



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques

## *Mémoire de Master*

**Domaine :** Mathématiques et Informatique  
**Filière :** Mathématiques  
**Option :** AMN

## Thème

---

*Étude d'un problème inverse pour l'équation télégraphique linéaire*

---

**Présenté par :**

*M<sup>elle</sup> ATHMANI Fatima*

**Soutenu publiquement le :** Juin 2022.

**Devant le jury composé de :**

<b>Président :</b>	<i>M<sup>r</sup> GAGUI</i> Bachir	M.C.A, Université de M'sila
<b>Encadreur :</b>	<i>M<sup>r</sup> NOURI</i> Brahim	M.C.A, Université de M'sila
<b>Co-Encadreur :</b>	<i>M<sup>r</sup> ABDELKEBIR</i> Saad	M.A.A, Université de M'sila
<b>Examineur :</b>	<i>M<sup>r</sup> DJERIOUI</i> Khayra	M.A.A, Université de M'sila

Année universitaire 2021 /2022

---

# Remerciements

---

*Au NOM D'ALLAH LE CLEMENT ET LE MISERICORDIEUX*

JE TIENS TOUT D'ABORD À REMECIES DIEU LE TOUT PUISSANT QUI M'A DONNÉ LE COURAGE ET LA PERSÉVÉRANCE POUR LA RÉALISATION

de ce modeste mémoire.

je remercie profondément monsieur

**Nouiri Brahim** MON ENCADREUR, QUI MA BEAUCOUP AIDÉ POUR  
TERMINER CE TRAVAILLE

IL MA QUI DE DURANT MON RECHERCHE, ET SANS OUBLIER SES PRÈCIEUX CONSEILS.

MES SINCÈRES REERCIENTS à MONSIEUR

**Abdelkebir saad**, mon co-encadreur , qui ma beaucoup aidé pour terminer ce travaille

**Bachir gagui**, qu'a accepté d'examiné mon travail . je voudrais également remercier tous mes enseignants, tous mes coulégues de master AMN , de tous mon coeur je remercie mes parents , et mon aimi. et mes prières que Dien les protège et les accorde santé et longue vie . enfin, j'adresse un grand remerciement à tous ma grande famille athmani .fatima

---

# Dédicaces

---

JE DÉDIE CE MODESTE MÉMOIRE

*A tous qui m'ont encouragé et soutenu pour arriver à ce niveau d'étude.*

je dédie mes salutations à ma mère :messauda, mon père :mohamed, mes frères,ma soeur  
bouchra et ma grand-mère :yamina djoudi ,qui dieu prolonge sa vie,ainsi qu'à mon  
professeur : majdoub aissa,et à tous ceux qui m'ont encouragé et conseillé et a été la raison de  
mon succès,

et à la fin, j'ai pitié de l'honorable professeur,Heraiz Rabeh

FATIMA

---

# Résumé

---

Dans ce mémoire, nous avons analysé un problème inverse pour déterminer un coefficient de terme source en fonction du temps  $t$  dans une équation télégraphique linéaire avec des conditions aux limites de Dirichlet et une condition supplémentaire sous forme intégrale. Pour le temps  $T$  est suffisamment petit et avec des hypothèses sur les données du problème, nous avons démontré un résultat d'existence et d'unicité de la solution par un théorème de point fixe. Ensuite, nous avons proposé un algorithme pour calculer la solution numérique de ce problème inverse. Cet algorithme basé sur la méthode de collocation de Legendre et l'algorithme  $\alpha$ -généralisé. Des exemples numériques sont présentés pour valider l'efficacité de cet algorithme.

**Mots-Clés :** Méthode de Fourier, Méthode de point fixe de Banach, les polynômes de Legendre , Algorithmes  $\alpha$ -généralisé.

---

In this memory, we have analyzed an inverse problem to determine a term source coefficient as a function of time  $t$  in a linear telegraph equation with Dirichlet boundary conditions and an additional condition in integral form. For the time  $T$  is sufficiently small and with assumptions on the data of the problem, we proved a result of existence and unicity of the solution by a fixed point theorem. Then, we proposed an algorithm to calculate the numerical solution of this inverse problem. This algorithm based on the Legendre collocation method and the  $\alpha$ -generalized algorithm. Numerical examples are presented to validate the efficiency of this algorithm.

**Keywords :** Fourier method, Banach fixed point method, Legendre polynomials,  $\alpha$ -generalized algorithm.

---

# Table des matières

---

<b>Introduction générale</b>	<b>6</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>9</b>
1.1 Espaces normés,[3]	10
1.2 Espace de Banach,[3]	10
1.3 Espace de Hilbert,[3]	11
1.4 Théorème de point fixe,[3]	11
1.5 Convergence uniforme,[3]	12
1.6 Polynômes de Legendre,[10]	12
<b>2 Existence et unicité de la solution</b>	<b>17</b>
2.1 Position du problème,[3]	18
2.2 problème spectral,[12]	18
2.3 Existence et l'unicité,[12]	25
<b>3 Étude numérique</b>	<b>32</b>
3.1 Polynômes de Legendre décalés du première espèce,[10]	33
3.2 Méthode de collocation de Legendre,[10, ch4,page67]	34
3.3 Méthode alpha- généralisée,[10, ch4,page69]	37
3.3.1 Exemples numériques,[11]	39
<b>Bibliographie</b>	<b>48</b>

---

# Table des figures

---

3.1	la Solution de problème direct de $u(x, t)$ pour $t = 0.2, t = 0.4, t = 0.6, t = 0.8, t = 1.0$ et $(M=50, N=100)$ . . . . .	41
3.2	la Solution de problème inverse de $r(t)$ pour $t = 0.2, t = 0.4, t = 0.6, t = 0.8, t = 1.0$ et $(M=50, N=100)$ . . . . .	42
3.3	l'erreur1 de problème direct avec inverse . . . . .	43
3.4	la Solution de problème direct de $u(x, t)$ pour $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ et $(M=50, N=100)$ . . . . .	44
3.5	la Solution de problème inverse de $r(t)$ pour $t = 0.2, t = 0.4, t = 0.6, t = 0.8, t = 1.0$ et $(M=50, N=100)$ . . . . .	45
3.6	l'erreur2 de problème direct avec inverse . . . . .	46

---

# Introduction générale

---

L'équation télégraphique est une équation hyperbolique linéaire du second ordre introduite par Oliver Heaviside [7]. Cette équation modélise plusieurs phénomènes dans de nombreux domaines différents tels que l'analyse du signal [8], la propagation des ondes [13], la théorie de la marche aléatoire [6]. Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'équation télégraphique suivante :

$$u_{tt}(x, t) + 2au_t(x, t) + b^2u(x, t) = c^2u_{xx}(x, t) + r(t)f(x, t), \quad (x, t) \in D_T, \quad (1)$$

avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (2)$$

où  $D_T = \{(x, t) : 0 < x < \ell, 0 \leq t \leq T\}$  avec  $\ell, T > 0$ ,  $a \geq b > 0$  et  $c > 0$  sont des constantes.  $f(x, t)$  représente le terme source,  $\varphi(x)$  et  $\psi(x)$  sont les données initiales.

Pour une fonction donnée  $r(t)$ , le problème de trouver  $u(x, t)$  à partir de l'équation (1) avec la condition initiale (2) et la condition aux limites de Dirichlet homogène

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

est appelé problème direct.

Si  $r(t)$  est inconnu, trouver le couple de solution  $\{u(x, t), r(t)\}$  du problème (1)-(3) avec la

condition supplémentaire

$$\int_0^\ell u(x, t) dx = E(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

est appelé problème inverse où  $E(t)$  est une fonction donnée.

