REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématique et Numérique

Thème

Traitement numérique des équations intégrales de Volterra de seconde espèce

Présentée par : *BABAH Amal*

Soutenu publiquement le : ../07/2021.

Devant le jury composé de :

Mr. SELT Omar	M.C.A	Université de M'sila	**Président**.
Mr. DILMI Mustapha	M.C.B	Université de M'sila	**Encadreur.**
Mr. GAGUI Bachir	M.C.A	Université de M'sila	**Examinateur.**

Année universitaire 2020/2021

Remerciements

On remercie dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté dentamer et de terminer ce mémoire.

premièrement, je remercie mon promoteur Dr. DILMI. Mustapha pour avoir soulevé ce sujet et pour ses conseils durant la préparation de ce mémoire, on le remercie pour la qualité de son encadrement.

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury pour l'honneur qu'il me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

Aprés nos remerciement d'adresse également à tout nos professeurs pour leurs générosités et la grande patience dont ils on sufaire preuve malgré leurs charges académique et professionnelles.

Et je n'oublie pas les parents pour leur soutien morale et ses encouragements, leur amour et leur confiance.

Dédicace

Je dedie ma mémoire a mes chers parents, source de vie, d'amour et d'affection.

A mon encadreur Dr. DILMI. Mustapha et tout mes enseignement de faculté de Mathématique.

A tout mes amies, tout particulièrement Nora et Achouak.

<u>الملخص</u>

في هذه المذكرة قمنا بتطبيق طريقة جالركين باستعمال كثيرات الحدود من نوع تشيبيشاف ولجندر على المعادلات التكاملية من نوع فولتيرا لأجل إيجاد الحلول التقريبية ومقارنتها مع الحلول الدقيقة.

<u>الكلمات المفتاحية:</u> معادلة فولتيرا التكاملية، كثيرات حدود تشيبيشاف، كثيرات حدود لجندر، طريقة جالركين.

Abstract

In this work we have applied the Galerkin method with Tchebychev type polynomial method and Legendre type polynomial method to Volterra type integral equation in order to find approximate solutions and compare them with exacte solutions.

Keywords : integral equation of Volterra, Tchebyshev Polynomials, legendre polynomials, Galerkin Méthod.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons appliqué la méthode de Galerkin avec les deux méthodes polynomiales de type Tchebychev et Legendre sur certaine classe des équations intégrale de type Volterra afin de trouver des solutions approchées et de le comparer avec des solutions exactes.

Mots-clés : équation intégrale de Volterra, Polynôme de tchebyshev, Polynôme de Legendre, Méthode de Galerkin.

Table des matières

Liste des tableaux

Notations

$C([a,b])$	espace des fonctions continues sur $[a,b]$
f	terme libre dans l'équation intégrale
A	opérateur linéaire
I	opérateur identique
H	espace de Hilbert
$\int$	signe intégrale
$\langle , \rangle$	le produit scalaire
T	polynôme de Tchebyshev
L	polynôme de Legendre
$k(x,t)$	noyau de l'équation intégrale
φ	la fonction inconnue dans l'équation intégrale
φ_n	solution approchée
λ	paramètre numérique
$E.I.V$	équation intégrale de Volterra

Introduction

Nous savons sur ce type d'équations intégrales de volterra linéaires et non linéaires qu'elles sont incluses dans de nombreux domaines de la science physique.

Volterra a commencé son travail sur les équations intégrales en 1884, mais ses études sérieuses ont commencé en 1896.

Ces dernières années, l'équation intégrale a attiré l'attention de nombreux scientifiques et chercheurs en raison de leur large éventail d'applications en science et en technologie, de nombreux problèmes physiques sont modélisés sous forme d'équation intégrale, notamment la théorie du potentiel problèmes de Dirichlet problèmes de contrat électrostatique.

Dans cette mémoire, nous étudions les équations intégrales linéaires de Volterra du deuxième type et il s'écrit comme suit:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt$$

Ce mémoire est divisé en trois chapitres :

Le premier chapitre aborde des notion sur les équations intégrales, définition et classification des équations intégrales.

Le deuxième chapitre dans ce chapitre, on a étudie l'existence et l'unicité des équations intégrales de Volterra de seconde espèce, et nous présenterons quelques méthodes analytiques, et numériques importantes pour résoudre les équations intégrales de Volterra de seconde espèce.

Le troisième chapitre l'utilisation de la méthode de Galerkin avec les deux Polynômes de Tchebychev et Legendre pour la solutions des équations intégrales de Volterra de seconde espèce.

Chapitre 1

Rappels et notions fondamentales

Dans ce chapitre, on présente les définitions des équations intégrales sur l'espace des fonctions continues, et quelques définitions liées à l'analyse numérique, et les types des équations intégrales.

1.1 Notions d'analyse fonctionnelle

Espace Vectoriel Normé

Définition 1.1.1 *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on dit qu'une application notée $\|.\|$ de E dans $\mathbb{R}^+$ est une norme sur E si et seulement si pour tout $(x, y) \in E$ et $\lambda \in k$ Les conditions suivantes satisfaites:*

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.
(iii)$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Définition 1.1.2 *Si tout suite de Cauchy x_n est une suite convergente dans E, alors E est un espace métrique complet.*

Proposition 1.1.1 *Tout espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$de dimension finie est complet.*

Définition 1.1.3 *Tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de sa norme $\|.\|$ est dit espace de Banach.*

Définition 1.1.4 *Soit H un espace vectoriel sur $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. un produit scalaire sur H est une application de $H \times H \to \Bbbk$, notée $\langle ., . \rangle$ telle que pour tout x, y, z dans H et α, β dans $\mathbb{R}$ on a:*

i) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$.
ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ et $x = 0$.

