بسم الله الرحمن الرحيم

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master :

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématiques et numérique

Thème :

Solutions numériques pour les équations intégro-différentielles de Fredholm et Volterra

Présenté par:

BENTOUMISSA Saâdia

Soutenu publiquement le: 14/06/2025

Devant le jury composé de:

GAGUI Bachir	M.C.A,	Université de M'sila	**Président :**
NADIR Mostefa	Prof	Université de M'sila	**Encadreur :**
LAKHAL Aissa	M.C.B,	Université de M'sila	**Examinateur :**

Année universitaire 2024/2025

Remerciements:

Je remercie ALLAH, qui m'a donné la force , la santé et la volonté de commencer et de terminer ce mémoire.

Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de professeur NADIR Mostefa je le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant mon préparation de ce mémoire

J'adresse mes sincères remerciements

à Monsieurs les professeurs GAGUI Bachir et LAKHAL Aissa qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'évaluer ce mémoire.

Enfin, je remercie tous mes amis de prés ou de loin, et les étudiants de ma promotion de spécialité Analyse Mathématique et Numérique

Dedicace :

Je dédie ce modeste travail:

A mes parents,je vous remercie pour tout ce que vous avez fait pour moi.....que dieu préserve une longue vie heureuse avec toute ma tendresse.

A tous mes frères et mes soeurs

A tou la famaille(Ben toumissa).

A tous mes enseignants depuis le primaire jusqu'à maintenant.

A tout les amies.

&

La promotion de mathématiques 2025

A toutes les personnes que j'aime.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles intégrales apparaissent fréquemment dans la modélisation de phénomènes physiques,biologiques et économiques,où l'évolution d'un système dépend non seulement de son état actuel mais aussi de son historique ou de l'effet global d'une interaction. Parmi ces équations,celles de Fredholm et de Volterra occupent une place particulière ,du fait de leur structure mêlant des termes différentiels et intégrales.

Cependant,en raison de la complexité analytique de ces équation,il est souvent difficile,voire impossible ,d'en obtenir des solutions exactes .D'où l'importance des méthodes numériques,qui permettent d'obtenir des solutions approchées avec une précision satisfaisante .Ce travail s'intéresse aux approches numériques utilisées pour résoudre les équations différentielles intégrales de Volterra et de Fredholm ,en mettant en lumière les méthodes de discrétisation, les schémas de quadrature et les techniques de résolution des systèmes linéaires ou non linéaires associé

Notre travail est divisé en trois chapitres :

Le Premier chapitre : est une introduction à l'analyse numérique la théorie des opérateurs continus et opérateurs compacts et opérateurs intégraux..

Le Deuxième chapitre : est une introduction à la terminologie et la classification des équations intégrales et la classification des équations différentielles intégrales, qui a pour objectif de familiariser le lecteur de ce travail avec le concept d'équation intégrale, et quelques définitions des polynômes de Lagrange utilisé pour résoudre cette équation. On trouve aussi une étude sur l'existence et l'unicité des équations intégrales des types Volterra-Fredholm.

Le Troisième chapitre : est destiné à l'étude de la résolution numérique des équations différentielles intégrales de Volterra-Fredholm .

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle et numérique

1.1 Notions d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Espace vectoriel normé :[1]

Normes

Soit E un espace vectoriel sur le corps $K = R$ ou C on appelle une norme sur l'espace E toute fonction notée$\|.\|$ définie sur E à valeurs dans R, telle que

1. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$,pour tout $x \in E$,et $\lambda \in K$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,pour tout $x, y \in E$

on dit que E est un espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme $\|.\|$

Tout espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est un espace métrisable

Proof. Pour tout $x, y \in E$ on définit la fonction ϕ par

$$\phi(x, y) = \|x - y\|$$

On remarque que cette fonction est bien une métrique sur E car, on a

$$\phi(x, y) = \|x - y\| = 0$$

ou encore

$$x - y = 0$$

D'où l'égalité

$$x = y$$

Il est évident de voir que la distance $\phi(x, y)$ est symétrique

$$\begin{aligned}\phi(x,y) &= \|x-y\| \\ &= \|y-x\| = \phi(y,x)\end{aligned}$$

Pour l'inégalité triangulaire, on écrit

$$\begin{aligned}\phi(x,y) &= \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \\ &\leq \|x-z\| + \|z-y\| \\ &= \phi(x,z) + \phi(z,y)\end{aligned}$$

□

1.1.2 Espace de Banach :[1]

Suite de Cauchy :

Soit (x_n) une suite d'éléments d'un espace normé $(E, \|.\|)$; on dit que la suite (x_n) est de Cauchy si, on a la relation suivante :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \quad \forall p, q \geq N_\varepsilon \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

Soit x_n une suite de Cauchy dans un espace normé $(E, \|.\|)$ contient une sous suite x_{n_k} convergente vers x alors la suite x_n est aussi convergente vers le même élément x.