Les problèmes inverses pour les équations télégraphiques ont été un domaine de recherche majeur dans de nombreuses branches de la science et de l'ingénierie, en particulier en mathématiques appliquées. La solvabilité des problèmes inverses avec diverses conditions supplémentaires pour les équations télégraphiques a été étudiée dans de nombreux travaux, [2, 4, 9, 5, 1]. Cependant, l'étude des problèmes de détermination de source terme pour les équations télégraphiques est peu nombreuse jusqu'à présent.

Dans ce mémoire, nous avons concerné les deux aspects suivants :

- ☞ **Étude théorique** : nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution du problème inverse (1)-(4) en utilisant la méthode de Fourier et la méthode de point fixe.
- ☞ **Étude numérique** : nous avons proposé un algorithme pour résoudre le problème inverse (1)-(4). Cet algorithme basé sur la méthode de collocation de Legendre et l'algorithme  $\alpha$ -généralisé. Des exemples numériques sont présentés et discutés.

Ce mémoire se décompose en trois chapitres de la manière suivante : dans le premier chapitre, nous rappelons certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires dans ce mémoire concernant les espaces fonctionnels, la méthode de point fixe et les polynômes de Legendre.

Dans le deuxième chapitre, la méthode de Fourier convertit le nouveau problème inverse en un problème de point fixe dans un espace de Banach choisi. Sous certaines conditions de régularité sur les données initiales et aux limites, l'existence et l'unicité de la solution du problème inverse sont démontrées par la principe de contraction de Banach pour  $T$  est suffisamment petit.

Dans le dernier chapitre, nous avons proposé un algorithme pour résoudre le problème inverse (1)-(4). Cet algorithme basé sur la méthode de collocation de Legendre et l'algorithme  $\alpha$ -

généralisé. Des exemples numériques sont présentés pour valider l'efficacité de cet algorithme.

On termine ce mémoire par une conclusion et quelques perspectives.

# PRÉLIMINAIRES

---

Dans ce chapitre, nous rappelons certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires dans ce mémoire concernant les espaces fonctionnels, la méthode de point fixe de Banach.

## 1.1 Espaces normés,[3]

**Définition 1.1.** (norme). Soient  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). une norme sur  $E$  est une application  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant les conditions suivantes :

1.  $\|x\| \geq 0$  et  $\|x\|=0 \iff x=0$
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  ; pour tout  $x \in E$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  , pour tout  $x, y \in E$

**Remarque 1.1.** L'espace vectoriel  $E$  muni d'une norme s'appelle espace normé ,noté par  $(E, \|\cdot\|)$ . Les applications suivantes sont des normes usuelles sur  $\mathbb{R}^n$ .

$$\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \text{ pour tout } p \geq 1$$

**Exemple 1.1.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , l'espace vectoriel des fonctions de carré intégrable sur  $\Omega$  est :

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

L'application  $\|\cdot\| : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par :

$$\|f\| = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

est une norme

## 1.2 Espace de Banach,[3]

**Définition 1.2.** Un espace de Banach est un espace normé complet.

**Définition 1.3.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé. une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $E$  est de Cauchy si

$$\forall \epsilon < 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n < m \geq N \implies \|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

**Définition 1.4.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé. on dit que  $E$  est complet si tout suite de Cauchy dans  $E$  est convergente dans  $E$

### 1.3 Espace de Hilbert,[3]

**Définition 1.5** (Produit scalaire). . Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{K}$ . un produit scalaire sur  $E$  est une application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  tel que pour tout  $x, y, x_1, x_2 \in E$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  on a :

1.  $\langle x, x \rangle \geq 0$  et  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ .
2.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ .
3.  $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$ .
4.  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

**Remarque 1.2.** Un produit scalaire sur  $E$  définit une norme sur  $E$  donnée par :  
 $\forall x \in E : \|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ .

**Exemple 1.2.** L'espace  $\mathbb{R}^n$  muni de produit scalaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : (x, y) = \sum_{i=0}^n x_i y_i.$$

est un produit scalaire.

### 1.4 Théorème de point fixe ,[3]

Les théorème de point fixe sont les outils mathématiques de base qui aident à établir l'existence de solutions de divers genres d'équations.

Nous rappelons les théorème du point fixe que nous allons utiliser pour obtenir des résultats d'existence variés. nous commençons par la définition d'un opérateur compact.

**Théorème 1.1** (théorème du point fixe de Banach (1922),[14]). *Supposons que*

*On nous donne un opérateur  $T : M \subseteq X \rightarrow M$ ,  $M$  est mappé en lui-même par  $T$  est un ensemble fermé non vide dans un espace normée .  $T$  est  $K$  contractile ,  $i.e ; \|Tx - Ty\| \leq K \|x - y\|$  pour tout  $x, y \in M$  , et pour un fixe  $K, 0 \leq K < 1$*

## 1.5 Convergence uniforme,[3]

**Définition 1.6.** Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définie sur  $I$  à valeur dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . on dit que  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$  si  $(S_n)$  converge uniformément sur  $I$ .

**Remarque 1.3.** 1. si  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$ , alors  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$ .

2. si  $\sum f_n$  et  $\sum g_n$  converge uniformément sur  $I$ , alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\sum (f_n + \lambda g_n)$  converge uniformément sur  $I$ .

## 1.6 Polynômes de Legendre,[10]

Les polynômes de Legendre, appelées aussi fonctions de Legendre, sont des polynômes orthogonaux et sont un cas particulier des fonctions ultra-sphériques et des polynômes de Jacobi.

Il se pose dans de nombreux problèmes en particulier dans ceux impliquant des coordonnées sphériques. Dans les coordonnées sphériques, les polynômes de Legendre remplissent une fonction majeure, puisque la dépendance angulaire est mieux gérée par les harmoniques sphériques définies en termes de polynômes de Legendre. il existe deux types de polynômes de Legendre.

Dans cette mémoire, on considère le premier type de polynômes de Legendre qui est une solution de l'équation différentielle suivante :

$$(1 - x^2) Y''(x) - 2xY'(x) + n(n + 1)Y(x) = 0. \quad (1.1)$$

Les polynômes de Legendre du premier type sont notés par  $P_n(x)$ .

**Définition 1.7.** (Les polynômes de Legendre  $P_n(x)$ ). Le polynôme de Legendre du premier type est un polynôme de degré  $n$  en  $x$  défini par la formule de Rodrigues :

$$P_n(x) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad (1.2)$$

où  $x$  est une variable réelle ou complexe.

**Propriétés 1.1.** La forme analytique du polynôme de Legendre du premier type est donnée par :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}, n \in N, \quad (1.3)$$

où  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  est la partie entière de  $n/2$ .

**preuve 1.1.** En utilisant la loi binomiale de Newton et la formule de Rodrigues (1.2), on obtient :

$$P_n(x) = \frac{d^n}{n! 2^n dx^n} \left[ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n! x^{2n-2k}}{k!(n-k)!} \right] \quad (1.4)$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k d^n x^{2n-2k}}{k!(n-k)! dx^n} \quad (1.5)$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}, \quad (1.6)$$

puisque  $2n - 2k$  dans la combinaison doit être supérieur ou égale à  $n$ , donc  $0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ .

**Définition 1.8.** La fonction génératrice du polynôme de Legendre  $P_n(x)$  est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}. \quad (1.7)$$

**Propriétés 1.2.** Les polynômes de Legendre de première espèce  $P_n(x)$  satisfont la formule de récurrence suivant :

$$\begin{cases} P_0(x) = 1. \\ P_1(x) = x. \\ P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x), n \in N. \end{cases} \quad (1.8)$$

**preuve 1.2.** En dérivant par rapport à  $t$  la fonction génératrice (1.7), on obtient :

$$n \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} P_n(x) = \frac{x-t}{(1-2xt+t^2)\sqrt{1-2xt+t^2}}. \quad (1.9)$$

En multipliant les deux côtés par  $1-2xt+t^2$  et d'après (1.7), nous obtenons :

$$n(n-2xt+t^2) \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} P_n(x) = \frac{x-t}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = (x-t) \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x). \quad (1.10)$$

Soit chaque  $t$  élevé à la puissance  $n$  :

$$(n+1) \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_{n+1}(x) - 2xn \sum_{n=1}^{\infty} t^n P_n(x) + (n-1) \sum_{n=2}^{\infty} t^n P_{n-1}(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} t^n P_{n-1}(x). \quad (1.11)$$

En égale la coefficient de  $t^n$ , nous obtenons la formule de récurrence (1.8)

**Lemme 1.1.** Les polynômes de Legendre du première espèce forment un ensemble orthogonal sur l'intervalle  $[-1,1]$  c'est à dire

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{sin } n \neq m, \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{sin } n = m. \end{cases} \quad (1.12)$$

**preuve 1.3.** 1. Pour  $n \neq m$ ,  $P_n$  et  $P_m$  sont des solutions de l'équation de Legendre (1.1), alors

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) P_n'(x) \right] n(n+1) P_n(x) = 0. \quad (1.13)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) P_m'(x) \right] m(m+1) P_m(x) = 0. \quad (1.14)$$

En multipliant (1.13) par  $P_m(x)$  et (1.14) par  $P_n(x)$  et avec la différence, on obtient :

$$\begin{aligned} & P_m(x) \left( \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) P_n'(x) \right] + n(n+1) P_n(x) \right) \\ & - P_n(x) \left( \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) P_m'(x) \right] + m(m+1) P_m(x) \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

En intégrant l'équation (1.15) par rapport à  $x$  entre  $-1$  et  $1$ , on obtient :

$$\int_{-1}^1 P_m(x) \left( \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) P_n'(x) \right] \right) dx - \int_{-1}^1 P_n(x) \left( \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) P_m'(x) \right] \right) dx + [n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0 \quad (1.16)$$

La preuve est faite en utilisant l'intégration par parties.

2. Pour  $n = m$  et en utilisant la fonction génératrice (1.7), nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}. \quad (1.17)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} t^m P_m(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}. \quad (1.18)$$

En multipliant(1.17) par(1.18), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} t^{n+m} P_n(x) P_m(x) = \frac{1}{1-2xt+t^2}. \quad (1.19)$$

En intégrant les deux côtés par rapport à  $x$  de  $-1$  à  $1$ , on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} t^{n+m} \left( \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx \right) = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1-2xt+t^2}. \quad (1.20)$$

Puisque  $\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0$  pour  $n \neq m$ , donc on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \left( \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx \right) &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{1-2xt+t^2} = -\frac{1}{2t} [\ln(1-2xt+t^2)]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{t} [\ln(1+t) - \ln(1-t)] \\ &= \frac{1}{t} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} t^{2n}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

En égalent les coefficients de  $t^{2n}$ , on trouve :

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}. \quad (1.22)$$

*et la preuve est terminée.*

# EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION

---

Dans ce chapitre, nous avons démontré par la méthode de Fourier et la méthode de point fixe de Banach l'existence de la solution sur  $D_T$  et l'unicité sur  $D_T$  avec  $0 < t < T$ .

## 2.1 Position du problème,[3]

on considère l'équation de télégraphe linéaire suivant :

$$u_{tt} + 2\alpha u_t + \beta u = u_{xx} + r(t)f(x, t), (x, t) \in D_T \quad (2.1)$$

avec la condition initiale :

$$u(x, 0) = \varphi(x); u_t(x, 0) = \psi(x), 0 \leq x \leq l \quad (2.2)$$

la condition aux limites de Dirichlet :

$$u(0, t) = u(l, t) = 0; 0 \leq t \leq T \quad (2.3)$$

et la condition d'intégrale suivant :

$$\int_0^1 u(x, t) dx = E(t); 0 \leq t \leq T \quad (2.4)$$

$f(x, t)$ ,  $\varphi(x)$  et  $\psi(x)$ ,  $E(t)$  et  $r(t)$  des fonctions données.

## 2.2 problème spectral,[12]

le problème spectral est :

$$\begin{cases} LX(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

l'utilisation de la méthode de Fourier pour résoudre le problème (2.5) conduit au problème spectral pour l'opérateur  $L$  donnée par l'expression et la condition aux limite de Dirichlet.

les conditions aux limites de Dirichlet.

Nous avons le problème de télégraphe suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} + 2\alpha u_t + \beta^2 u = u_{xx} + r(t)f(x, t). \\ 0 \leq x \leq 1 \leq 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi(x); u_t(x, 0) = \psi(x). \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \\ 0 \leq t \leq T \\ \int_0^1 u(x, t) dx = E(t). \end{cases} \quad (2.6)$$

pour trouver le problème spectral (2.1)

on pose  $f(x, t) = 0$  alors donnée le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} + 2\alpha u_t + \beta^2 u = u_{xx}, 0 \leq x \leq l \leq 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi(x); u_t(x, 0) = \psi(x) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, 0 \leq t \leq T \\ \int_0^1 u(x, t) dx = E(t) \end{cases} \quad (2.7)$$

Nous avons le problème de strume-Thionville suivant :

si on pose  $u(x, t) = X(x)Y(t)$

en remplaçant dans(2.7) on obtient :

$$X(x)Y''(t) + 2\alpha X(x)Y'(t) + \beta^2 X(x)Y(t) = X''(x)Y(t).$$

D'où

$$\frac{Y''(t) + 2\alpha Y'(t) + \beta^2 Y(t)}{Y(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda; (\lambda \in \mathbb{R})$$

Et comme  $x$  et  $t$  sont indépendant :

on trouve

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ u(0, t) = X(0)Y(t) = 0 \implies X(0) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} u(l, t) = X(l)Y(t) = 0 \implies X(l) = 0 \end{cases}$$

Si  $\lambda = 0$

$$\begin{cases} X''(x) = 0 \implies X(x) = ax + b \\ X(0) = b = 0 \implies b = 0 \\ X(l) = a = 0 \end{cases}$$

$\implies X(x) = 0$ , solution trivial.

Si  $\lambda > 0$

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ r^2 = \lambda \implies r_1 = \sqrt{\lambda}; r_2 = -\sqrt{\lambda} \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} X(x) = c_1 \exp(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \exp(-\sqrt{\lambda}x) \\ X(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ X(l) = c_1 \exp(\sqrt{\lambda}l) + c_2 \exp(-\sqrt{\lambda}l) \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} c_1 = -c_2 = 0 \\ c_2 \left( -\exp(\sqrt{\lambda}l) + \exp(-\sqrt{\lambda}l) \right) = 0 \end{cases} \implies$$

alors  $c_1 = -c_2 = 0$ ;  $X(x) = 0$ , solution trivial.