Définition 1.1.5 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire $\langle x, x \rangle$.*

Définition 1.1.6 *Soit H un espace de Hilbert. Un système orthonormé est un sous ensemble E de H, tel que pour toute f de E, nous avons:*

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,,j} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

Définition 1.1.7 *On dit qu'une fonction f est de carrée intégrable sur $[a, b]$, si l'intégrale:*

$$\int_a^b f^2 dx < \infty$$

l'ensemble de toutes les fonctions de carrée intégrable sur $[a, b]$ sera noté $L^2([a, b])$ .on muni L^2 du produit scalaire défini par:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx, \qquad f, g \in L^2$$

Définition 1.1.8 *les éléments de cet espace sont tout les fonctions définies sur $[a, b]$, et qui ont des dérivées continues jusqu'à l'ordre 1. la norme d'un élément $f(x) \in \mathbb{C}^1([a, b])$ est définit par:*

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{l} \max_{a \leq x \leq b} \mid f^k(x) \mid$$

1.2 Notions sur les opérateurs

Opérateur intégrale linéaire:

Définition 1.2.1 *Soit K une fonction mesurable sur $\Omega \times \Omega$ dans $\mathbb{C}$. et Ω un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. alors la forme général d'un opérateur intégrale linéaire A. dit aussi opérateur a noyau, est formellement donné par la forme suivante:*

$$\begin{aligned} A : C(\Omega) &\to C(\Omega) \\ \varphi &\to A\varphi \\ x &\to (A\varphi)(x) = \int_{\Omega} k(x,t)\varphi(t)dt \end{aligned}$$

la fonction $k(x,t)$ est appelée noyau de l'opérateur A. la norme $\|A\|$ est donné par:

$$\|A\| = \max_{x\in\Omega} \int |k(x,t)|\, dt$$

Opérateur linéaire borné:

Définition 1.2.2 *Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A définie sur E dans F est dite linéaire si*

pour tout u, v dans E et α, β dans $\mathbb{R}$, on a:

i) $Au \in F$.

ii) $A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$.

Définition 1.2.3 *Soient E et F deux espaces normés. un opérateur linéaire $A : E \to F$ est dit borné s'il existe une constant M, telle que:*

$$\|Au\|_F \leq M\, \|u\|_E\,, \text{ pourtout } u \in E$$

Théorème 1.2.1 *Soit A un opérateur linéaire entre deux espaces vectoriels normés E et F, alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) A est borné.

ii) A est continue sur E.

iii) A est continue à l'origine.

Théorème 1.2.2 *Un opérateur linéaire est continue si est seulement s'il est borné.*

Théorème 1.2.3 *Tout opérateur linéaire $T : X \to Y$ d'un espace X normé de dimension finie dans un espace Y est borné.*

Définition 1.2.4 *A un opérateur intégrale linéaire qui admet une formulation de la forme suivante:*

$$(A\varphi)x = \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt$$

la fonction K étant appelée noyau de l'opérateur A.

Opérateur Adjoints:

Définition 1.2.5 *On considère $C(\Omega)$ muni du produit scalaire identique à celui défini sur $L^2(\Omega)$, à savoir:*

$$\forall (f,g) \in C(\Omega)^2, \langle f,g \rangle = \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

ce produit scalaire permet définir la notion d'orthogonalité, ainsi que celle d'adjoint.

On dit que $A : C(\Omega) \to C(\Omega)$ et $B : C(\Omega) \to C(\Omega)$ sont adjoints s'ils vérifient:

$$\forall (f,g) \in C(\Omega)^2, \langle Af,g \rangle = \langle f,Bg \rangle .$$

Si un opérateur $A : C(\Omega) \to C(\Omega)$ admets un adjoint B, alors cet adjoint est unique et A, B sont linéaires.

Théorème 1.2.4 *On considère un opérateur à noyau A construit à partir d'un noyau K continu sur $\Omega \times \Omega$ par la formule:*

$$\forall x \in \Omega, (A\varphi)(x) = \int_\Omega k(x,y)\varphi(y)dy$$

Alors l'opérateur A admet un unique opérateur adjoint B pour le produit scalaire usuel de L^2, défini par:

$$\forall x \in \Omega, (B\psi)(x) = \int_{\Omega} k(y,x)\psi(y)dy$$

Opérateur compact:

Définition 1.2.6 *A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F, on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné en un ensemble relativement compact dans F.*

Théorème 1.2.5 *l'addition de deux opérateurs compacts est un opérateur compact:*

$$i.e\ A_1, A_2 \text{ compact } \Rightarrow A_1 + A_2 \text{ compact}$$

Théorème 1.2.6 *On a A et B deux opérateurs bornés alors $A \times B$ est compact, si A ou B est compact.*

Théorème 1.2.7 *la séquence est un opérateur compact définie a partir a espace normé E dans une espace de Banach F converge uniformément à un opérateur A. dit*

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$$

puis l'opérateur de limite A est compact.

Proposition 1.2.1 *A opérateur compact est borné mais l'inverse n'est pas vrai.*

Théorème 1.2.8 *l'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau continu est un opérateur compact.*

Preuve. Soit E un ensemble borné de $C(G)$ alors , on a $\|A\varphi\| \leq M\ |G|\ \max\ |k(x,y)|$, $\forall x, y \in G$ et $\forall \varphi \in E$

cela veut dire que $A(E)$ est borné. l'opérateur k est uniformément continu sur le compact $G \times G$, d'où

$\forall \varepsilon \geq 0 \exists \delta \geq 0; \forall x, y, z \in G \, |x-y| < \delta \Longrightarrow |k(x,z) - k(y,z)| < \frac{\varepsilon}{M|G|}$, d'où $|A\varphi(x) - A\varphi(y)| < \varepsilon$, pour tout $\varphi \in E$ et x, $y \in G$ avec $|x-y| < \varepsilon$, ceci exprime que l'ensemble $A(E)$ est équicontinu , d'où $A(E)$ est relativement compact d'après le théorème d'Arzelà-Ascoli alors A est compact. ■

1.3 Équations intégrales linéaires et non linéaires et leurs classification

La plupart des équations intégrales linéaires sont de la forme:

$$\alpha(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.1}$$

Où $K(x,t), \alpha(x), f(x)$ sont des fonctions connues, $\varphi(x)$ est une fonction inconnue. λ est un paramètre numérique rèel ou complexe différent de zéro. la fonction $K(x,t)$ est appelée le noyau de l'équation intégrale.

Si l'exposant de la fonction inconnue $\varphi(x)$ dans le signe de l'intégrale est l'un. l'équation intégrale est appelé linéaire.

Si la fonction inconnue $\varphi(x)$ est d'exposant autre que un, ou si l'équation contient des fonctions non linéaire de $\varphi(x)$, comme e^{φ}, l'équation intégrale est appelé non linéaire.

Équations intégrales de Fredholm

1. La forme ordinaire des équations intégrales de Fredholm est:

$$\psi(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.2}$$

Où les limites de l'intégration a et b sont des constantes et la fonction inconnue φ apparaît de façon linéaire sous le signe intégral.

Si la fonction $\psi(x) = 1$, donc (1.2) devient

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.3}$$

Cette équation est appelée équation intégrale de Fredholm du second type

Si $\psi(x) = 0$, donc (1.2)devient.

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt = 0 \tag{1.4}$$

qui s'appelle l'équation intégrale de Fredholm de première espèce.

2. l'équation intégrale de la forme:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x,t,\varphi(t))dt = f(x) \tag{1.5}$$

Où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $k(x,t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramètre réel.