Soit x_n une suite de Cauchy alors il vient

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \quad \forall p, q \geq N_\varepsilon \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

en particulier pour $n_k \geq N_\varepsilon$, on a

$$\forall p, n_k \geq N_\varepsilon,\ \|x_p - x_{n_k}\| < \varepsilon$$

avec la convergence de la suite x_{n_k} vers x

$$n_k \geq N_\varepsilon, \|x_{n_k} - x\| < \varepsilon$$

D'où la convergence de la suite x_n vers l'élément x

$$\begin{aligned} \forall p, n_k \geq N_\varepsilon\ ,\ \|x_p - x\| &= \|x_p - x + x_{n_k} - x_{n_k}\| \\ &\leq \|x_p - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| < \varepsilon \end{aligned}$$

Espaces complets

Definition 1.1 *Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est dit complet, si toute suite de Cauchy x_n d'élément de E est une suite convergente dans E*

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon,\quad \forall p, q \geq N_\varepsilon \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

Implique l'existence d'un élément $x \in E$ tel que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x$$

Espaces de Banach

Definition 1.2 *On appelle espace de Banach $(E, \|.\|)$ tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de sa norme.*

1.1.3 Espace de Hilbert :[1]

Produit scalaire

Definition 1.3 *On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel E (réel ou complexe) une application :* $\langle .,. \rangle : E \times E \to \mathbb{C}$ *telle que pour tout* $x, y, z \in E$ *et* $\lambda \in \Bbbk$

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$

2. $\langle x, x \rangle = 0 \Longrightarrow x = 0$

3. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

4. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

5. $\langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle$

Definition 1.4 *un espace de Hilbert H est un espace complet par rapport à la norme induite par le produit scalaire. En d'autres terme un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme induite par un produit scalaire.*

Généralement l'espace H est séparable est de dimension infinie, en d'autre terme, il existe un ensemble dénombrable partout dense dans H et pour tout

entier $n \in N$, il existe n vecteurs dans H linéairement indépendants.

Example 1.5 ***L'espace*** $L^2(a, b)$

L'espace $L^2(I, \mathbb{R})$ des fonctions de carré intégrales défini par

$$L^2(I, \mathbb{R}) = \left\{ f; \int_I |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\}$$

ou l'intégrale est prise au sens de Lebesgue, muni da la norme

$$\|f\|^2 = \int_I |f(t)|^2 \, dt$$

induite par le produit scalaire définit par

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(x) g(x) dx$$

est un espace de Hilbert

Orthogonalité

Definition 1.6 *(Vecteurs orthogonaux)On dit que deux vecteurs x et y d'un espace de Hilbert H sont orthogonaux si :*

$$\langle x, y \rangle = 0$$

Base hilbertiennes

Une partie X de H est dite dense dans H si :

$$\forall y \in H, \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X ; \|x - y\| < \varepsilon$$

de manière équivalente si tout y de H est limite d'une suite d'éléments x_n de X : $\|x_n - y\| \longrightarrow 0$

Definition 1.7 *Soit H un espace de Hilbert sur le corps $\Bbbk$ et $F = (e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs. On dit que F est une base de Hilbert (base hilbertienne) de H si :*

1. F est une famille orthonormée de H, c'est-à-dire : $\begin{cases} \forall (i,j) \in I^2 \quad i \neq j \Longrightarrow \langle e_i, ej \rangle = 0 \\ \forall i \in I, \ \langle e_i, e_j \rangle = \|e_i\|^2 = 1 \end{cases}$
2. La famille F est de plus complète ou total, c'est-à-dire : l'ensemble des combinaisons linéaires finies des éléments de F est dense dans H

Theorem 1.8 *(Riesz-Fischer) Soit un système orthonormé dans un espace de Hilbert H, et soient les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, .., \alpha_i$ telles que la série $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ soit convergente, alors on peut trouver un vecteur $f \in H$, tel que*

$$\alpha_i = \langle f ; \varphi_i \rangle , \quad \forall i = 1, 2, ..$$

et de plus, on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f ; \varphi_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$$

ou encore

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$$

Soit $\{\varphi_k\}$ un système orthonormé d'éléments d'un espace de Hilbert H, pour que ce système soit complet, il faut et il suffit que, le seul vecteur de H orthogonal au système $\{\varphi_k\}$ est le vecteur nul. Cela signifie qu'il n'existe pas un vecteur non nul de H, qui soit orthogonal à tous les vecteurs du système $\{\varphi_k\}$

Theorem 1.9 *Tous les espaces de Hilbert séparables sont isomorphes entre eux.*

Remark 1.10 *Comme il est connu en algèbre linéaire, que tous les espaces vectoriels ou euclidiens de mêmes dimensions finies n sont isomorphes entre eux, car chacun est isomorphe à l'espace K^n alors de même tous les espaces de Hilbert sont isomorphes entre eux, car chacun est isomorphes à L_2*

1.1.4 Opérateurs linéaires bornés :[1]

Linéarité des opérateurs

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur E dans F est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes

– *Condition additive*

$$\forall \varphi_1,\ \varphi_2 \in E, \text{ on a } A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2).$$

– *Condition homogène*

$$\forall \varphi \in E,\ \lambda \in K = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \text{ on a } A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi).$$

Continuité des opérateurs linéaires

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si, on a la propriété suivante

Pour toute suite x_n de G converge vers x_0, la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$ c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty} A(x_n) = A(\lim_{n\to\infty} x_n) = A(x_0).$$

L'opérateur linéaire A est dit continu sur G, s'il est continu en chaque point de l'ensemble G.

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F, est dit continu partout sur G s'il est continu en point x_0 de G.

Opérateurs bornés

Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que

$$\|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \ \ \forall\, x \in E.$$

La norme $\|A\| = \sup \|A(x)\|_F$ sur la boule unité est toujours finie pour tout opérateur linéaire continu.

Un opérateur linéaire A est continu, si et seulement si, il est borné.

La notion d'isométrie est plus forte que celle de l'isomorphie.