Si  $\lambda < 0 \implies \lambda = i^2 \mu_K^2 = -\mu_K^2$

$$\begin{cases} X(x) = c_1 \cos(\mu_K x) + c_2 \sin(\mu_K x) \\ X(0) = c_1 = 0; X(l) = c_1 \cos(\mu_K l) + c_2 \sin(\mu_K l) = 0 \\ \implies \mu l = k\pi/k \in \mathbb{N} \\ \implies \mu = \frac{k\pi}{l} \\ X_k = c_2 \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right), k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 \sin(\mu_K l) = 0 \implies \sin(\mu_K l) = 0 \implies \mu_K = \frac{k\pi}{l}, \forall K \in \mathbb{N}^* \\ \implies \lambda = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \\ \implies X_K(x) = c_2 \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right), \forall K \in \mathbb{N} \end{cases}$$

avec la normalisation, nous avons :

$$\begin{aligned} \langle x_k, x_k \rangle &= \int_0^l X_k(x) dx = 1 \\ \implies c_2^2 \int_0^l \sin^2\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx &= 1 \\ \implies \frac{c_2^2}{2} \int_0^l \left[1 - \cos\left(\frac{2k\pi x}{l}\right)\right] dx &= 1 \\ \implies \frac{c_2^2}{2} \left[x - \frac{k\pi}{l} \sin\left(\frac{2k\pi x}{l}\right)\right]_0^l &= 1 \\ \implies \frac{c_2^2}{2} l = 1 \implies c_2 &= \sqrt{\frac{2}{l}} \end{aligned}$$

Donc, les valeurs propres sont :  $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, k \in \mathbb{N}$

les valeurs propres sont :

$$X_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{k\pi}{l} \sin\left(\frac{2k\pi x}{l}\right)\right), k \in \mathbb{N}$$

on pose :

$$\text{on a : } u(x, t) = \sum_{K \geq 1} u_K(t) X_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{K \geq 1} u_K(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$$

$\forall K \in \mathbb{N}^*$

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) X_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$$

on remplaçant dans l'équation (2.1) on obtient :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{K \geq 1} u_K''(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + 2\alpha \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{K \geq 1} u_K'(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + \beta^2 \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{K \geq 1} u_K(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) &= \\ -\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{K \geq 1} u_K(t) \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + r(t) \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k \geq 1} f_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) & \end{aligned}$$

Nous avons :

$$u_K''(t) + 2\alpha u_K'(t) + (\beta^2 + \mu_k^2) u_K(t) = r(t) f_K(t)$$

$$u_K(0) = \varphi_0; u_K'(0) = \psi_0, \alpha \geq \beta > 0$$

ou :

$$\varphi_0 = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx$$

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx$$

on résoudre l'équation homogène :

$$u_k''(t) + 2\alpha u_k'(t) + (\beta^2 + (\mu_k)^2) u_k(t) = 0, \mu_k = \frac{k\pi}{l}, k \in \mathbb{N}^* \quad (2.8)$$

déterminant de équation (2.8) est :

$$\Delta = \alpha^2 - (\beta^2 + \mu_k^2)$$

on suppose que

$$\alpha^2 - \beta^2 < \mu_k^2, \forall k \in \mathbb{N} \text{ c'est à dire}$$

$$\alpha^2 - \beta^2 < \mu_1^2 = \frac{\pi^2}{l^2}$$

soit la condition :

$$0 < \alpha^2 - \beta^2 < \frac{\pi^2}{l^2}$$

Nous avons :

$$l'équation S^2 + 2\alpha S + (\mu_k^2 \beta^2) = 0$$

admet deux racines complexe conjugués .

$$S_{1,2} = -\alpha \pm i\sqrt{\mu_k^2 + \beta^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm i\omega_k, \text{ avec } \omega_k = \sqrt{\mu_k^2 + \beta^2 - \alpha^2}$$

alors , on a :

$$u_k(t) = \exp(-\alpha t) (c_1 \cos(\omega_k t) + c_2 \sin(\omega_k t))$$

$$\text{on pose : } G_1 = \exp(-\alpha t) \cos \omega_k t, G_2 = \exp(-\alpha t) \sin \omega_k t$$

$$\begin{cases} c_1'(t)G_1 + c_2'(t)G_2 = 0 \\ c_1'(t)G_1' + c_2'(t)G_2' = r(t)f_K(t) \end{cases}$$

on pose :

$$G_1'(t) = -\alpha \exp(-\alpha t) \cos \omega_k t - \omega_k \exp(-\alpha t) \sin \omega_k t = -\exp(-\alpha t) [\alpha \cos \omega_k t + \omega_k \sin \omega_k t]$$

$$G_2'(t) = -\alpha \exp(-\alpha t) \sin \omega_k t + \omega_k \exp(-\alpha t) \cos \omega_k t = -\alpha \exp(-\alpha t) [\alpha \sin \omega_k t - \omega_k \cos \omega_k t]$$

$$\det = \begin{vmatrix} G_1(t) & G_2(t) \\ G_1'(t) & G_2'(t) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\alpha \exp(-\alpha t) \cos \omega_k t & -\alpha \exp(-\alpha t) \sin \omega_k t \\ -\exp(-\alpha t) [\alpha \cos \omega_k t + \omega_k \sin \omega_k t] & -\alpha \exp(-\alpha t) [\alpha \sin \omega_k t - \omega_k \cos \omega_k t] \end{vmatrix}$$

$$= -\exp(-2\alpha t) [\alpha \sin \omega_k t \cos \omega_k t - \omega_k \cos^2 \omega_k t] + \exp(-2\alpha t) [\alpha \cos \omega_k t \sin \omega_k t + \omega_k \sin^2 \omega_k t]$$

$$= \exp(-2\alpha t) [\omega_k (\sin^2 \omega_k t + \cos^2 \omega_k t) + \alpha \cos \omega_k t \sin \omega_k t - \alpha \sin \omega_k t \cos \omega_k t]$$

$$\det = \omega_k \exp(-2\alpha t)$$

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \exp(-\alpha t) \sin \omega_k t \\ r(t)f_K(t) & G_2'(t) \end{vmatrix}}{\omega_k \exp(-2\alpha t)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-\exp(-\alpha t) \sin \omega_k t \cdot r(t) f_k t}{\omega_k \exp(-2\alpha t)} \\
&= -\frac{\exp(\alpha t \sin \omega_k t)}{\omega_k} \cdot r(t) f_k t \\
\implies c_1(t) &= -\frac{1}{\omega_k} \int_0^t r(s) f_k(s) \exp(\alpha s) \sin \omega_k s ds + k_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2'(t) &= \frac{\begin{vmatrix} \exp(-\alpha t) \cos \omega_k t & 0 \\ G_1'(t) & r(t) f_k t \end{vmatrix}}{\omega_k \exp(-2\alpha t)} \\
&= \frac{\exp(\alpha t) \cos \omega_k t}{\omega_k} r(t) f_k(t)
\end{aligned}$$

$$c_2(t) = \frac{1}{\omega_k} \int_0^t r(s) f_k(s) \exp(\alpha s) \cos \omega_k s ds + k_2$$

Nous avons :

$$u_k(t) = \exp(-\alpha t) [c_1(t) \cos \omega_k t + c_2(t) \sin \omega_k t]$$

$$= \exp(-\alpha t) [k_1 \cos \omega_k t + k_2 \sin \omega_k t] - \frac{1}{\omega_k} \int_0^t \exp(\alpha(s-t)) [\sin \omega_k s \cos \omega_k t - \cos \omega_k s \sin \omega_k t] r(s) f_k(s) ds$$

$$= \exp(-\alpha t) [k_1 \cos \omega_k t + k_2 \sin \omega_k t] - \frac{1}{\omega_k} \int_0^t \exp(\alpha(s-t)) \sin \omega_k(s-t) \cdot r(s) f_k(s) ds$$

$$u_k'(t) = -\alpha \exp(-\alpha t) [k_1 \cos \omega_k t + k_2 \sin \omega_k t] + \exp(-\alpha t) [-k_1 \omega_k \sin \omega_k t + k_2 \omega_k \cos \omega_k t]$$

$$u_k(0) = k_1 = \varphi_0$$

$$u_k'(0) = -\alpha(k_1) + (k_2 \omega_k) = \psi_0$$

$$\implies k_2 = \frac{\psi_0 + \alpha \varphi_0}{\omega_k}$$

$$\begin{aligned}
u_k(t) &= \exp(-\alpha t) \left[ \cos \omega_k t + \frac{\psi_0 + \alpha \varphi_0}{\omega_k} \sin \omega_k t \right] - \frac{1}{\omega_k} \int_0^t r(s) f_k(s) \exp \alpha(s-t) \sin \omega_k(s-t) ds \\
&\hspace{25em} (2.9)
\end{aligned}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{l}} \exp(-\alpha t) \left[ \varphi_0 \cos \omega_k t + \frac{\psi_0 + \alpha \varphi_0}{\omega_k} \sin \omega_k t \right] \sin \frac{k\pi}{l} x \\
&\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \frac{\sqrt{\frac{2}{l}}}{\omega_k} f_k(s) r(s) \exp \alpha(s-t) \sin \omega_k(s-t) \sin \frac{k\pi}{l} x ds.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