Si $f(x) = 0$; l'équation s'écrit

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(x,t,\varphi(t))dt \tag{1.6}$$

L'équation (1.6) est dite équation intégrale de Fredholm non linéaire de première espèce homogène.

Si $f(x) \neq 0$ elle est dite équation intégrale de Fredholm non linéaire de seconde espèce non homogène.

Équations intégrales de Volterra

1. La forme des équations intégrales linéaires de Volterra est donnée par

$$\psi(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.7}$$

Où les limites de l'intégration sont fonctions de x et la fonction inconnue $\varphi(x)$ apparait linéairement sous le signe.

Si la fonction $\psi(x) = 1$, donc l'équation(1.7) devient

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \tag{1.8}$$

et cette équation est connue comme l'équation intégrale de Volterra du second type.

Si on considère $\psi(x) = 0$, alors l'équation (1.7) est connu comme l'équation de Volterra du premier type.

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = 0 \tag{1.9}$$

2. L'équation intégrale de Volterra de la forme:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t,\varphi(t))dt \tag{1.10}$$

est appelée équation intégrale de Volterra non linéaire de second espèce.

L'équation de la forme

$$\int_a^x k(x,t,\varphi(t))dt = f(x)$$

Où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue est appelée équation intégrale de Volterra non linéaire de première espèce.

Chapitre 2

Existence et unicité des solutions pour les E.I.V

Dans ce chapitre, on présente les théorèmes que nous allons utiliser pour obtenir des résultats d'existence variés. On début nous présenterons quelques méthodes analytiques et numériques importantes pour resoudre l'équation intégrale de Volterra de second type.

2.1 Existence de la solution des E.I.V

Soit l'équation intégrale de Volterra de second espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \quad 0 \leq x \leq a \tag{2.1}$$

Où $f(x)$ est continue sur $[0, a]$ au noyau $k(x,t)$ on associe un opérateur A dans l'espace $C[a,b]$, et l'équation (2.1) s'écrit

$$(I - \lambda A)\varphi = f \tag{2.2}$$

En cherchant donc la solution de l'équation (2.1) sous la forme d'une série entière suivant les puissances de λ comme

$$\varphi(x)=\sum_{n\geq 0}\lambda^n\varphi_n(x)=\varphi_0(x)+\lambda\varphi_1(x)+\lambda^2\varphi_2(x)+...+\lambda^n\varphi_n(x)+... \tag{2.3}$$

et en portant formellement cette série dans l'équation (2.1) il vient:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi_0(x)+\lambda\varphi_1(x)+\lambda^2\varphi_2(x)+...+\lambda^n\varphi_n(x)+... \\ &= f(x)+\lambda\int_a^x k(x,t)(\sum_{n\geq 0}\lambda^n\varphi_n(x))dt \\ &= f(x)+\lambda\int_a^x k(x,t)(\varphi_0(x)+\lambda\varphi_1(x)+\lambda^2\varphi_2(x)+...+\lambda^n\varphi_n(x)+...)dt\end{aligned} \tag{2.4}$$

en identifiant les coefficients on obtient:

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= f(x) \\ \varphi_1 &= \int_a^x k(x,t)\varphi_0(t)dt=\int_a^x k(x,t)f(t)dt \\ \varphi_2 &= \int_a^x k(x,t)\varphi_1(t)dt=\int_a^x k(x,t)\left[\int_a^x k(t,z)f(z)dz\right]dt \\ &= \int_a^x k_2(x,t)f(t)dt \text{ où } k_2(x,t)=\int_t^x k(x,z)k(z,t)dz \\ \varphi_n(x) &= \int_a^x k(x,t)\varphi_{n-1}(t)dt\end{aligned} \tag{2.5}$$

Sous les hypothèses faites sur $f(x)$ et $k(x,t)$, on démontre que la série $\sum_{n=0}\lambda^n\varphi_n(x)$ dont les coefficients sont donnés par (2.5) constitue effectivement une solution de l'équation (2.1), ainsi on pose:

$$\sup_x|f(x)|=M \quad , \quad \sup_{(x,t)}|k(x,t)|=N$$

on a alors

$$|\varphi_0(x)| \leq M \quad , \quad |\varphi_1(x)| \leq MN\,(x-a)$$

et

$$|\varphi_2(x)| = \left| \int_a^x k(x,t)\varphi_1(t)dt \right| \leq MN^2 \frac{(x-a)^2}{2!}$$

en pour suivant de cette manière, on peut démontrer par récurrence que

$$|\varphi_n(x)| \leq MN^n \frac{(x-a)^n}{n!}$$

ainsi la série de terme général $\lambda^n \varphi_n(x)$ converge pour toute valeur de λ, cette convergence est absolue et aussi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$. Il resulte que la solution obtenue formellement est effectivement une solution de l'équation intégrale (2.1).

2.2 Unicité de la solution E.I.V

Supposons que l'équation (2.1) admette deux solutions φ_1 et φ_2 posons leur différence ψ.

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \\ &= \lambda \int_a^x k(x,t)\psi(t)dt \end{aligned}$$

$$|\psi(x)| \leq |\lambda|\, N \int_a^x |\psi(t)|\, dt$$

d'aprés le lemme de Gronwall, on déduit que $\psi(x) = 0$, donc la solution est unique.

Définition 2.2.1 *Soit $k(x,t)$ un noyau de Volterra sur $([a,b])^2$, l'équation de Volterra de première espèce est une équation de la forme:*

$$\int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x)$$

Cette équation en général est plus difficile à résoudre que celle de seconde espèce sauf si les fonctions f et k sont assez régulières, dans ce cas l'équation (2.2) peut être ramenée à une équation de seconde espèce.

Théorème 2.2.1 *Sous les hypothèses suivantes:*

i) f de classe $C^1[a,b]$ et $f(a) = 0$.
ii) $k(x,t)$ et $k_x(x,t) = \frac{\partial k(x,t)}{\partial x}$ sont continues dans l'intervalle $0 \le t \le x \le b$.
iii) $k(x,x) \neq 0\ \forall x \in [a,b]$.
l'équation (2.2) se ramène alors à une équation de seconde espèce.

Preuve. En dérivant l'équation (2.2) par rapport à on obtient:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{f_x(x)}{k(x,x)} - \int_a^x \frac{k_x(x,t)}{k(x,x)}\varphi(t)dt \\ \varphi(x) &= F(x) + \gamma\int_a^x \Gamma(x,t)\varphi(t)dt\end{aligned}$$

où $F(x) = \frac{f_x(x)}{k(x,x)}, \Gamma(x,t) = \frac{k_x(x,t)}{k(x,x)}$ et $\gamma = -1$ ■

Remarque 2.2.1 *Sous les hypothèses du théorème précédent, l'équation* (2.2) *est équivalente à* (2.1) *donc l'équation* (2.2) *possède une solution continue et une seule sur* $[a,b]$. *Toute solution* φ *continue sur* $[a,b]$ *de l'équation* (2.2) *vérifie évidemment l'équation* (2.1). *Inversement, toute solution continue sur* $[a,b]$ *l'équation* (2.1) *vérifie l'équation* (2.2).