Normes équivalentes

Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $(E, \| \|_1)$ et $(E, \| \|_2)$, ces deux normes sont dites équivalentes, si on peut trouver deux constantes positives α et β, telles que

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1, \ \forall\, x \in E.$$

Autrement dit, les deux normes sont dites équivalentes si et seulement si, l'application identique de E dans E soit un isomorphisme entre les espaces vectoriels normés $(E, \| \|_1)$ et $(E, \| \|_2)$.

1.1.5 Opérateurs compact :[1]

Definition 1.11 *Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F, on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné G dans E à un ensemble relativement compact $A(G)$ dans F. Autrement dit, la fermeture $\overline{A(G)}$ est compacte.*

Ensembles relativement compacts

Un ensemble $G \subset E$ est relativement compact si pour toute suite $\{u_n\}$ de G, il existe une sous suite $\{u_{n(k)}\}$ qui converge dans F.

Theorem 1.12 *(critère de compacité)*

Un opérateur linéaire $A : E \to F$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée φ_n de E, la suite $A\varphi_n$ contient une sous suite convergente dans F.

Proof. Il suffit d'appliquer les définitions appropriés d'un ensemble borné et un ensemble relativement compact. $\square$

Theorem 1.13 *Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact.*

Theorem 1.14 *Le produit AB de deux opérateurs bornés A et B est compact si l'un des opérateurs A ou B est compact.*

Proof. Soit $\{\varphi_n\}$ un suite bornée de E, alors si B est un opérateur borné la suite $B\varphi_n(x)$ est aussi bornée, et de la compacité de l'opérateur A il existe une sous suite de $A(B\varphi_n(x))$ qui converge, ce qui implique que AB est compact.

D'autres part si B est compact, on peut extraire de la suite $B\varphi_n(x)$ une sous suite convergente $B\varphi_{n(k)}(x)$, et de la continuité de l'opérateur A car il est borné la suite $A(B\varphi_{n(k)}(x))$ converge, ce qui implique que AB est compact. $\square$

Theorem 1.15 *Soit E un espace normé et F un espace de Banach, et soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs compacts de E dans F, convergente en norme vers l'opérateur linéaire A de E dans F*

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Alors A et compact.

Corollary 1.16 *La boule unité $B(0,1)$ dans un espace de dimension infinie n'est pas compact.*

Theorem 1.17 *Un opérateur compact est un opérateur borné. La réciproque est fausse.*

Theorem 1.18 *L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau continu est un opérateur compact.*

Noyau faiblement singulier

Definition 1.19 *On appelle noyau faiblement singulier la fonction K continue sur $G \times G \subset R^n \times R^n$ sauf peut être aux points $x = t$ et telle que,*

$$\forall x, t \in G,\ x \neq t,\ \exists M > 0,\ |K(x,t)| < \frac{M}{|x-t|^{n-\alpha}}, \quad 0 < \alpha \leq n$$

Theorem 1.20 *L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau faiblement singulier est un opérateur compact.*

1.1.6 Equations aux Opérateurs compacts :[1]

Equations de second espèce

Soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même alors l'opérateur $T = I - A$ défini l'équation de second espèce donné par

$$\varphi - A\varphi = f \ ; \quad \varphi,\ f \in X$$

où f est un fonction donnée et φ la fonction inconnue

Theorem 1.21 *Le noyau de l'opérateur T défini par*

$$\ker T = N(T) = \{\varphi \in X \ ; \ T\varphi = (I - A)\varphi = 0\},$$

est un sous espace fermé et de dimension finie

Theorem 1.22 *La suite d'ensemble des noyaux*

$$N(T), N(T^2), ..., N(T^n), ...$$

est une suite croissante stationnaire. Autrement dit,elle ne contient qu'un nombre fini d'ensemble distincts , c'est à dire il existe un entier $p \in N$ *tel que*

$$\{0\} \subset N(T), N(T^2) \subset .... \subset N(T^p) = N(T^{p+1}) = ...$$

Le nombre p est appelé le nombre de Riez de l'opérateur compact A pour l'ensemble des noyaux $\{N(T^n)\}$

Theorem 1.23 *L'image de l'opérateur* T *défini par ,*

$$\operatorname{Im} T = T(X) = R(T) = \{\psi = T\varphi; \text{ telle que } \varphi \in X\}$$

est un sous espace fermé

Le nombre de Riez p pour l'ensemble des noyaux $\{N(T^n)\}$ et le nombre de Riez q pour l'ensemble des images $\{R(T^n)\}$ sont égaux. Autrement dit

$$p = q$$

Theorem 1.24 *Les sous espaces* $N(T^n)$ *et* $R(T^n)$ *sont supplémentaires. Autrement dit*

$$X = \ker T^n \oplus \operatorname{Im} T^r \equiv N(T^n) \oplus R(T^n)$$

où $r = p = q$ est le nombre de Riesz

Lemma 1.25 *L'opérateur* $T = I - A$ *est injectif si et seulement si,*T^r *est injectif pour tout* $r \in \mathbb{N}$

Lemma 1.26 *L'opérateur* $T = I - A$ *est surjectif si et seulement si* T^r *est surjectif pour tout* $r \in \mathbb{N}$

Theorem 1.27 *soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même alors l'opérateur$T = I - A$ est injectif si et seulement si il est surjectif, de plus l'opérateur admet un inverse $T^{-1} = (I - A)^{-1}$ borné*

Theorem 1.28 *soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même alors, pour que l'équation non homogène*

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = f$$

admette une solution unique $\varphi \in X$, pour tout $f \in X$, il faut et il suffit que l'équation homogène

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = 0$$

admette la solution triviale $\varphi = 0$.