on utilisant (2.1) et (2.4)

$$E''(t) + 2\alpha E'(t) + \beta^2 E(t) = u_x(l, t) - u_x(0, t) + r(t) \int_0^l f(x, t) dx$$

$$r(t) = \frac{E''(t) + 2\alpha E'(t) + \beta^2 E(t) - u_x(l, t) + u_x(0, t)}{\int_0^l f(x, t) dx}$$

avec  $\int_0^l f(x, t) dx \neq 0$

$$u_x(0, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} \sqrt{\frac{2}{l}} \exp(-\alpha t) \left[ \varphi_0 \cos \omega_k t + \frac{\alpha \varphi_0 + \psi_0}{\omega_k} \sin \omega_k t \right] - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} \frac{\sqrt{\frac{2}{l}}}{\omega_k} \int_0^t f_k(s) r(s) \exp \alpha(s-t) \sin \omega_k(s-t) ds$$

$$\begin{aligned}
u_x(l, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} (-1)^k \sqrt{\frac{2}{l}} \exp(-\alpha t) \left[ \varphi_0 \cos \omega_k t + \frac{\alpha \varphi_0 + \psi_0}{\omega_k} \sin \omega_k t \right] - \\
&\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} \frac{(-1)^k \sqrt{\frac{2}{l}}}{\omega_k} \int_0^t f_k(s) r(s) \exp \alpha(s-t) \sin \omega_k(s-t) ds
\end{aligned}$$

$$\frac{1 - (-1)^k}{k\pi} = \begin{cases} 0, & \text{si } k = 2p \\ 2/(2p+1)\pi, & \text{si } k = 2p+1 \end{cases}$$

alors , nous avons :

$$\begin{aligned}
u_x(0, t) - u_x(l, t) &= 2 \sum_{p=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{l}} \mu_{2p+1} \exp(-\alpha t) \left[ \varphi_0 \cos \omega_k t + \frac{\alpha \varphi_0 + \psi_0}{\omega_k} \sin \omega_k t \right] - \\
&\quad 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{2}{l}}}{\mu_{2p+1}} \int_0^t f_{2p+1}(s) r(s) \exp \alpha(s-t) \sin \omega_k(s-t) ds
\end{aligned}$$

on pose

$$G_p(t) = \frac{1}{\int_0^l f(x, t) dx} \left[ E''(t) + 2\alpha E'(t) + \beta^2 E(t) + \sum_{p=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{l}} \mu_{2p+1} \exp(-\alpha t) \left[ \varphi_0 \cos \omega_k t + \frac{\alpha \varphi_0 + \psi_0}{\omega_k} \sin \omega_k t \right] \right]$$

$$k_p(s, t) = -\frac{1}{\int_0^l f(x, t) dx} \left[ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{2}{l}} \mu_{2p+1}}{\omega_{2p+1}} \sin \mu_{2p+1}(s-t) f_{2p+1}(s) \right]$$

## 2.3 Existence et l'unicité,[12]

Pour étudier l'existence et d'unicité dans cette problème on utilise le théorème de point fixe de Banach.

Nous avons l'équation d'intégrale de volterra de deuxième espèce

$$r(t) = G_p(t) + \int_0^t k_p(s-t)r(s)ds \quad (2.11)$$

Nous avons :

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \mu_k x, \text{ avec} \quad (2.12)$$

$$u_k(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l u(x, t) \sin \mu_k dx$$

$$\text{où } \mu_k = \frac{k\pi}{l}, k \in \mathbb{N}^*$$

on considère l'ensemble des fonctions  $B_{2,T}^3$  définie pour(2.12) pour tout  $(x, t) \in D_T$ .et pour chaque fonction  $u_k(t)$  définie par (2.9)

est continue sur  $[0, T]$

et satisfait la condition :

$$j(u) = \left( \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} (u_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} < \infty$$

on définit sur  $B_{2,T}^3$  la norme :

$$\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} = j(u) \quad (2.13)$$

**Lemme 2.1** (voir(2.8),[12]). *l'espace  $B_{2,T}^3$  muni par la norme définie par (2.13) est un espace de Banach*

**preuve 2.1.** *l'espace  $B_{2,T}^3$  est un espace de Banach, alors l'espace de Banach est un espace normée complet on démontrer l'espace normée  $B_{2,T}^3$  est complété , si tout suite de Cauchy de  $B_{2,T}^3$  converge , est  $B_{2,T}^3$  espace complété.*

*on a  $\{u^m(x, t)\} \in B_{2,T}^3$  est suite de Cauchy*

$$u^m(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^m(t) \sin \mu_k x$$

donc  $\{u^m(x, t)\}$  est suite de Cauchy ,  $\forall \epsilon > 0, \forall N, \forall m, r > N$

$$\|u^m(x, t) - u^r(x, t)\|_{B_{2,T}^3}^2 = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \left( u_k^3 \|u_k^{(m)}(t) - u_k^{(r)}(t)\|_{c[0,T]} \right)^2 < \epsilon^2$$

$$\forall n = 1.2..... \left\| u_k^{(m)}(t) - u_k^{(r)}(t) \right\| < \epsilon$$

alors  $c[0, T]$  est complété  $u_k^{(m)}(t) \rightarrow u_k(t)$

on définit :  $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \mu_k x$

et  $u(x, t) \in B_{2,T}^3$  , et  $u^m(x, t) \rightarrow u(x, t) \forall m, r > N$

$$\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \left( u_k^3 \|u_k^{(m)}(t) - u_k^{(r)}(t)\|_{c[0,T]} \right)^2 < \epsilon^2$$

$(k = 1.2.....)$

$r \rightarrow \infty, \forall m > N$

$$\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \left( u_k^3 \|u_k^{(m)}(t) - u_k(t)\|_{c[0,T]} \right)^2 < \epsilon^2, (k = 1.2.....)$$

$k \rightarrow \infty, \forall m > N,$

$$\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \left( u_k^3 \|u_k^{(m)}(t) - u_k(t)\|_{c[0,T]} \right)^2 < \epsilon^2$$

donc

$u^m(x, t) \rightarrow u(x, t)$  et  $u^m(x, t) - u(x, t) \in B_{2,T}^3$

$u^m(x, t) \in B_{2,T}^3, u(x, t) = u^m(x, t) + u(x, t) - u^m(x, t) \in B_{2,T}^3$ , alors

$B_{2,T}^3$  est un espace normée complété .

