left\| f_j \right\|_{M_{p,q}^{\beta}}$$

et

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} \left\| \mathcal{F}^{-1}(M_j \mathcal{F} f_j) |\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n) \right\|^{\beta} \right)^{1/\beta} \leq C \sup_j \left\| M_j\left(d_j \cdot\right) \right\|_{H_2^{\nu}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left\| f_j |\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n) \right\|^{\beta} \right)^{1/\beta}$$

pour toute suite $\{M_j\}_{j=0}^{\infty} \in H_2^{\nu}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Chapitre 3

Espaces de Morrey de type de Besov

Nous allons rappeler la définition des espaces de Morrey de type Besov, ainsi que certaines propriétés, comme la coïncidence avec d'autres espaces, les inclusions des uns dans les autres, où les démonstrations se trouvent dans le livre de W. Yuan, W. Sickel et D. Yang. [27], on pourra aussi voir les articles [19, 20, 23].

3.1 Espace de Morrey de type de Besov

3.1.1 Définitions et premières propriétés

Présentons maintenant les espaces de Morrey de type de Besov.

Définition 3.1

Soient $s \in \mathbb{R}, 0 < \beta \leq \infty, 0 < q \leq p \leq \infty$ et $\phi = \{\phi_j\}_{j=0}^{\infty} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$. L'espace de Morrey de type de Besov noté $MB_{p,q}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble de toutes les fonctions $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ telles que $\|f|MB_{p,q}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n)\| < \infty$, avec

$$\|f|MB_{p,q}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n)\| := \left\| \left\{ 2^{sj} \left\| \Delta_j f | \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n) \right\| \right\}_{j \in \mathbb{N}_0} |\ell_\beta \right\|,$$

avec les modifications habituelles lorsque $p = \infty$ et / ou $q = \infty$.

Remarque 3.1

Pour tout $s \in \mathbb{R}$ nous avons

$$\begin{aligned}
\|f|MB_{p,q}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n)\| &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} |B(x,r)|^{1/p-1/q} \left(\sum_{j \geq 0} 2^{s\beta j} \left(\int_{B(x,r)} |\Delta_j\ f(x)|^q\, dx \right)^{\beta/q} \right)^{1/\beta}, \\
\|f|MB_{\infty,q}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n)\| &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} |B(x,r)|^{-1/q} \left(\sum_{j \geq 0} 2^{s\beta j} \left(\int_{B(x,r)} |\Delta_j\ f(x)|^q\, dx \right)^{\beta/q} \right)^{1/\beta}, \\
\|f|B_{\infty,\infty}^{s,\infty}(\mathbb{R}^n)\| &= \sup_{j \geq 0} 2^{sj} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\Delta_j f(x)| \right).
\end{aligned}$$

Remarque 3.2

1. $MB^{s,2}_{2,2} = B^s_{2,2}(\mathbb{R}^n) = H^s_2(\mathbb{R}^n)$.
2. $MB^{s,\infty}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n) = B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{Z}^s(\mathbb{R}^n), s \in \mathbb{N}$.
3. $MB^{s,\infty}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n) = B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n) = C^s(\mathbb{R}^n), s > 0$ *et* $s \notin \mathbb{N}$.
4. $MB^{s,p}_{p,p}(\mathbb{R}^n) = B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n) = W^s_p(\mathbb{R}^n), s \in \mathbb{N}^*$ *et* $1 \leq p < \infty$.
5. $MB^{0,p}_{p,p}(\mathbb{R}^n) = B^0_{p,p}(\mathbb{R}^n) = W^0_p(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}^p_p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$
6. $MB^{s,p}_{p,p}(\mathbb{R}^n) = B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n) = W^s_p(\mathbb{R}^n), s > 0,\ \mathrm{s} \notin \mathbb{N}$ *et* $1 \leq p < \infty$. $W^s_p(\mathbb{R}^n)$ *est l'espace de Slobodeckij.*