Chapitre 2

Equations intégrales et leurs classification :

2.1 Classification des équations intégro-différentielles :

2.1.1 Equations intégro-différentielles de Volterra :[2]

Definition 2.1 *L' équation intégro -différentielle de Volterra est donnée par la forme suivante :*

$$\sum_{i=0}^{m} pi\,(x)\,\varphi^{(i)}\,(x) = f\,(x) + \lambda \int_{a}^{x} K\,(x,t)\,\varphi\,(t)\,dt$$

avec les conditions initiales

$$\varphi^{(i)}\,(a) = \alpha_i, 0 \leq i \leq m-1$$

Où $\varphi^{(i)}\,(x)$ *indique la* $i^{iéme}$ *dérivée de* $\varphi\,(x)$ *et* $pi\,(x)\,, K\,(x,t)$ *et* $f\,(x)$ *sont des fonctions connues et* λ *un paramètre non nul,et* $\varphi\,(x)$ *la fonction inconnue.*

Definition 2.2 *L'equation*

$$\left\{\begin{array}{rcl}\varphi'\,(x) & = & x - \int_{0}^{x} (x-t)\,\varphi\,(t)\,dt \\ \varphi\,(0) & = & 0\end{array}\right.$$

est une équation intégro- différentielle de Volterra du premier ordre,et l'équation

$$\left\{\begin{array}{rcl}\varphi''\,(x) & = & -x + \int_{0}^{x} (x-t)\,\varphi\,(t)\,dt \\ \varphi\,(0) & = & 0, \varphi'\,(0) = -1\end{array}\right.$$

est une équation intégro- différentielle de Volterra du second ordre.

2.1.2 Equations intégro-différentielles de Fredholm :[2]

Definition 2.3 *L' équation intégro- différentielle de Fredholm est donnée par la forme suivante :*

$$\sum_{i=0}^{m} Pi\left(x\right)\varphi^{(i)}\left(x\right) = f\left(x\right) + \lambda \int_{a}^{b} K_1\left(x,t\right)\varphi\left(t\right)dt + \lambda \int_{a}^{b} K_2\left(x,t\right)\varphi\left(t\right)dt$$

avec les conditions initiales

$$\varphi^{(i)}\left(a\right) = \alpha_{i,} 0 \leq i \leq m-1$$

Où $\varphi^{(i)}\left(x\right)$ indique la $i^{iéme}$dérivée de $\varphi\left(x\right)$ et $pi\left(x\right), K\left(x,t\right)$ et $f\left(x\right)$ sont des fonction connues et λ un paramètre non nul ,et $\varphi\left(x\right)$ la fonction inconnue.

Example 2.4 *L'équation*

$$\begin{aligned} \varphi'\left(x\right) &= 12x + \int_{0}^{1} \varphi\left(t\right)dt \\ \varphi\left(0\right) &= 0 \end{aligned}$$

est une équation intégro-différentielle de Fredholm du premier ordre-et l'équation

$$\begin{aligned} \{\varphi''\left(x\right) + \varphi'\left(x\right) &= x - \sin\left(x\right) + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} xt\varphi\left(t\right)dt \\ \varphi\left(0\right) &= 0, \varphi'\left(0\right) = 1 \end{aligned}$$

est une équation intégro-différentielle de Fredholm du second ordre

2.1.3 Equations intégro-différentielles de Volterra-Fredholm :[2]

Definition 2.5 *L'équation intégro-différentielles de Volterra-Fredholm est donnée par la forme suivante :*

$$\sum_{i=0}^{m} pi\left(x\right)\varphi^{(i)}\left(x\right) = f\left(x\right) + \lambda \int_{a}^{x} K_1\left(x,t\right)\varphi\left(t\right)dt + \lambda \int_{a}^{b} K_2\left(x,t\right)\varphi\left(t\right)dt$$

avec les condition initiales

$$\varphi^{(i)}\left(a\right) = \alpha_i, 0 \leq i \leq m-1$$

Où $\varphi^{(i)}\left(x\right)$ indique la $i^{iéme}$ dérivée de $\varphi\left(x\right)$ et $p_i\left(x\right), K_1\left(x,t\right), K_2\left(x,t\right)$ et $f\left(x\right)$ sont des fonctions connues et λ un paramètre non nul,et $\varphi\left(x\right)$ la fonction inconnue .

Example 2.6 *L'équation intégro- différentielle :*

$$\begin{aligned}\{\varphi'(x) &= 1+\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt+\int_0^1 xt\varphi(t)\,dt \\ \varphi(0) &= 1\end{aligned}$$

est une équation intégro- différentielle de Volterra-Fredholm du premier ordre

2.2 Classification des équations intégrales :

2.2.1 Equations intégrales de Volterra :[4]

Les équations de Volterra sont des cas particuliers d'équations intégrales de Fredholm il suffit de prendre le noyau k est tel que $k(x,t)=0$ pour $x<t$

Definition 2.7 *On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce une équation à une inconnue $\varphi(x)$,de la forme :*

$$\int_a^x k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x)$$

Definition 2.8 *On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce une équation à inconnue $\varphi(x)$ de la forme :*

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^x k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x)$$

2.2.2 Equations intégrales de Fredholm :[4]

Definition 2.9 *On appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce une équation de la forme :*

$$\int_a^b k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x)$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, $f\ (x)$et $k(x,t)$ sont des fonctions connues,les bornes d'intégration

sont constantes. C'est la caractéristique principale d'une équations de Fredholm .