D'autre part , l'espace  $E_T^3 = B_{2,T}^3 \times C[0, T]$  est un espace de Banach avec la norme

$$\|z(x, t)\|_{E_T^3} = \|u(x, t)\|_{E_T^3} + \|r(t)\|_{c[0,T]}$$

on considéré l'opérateur :

$$\Phi(u, r) = \{\Phi_1(u, r), \Phi_2(u, r)\}.$$

dans l'espace  $E_T^3$ , où

$$\Phi_1(u, r) = \tilde{u} \equiv \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k(t) \sin \mu_k x$$

où  $\tilde{u}_k(t)$  le deuxième nombre de (2.9)

$$\Phi_2(u, r) = \tilde{r}(t) \text{ où } \tilde{r}(t) : \text{ le deuxième membre de (2.11)}$$

$$\begin{aligned} \text{Nous avons : } f_k(t) &= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \sin \mu_k x dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{l}} f(x, t) - \frac{\cos \mu_k x}{\mu_k} \Big|_0^l - \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f_x(x, t) - \frac{\cos \mu_k x}{\mu_k} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{2p+1}(t) &= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f(x, t) \sin \mu_{2p+1} x dx \\ &= -\sqrt{\frac{2}{l}} f(x, t) \frac{\cos \mu_{2p+1} x}{\mu_{2p+1}} \Big|_0^l + \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f_x(x, t) \frac{\cos \mu_{2p+1} x}{\mu_{2p+1}} dx \\ &= -\frac{\sqrt{\frac{2}{l}}}{\mu_{2p+1}} \left[ (f(l, t) - f(0, t)) + \int_0^l f_x(x, t) \cos \mu_{2p+1} dx \right] \end{aligned}$$

$$(\text{hypothèses : } f \in C^4(D_T), f(l, t) = f(0, t) = 0)$$

on utilisant l'intégrale par partie 4 fois est trouve :

$$f_{2p+1}(t) = \frac{\sqrt{\frac{2}{l}}}{\mu_{2p+1}^4} \int_0^l f_{xxxx}(x, t) \sin \mu_{2p+1} x dx$$

Donc ,on a

$$k_p(s, t) = \frac{\sqrt{\frac{2}{l}}}{\int_0^l f(x, t) dx} \sum_{p \geq 0} \frac{1}{\mu_{2p+1}^3 \omega_{2p+1}} \sin \omega_{2p+1}(s - t) \int_0^l f_{xxxx}(x, t) \sin \mu_{2p+1} x dx$$

$$|k_p(s, t)| \leq \frac{\sqrt{\frac{2}{l}}}{\int_0^l f(x, t) dx} \sum_{p \geq 0} \frac{1}{\mu_{2p+1}^3 \omega_{2p+1}} \int_0^l |f_{xxxx}(x, t)| dx$$

$$\begin{aligned} m &\leq f(x, t) \leq M \\ \implies \frac{1}{lM} &\leq \int_0^l \frac{1}{f(x, t)} dx \leq \frac{1}{lm} \\ o, m &= \inf_{(x, t) \in D_T} |f(x, t)|, M = \max_{(x, t) \in D_T} |f(x, t)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|k_p(x, t)| &\leq \frac{2}{l^2 m} l \max_{(x,t) \in D_T} |f_{xxxx}(x, t)| \sum_{p \geq 0} \frac{1}{\mu_{2p+1}^3 \sqrt{\mu_{2p+1}^2 + \beta^2 - \alpha^2}} \\
&\leq \frac{2 \|f(x, t)\|_{c^4(D_T)}}{lm} \sum_{p \geq 0} \frac{1}{\mu_{2p+1}^3 \sqrt{\mu_{2p+1}^2 + \beta^2 - \alpha^2}}
\end{aligned}$$

**Lemme 2.2.** la série numérique  $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{\mu_{2p+1}^3 \sqrt{\mu_{2p+1}^2 + \beta^2 - \alpha^2}}$  est une série numérique convergente

**preuve 2.2.** Nous avons :

$$\begin{aligned}
&\sum_{p \geq 0} \frac{1}{\mu_{2p+1}^3 \sqrt{\mu_{2p+1}^2 + \beta^2 - \alpha^2}} \\
&= \frac{1}{(2p+1)\pi/l \sqrt{(2p+1)^2 \frac{\pi^2}{l^2} + \beta^2 - \alpha^2}} \\
&\approx \frac{l/\pi^2}{p^2(2p+1)^2}
\end{aligned}$$

Mais

$\sum_{p \geq 1} \frac{l^2/4\pi^2}{p^2}$  est une série de Riemann convergent

alors,  $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{\mu_{2p+1}^3 \sqrt{\mu_{2p+1}^2 + \beta^2 - \alpha^2}}$  est convergente.

Donc  $|k_p(s, t)| \leq \frac{2 \|f(x, t)\|_{c^2(D_T)}}{lm} C(\alpha, \beta)$

où,  $c(\alpha, \beta) = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{\mu_{2p+1}^3 \sqrt{\mu_{2p+1}^2 + \beta^2 - \alpha^2}}$

soit l'opérateur  $\Phi : C[0, T] \rightarrow C[0, T]$

$r \rightarrow \Phi(r) = G_p(t) + \int_0^t k_p(s, t) r(s) ds$

soient  $r_1(t), r_2(t) \in C[0, T]$ , nous avons :

$\Phi_2(r_1) - \Phi_2(r_2) = \int_0^t k_p(s, t) (r_1(s) - r_2(s)) ds$

$$|\Phi(r_1(t)) - \Phi(r_2(t))| \leq T |k_p(s, t)| \max_{0 \leq t \leq T} |r_1(t) - r_2(t)|$$

alors, on a :

$$\|\Phi_2(r_1) - \Phi_2(r_2)\|_{c[0, T]} \leq \frac{2Tc(\alpha, \beta) \times \|f(x, t)\|_{c^4(D_T)}}{lm} \|r_1 - r_2\|_{c[0, T]}$$

$$\text{si } \frac{2Tc(\alpha, \beta) \times \|f(x, t)\|_{c^4(D_T)}}{lm} < 1$$

l'opérateur  $\Phi$  est contractante donc il existe  $r^* \in C[0, T]$  unique telle que

$$\Phi(r^*) = r^*$$

l'existence et l'unicité de  $u(x, t)$  :

Nous avons :

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \frac{\sqrt{\frac{2}{l}}}{\mu_k^4} \int_0^l \varphi(x)^4 \sin \mu_k x dx \\ \psi_0 &= \frac{\sqrt{\frac{2}{l}}}{\mu_k^4} \int_0^l \psi(x)^4 \sin \mu_k x dx \\ f_k(t) &= \frac{\sqrt{\frac{2}{l}}}{\mu_k^4} \int_0^l f_{xxxx}(x, t) \sin \mu_k x dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|f_k(t)| &\leq \frac{\sqrt{\frac{2}{l}}}{\mu_k^4} \max_{0 \leq x \leq l} |f_{xxxx}(x, t)| \\ &\leq \frac{\sqrt{2l}}{\mu_k^4} \|f(x, t)\|_{C^2(D_T)}\end{aligned}$$

alors, on a :

$$\begin{aligned}|u(x, t)| &\leq \sum_{k \geq 1} \sqrt{\frac{2}{l}} \left( \left| \varphi_0 + \frac{\alpha |\varphi_0| + |\psi_0|}{\omega_k} \right| \right) \\ &\quad + \sum_{k \geq 1} \frac{\sqrt{\frac{2}{l}}}{\omega_k} T \exp(\alpha t) |f_k(t)| |r(t)| \\ &\leq \sum_{k \geq 1} \sqrt{\frac{2}{l}} \left[ \frac{\sqrt{\frac{2}{l}}}{\mu_k^2} \|\varphi\|_{C^4(D_T)} + \frac{\sqrt{2l}\alpha \|\varphi\|_{C^4(D_T)} + \|\psi\|_{C^4(D_T)}}{\mu_k^2 \omega_k} \right] \\ &\quad + \sum_{k \geq 1} \frac{\sqrt{\frac{2}{l}} T \exp(\alpha t)}{\mu_k^2 \omega_k} \|f(x, t)\|_{C^4(D_T)} \cdot \|r(t)\|_{C[0, T]}\end{aligned}$$

série convergente  $u(x, t)$  est converge uniformément sur  $D_T$ , par conséquent  $u(x, t)$  est continue sur  $D_T$

Hypothèses :

1. :  $\varphi \in C^4[0, l], \varphi(0) = \varphi(l), \varphi'(0) = \varphi'(l) = 0$
2. :  $\psi \in C^4[0, l], \psi(0) = \psi(l) = 0, \psi''(0) = \psi''(l) = 0$
3. :  $f(\cdot, t) \in C^4[0, l], \forall t \in [0, T], f(0, t) = f(l, t) = 0, f_{xx}(0, t) = f_{xx}(l, t) = 0, f(x, \cdot) \in C^2[0, l], \forall x \in [0, T], \left[ \int_0^l f(x, t) dx \right]^{-1} \leq \frac{1}{lm}$

$$4. : E \in C^2[0, l], \forall t \in [0, T], E(0) = \int_0^l \varphi(x) dx, E'(0) = \int_0^l \psi(x) dx$$