Théorème 3.1 *([23])*

Soit $\phi = \{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ *et* $\varphi = \{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{\infty} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$. *Si* $s \in \mathbb{R}, 0 < q \leq p \leq \infty$ *et* $0 < \beta \leq \infty$, *alors* $\|f|MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\|^{\phi}$ *et* $\|f|MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\|^{\varphi}$ *sont des quasi-normes équivalents sur* $MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration : Si $\varphi_{-1} = 0$, alors on a $\phi_j = \phi_j \sum_{k=-1}^{1} \varphi_{j+k}$ pour $j \in \mathbb{N}_0$. Par conséquent,

$$\mathcal{F}^{-1}(\phi_j \mathcal{F} f) = \sum_{j=-1}^{1} \mathcal{F}^{-1}(\phi_j \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\varphi_{j+k}\mathcal{F} f))).$$

Maintenant, nous choisissons $0 < \nu < \min(q, \beta)$ et $u > n/2 + n/\nu$. Si nous remplaçons f_j et M_j dans le théorème 2.7 par $\mathcal{F}^{-1}(\varphi_{j+k}\mathcal{F} f)$ et ϕ_j respectivement, alors on obtient

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}(\phi_j \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\varphi_{j+k}\mathcal{F} f)))|MB^{\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\| \leq C \sup_i \left\|\phi_i\left(2^i \cdot\right)\right\|_{H^{\nu}_2} \left\|\mathcal{F}^{-1}(\varphi_{j+k}\mathcal{F} f)|MB^{\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\|$$

où C est indépendant de j.

Par la définition 3.1, il existe une constante C pour $k = -1, 0, 1$, tel que

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}(\phi_j \varphi_{j+k}\mathcal{F} f)|M^{\beta}_{p,q}\right\| \leq C \left\|\mathcal{F}^{-1}(\varphi_{j+k}\mathcal{F} f)|M^{\beta}_{p,q}\right\|.$$

Ainsi,

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}(\phi_j \mathcal{F} f)|M^{\beta}_{p,q}\right\| \leq C \left\|\mathcal{F}^{-1}(\varphi_j \mathcal{F} f)|M^{\beta}_{p,q}\right\|.$$

Alors, (i) est prouvé. ∎

Proposition 3.1

Soient $s \in \mathbb{R}, 0 < \beta \leq \infty, 0 < q \leq p \leq \infty$. Alors on a les propriétés suivantes

1. $MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *sont des quasi-Banach pour* $0 < q \leq p < 1$, *et des Banach pour* $1 \leq q \leq p \leq \infty$.

2. *Soit* $\tau = \min(1, \beta, q)$. *Alors, pour tout* $f, g \in MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *on a*
$$\left\|f + g|MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\|^\tau \leq \left\|f|MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\|^\tau + \left\|g|MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\|^\tau .$$

3. *Soient* $s \in \mathbb{R}, 0 \leq \beta < \infty$ *et* $0 \leq q \leq p \leq \infty$. *Alors*
$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow MB^{s,\beta}_{p,q} \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

4. $MB^{s,\beta}_{q,q}(\mathbb{R}^n) = B^s_{q,\beta}(\mathbb{R}^n)$.

5. $MB^{s,\infty}_{p,q}(\mathbb{R}^n) = B^{s,\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}_{q,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

6. *Si* $0 \leq \beta < 1$. *Alors*
$$MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \subsetneqq B^{s,\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}_{q,\beta}(\mathbb{R}^n).$$

7. *Soient* $s_0, s_1 \in \mathbb{R}, 0 < \beta_0, \beta_1 \leq \infty, 0 < q_0 \leq p_0 < \infty$ *et* $0 < q_1 \leq p_1 < \infty$. *Alors on a*
$$MB^{s_0,\beta_0}_{p_0,q_0}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow MB^{s_1,\beta_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)$$
si
$$p_0 \leq p_1, \ \frac{q_1}{p_1} \leq \frac{q_0}{p_0} \text{ et } s_1 < s_0 - n(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1})$$
ou
$$s_1 = s_0 - n(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}) \text{ et } q_0 \leq q_1.$$