Definition 2.10 *On appelle équation intégrale de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme :*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\,\varphi(t)\,dt$$

où $\varphi(x)$ est la fonctions inconnue ,$k(x,t)$et $f(x)$des fonctions donnés, est un facteur inconnu.

2.2.3 Equations intégrales de Volterra-Fredholm :[4]

Une équation intégrale de Volterra -Fredholm est une combinaison des intégrales de Volterra et Fredholm disjoints,apparaît dans une équation intégrale .

Definition 2.11 *On appelle équation intégrale de Volterra-Fredholm une équation de la forme :*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)\,\varphi(t)\,dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)\,\varphi(t)\,dt, x \in [a,b] \tag{2.1}$$

On appelle équation intégrale mixte une équation de la forme 2 :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \int_a^b k(s,t)\,\varphi(t)\,dtds$$

où les fonctions k_1,k_2 et f est connues et $\varphi(x)$ la fonction inconnue

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= 6x + 3x^2 + 2 - \int_0^x x\varphi(t)\,dt - \int_0^1 t\varphi(t)\,dt \\
\varphi(x) &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + x^3 - \int_0^x \int_0^1 (s-t)\,\varphi(t)\,dtds
\end{aligned}$$

2.3 Existence et unicité de la solution des équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm :[4]

Dans cette section nous rappelons les théorèmes que nous allons utilisées pour obtenir des résultats d'existence et unicité de solutions de l'équation (**??**)

Definition 2.12 *Soit X un espace normé et $T : X \to X$ un opérateur, T est dit un opérateur de Picard s'il existe $\varphi_0 \in X$ unique tel que*

$$T(\varphi_0) = \varphi_0, \text{ et } \lim_{n\to\infty} T^n(\varphi_0) = \varphi_0, \text{ pour tout } \varphi \text{ de } X$$

Theorem 2.13 *(principe de contraction).Soit X un espace normé. Si $T : X \to X$ un opérateur de contraction admis un point fixe unique φ , alors T est un opérateur de Picard*

$$\|\varphi_0 - T^n(\varphi_0)\| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|\varphi - T(\varphi)\|, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Théorèmes d'existence et d'unicité :

On considère l'équation linéaire de Volterra-Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)dt \ , x \in [a,b] \tag{2.2}$$

où

1. $f \in C[a,b]$, $k_1(x,t) \in C(D_1)$,avec $D_1 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } a \leq t \leq x \leq b\}$
2. $\varphi \in C[a,b]$, $k_2(x;t) \in C(D_2)$,avec $D_2 = [a,b] \times [a,b]$
3. $M_1 = \max_{(x,t)\in D_1} |k_1(x,t)|$, et $M_2 = \max_{(x,t)\in D_2} |k_2(x,t)|$

Theorem 2.14 *Dans les conditions de continuité ci-dessus, supposons qu'il existe une constante $c > 0$ tel que :*

$$\frac{1}{c}\left[M_1 + M_2 \exp(c(b-a))\right] < 1$$

Alors l'équation (2.2) a une solution unique $\varphi \in C\ [a,b]$,et cette solution peut être obtenir par la méthode d'approximation successive, à partir de $\varphi_0 \in C\ [a,b]$

Proof. Soit l'opérateur intégral $T : C[a,b] \to C[a,b]$, défini par

$$T\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)dt$$

On a

$$\begin{aligned}
|T\varphi(x) - T\psi(x)| &= \left|\int_a^x k_1(x,t)\,(\varphi(t)-\psi(t))\,dt + \int_a^b k_2(x,t)\,(\varphi(t)-\psi(t))\,dt\right| \\
&\leq \int_a^x |k_1(x,t)|\,|(\varphi(t)-\psi(t))|\,dt + \int_a^b |k_2(x,t)|\,|(\varphi(t)-\psi(t))|\,dt \\
&\leq M_1 \int_a^x |(\varphi(t)-\psi(t))| \exp(-c\,(t-a)) \exp(c\,(t-a))\,dt + \\
&\quad M_2 \int_a^b |(\varphi(t)-\psi(t))| \exp(-c\,(t-a)) \exp(c\,(t-a))\,dt \\
&\leq \left[\frac{M_1}{c}\,(\exp(c(x-a)-1) + \frac{M_2}{c}\,(\exp(c(b-a)-1)\right] \|\varphi-\psi\| \\
&\leq \left[\frac{M_1}{c}\exp(c(x-a) + \frac{M_2}{c}\exp c(x-a+b-x)\right] \|\varphi-\psi\| \\
&\leq \frac{\exp(c(x-a)}{c}\,(M_1 + M_2\exp(c(b-x))\,\|\varphi-\psi\| \\
&\leq \frac{\exp(c(x-a)}{c}\,(M_1 + M_2\exp(c(b-a))\,\|\varphi-\psi\|
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$|A\varphi(x) - A\psi(x)| \exp(-c(x-a)) \leq \frac{1}{c}\,(M_1 + M_2\exp(c(b-a))\,\|\varphi-\psi\|\,, \text{pour tout } x \in [a,b]\,.$$

Alors

$$\|A\varphi - A\psi\| \leq \frac{1}{c}\,(M_1 + M_2\exp(c(b-a))\,\|\varphi-\psi\|$$

On déduit que l'opérateur A est Lipschitzien de constante $k = \frac{1}{c}\,(M_1 + M_2\exp(c(b-a))$

La condition supposée garantit que A est une contraction. Alors on applique principe de contraction □

2.4 Polynômes de Lagrange :[2]

Definition 2.15 *On définit les polynômes de Lagrange associés aux points $(x_0, ..., x_n)$ par :*

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_{i-1})...(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})...(x_i-x_{i+1})(x_i-x_n)} 0 \leq i \leq n$$

$$= \prod_{0\leq j\leq n, j\neq i} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

On a $l_i(x_j) = \delta_{ij} \forall (i,j) \in (0, ..., n)$ où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, et degré$(l_i) = n$.