2.3 Méthodes de résolution des E.I.V

2.3.1 Méthodes analytiques

I) Décomposition D'Adomian

Définition 2.3.1 *la méthode de Décomposition Adomian a été introduite et développée par George Adomian, et est bien abordé dans de nombreses références. un travail de recherche considérable a été investi récemment dns l'application de cette méthode à une large classe d'équations différentielles ordinaires linéaires et non linéaires, équations aux dérivées partielles et équations intégrales également.La méthode de décomposition Adomian consiste à décomoser la fonction inconnue $\varphi(x)$ d'une équation quelconque en une somme d'un nombre infini de comosantes définies ar la série de décomposition:*

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \tag{2.7}$$

Où équivalent

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + ...$$

Où les composants $\varphi_n(x)$, $n \geq 0$ doivent etre déterminées de manière récursive. La méthode de décomposition se préoccupe de trouver les composants $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2...$ individuellement. Pour établir la relation de récurrence, nous substituons (2.7) dans équation intégrale de Volterra (2.1) obtenir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t))dt,$$

Où équivalent

$$\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + ... = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t) \left[\varphi_0(t) + \varphi_1(t) + ...\right] dt$$

Le composant zéro est identifié par tous les termes qui ne sont pas inclus sous le signe intégrale. par conséquent, les composants $\varphi_j(x), j \geq 1$ de la fonction inconnue $\varphi(x)$ sont complètement déterminés en définissant la relation de récurrence

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= f(x), \\
\varphi_1(x) &= \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi_0(t)dt \\
\varphi_2(x) &= \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi_1(t)dt \\
\varphi_{n+1}(x) &= \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi_n(t)dt, \quad n \geq 0
\end{aligned}$$

Exemple 2.3.1 *résoudre l'équation intégrale de Volterra suivante:*

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x (t-x)\varphi(t)dt. \tag{2.8}$$

nous remarquons que $f(x) = 1, \lambda = 1, k(x,t) = t - x$.substitution de la série de décomposition (2.7) dans les deux cotés de (2.8) donne:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = 1 + \int_a^x \sum_{n=0}^{\infty} (t-x)\varphi_n(t)dt,$$

Où équivalent

$$\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + ... = 1 + \int_0^x (t-x)\left[\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + ...\right] dt$$

En procédant comme avant, nous définissons la relation de récurrence suivante

$$\varphi_0(x) = 1$$

$$\varphi_{k+1}(x) = \int_0^x (t-x)\varphi_k(t)dt, k \geq 0$$

ça donne

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= 1 \\
\varphi_1(x) &= \int_0^x (t-x)\varphi_0(t)dt = \int_0^x (t-x)dt = -\frac{1}{2!}x^2, \\
\varphi_2(x) &= \int_0^x (t-x)\varphi_1(t)dt = -\frac{1}{2!}\int_0^x (t-x)t^2dt = \frac{1}{4!}x^4, \\
\varphi_3(x) &= \int_0^x (t-x)\varphi_2(t)dt = \frac{1}{4!}\int_0^x (t-x)t^4dt = -\frac{1}{6!}x^6, \\
\varphi_4(x) &= \int_0^x (t-x)\varphi_3(t)dt = -\frac{1}{6!}\int_0^x (t-x)t^6dt = \frac{1}{8!}x^8,
\end{aligned}$$

etc. La solution sous forme de série est donnée par:

$$\varphi(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8,$$

et sous forme fermée par

$$\varphi(x) = \cos x$$

Obtenu en utilisant l'expansion Taylor pour $\cos x$.

II) Méthode d'approximation successive:

La méthode d'approximation successive également appelée méthode d'itération Picard fournit un schéma qui peut être utilisé pour résoudre les problèmes de valeur initiale ou une équation intégrale. cette méthode résout tout problème en trouvant des approximations successives de la solution en commençant par un Guess initial, appelée approximation zéro est toute fonction sélective à valeur réelle qui sera utilisée dans une relation de récurrence pour déterminer l'autre approximation.

étant donné l'équation intégrale linéaire de Volterra du deuxième type

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt,$$

Où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue à déterminer, $k(x,t)$ est le noyau, et λ est le paramètre. la méthode d'appproximation successive introduit la relation de récurence

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)\varphi_{n-1}(t)dt, n \geq 1, \tag{2.9}$$

Où l'appproximation zéro $\varphi_0(x)$ peut être n'importe quelle fonction à valeur réelle sélective pour laquelle nous commençons toujours par une estimation initiale pour $\varphi_0(x)$, la plupart du temps nous sélectionnons $0, 1, x$ pour $\varphi_0(x)$, et en utilisant (2.9), plusieurs approximations successives φ_k, $k \geq 1$.

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)\varphi_0(t)dt, \\
\varphi_2(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)\varphi_1(t)dt, \\
\varphi_3(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)\varphi_2(t)dt, \\
&\vdots \\
\varphi_n(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)\varphi_{n-1}(t)dt,
\end{aligned}$$

La question de la convergence des $\varphi_n(x)$ se justifie en notant le théorème suivant:

Théorème 2.3.1 *si $f(x)$ dans (2.9) est continu pour l'intervalle $0 \leq x \leq a$, et le noyau $k(x,t)$ est également continue dans le triangle $0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq x$, la séquence d'approximations successives $\varphi_n(x), n \geq 0$ converge vers la solution $\varphi(x)$ de l'équation intégrale en discussion.*

Il est intéressant de souligner que la méthode d'itération variationnelle admet l'utilisation de la formule d'itération:

$$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) + \int_0^x \lambda(\xi)(\frac{\partial \varphi_n(\xi)}{\partial \xi} - \tilde{\varphi}_n(\xi))d\xi$$

Alors que la méthode des approximations successives utilese la formula d'itération

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)\varphi_{n-1}(t)dt, n \geq 1$$

la méthode d'approximation successive ou la méthode de Picard sera illustrée par l'exemple suivant:

Exemple 2.3.2 *Résoudre l'équation intégrale de Volterra en utilisant la méthode d'approximation successive:*

$$\varphi(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 \varphi(t)dt \tag{2.10}$$

pour l'approximation zéro $\varphi_0(x)$, nous pouvons sélectionner

$$\varphi_0(x) = 0 \tag{2.11}$$

La méthode de successives d'approximations admet l'utilisation de la formule d'itération:

$$\varphi_{n+1}(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\int_0^x (t-x)^2 \varphi_n(t)dt, n \geq 0 \tag{2.12}$$

remplacement (2.11) dans (2.12)

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2, \\
\varphi_2(x) &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5, \\
\varphi_2(x) &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{8}x^8, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

et ainsi de suite la solution $\varphi(x)$ de (2.10) est donné par:

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{n+1}(x) = \exp(x)$$

2.3.2 Méthodes numériques

I) Méthodes des Trapèzes:

Rappelons que l'équation intégrale de Volterra est donnée par

$$\varphi(x) = g(x) + \int_a^b k(k,t)\varphi(t)dt \tag{2.13}$$

Notre objectif est d'approximer la solution φ^* de cette équation sur un système des noeuds $x_0 = a < x_1 < ... < x_j < ...x_n = b$, supposons que ce système est équidistant, i.e, $x_j = a + jh$, $j = 0, 1, 2, ...n$, où h le pas de la discrétisation voulue, pour se faire en exigeant que l'égalité (2.13) ait lieu uniquement en ces noeuds, donc l'équation (2.13) devient:

$$\varphi(x_j) = g(x_j) + \int_a^{x_j} k(x_j,t)\varphi(t)dt,$$

La méthode des trapèzes, est usuelle dans le but d'approcher numériquement la quantité qui se présente sous forme intégrale dans cette équation, ceci nous amène à une seconde discrétisation par rapport à la variable d'intégration.

Si en pose $t = (x_i)_{0\leq i\leq j}$, il vient:

$$\varphi(x_j) = g(x_j) + (\frac{h}{2}k(x_j,t_0)\varphi(t_0) + h\sum_{i=1}^{j-1} k(x_j,t_i)\varphi(t_i) + (\frac{h}{2}k(x_j,t_j)\varphi(t_j)))$$

Avec les notations: $\varphi_j = \varphi(x_j)$, $g_j = g(x_j)$, $k_{ji} = k(x_j,t_i)$ cette formule s'écrit:

$$\varphi_j = g_j + (\frac{h}{2}k_{j0}\varphi_0 + h\sum_{i=1}^{j-1} k_{ji}\varphi_i + (\frac{h}{2}k_{ji}\varphi_j))$$

En général

$$\varphi_j(1-\frac{h}{2}k_{jj}) = g_j + (\frac{h}{2}k_{j0}\varphi_0 + h\sum_{i=1}^{j-1}k_{ji}\varphi_i + (\frac{h}{2}k_{ji}\varphi_j)) \quad j=1,2,...n, \tag{2.14}$$

Il résulte immédiatement de l'équation (2.14), pour $j=0$ la valeur de $\varphi(a)=g(a)$, d'où

$$\varphi_0 = g_0 \tag{2.15}$$

cette discrétisation nous à fournie alors un système d'équations algèbriques linéaires, de la forme: $A\varphi = b$, où A est une matrice triangulaire infèrieure i,e:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{h}{2}k_{10} & 1-\frac{h}{2}k_{11} & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ -\frac{h}{2}k_{1n} & & \dots & 1-\frac{h}{2}k_{nn} \end{bmatrix}$$

$\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n)^t$ et $b = (g_0, g_1, ..., g_n)^t$. cette matrice est triangulaire inferieure donc elle a pour déterminant:

$$\det(A) = (1-\frac{h}{2}M)^n = (1-\frac{b-a}{2n}M)^n = (1-\frac{h}{2}M)^{\frac{b-a}{h}}$$

soit

$$M = \max_{a\leq j\leq n}|k_{jj}|$$

Il en résulte évidement:

$$\det A \geq (1-\frac{h}{2}M)^n = (1-\frac{b-a}{2n}M)^n = (1-\frac{h}{2}M)^{\frac{b-a}{h}} \tag{2.16}$$

le seconde membre de cette inégalité est non nul our tout h suffisamment petit, il en croit avec la diminution de h. Ainsi $(1-\frac{h}{2}M)$ est pour h deux fois moindre:

$$(1-\frac{h}{4}M)^2 = (1-\frac{h}{2}M + \frac{h^2}{16}M^2)$$

lorsque $h \to 0$, le seconde membre de (2.16) tend vers $e^{-(b-a)\frac{M}{2}}$. Algèbriquement dit, le déterminant du système (2.15) est non nul.

II) Méthode de collection

pour résoudre l'équation de Volterra de deuxième espèce, on va choisir des points distincts $(x_1, x_2, ..., x_{d_n}) \in D$ tels que

$$r_n(x_i) = 0 \quad i = 1, ..., d_n$$

qui vont déterminer les coefficients $\{c_1, c_2, ..., c_{d_n}\}$ comme solution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^{d_n} c_j \left\{ \lambda \Psi_j(x_i) - \int_D K(x_i, t)\Psi_j(t)dt \right\} = f(x_i), \quad i = 1, ..., d_n$$

D'où

$$\sum_{j=1}^{d_n} \lambda c_j \Psi_j(x_i) = \sum_{j=1}^{d_n} c_j \int_D K(x_i, t)\Psi_j(t)dt + f(x_i), \quad i = 1, ..., d_n$$

En posant $\alpha_j = c_j \lambda$, alors on peut ecrire

$$P_n\varphi(x_i) = \sum_{j=1}^{d_n} \alpha_j \Psi_j(x), \qquad x \in D$$

Avec les coefficients $\{\alpha_j\}$ détemrinés en résolvant le système linéaire.

$$\sum_{j=1}^{d_n} \alpha_j \Psi_j(x_i) = \varphi(x_i), \qquad i = 1, ..., d_n$$

Ce système linéaire admet une seule solution si et seulement si

$$\det [\Psi_j(x_i)] \neq 0$$

Cette condition implique également que les fonctions $\{\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_{d_n}\}$ constuent sont un système linéairement indéendant sur D.

Application des Méthodes de collocation Si on considère le système $\{1, x, ..., x^n\}$ des monômes linéairement indépendants alors on obtient le déterminant de vendermonde.

pour tout i, $1 \leq i \leq d_n$, soit $l_i \in V_n$, telle que:

$$l_i(x_j) = \delta_{i,,j} \ = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

D'où

$$P_n\varphi(x) = \sum_{j=1}^{d_n} \varphi(x_j) l_j(x), \quad x \in D$$

Le système $\{l_1, l_2, ..., l_d\}$ est appelé le système de polynome d'intèrpolation de lagrange vérifiant:

$$\|P_n\| = \max_{x\in D} \sum_{j=1}^{d_n} |l_j(x)|$$

Si on prend $V_n = vect\{1, x, ..., x^n\}$,alors la base des fonctionsde lagrange est donnée par:

$$l_i(x) = \prod_{i\neq j, j=0}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, \qquad (i = 0, 1, ..., n)$$

Chapitre 3

Solution des équations intégrales de Volterra

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la méthode polynômiale de type Tchebychev et Legendre sur certaine classe des équations intégrales de Volterra de deuxième type.