8. *Si* $s > \frac{n}{p}$. *Alors*
$$MB^{s,\beta}_{p,q} \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Démonstration : Les preuves de (1) et (2) sont standard, voir le corollaire 2.6. dans [29]. (3) a été démontré dans [18], voir le théorème 3.2. (4) est évidente, voir la proposition 3.6. dans [18]. (5) et (6) voir [27]. Pour Les preuves de (7) et (8) voir [9] et [28] ■

Théorème 3.2

Soit $0 < \theta < 1, s \in \mathbb{R}, 1 < q \leq p < \infty$ *et* $1 < \beta_0, \beta_1 \leq \infty$. *Alors*

1. *Si* $\frac{1}{\beta} = \frac{1-\theta}{\beta_0} + \frac{\theta}{\beta_1}$, *on a*
$$\left[MB^{s,\beta_0}_{p,q}(\mathbb{R}^n), MB^{s,\beta_0}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right]_\theta = MB^{s,\beta_0}_{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

2. *Si* $s_0, s_1 \in \mathbb{R}, s_0 < s_1, s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$ *et* $\frac{1}{\beta} = \frac{1-\theta}{\beta_0} + \frac{\theta}{\beta_1}$, *on a*
$$\left[MB^{s_0,\beta_0}_{p,q}(\mathbb{R}^n), MB^{s_1,\beta_1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right]_{\theta,\beta} = MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

3. *Si* $s_0, s_1 \in \mathbb{R}, 0 < s_1, s = \theta s_1$ *et* $\frac{1}{\beta} = \frac{1-\theta}{\beta_1} + \frac{\theta}{\beta_1}$, *on a*
$$\left[\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n), MB^{s_1,\beta_1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right]_{\theta,\beta} = MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

4. *Si* $s_0, s_1 \in \mathbb{R}, 0 < s_1, s = \theta s_1$ *et* $\frac{1}{\beta} = \frac{1-\theta}{\beta_1} + \frac{\theta}{\beta_1}$, *on a*
$$\left[\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n), B^{s_1,\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}_{p,\beta_1}(\mathbb{R}^n)\right]_{\theta,\beta} = MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

5. *Si* $s_0, s_1 \in \mathbb{R}, s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1, \frac{1}{\beta} = \frac{1-\theta}{\beta_1} + \frac{\theta}{\beta_1}$ *et* $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_1}$, *on a*
$$\left[MB^{s_0,\beta_0}_{p,q_0}(\mathbb{R}^n), MB^{s_1,\beta_1}_{p,q_1}(\mathbb{R}^n)\right]_{\theta,\beta} \hookrightarrow MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

Démonstration : Voir [20]. ■

3.2 Normes équivalentes

Maintenant, nous considérons les espaces $MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ caractérisé par la fonction maximale de Peetre.

Définition 3.2

Soit $L \in \mathbb{N}$ et $A_L(\mathbb{R}^n)$ la collection de toutes les fonctions avec compact et satisfaisant

$$L(\phi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x|^L \sum_{|\gamma|\leq L} |D^\gamma \phi_0(x)| + \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}, j\in\mathbb{N}} \left(|x|^L + |x|^{-L}\right) \sum_{|\gamma|\leq L} \left|D^\gamma \phi_j\left(2^j x\right)\right| < \infty$$

Remarque 3.3

Il est facile de voir que $\Phi(\mathbb{R}^n) \subset A_L(\mathbb{R}^n)$ pour tout $L \in \mathbb{N}$, voir la définition de la décomposition de Littlewood-Paley dans la section 1.1.

Définition 3.3

Soit $L \in \mathbb{N}, \phi = \{\phi_j\}_{j=0}^\infty \in A_L(\mathbb{R}^n), f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $a > 0$, alors on définit la fonction maximale de Peetre

$$(\phi_j^* f)(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \frac{\left|\left(\mathcal{F}^{-1}(\phi_j \mathcal{F} f)\right)(x-y)\right|}{1 + |2^j y|^a}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où $j \in \mathbb{N}_0$.