Proof. Cette famille est évidemment génératrice. Le point clé est de savoir si elle est libre. Soit$(a_0, ..., a_n) \in R^{n+1}$ et$x \in R$. Alors, si $\sum_{i=0}^{n} a_i l_i(x)$ $\square$

pour tout x, on a pour tout j,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i l_i(x_j) = 0$$

. Comme $l_i(x_j) = \delta ij$, cela implique $a_j = 0$ pour tout j.

Ainsi, la famille est libre et génératrice et c'est donc une base.

Theorem 2.16 *Le problème : trouver $p \in P_n$tel que $p(x_i) = f(x_i), \forall 0 \leq i \leq n$ admet une unique solution donnée par*

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$$

p s'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange, noté p_n.

Proof. Remarquons d'abord que $Li \in P_n(R)$ pour tout $i = 0, \cdots, n$ (produit de $n$polynômes de degré 1), de sorte que$P_n$est aussi un polynôme de degré au plus n. $\square$

La démonstration du théorème repose sur le fait que :

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \{^{1 \text{si } i=j}_{0 \text{si } i \neq j}$$

pour tout $i = 0, \cdots, n$. Le symbole ij est appelé symbole de Kronecker. Une fois ceci établi, on a :

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \delta_{ij} = f(x_j)$$

pour tout $j = 0, \cdots, n$, de sorte queP_n est bien le polynôme interpolateur de Lagrange de$f$ aux noeuds $x0, \cdots, xn$.

. On considère la fonction

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$$

$$x \to \frac{1}{1+x^2}$$

Donner les polynômes de Lagrange ainsi que polynôme d'interpolation associés aux noeuds

suivants :

$\bullet x_0 = -1$, $x_1 = 1$. On a :

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x-1}{-1-1} = -\frac{1}{2}x(x-1) \\ l_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x-(-1)}{1-(-1)} = \frac{1}{2}x(x+1) \end{aligned}$$

On obtient :

$$P_1(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) = -\frac{1}{4}x(x-1) + \frac{1}{4}x(x+1) = \frac{1}{2}$$

$\bullet x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$. On a :

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -2(x - 1/2) \\ l_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x}{\frac{1}{2}} = 2x \end{aligned}$$

On obtient :

$$P_1(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) = -2(x-1/2) + \frac{1}{1+\frac{1}{4}} \times 2x = -\frac{2x}{5} + 1$$

$\bullet x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$. On a :

$$l_0(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_2}{x_0 - x_2}\right) = \left(\frac{x}{-1}\right)\left(\frac{x-1}{-1-1}\right) = \frac{1}{2}x(x-1)$$

On vérifie que l'on a bien$l_0(x) = 1$et que $l_0(x_1)) =$$l_0(x_2) = 0$.

$$\begin{aligned} l_1(x) &= \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right) = \left(\frac{x-(-1)}{-(-1)}\right)\left(\frac{x-1}{-1}\right) = -(x+1)(x-1), \\ l_2(x) &= \left(\frac{x-x_0}{x_2-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right) = \left(\frac{x-(-1)}{1-(-1)}\right)\left(\frac{x}{1}\right) = \frac{1}{2}x(x+1) \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x) \\ &= -\frac{1}{4}x(x-1) - (x+1)(x-1) + \frac{1}{4}x(x+1) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 1 \end{aligned}$$

On vérifie que l'on a en effet $P(-1) = f(-1) = 1/2$,$P(0) = f(0) = 1$ et $P(1) = f(1) = 1/2$.

Theorem 2.17 *on considérera les données suivantes : on connaît les valeurs d'une*

fonction f aux points $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 4$ et $x_3 = 7$:

$$f(x_0) = -1, f(x_1) = 2, f(x_2) = 4$$

On posera

$$\forall i \in \{0, 1, 2, \}, y_i = f(x_i).$$

Reprenons les données de l'exemple . Chacun des polynômes de Lagrange l_i (de degré 3) est donné par la formule

$$l_i(x) = \prod_{0\le j\le n, j\ne i} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(1-2)(1-4)(1-7)} \\ l_1(x) &= \frac{(x-1)(x-4)(x-7)}{(2-1)(2-4)(2-7)} \\ l_2(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-7)}{(4-1)(4-2)(4-7)} \end{aligned}$$

.soit encore après calculs :

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{-1}{18}x^3 + \frac{13}{18}x^2 + \frac{25}{9}x + \frac{28}{9} \\ l_1(x) &= \frac{1}{10}x^3 - \frac{6}{5}x^2 + \frac{39}{10}x - \frac{14}{5} \\ l_2(x) &= \frac{-1}{18}x^3 + \frac{5}{9}x^2 - \frac{23}{18}x + \frac{7}{9} \end{aligned}$$

Ensuite, le polynôme interpolateur de degré 2 est donné par la formule . Ici, on a donc :

$$p_3(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x).$$

Le coefficient dominant de L_n est $(-1)^n/n!$. Les physiciens utilisent souvent une définition des polynômes de Laguerre où ceux-ci sont multipliés par $(-1)^n n!$, obtenant ainsi des polynômes unitaires.