Polynômes de Tchebychev

En mathématique, un polynôme de Tchebychev est un terme de l'une des deux suites de polynômes orthogonaux particulières reliées à la formule de Moivre. les polynômes de Tchebychev sont nommés ainsi en l'honneur du mathématicien russe Pafnouti Lvovitch Tchebychev.

Le polynômes de Tchebychev de première espèce et notée T_n, peuvent être définies par la relation :

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^i C_{2i}^n (1-x^2)^i x^{n-2i}$$

ou

$$\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Les premiers polynômes deTchebychev de première espèce sont:

$T_0(x)$	1
$T_1(x)$	x
$T_2(x)$	$2x^2 - 1$
$T_3(x)$	$4x^3 - 3x$
$T_4(x)$	$8x^4 - 8x^2 + 1$
$T_5(x)$	$16x^5 - 20x^3 + 5x$
$T_6(x)$	$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$
$T_7(x)$	$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7$
$T_8(x)$	$128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$
$T_9(x)$	$256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 - 9x$
$\vdots$	$\vdots$

Tableau.1 présente coefficients rationnels de polynôme de Tchebychev de première espèce

polynômes de legendre

En mathématique et en physique théorique, les polynômes de Legendre constituent l'exemple le plus simple d'une suite de polynôme orthogonaux. Il existe un suite de polynômes de Legendre est notée L_n.

Les polynômes de Legendre peuvent être définies par la relation :

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^i \frac{(2n-2i)}{2^n i!(n-2i)!(n-i)!} x^{n-2i}$$

ou

$$\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Les premiers polynômes de Legendre de première espèce sont:

$L_0(x)$	1
$L_1(x)$	x
$L_2(x)$	$\frac{1}{2}(3x^2-1)$
$L_3(x)$	$\frac{1}{2}(5x^3-3x)$
$L_4(x)$	$\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$
$L_5(x)$	$\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$
$L_6(x)$	$\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5)$
$L_7(x)$	$\frac{1}{16}(429x^7-693x^5+315x^3-35x)$
$L_8(x)$	$\frac{1}{128}(6435x^8-12012x^6+6930x^4-1260x^2+35)$
$L_9(x)$	$\frac{1}{128}(12155x^9-25740x^7+18018x^5-4620x^3+315x)$
$\vdots$	$\vdots$

Tableau.2 présente coefficients rationnels de polynôme de Legendre.

Méthode de Galerkin

Soit X un espcace d'Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$, on se donne une suite de sous espace $X_n \subset X$ de dimension finie. Soit $\{\psi_1, ..., \psi_n\}$ une base orthonormale de X_n, on cherche une fonction $\varphi_n \in X_n$ proche de la solution exacte du problème original.

$$\varphi - A\varphi = f \tag{3.1}$$

Donc pour le problème (3.1), l'idée est de minimiser l'erreur

$$r_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(I-A)\psi_i - f \tag{3.2}$$

d'où on impose la condition d'orthogonalité suivante:

$$\langle r_n, \psi_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i(I-A)\psi_i - f\ , \psi_j \right\rangle = 0, \qquad j = 1, ...n \tag{3.3}$$

ce qui implique

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i(I-A)\psi_i, \psi_j \right\rangle - \langle f, \psi_j \rangle = 0, \qquad j = 1, ...n \tag{3.4}$$

Où

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \left\{ \langle \psi_i, \psi_j \rangle - \langle A\psi_i, \psi_j \rangle \right\} = \langle f, \psi_j \rangle, \qquad j = 1, ...n \tag{3.5}$$

Ainsi, on obtient le système linéaire.

$$c_j - \sum_{i=1}^{n} c_i \left\langle A\psi_i, \psi_j \right\rangle = \left\langle f, \psi_j \right\rangle, \qquad j = 1, ...n \tag{3.6}$$

3.1 Méthode Galerkin avec deux polynômes de Tchebyshev et Legendre

Formulation de l'équation intégrale sous forme matricielle

Considérons une équation intégrale de Volterra linéaire générale (VIE) de second type est donnée par

$$\varphi(x) = g(x) + \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \tag{3.7}$$

où $g(x)$ est une fonction donnée, $k(x,t)$ est le noyau et $\varphi(x)$ est l'inconnue fonction ou solution exacte de (3.7), qui est à déterminer.

Maintenant, nous utilisons la technique de la méthode Galerkin avec polynôme de Tchebyshev, et Legendre [13] pour trouver une solution approximative $\varphi_n(x)$ de (3.7). Pour cela, supposons que

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i(x) \tag{3.8}$$

où $P_n(x)$ sont des polynômes de Tchebyshev, ou Legendre de degré n, et α_i sont des paramètres inconnus, à déterminer. En substituant (3.8) en (3.7), on obtient

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i(x) + \int_a^x (k(x,t) \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i(t))dt = g(x)$$

ou

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \left[P_i(x) + \int_a^x (k(x,t)P_i(t))dt \right] = g(x) \tag{3.9}$$

Ensuite, l'equation Galerkin est obtenue en multipliant les deux côtés de (3.8) par $P_j(x)$ et en intégrant ensuite par rapport à x de a à b, nous avons

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \left\{ \int_a^b \left[P_i(x) + \int_a^x (k(x,t)P_i(t))dt \right] P_j(x)dx \right\} = \int_a^b P_j(x)g(x)dx,\ j = 0, 1, ..., n \tag{3.10}$$

Puisque dans chaque équation, il y a trois intégrales. L'intégrande interne du côté gauche est une fonction de x et t , et est intégré par rapport à t de a à x. En conséquence, l'intégrande externe devient une fonction de x uniquement et l'intégration par rapport à x donne une constante. Ainsi pour chaque $j = 0, 1, ..., n$ on a une équation linéaire à $(n + 1)$ inconnues α_i , $i = 1, 2, ..., n$. Enfin (3.10) représente le système de $(n+1)$ équations linéaires dans $(n + 1)$ inconnues, sont donnés par