**Théorème 2.1.** *sous les hypothèses (1)-(4) est si la condition*

$$\frac{2Tc(\alpha, \beta) \|f(x, t)\|_{c^2(D_T)}}{lm} < 1$$

alors , le problème inverse (1)-(4) admet une solutions unique  $u(x, t), r(t)$

**preuve 2.3.** ([12])  $|k_p(s, t)| \leq \frac{2\|f(x, t)\|_{c^2(D_T)}}{lm} C(\alpha, \beta)$

$$\|\Phi_2(r_1) - \Phi_2(r_2)\|_{c[0, T]} \leq \frac{2Tc(\alpha, \beta) \times \|f(x, t)\|_{c^4(D_T)}}{lm} \|r_1 - r_2\|_{c[0, T]}$$

donc  $\Phi(u, r)$  admet une solution unique solution .

$$\Phi_1(u, r) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \mu_k x$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left[ |\alpha_k| + |\beta_k| + \int_0^l |\gamma_k r(s) ds| \right]$$

$$\text{on a } \alpha = \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{\exp(-\alpha t)}{\mu_k^4} \int_0^l \varphi^4(x) \sin \mu_k x dx$$

$$\beta_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{\exp(-\alpha t)}{\mu_k^4} \int_0^l (\alpha \varphi^4(x) + \psi^4(x)) \sin \mu_k x dx$$

$$\gamma_k = -\sqrt{\frac{2}{l}} \frac{\exp(\alpha(s-t))}{\mu_k^4 \omega_k} \int_0^l f_{xxxx}(x, t) \sin \mu_k x dx$$

$$\gamma_k \leq \sqrt{\frac{2l}{\alpha}} (\exp(\alpha T) - 1) \max_{c[0, T]} |f_{xxxx}(x, t)| c(\alpha, \beta)$$

$$\text{alors } c(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{u_k^3 \sqrt{u_k^2 + \beta^2 - \alpha^2}}$$

est une série numérique converge.

$$\text{on a } \|\Phi_1(r_1) - \Phi_1(r_2)\|_{c[0, T]} \leq \sqrt{\frac{2l}{\alpha}} (\exp(\alpha T) - 1) \max_{c[0, T]} |f_{xxxx}(x, t)| c(\alpha, \beta)$$

si

$$\sqrt{\frac{2l}{\alpha}} (\exp(\alpha T) - 1) \max_{c[0, T]} |f_{xxxx}(x, t)| c(\alpha, \beta) < 1$$

$$\|\Phi(r_1) - \Phi(r_2)\| = \left| \frac{2Tc(\alpha, \beta) \|f(x, t)\|_{c^2(D_T)}}{lm} + \sqrt{\frac{2l}{\alpha}} (\exp(\alpha T) - 1) \max_{c[0, T]} |f_{xxxx}(x, t)| c(\alpha, \beta) \right| \times \|r_1 - r_2\|$$

$$\|\Phi(r_1) - \Phi(r_2)\| \leq A(T)c(\alpha, \beta) \|r_1 - r_2\|_{E_T^3}$$

on a

$$A(T) = \frac{2Tc\|f(x,t)\|_{C^2(D_T)}}{lm} + \sqrt{\frac{2l}{\alpha}}(\exp(\alpha T) - 1) \max_{C[0,T]} |f_{xxxx}(x,t)| \text{ alors } 0 < A(T)c(\alpha, \beta) < 1$$

*l'opérateur  $A(T)$  est contractante donc il existe  $r^*$  et  $u^* \in C[0, T]$  unique telle que  $\Phi(r^*, u^*) = (r^*, u^*)$*

## ÉTUDE NUMÉRIQUE

---

Dans ce chapitre, cette méthode est basée sur les polynômes de Legendre première espèce et la méthode  $\alpha$  généralisée. Avec deux exemples numériques, nous avons proposé un algorithme efficace pour résoudre le problème de télégraphe (1)-(4) et la condition aux limites de Dirichlet.

### 3.1 Polynômes de Legendre décalés du première espèce,[10]

Pour utiliser les polynômes donnés est :

sur l'intervalle  $[0, 1]$ , on définit les polynômes de Legendre dits décalés du première espèce en introduisant le changement de variable suivant :

$$z = 2x - 1 \text{ ou } x = \frac{1}{2}(z + 1).$$

dans ce cas ,les polynômes de Legendre décalés de  $l_n^*(x)$  d'ordre  $n \in \mathbb{N}$  sont définis sur  $[0, 1]$  par :

$$l_n^*(x) = l_n(z) = l_n(2x - 1). \quad (3.1)$$

les polynômes de Legendre décalés du première espèce  $l_n^*(x)$  vérifiant la formule de récurrence suivant :

$$\begin{cases} l_0^*(x) = 1, \\ l_1^*(x) = 2x - 1, \\ l_{n+1}^*(x) = \frac{2n+1}{n+1}(2x - 1)l_n^*(x) - \frac{n}{n+1}l_{n-1}^*(x), n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \quad (3.2)$$

nous obtenons la forme explicite des polynômes Legendre décalés du première espèce  $l_n^*(x)$  de degré  $n$  en  $x$  donnée par :

$$l_n^*(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \frac{\Gamma(n+k+1)x^k}{\Gamma(n-k+1)(\Gamma(k+1))^2}, n \in \mathbb{N}, \quad (3.3)$$

où  $\Gamma(\cdot)$  est fonction Gamma d'Euler.

on note que

$$\begin{cases} l_n^*(0) = (-1)^n, (l_n^*(0))' = (-1)^{n-1}n(n+1), \\ l_n^*(1) = 1, (l_n^*(1))' = n(n+1). \end{cases} \quad (3.4)$$

D'après (3.1) , les polynômes  $l_n^*(x)$  sont orthogonaux sur l'intervalle  $[0, 1]$  c'est à dire :

$$\langle l_i^*(x), l_j^*(x) \rangle = \int_0^1 l_i^*(x) l_j^*(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2i+1}, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (3.5)$$

soit  $\Phi \in L^2(0, 1)$  qui elle peut être exprimé en termes de polynômes de Legendre décalés du première espèce telle que

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i l_i^*(x), \quad (3.6)$$

où les coefficients  $c_i, i \in \mathbb{N}$  sont donnés par :

$$c_i = (2i + 1) \int_0^1 \Phi(x) l_i^*(x) dx. \quad (3.7)$$

en pratique, seuls les premières polynômes de Legendre décalés  $(m+1)$  -termes sont considérés. alors ,nous avons :

$$\Phi_m(x) = \sum_{i=0}^m c_i l_i^*(x). \quad (3.8)$$

## 3.2 Méthode de collocation de Legendre,[10, ch4,page67]

Dans cette section, nous appliquons la méthode de collocation de Legendre sur le problème (2)-(4) avec  $\alpha = 1$  pour la condition initiale (2) et  $\beta = 1$  pour la condition aux limites de Dirichlet (3).