Chapitre 3

Résolution numériques des équations intégrales de Volterra-Fredholm :

3.1 Méthodes numériques pour les équations intégrales de Volterra-Fredhlolm :

Dans ce chapitre on va résoudre numériquement des équation intégrales de volterra-Fredholm de second espèce en utilisant les polynômes de Lagrange

3.1.1 Méthode de collocation :[4]

On considère l'équation intégrale de Volterra-Fredholm suivante

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)dt \tag{3.1}$$

Généralement, le principe de la méthode de collocation appliqué à l'équation (3.1) consiste à chercher une solution approchée dans un sous espace de dimension finie, en exigeant que l'équation (3.1) soit vérifiée seulement sur un nombre fini de points appelés points de collocation.

En pratique, nous choisissons une suite de sous espaces $X_n \subset X$, $n \geq 1$ de dimension finie, généralement des sous espaces de $C([a,b])$ ou de $L^2([a,b])$. Soit $\{\psi_1, ..., \psi_n\}$ une base de X_n. On cherche une fonction $\varphi_n \in X_n$, telle que

$$\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \psi_j(x) \ , \ \ x \in [a,b]$$

Pour déterminer les coefficients (c_j), on substituant, cette fonction dans l'équation (3.1), et on exigeant que l'équation soit exacte dans le sens où le résidu

$$r_n(x) = \varphi_n(x) - \int_a^x k_1(x,t)\varphi_n(t)dt - \int_a^b k_2(x,t)\varphi_n(t)dt - f(x) \ , \ \ x \in [a,b]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j\psi_j(x) - \int_a^x k_1(x,t)dt \sum_{j=1}^{n} c_j\psi_j(t) - \int_a^b k_2(x,t)dt \sum_{j=1}^{n} c_j\psi_j(t) - f(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j \left\{ \psi_j(x) - \int_a^x k_1(x,t)\psi_j(t)dt - \int_a^b k_2(x,t)\psi_j(t)dt \right\} - f(x) \quad , x \in [a,b]$$

soit nul sur un système de noeuds $x_1, ..., x_n \in [a,b]$, (i.e, aux points de collocation)

ce qui conduit à la résolution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{ \psi_j(x_i) - \int_a^x k_1(x_i,t)\psi_j(t)dt - \int_a^b k_2(x_i,t)\psi_j(t)dt \right\} c_j = f(x_i) \quad , i = 1, ..., n$$

qui s'écrit sous la forme $AC = F$,où

$$\begin{aligned} A &= \psi_j(x_i) - \int_a^x k_1(x_i,t)\psi_j(t)dt - \int_a^b k_2(x_i,t)\psi_j(t)dt, \ i,j = 1, ..., n \\ C &= (c_i) \,, \ i = 1, ..., n \\ F &= f(x_i) \,, \ i = 1, ..., n \\ C &= A^{-1}F \end{aligned}$$

ce système admet une solution unique si $\det A \neq 0$, ce qui dépend d'ailleurs du choix des points de collocation.

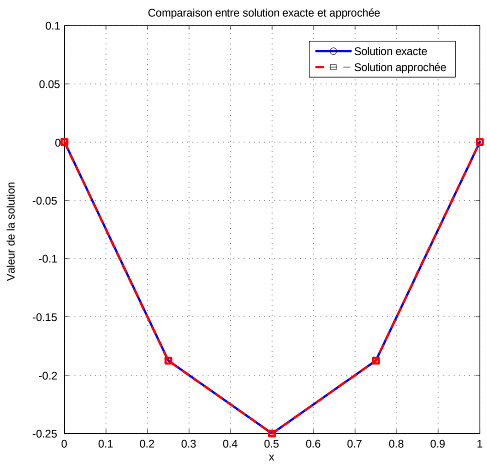
3.2 Exemples Numériques :[2][5]

Example 3.1 *Considérons l'équation intégrodifférentielles de Volterra :*

$$u'(x) + 3u(x) - \int_0^x \sin(x+t)\, u(t)\, dt = f(x), \qquad u(0) = 0,$$

valeur de x	*solution exacte*	*solution approchee*	*erreur*
0.0000e+00	*0.0000e+00*	*4.4180e-16*	*4.4180e-16*
2.5000e-01	*-1.8750e-01*	*-1.8750e-01*	*1.4913e-10*
5.0000e-01	*-2.5000e-01*	*-2.5000e-01*	*1.9722e-10*
7.5000e-01	*-1.8750e-01*	*-1.8750e-01*	*1.4029e-10*
1.0000e+00	*0.0000e+00*	*-1.7695e-11*	*1.7695e-11*

utilisant les polynômes de Lagrange

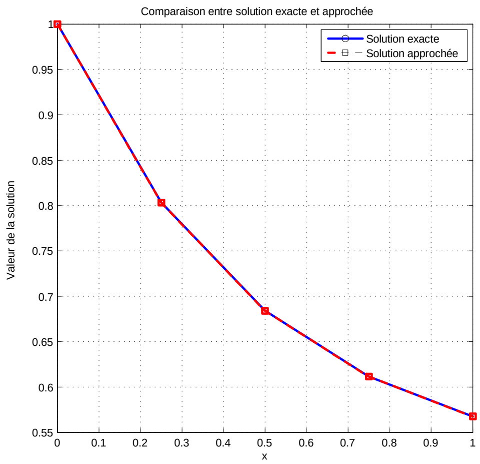


Example 3.2 *Considérons l'équation intégrodifférentielles de Volterra :*

$$u'(x) + u(x) - \int_0^x e^{t-x} u(t) = f(x), \quad u(0) = 1,$$

valeur de x	*solution exacte*	*solution approchee*	*erreur*
0.0000e+00	*1.0000e+00*	*1.0000e+00*	*4.3387e-09*
2.5000e-01	*8.0326e-01*	*8.0326e-01*	*1.6131e-09*
5.0000e-01	*6.8393e-01*	*6.8393e-01*	*6.8064e-11*
7.5000e-01	*6.1156e-01*	*6.1156e-01*	*1.5189e-09*
1.0000e+00	*5.6766e-01*	*5.6766e-01*	*3.9189e-09*