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i C_{ij} = G_j \ ,\ j = 0, 1, ..., n \tag{3.11}$$

où

$$C_{ij} = \int_a^b \left[P_i(x) + \int_a^x (k(x,t)P_i(t))dt \right] P_j(x)dx,\ i, j = 0, 1, ..., n \tag{3.12}$$

$$G_j = \int_a^b P_j(x)g(x)dx,\ j = 0, 1, ..., n \tag{3.13}$$

Maintenant, les paramètres inconnus α_i sont déterminés en résolvant le système d'équations (3.10), et en substituant ces valeurs de paramètres dans (3.8), nous obtenons la solution approximative $\varphi_n(x)$ de l'équation intégrale (3.7). L'erreur absolue er pour cette formulation est définie par

$$er = |\varphi - \varphi_n|$$

3.2 Résultats numériques

Dans cette section, nous expliquons quatre équations intégrales qui sont disponibles dans les littératures existantes [12, 19, 15, 13]. Pour chaque exemple, nous trouvons les solutions approximatives en utilisant un différent de polynômes P_n de Tchebyshev, et Legendre

Exemple 3.2.1 *Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra*

$$\varphi(x) - \int_0^x \varphi(t)dt = 1 + x - x^2, \quad 0 \leq x \leq 1$$

où la fonction $f(x)$ est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi(x) = 2x + 1$$

La solution approximative $\varphi_n(x)$ de $\varphi(x)$ est obtenue par la méthode de Galerkin avec les polynômes de Tchebyshev et Legendre.

Tableau 1*. Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans l'exemple 3.2.1 dans certains points arbitraires, l'erreur pour $N = 6$ est calculée.*

x	sol exact φ	sol app φ_n , T_n	sol app φ_n , L_n	Erreur T_n	Erreur L_n
0.0	1.000000000E+00	1.000018441E+00	1.000019949E-01	1.8E-05	2.0E-05
0.1	1.200000000E+00	9.909021708E-01	9.909037327E-01	2.1E-01	2.1E-01
0.2	1.400000000E+00	9.666695352E-01	9.666710990E-01	4.3E-01	4.3E-01
0.3	1.600000000E+00	9.307662392E-01	9.307677493E-01	6.7E-01	6.7E-01
0.4	1.800000000E+00	8.857072366E-01	8.857086341E-01	9.1E-01	9.1E-01
0.5	2.000000000E+00	8.333307488E-01	8.333319712E-01	1.2E+00	1.2E+00
0.6	2.200000000E+00	7.750014791E-01	7.750024610E-01	1.4E+00	1.4E+00
0.7	2.400000000E+00	7.117630244E-01	7.117636967E-01	1.7E+00	1.7E+00
0.8	2.600000000E+00	6.444394816E-01	6.444397723E-01	2.0E+00	2.0E+00
0.9	2.800000000E+00	5.736862521E-01	5.736860861E-01	2.2E+00	2.2E+00
1.0	3.000000000E+00	4.999900413E-01	4.999893405E-01	2.5E+00	2.5E+00

Exemple 3.2.2 *Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra*

$$\varphi(x) - \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt = 2e^x - x - 2, \quad 0 \leq x \leq 1$$

où la fonction $f(x)$ est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi(x) = xe^x$$

La solution approximative $\varphi_n(x)$ de $\varphi(x)$ est obtenue par la méthode de Galerkin avec les polynômes de Tchebyshev et Legendre.

Tableau 2. *Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans l'exemple 3.2.2 dans certains points arbitraires, l'erreur pour $N = 6$ est calculée.*

x	sol exact φ	sol app φ_n , T_n	sol app φ_n , L_n	Erreur T_n	Erreur L_n
0.0	0.000000000E+00	-1.072410873E-05	-1.091984846E-05	1.1E-05	1.1E-05
0.1	1.105170918E-01	1.097925497E-01	1.097940470E-01	7.2E-04	7.2E-04
0.2	2.442805516E-01	2.380384752E-01	2.380416665E-01	6.2E-03	6.2E-03
0.3	4.049576423E-01	3.825013567E-01	3.825061796E-01	2.2E-02	2.2E-02
0.4	5.967298791E-01	5.404120688E-01	5.404183913E-01	5.6E-02	5.6E-02
0.5	8.243606354E-01	7.088299794E-01	7.088375935E-01	1.2E-01	1.2E-01
0.6	1.093271280E+00	8.849382538E-01	8.849468688E-01	2.1E-01	2.1E-01
0.7	1.409626895E+00	1.066262540E+00	1.066271775E+00	3.4E-01	3.4E-01
0.8	1.780432743E+00	1.250813032E+00	1.250822412E+00	5.3E-01	5.3E-01
0.9	2.213642800E+00	1.437149922E+00	1.437158865E+00	7.8E-01	7.8E-01
1.0	2.718281828E+00	1.624372222E+00	1.624380036E+00	1.1E-01	1.1E-01

Exemple 3.2.3 *Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra*

$$\varphi(x) - \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt = x, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

où la fonction $f(x)$ est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi(x) = 1 - x$$

La solution approximative $\varphi_n(x)$ de $\varphi(x)$ est obtenue par la méthode de Galerkin avec les polynômes de Tchebyshev et Legendre.

Tableau 3. *Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans l'exemple 3.2.3 dans certains points arbitraires, l'erreur pour $N = 6$ est calculée.*

x	sol exact φ	sol app φ_n , T_n	sol app φ_n , L_n	Erreur T_n	Erreur L_n
0.0	1.000000000E+00	4.984028692E-07	7.964738273E-07	1.0E+00	1.0E+00
0.1	9.000000000E-01	9.048401868E-02	9.048383182E-02	8.1E-01	8.1E-01
0.2	8.000000000E-01	1.637467346E-01	1.637460506E-01	6.4E-01	6.4E-01
0.3	7.000000000E-01	2.222461026E-01	2.222449230E-01	4.8E-01	4.8E-01
0.4	6.000000000E-01	2.681286719E-01	2.681270125E-01	3.3E-01	3.3E-01
0.5	5.000000000E-01	3.032661043E-01	3.032639955E-01	2.0E-01	2.0E-01
0.6	4.000000000E-01	3.292878546E-01	3.292853419E-01	7.1E-02	7.1E-02
0.7	3.000000000E-01	3.476105131E-01	3.476076574E-01	4.8E-02	4.8E-02
0.8	2.000000000E-01	3.594638095E-01	3.594606877E-01	1.6E-01	1.6E-01
0.9	1.000000000E-01	3.659132787E-01	3.659099838E-01	2.7E-01	2.7E-01
1.0	0.000000000E+00	3.678795873E-01	3.678762287E-01	3.7E-01	3.7E-01

Exemple 3.2.4 *Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra de type Abel*

$$\varphi(x) = x^2 + \frac{16}{15}x^{\frac{5}{2}} - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}\varphi(t)dt = x, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

où la fonction $f(x)$ est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi(x) = x^2$$

La solution approximative $\varphi_n(x)$ de $\varphi(x)$ est obtenue par la méthode de Galerkin avec les polynômes de Tchebyshev et Legendre.