Par le théorème 2.6 et la preuve de [25, page 53], on a

Proposition 3.2 *([23])*

Soit $s \in \mathbb{R}, 0 < q \leq p \leq \infty, 0 < \beta \leq \infty, a > n/\min\{q, \beta\}$. Si le nombre maximal $L > |s| + 3a + n + 2$, alors il existe une constante positive C telle que

$$\left(\sum_{j=0}^\infty 2^{js} \left\| \sup_{0<\tau<1} \left(\phi_j^{\tau *} f\right) |\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)\right\|^\beta\right)^{1/\beta} \leq C \sup_{0<\tau<1} L(\phi^\tau) \|f| MB_{p,q}^{s,\beta}(\mathbb{R}^n)\|^\phi \tag{3.1}$$

pour tout $\phi = \{\phi\}_{k=0}^\infty \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ et $\phi^\tau = \{\phi_k^\tau\}_{k=0}^\infty \in A_L(\mathbb{R}^n), 0 < \tau < 1$

Ensuite, nous considérons le multiplicateur de Fourier.

Définition 3.4

Soit m dans $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, alors M est appelé un multiplicateur de Fourier sur $MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ s'il existe une constante C telle que

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}(m\mathcal{F}f)|MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\| \leq C\|f|MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\|$$

pour tout $f \in MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, nous écrivons

$$\|m\|_N = \sup_{|\gamma|\leq N} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(1+|x|^2\right)^{N/2} |D^{\gamma}m(x)| .$$

Proposition 3.3

Soit $s \in \mathbb{R}, 0 < q \leq p < \infty, 0 < \beta \leq \infty$. Si N est suffisamment grand, alors il existe une constante C telle que pour tout $m \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ et $f \in MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}(m\mathcal{F}f)|MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\| \leq C\|m\|_N\|f|MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\| \tag{3.2}$$

Démonstration : Comme $\phi = \{\phi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\mathcal{F}^{-1}(\phi_k\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}(m\mathcal{F}f)]) = \mathcal{F}^{-1}(\phi_k m\mathcal{F}f)$$

Par (3.1), $\phi_k^{\tau} = m\phi_k$ et le fait suivant

$$\left|\left(\mathcal{F}^{-1}(\phi^{\tau}\mathcal{F}f)\right)(x)\right| \leq \left(\phi^{\tau *}f\right)(x)$$

Lorsque $N > |s| + 3n/\min\{q,\beta\} + n + 2$, alors (3.2) tient. Ainsi la proposition 3.3 est prouvée. ∎

Maintenant, on define l'opérateur I_{σ}.

Définition 3.5

Si $\sigma \in \mathbb{R}$, alors l'opérateur I_{σ} est défini par

$$I_{\sigma}f = \mathcal{F}^{-1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\frac{\sigma}{2}}\mathcal{F}f\right), \quad f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Remarque 3.1

- *Il est bien connu que I_{σ} est continu sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ respectivement.*

- *On a* $I_\sigma I_x = I_{\sigma+x}$.

Nous considérons les espaces $MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ caractérisé par un autre norme.

Théorème 3.3 *([23])*

Soit $s, \sigma \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}, 0 < \beta \leq \infty, 0 < q \leq p < \infty$. *Alors* I_σ *est une application isomorphe de* $MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *à* $MB^{s-\sigma,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. *De plus,*

$$\sum_{|\gamma|\leq m} \left\| D^\gamma f | MB^{s-m,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \right\| \quad \text{and} \quad \| f | MB^{s-m,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \| + \sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial^m f}{\partial x_j^m} | MB^{s-m,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \right\| \tag{3.3}$$