utilisant les polynômes de Lagrange ,

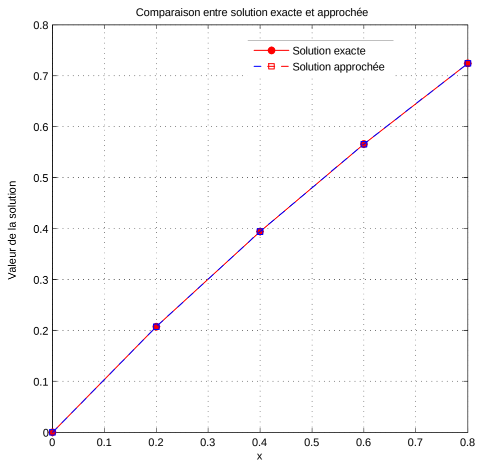


Example 3.3 *Considérons l'équation intégrodifférentielles de Fredholm :*

$$u'(x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{4} xtu(t)\,dt = f(x), \quad u(0) = 0,$$

valeur de x	*solution exacte*	*solution approchee*	*erreur*
0.0000e+00	*0.0000e+00*	*0.0000e+00*	*2.9570e-12*
2.0000e-01	*2.0711e-01*	*2.0711e-01*	*1.0186e-13*
4.0000e-01	*3.9399e-01*	*3.9399e-01*	*5.6732e-14*
6.0000e-01	*5.6573e-01*	*5.6573e-01*	*1.2936e-12*
8.0000e-01	*7.2424e-01*	*7.2424e-01*	*1.2961e-12*

utilisant les polynômes de Lagrange ,



3.3 Conclusion

Conclusion :

La méthode d'interpolation de Lagrange offre une solution efficace pour résoudre les équations intégrales-différentielles de Fredholm et de Volterra. Elle transforme ces équations complexes en systèmes algébriques via une approximation polynomiale discrète. Simple à implémenter, elle garantit une bonne précision avec un nombre adapté de points d'interpolation. Cependant, cette précision dépend fortement du choix et de la répartition des points. Ainsi, elle constitue un outil puissant pour l'analyse numérique dans divers domaines scientifiques. Son application facilite les simulations et études approfondies en physique et ingénierie.

Bibliographie

[1] M. NADIR .Cours d'analyse fonctionnelle,université de M'sila Algérie 2004.

[2] M,R,NADIR Initial value problems between Taylor and Volterra integral equations Master,université de BBA 2017

[3] C. T.H Baker, The Numerical Treatment of Integral Equations. Oxford University Press, Oxford, (1978).

[4] M,N,NADIR,Sur la solution numérique des équations intégrales de Volterra- Fredholm en utiisant les polynômes de Chebyshev,Master,université de M'sila 2022

[5] A. M.Wazwaz, Linear and nonlinear integral equations methods and applications,Saint Xavier University chicago, IL 60655, USA.

[6] M. Nadir, Adapted Quadratic Approximation for Singular Integrals, in Journal of mathematical Inequalities 4, (3) pp 423-430 (2010).

[7] M. Nadir, Adapted Quadratic Approximation for Logarithmic kernel Integrals, in Fasciculi mathematici 49 (2012) 75-85.

[8] M. Nadir, Solving Fredholm integral equations with application of the four Chebyshev polynomials,Journal of Approximation Theory and Applied Mathematics, 4 (2014), pp. 15-20.

[9] Al-Jubory, A. (2010) ; "Some Approximation Methods for Solving Volterra-Fredholm Integral and IntegroDifferential Equations" ; Ph.D. Thesis, University of Technology.

الملخص :

الهدف من هذه المذكرة هو إيجاد حلول تقريبية لمعادلة التفاضلية التكاملية فولتيرا -- فريدولم المعادلات التفاضلية التكاملية

وذلك باستخدام كثير حدود لاكرانج على ذلك تم تقديم أمثلة مختلفة لتوضيح دقة الطريقة المقترحة

الكلمات المفتاحية :

- كثير حدود لاكرانج - المعادلات التفاضلية التكاملية لفولترا- المعادلات التفاضلية التكاملية لفردهولم

– المعادلات التفاضلية التكاملية لفولترا-فردهولم

Résumé :

Le but de ce mémoire, est la résolution numérique de l'équation différentielles intégrale de Volterra-Fredholm du second espèce, en utilisant le polynôme de Lagrange. De plus, de nombreux exemples sont présentés pour illustrer la précision et l'efficacité de la méthode proposée

Mots clés :

Polynôme de Lagrange, Equation différentielles intégrale de Volterra, Equation différentielles intégrale de Fredholm, Equation différentielles intégrale de Volterra-Fredholm.

Abstract :

The goal of this memory is consecrated to the numerical method to find approximate solutions to the Volterra-Fredholm integral differential equation of the using Lagrange polynomial Moreover, many examples are presented to illustrate the accuracy and efficiency of the method.

Keywords:

Lagrange polynomials, Volterra integral differential equation, Fredholm integral differential equation, Volterra-Fredholm integral differential equation, numerical quadrature.