Tableau 4. *Nous présentons les solutions exactes et approximatives de l'équation dans l'exemple 3.2.4 dans certains points arbitraires, l'erreur pour $N = 6$ est calculée.*

x	sol exact φ	sol app φ_n (pol T_n)	sol app φ_n , L_n	Erreur T_n	Erreur L_n
0.0	0.000000000E+00	-6.663516677E-05	-6.743032786E-05	6.7E-05	6.7E-05
0.1	1.000000000E-02	8.198338734E-03	8.198232314E-03	1.8E-03	1.8E-03
0.2	4.000000000E-02	3.117656202E-02	3.117717906E-02	8.8E-03	8.8E-03
0.3	9.000000000E-02	6.804443955E-02	6.804578923E-02	2.2E-02	2.2E-02
0.4	1.600000000E-01	1.183041427E-01	1.183062046E-01	4.2E-02	4.2E-02
0.5	2.500000000E-01	1.816542453E-01	1.816569650E-01	6.8E-02	6.8E-02
0.6	3.600000000E-01	2.578948351E-01	2.578981198E-01	1.0E-01	1.0E-01
0.7	4.900000000E-01	3.468671014E-01	3.468708153E-01	1.4E-01	1.4E-01
0.8	6.400000000E-01	4.484273990E-01	4.484313584E-01	1.9E-01	1.9E-01
0.9	8.100000000E-01	5.624557871E-01	5.624597555E-01	2.5E-01	2.5E-01
1.0	1.000000000E+00	6.888990454E-01	6.889027282E-01	3.1E-01	3.1E-01

Conclusion

Dans ce mémoire, nous étudierons l'équation intégrale de Volterra par la méthode de Galerkin avec les deux polynômes de Tchebyshev et Legendre, On a illustré à la fin par des exemples avec la programation par logiciel de calcul numérique MATLAB, et comparer les solutions exactes avec les solutions approximatives.

L'importance de l'étude de l'équation intégrale de Volterra réside dans les problèmes physique.

Bibliographie

[1] S. Abbasbandy, E. Shivanian, A new analytical technique to solve Fredholm's integral equations, in Numer Algor, 56, (2011) 27–43.

[2] Abdul-Majid Wazwaz, A first cours in integral equations, saint xavier university, USA, second edition, 2005.

[3] A. Adawi, F. Awawdeh, A numerical method for solving linear integral equations, Int. J. Contemp. Mathematics Sciences, 10, (2009) pp 485-496.

[4] G. Arfken, Laguerre functions, mathematical methods for physicists, 1985.

[5] K. Atkinson, The numerical solution of Integral équations of the second kind,the press syndicate of the university of cambridge, united kingdom, 1997.

[6] K. Atkinson, W. Han, Theoretical Numerical Analysis A Functional Analysis Framework. Springer, 2001.

[7] K. E. Atkinson, The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind, Cambridge University Press, Cambridge,pp50-52, 1997.

[8] E. Babolian, A. Davari, Numerical implementation of Adomian decomposition method for linear Volterra integral equations of the second kind, App. Math. Comput, 165 (2005) 223–227.

[9] E. Babolian, H.R. Marzban, M. Salmani, Using triangular orthogonal functions for solving Fredholm integral equations of the second kind, App. Math. and Comput., 201, (2008) 452-464.

[10] B. Gagui, Sur les équations intégrales dans les espaces d'Orlicz, thèse de Doctorat, Université de Msila, 2015.

[11] A. Jerri. Introduction to integral equations with applications. John Wiley and Sons, INC, 1999.

[12] R. Kress, Linear Integral Equations. Springer. Verlag, New York, 2d ed , pp224-225, 1999.

[13] P. Lewis and J. P. Ward, The Finite Element Method, Principles and Applications Addison-Wesley, 1991.

[14] K. Maleknejad, N. Aghazadeh, Numerical solution of Volterra integral equations of the second kind with convolution kernel by using Taylor-series expansion method, Appl. Math. Comput, 161, (2005) 915–922.

[15] M. Mohamadi , E. Babolian, S. A. Yousefi. A Solution For Volterra Integral Equa-tions of the First Kind Based on Bernstein Polynomials, Int. J. Industrial Mathematics, 10, (1) (2018), 19-27

[16] M. Nadir, Cours sur les équations intégrales, université M'sila 2008.

[17] M. Nadir, Solving Fredholm integral equations with application of the four Chebyshev polynomials, in Journal of Approximation Theory and Applied Mathematics, 4, (2014), pp 37-44.

[18] M. Nadir, Solving linear integral equations with Fibonacci polynomials, Malaya Journal of Matematik, Vol. 6, No. 4, (2018), 711-715.

[19] M. Nadir, D. Mustapha, Euler Series solutions for linear Integral equations AJMAA, Vol. 14, No. 2, Art. 11, (2017) pp 1-7.

[20] M. Nadir, A. Rahmoune, Modified Method for Solving Linear Volterra Integral equations of the Second Kind Using Simpson's Rule, in International Journal Mathematical Manuscripts (IJMM), 1, (2) (2007), 133-140.

[21] A. Rahmoune, Sur la résolution numérique des équations intégrales en utilisant des fonctions spéciales, Thèse de Doctorat, Université de Batna, 2011.

ملخص:في هذه المذكرة قمنا بتطبيق طريقة جالركين باستعمال كثيرات الحدود من نوع تشيبيشاف ولجندر على المعادلات التكاملية من نوع فولتيرا لأجل إيجاد الحلول التقريبية ومقارنتها مع الحلول الدقيقة.
الكلمات المفتاحية: معادلة فولتيرا التكاملية، كثيرات حدود تشيبيشاف، كثيرات حدود لجندر، طريقة جالركين.

Abstract: In This work we have applied the Galerkin method with Tchebychev and Legendre polynomials to Volterra type integral equation in order to find approximate solutions and compare them with exacte solutions.
Keywords: integral equation of Volterra,
Tchebyshev Polynomials, Legendre Polynomials, Galerkin method.

Résumé: Dans ce mémoire, nous avons appliqué la méthode de Galerkin avec deux polynômes de type Tchebychev et Legendre sur certaine classe des équations intégrale de type Volterra afin de trouver des solutions approchées et de le comparer avec des solutions exactes.
Mots-clés: équation intégrale de Volterra, Polynôme de Tchebychev, Polynôme de Legendre, Méthode de Galerkin.