sont des quasi-normes équivalentes sur $MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration : Premièrement, si $\phi \in \{\phi_k\}_{k=0}^\infty \in \Phi(\mathbb{R}^n)$, alors $\phi = \{\phi_k\}_{k=0}^\infty \in A_L(\mathbb{R}^n)$, où L peut être un grand nombre maximal arbitraire et $\phi_k(x) = 2^{-k\sigma}\left(1+|x|^2\right)^{\frac{n}{2}} \phi_k(x)$. Si $f \in MF^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, par la proposition 3.2 et l'estimation $\left|\left(\mathcal{F}^{-1}(\phi_k \mathcal{F} f)\right)(x)\right| \leq \phi_k^*(x)$, on a

$$\begin{aligned} \left\| I_\sigma f | MB^{s-\sigma,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \right\| &= \left\| 2^{(s-\sigma)k} \mathcal{F}^{-1}(1+|\cdot|)^{\sigma/2} \phi_k \mathcal{F} f | MB^{\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \right\| \\ &= \left\| 2^{ks} \mathcal{F}^{-1} \phi_k \mathcal{F} f | MB^{\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \right\| \\ &\leq C \| f | MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \|. \end{aligned} \tag{3.4}$$

où C est indépendant de f. Cela prouve que I_σ est continue de $MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dans $MB^{s-\sigma,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Si $g \in MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, alors on a par le même argument $f = I_{-\sigma} g \in MB^{\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\| f | MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \| \leq C \| g | MB^{s-\sigma,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \| = C \left\| I_\sigma f | MB^{s-\sigma,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \right\|. \tag{3.5}$$

Puisque I_σ est continue sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, c'est aussi est continue de $MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dans $MB^{s-\sigma,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Par (3.4) et (3.5), $\left\| I_\sigma f | MB^{s-\sigma,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \right\|$ est une quasi-norme équivalente sur $MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Ensuite, nous montrons que la quasi-norme dans (3.3) est une quasi-norme équivalente sur $MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. If $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, soit $x^\sigma = \prod_{j=1}^{n} x_j^{\gamma_j}$, où $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. D'après la proposition (3.3), on a que $x^\gamma \left(1+|x|^2\right)^{-m/2}$ est un multiplicateur de Fourier sur $MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Si $|\gamma| \leq m$, $f \in MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, alors on a

$$\begin{aligned}
\sum_{|\gamma|\leq m} \|D^\gamma f\|_{MF^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} &= \sum_{|\gamma|\leq m} \left\|\mathcal{F}^{-1}(x^\gamma \mathcal{F}f)|MB^{s-m,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\| \\
&= \sum_{|\gamma|\leq m} \left\|\mathcal{F}^{-1}\left(x^\gamma\left(1+|x|^2\right)^{-m/2}\right.\right. \\
&\left.\left.\times \mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}\left(\left(1+|x|^2\right)^{m/2}\mathcal{F}f\right)\right)\right)|MB^{s-m,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\| \\
&\leq C\left\|I_m f|MB^{s-m,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\| \\
&\leq C\|f|MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\|
\end{aligned} \tag{3.6}$$

où la dernière inégalité est obtenue par (3.4).

Enfin, on supposons que $f \in MB^{s-m,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et $\dfrac{\partial^m}{\partial x_i^m} f \in MB^{s-m,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ pour $j = 1,\ldots,n$, on espérons prouver que $f \in MB^{s,\beta}_{p,q}$. On prétend qu'il existe des multiplicateurs de Fourier $\rho_1(x),\ldots,\rho_n(x)$ sur $MB^{s-m,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, et un positif constante C telle que

$$1+\sum_{j=1}^n \rho_j(x)x_j^m \geq C\left(1+|x|^2\right)^{m/2}, \qquad \text{pour toute } x \in \mathbb{R}^n,$$

voir [25, page 60] . Par la proposition 3.3, on sait que

$$M(x) = \left(1+|x|^2\right)^{m/2}\left[1+\sum_{j=1}^n \rho_j(x)x_j^m\right]^{-1}$$

est aussi un multiplicateur de Fourier sur $MB^{s-m,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Alors

$$\begin{aligned}
\|f\|_{MB^{s-m,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} &\leq C\left\|\mathcal{F}^{-1}\left((1+|x|)^{m/2}\mathcal{F}f\right)|MB^{s-m,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\| \\
&\leq C\left\|\mathcal{F}^{-1}\left(M(x)\mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}\left(\left[1+\sum_{j=1}^n \rho_j(x)x_j^m\right]\mathcal{F}f\right)\right)\right)|MB^{s-m,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\| \\
&\leq C\|f|MB^{s-m,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\| + C\sum_{j=1}^n \left\|\mathcal{F}^{-1}\rho_j(x)x_j^m\mathcal{F}f|MB^{s-m,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\|.
\end{aligned}$$

Cependant, $x_j^m\mathcal{F}f = C\mathcal{F}\dfrac{\partial^m f}{\partial x_j^m}$. Par les propriétés du multiplicateur de Fourier de $\rho_j(x)$, on obtient

$$\|f|MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\| \leq C\|f|MB^{s-m,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\| + C\sum_{j=1}^n \left\|\frac{\partial^m f}{\partial x_j^m}|MB^{s-m,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right\|. \tag{3.7}$$

Par (3.6) et (3.7), on montrons que les quasi-normes dans (3.4) sont des quasi-normes équivalentes sur $MB^{s,\beta}_{p,q}$. Cela a prouvé ■

Conclusion

L'objectif de ce travail est d'étudier les espaces de Morrey de type de Besov $MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ qui géneralisons les espaces de Besov $B^{s}_{p,\beta}(\mathbb{R}^n)$, les espaces Morrey $\mathcal{M}^{p}_{q}(\mathbb{R}^n)$ et les espaces de Lebesgue $L^{q}(\mathbb{R}^n)$, ainsi que certaines propriétés, comme la coïncidence avec d'autres espaces, les inclusions des uns dans les autres. Cette étude nous a permet de présenter certains normes équivalente dans ses espaces.

Bibliographie

[1] K. Andersen and R. John,Weighted inequalities for vector-valued maximal functions on singular integrals, Studia. Math. **LXIX**, (1980), 19–31.

[2] H. Arai and T. Mizuhara, Morrey spaces on spaces of homogeneous type and estimates for δ_b and the Cauchy–Szegö projection, Math. Nachr. **175**, (1997), 5–20.

[3] A. Attallah, La fonction maximale et le potentiel de Riesz dans l'espace de Morrey à exposant variable, Mémoire de master, université de M'Sila, 2016.

[4] J. Bergh and J. Löfström, Interpolation spaces, An introduction, Springer Science. Berlin, 1976.

[5] S. Campanato, Proprieta di inclusione per spaci di Morrey, Richerche Mat. **12**, (1963), 67–86.

[6] S. Campanato, Proprieta di hölderianita di alcune classi di funzioni, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **17**, (1963), 175–188.

[7] S. Campanato, Proprieta di una famiglia di spazi funzionali, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **18**, (1964), 137–160.

[8] P. Dintelmann, *Class of Fourier multipliers on Besov–Nikolskij spaces*, Math. Nachr. **173**, (1995), 115–130.

[9] D.D. Haroske and L. Skrzypczak, Continuous embeddings of Besov-Morrey function spaces, Acta Math. Sin. (Engl. series) **28**, (2012), 1307-1328.

[10] F. John and L. Nirenberg, On functions of bounded mean oszillation, Comm. Pure Appl. Math. **14**, (1961), 415–426.

[11] H. Kozono and M. Yamazaki, Semilinear heat equations and the Navier-Stokes equation with distributions in new function spaces as initial data, Comm. Partial Differential Equations **19**, (1994), 959–1014.

[12] A. Mazzucato, Function space theory and applications to non-linear PDE, Trans. Amer.Math. Soc. **355**, (2003), 1297–1369.

[13] G. N. Meyers, Mean oscillation over cubes and Hölder continuity, Proc. Amer. Math. Soc. **15**, (1964), 717–721.

[14] C. B. Morrey, On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc., **43**, (1938), 126–166.

[15] J. Peetre, On the theory of $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ spaces. J. Funct. Anal., **4**, (1969), 71–87.

[16] P. G. Lemarié-Rieusset, Multipliers and Morrey Spaces. Publ. Mat. **38**, (2013), 741–752.

[17] T. Runst and W. Sickel, Sobolev spaces of fractional order, Nemytskii operators and nonlinear partial differential equations, de Gruyter, Berlin 1996.

[18] Y. Sawano and H. Tanaka, Decompositions of Besov-Morrey spaces and Triebel-Lizorkin-Morrey spaces, Math. Z. **257**, (2007), 871 - 905.

[19] Y. Sawano, G. Di Fazio and D. F. Hakim, Morrey Spaces : Introduction and Applications to Integral Operators and PDE's, Volumes I & II, CRC Press 2020

[20] W. Sickel, Smoothness spaces related to Morrey spaces a survey II, Eurasian Mathematical Journal. **4**, (2013), 82–124.

[21] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton University Press, 1970.

[22] E. M. Stein, Harmonic Analysis, real-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals, Press, Princeton New Jersey, 1993.

[23] L. Tang and J. Xu, Some properties of Morrey type Besov-Triebel spaces, Math. Nachr. **278** (2005), 904-917.

[24] H. Triebel, Interpolation theory, function spaces, differential operators, veb deutsch. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978.

[25] H. Triebel, Theory of Function Spaces, Birkh auser, Basel, 1983.

[26] H. Triebel, Theory of function spaces II, Birkhäuser, Basel, 1992.

[27] W. Yuan, W. Sickel and D. Yang. Morrey and Campanato Meet Besov, Lizorkin and Triebel, Springer, 2010.

[28] Y. Sawano and H. Tanaka, Decompositions of Besov-Morrey spaces and Triebel-Lizorkin-Morrey spaces, Math. Z. **257**, (2007), 871–905.

[29] H. Kozono and M. Yamazaki, Semilinear heat equations and the Navier-Stokes equation with distributions in new function spaces as initial data, Comm. Partial Differential Equations **19**, (1994), 959-1014.

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة فضاءات موراي ذات النمط بيزوف $MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ الذي يعمم فضاءات بيزوف $B^{s}_{p,\beta}(\mathbb{R}^n)$، فضاءات موراي $\mathcal{M}^{p}_{q}(\mathbb{R}^n)$ و فضاءات لوبيغ $L^{q}(\mathbb{R}^n)$ بالإضافة إلى بعض الخصائص ، مثل تكافئه مع الفضاءات الأخرى ، الاحتواءات مع بعضها البعض.
سمحت لنا هذه الدراسة بتقديم بعض النظائم المكافئة لهذه الفضاءات.

كلمات مفتاحية

فضاءات موراي، فضاءات موراي ذات النمط بيزوف، فضاءات بيزوف، تجزئة لتلوود بيلي.

Abstract

The objective of this memory is to study the Morrey type Besov spaces $MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ which generalize the Besov spaces $B^{\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, Morrey spaces $\mathcal{M}^{p}_{q}(\mathbb{R}^n)$ and Lebesgue spaces $L^{q}(\mathbb{R}^n)$, as well as some properties, such as coincidence with other spaces, inclusions of each other.
This study has allowed us to present some equivalent norms of its spaces.

Key words :

Morrey spaces, Morrey type Besov spaces, Besov spaces, Littlewood-Paley decomposition.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est d'étudier les espaces de Morrey de type de Besov $MB^{s,\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ qui généralisons les espaces de Besov $B^{\beta}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, les espaces de Morrey $\mathcal{M}^{p}_{q}(\mathbb{R}^n)$ et les espaces de Lebesgue $L^{q}(\mathbb{R}^n)$, ainsi que certaines propriétés, comme la coïncidence avec d'autres espaces, les inclusions des uns dans les autres. Cette étude nous a permet de présenter certains normes équivalente dans ses espaces.

Mot-clés :

Espace de Morrey, Espace de Morrey de type de Besov, Espace de Besov, décomposition de Littlewood-Paley.