soit  $u_m(x, t)$  l'approximation de  $u(x, t)$  donnée sous la forme suivant :

$$u_m(x, t) = \sum_{i=0}^m c_i(t) l_i^*(x). \quad (3.9)$$

o na

$$u_t(x, t) = \sum_{i=0}^6 c'_i(t) l_i(x). \quad (3.10)$$

$$u_{tt}(x, t) = \sum_{i=0}^6 c_i'' l_i(x). \quad (3.11)$$

$$u_{xx}(x, t) = \sum_{i=0}^6 c_i(t) l_i''(x). \quad (3.12)$$

$$\sum_{i=0}^6 c_i'' l_i(x) + 2a \sum_{i=0}^6 c_i'(t) l_i(x) + b^2 \sum_{i=0}^6 c_i(t) l_i(x) = \sum_{i=0}^6 c_i(t) l_i''(x) + r(t) f(x, t) \quad (3.13)$$

on pose dans (3.13)  $x = x_p, p = 1..5$  les racines des polynôme de Legendre décalé  $l_5^*$ , on a :

$$\sum_{i=0}^6 c_i'' l_i(x_p) + 2a \sum_{i=0}^6 c_i'(t) l_i(x_p) + \sum_{i=0}^6 c_i(t) [b^2 l_i(x_p) - l_i''(x_p)] = r(t) f(x_p, t) \quad (3.14)$$

En appliquant(??) et avec(3.1),on obtient :

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^6 c_i(t) l_i(0) = 0 \\ \sum_{i=0}^6 c_i(t) l_i(1) = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

on introduit les vecteurs  $X(t), \dot{X}(t), \ddot{X}(t)$  et  $F(t)$  définis par :

$$\begin{cases} X(t) = (c_0(t), c_1(t), \dots, c_6(t))^T, \\ \dot{X}(t) = (c_0'(t), c_1'(t), \dots, c_6'(t))^T, \\ \ddot{X}(t) = (c_0''(t), c_1''(t), \dots, c_6''(t))^T, \\ f(t) = (r(t) f(t), r(t) f_2(t), \dots, r(t) f_5(t) 00)^T, \end{cases} \quad (3.16)$$

En remplaçant (??) dans la condition (2) avec  $\alpha = 1$ ,et en utilisant (??), on obtient :

$$\begin{cases} c_i(0) = (2i + 1) \int_0^1 \varphi(x) l_i^*(x) \\ c_i'(0) = (2i + 1) \int_0^1 \psi(x) l_i^*(x), i = 0.1..6. \end{cases} \quad (3.17)$$

En combinant les équations (3.14),(3.15) et (3.16)

$$\left\{ M(t)\ddot{X}(t) + C(t)\dot{X}(t) + k(t)X(t) = F(t), X(0) = (c_0(t), c_1(t), \dots, c_6(t))^T, \dot{X}(0) = (c'_0(t), c'_1(t), \dots, c'_6(t))^T, \right. \quad (3.18)$$

et  $M(t)$  est le matrice de masse donnée par :

$$M(t) = \begin{pmatrix} l_0^*(x_1) & l_1^*(x_1) & \dots & l_6^*(x_1) \\ l_0^*(x_2) & l_1^*(x_2) & \dots & l_6^*(x_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_0^*(x_5) & l_1^*(x_5) & \dots & l_6^*(x_5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$C(t)$  est la matrice d'amortissement donnée par :

$$C(t) = 2a \begin{pmatrix} l_0^*(x_1) & l_1^*(x_1) & \dots & l_6^*(x_1) \\ l_0^*(x_2) & l_1^*(x_2) & \dots & l_6^*(x_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_0^*(x_5) & l_1^*(x_5) & \dots & l_6^*(x_5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et  $k$  est la matrice de rigidité donnée par :

$$k = b^2 \begin{pmatrix} l_0^*(x_1) - R_0(x_1) & l_1^*(x_1) - R_1(x_1) & \dots & l_6^*(x_1) - R_6(x_1) \\ l_0^*(x_2) - R_0(x_2) & l_1^*(x_2) - R_1(x_2) & \dots & l_6^*(x_2) - R_6(x_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_0^*(x_5) - R_0(x_5) & l_1^*(x_5) - R_1(x_5) & \dots & l_6^*(x_5) - R_6(x_5) \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre le système linéaire d'équations différentielles du descend ordre (3.18) ,nous utilisant la méthode  $\alpha$ généralisée ,

### 3.3 Méthode alpha- généralisée,[10, ch4,page69]

soit  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N_t} = T$  une partition uniforme de l'intervalle  $[0, t]$  et  $\tau = t_{j+1} - t_j$  est le pas de temps. nous définissons  $t_j = \tau j$  où,  $j = 0, 1, \dots, N_t$ , nous introduisons les notations suivantes :

$$c_i(t_j) = c_i^j, g(t_j) = g_j, h(t_j) = h_j, f_j = (f(x_1, t_j), f(x_2, t_j), \dots, f(x_{m-1}, t_j), g_j, h_j)^T,$$

et

$$M^j = M(t_j), C^j = C(t_j), k^j = k(t_j), j = 0, 1, \dots, N_t.$$

en 1993, Chung et Hulbert ont proposé une méthode appelée la méthode  $\alpha$  généralisée, la forme de base de cette méthode est donnée par :

$$d_{j+1} = d_j + \tau v_j + \tau^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \theta \right) A_j + \theta A_{j+1} \right], \quad (3.19)$$

$$v_{j+1} = v_j + \tau [(1 - \gamma) A_j + \gamma A_{j+1}], \quad (3.20)$$

$$M^{j+1} A_{j+1-\alpha_m} + C^{j+1} v_{j+1-\alpha_f} + k^{j+1} d_{j+1-\alpha_f} = F_{j+1-\alpha_f}, \quad (3.21)$$

$$d_0 = X(0), v_0 = \dot{X}(0), A_0 = \ddot{X}(0), \quad (3.22)$$

où

$$d_{j+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f) d_{j+1} + \alpha_f d_j, \quad (3.23)$$

$$v_{j+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f) v_{j+1} + \alpha_f v_j, \quad (3.24)$$

$$A_{j+1-\alpha_m} = (1 - \alpha_m) A_{j+1} + \alpha_m A_j, \quad (3.25)$$

$$F_{j+1-\alpha_f} = F_{(1-\alpha_f)t_{j+1} + \alpha_f t_j}, \quad (3.26)$$

Dans lequel  $j = 0.1....., (N_t - 1), d_j, v_j$  et  $A_j$  sont respectivement les vecteurs déplacement, vitesse et accélération au temps  $t_j$ . D'après (3.19), nous avons :

$$A_{j+1} = \frac{1}{2\tau^2\theta}(d_{j+1} - d_j) - \frac{v_j}{\tau\theta} - \left(\frac{1}{2\theta} - 1\right)A_j. \quad (3.27)$$

on remplaçant (3.27) dans (3.20), on obtient :

$$v_{j+1} = \frac{\gamma}{\theta\tau}(d_{j+1} - d_j) + \left(1 - \frac{\gamma}{\theta}\right)v_j + \tau\left(1 - \frac{\gamma}{2\theta}\right)A_j. \quad (3.28)$$

En remplaçant (3.27) et (3.28) dans (3.21) et avec (3.23)-(3.26), on obtient le système linéaire suivant :

$$Y^{j+1}d_{j+1} = B_{j+1} \quad (3.29)$$

où

$$\begin{aligned} Y^{j+1} &= \frac{1 - \alpha_m}{\theta\tau^2}M^{j+1} + \frac{\gamma(1 - \alpha_f)}{\theta\tau}C^{j+1} + (1 - \alpha_f)k^{j+1}, \\ B_{j+1} &= F_{j+1-\alpha_f} + M^{j+1}\frac{1 - \alpha_m}{\theta\tau^2}d_j + \frac{1 - \alpha_m}{\theta\tau}v_j + \left(\frac{1 - \alpha_m}{\theta\tau} - 1\right)A_j \quad [] \\ &+ C^{j+1}\left[\frac{\gamma(1 - \alpha_m)}{\theta\tau^2}d_j + \left(\frac{\gamma(1 - \alpha_m)}{\theta} - 1\right)v_j + \tau(1 - \alpha_f)\left(\frac{\gamma}{2\theta} - 1\right)A_j\right] - \alpha_f k^{j+1}d_j. \end{aligned} \quad (3.30)$$

L'algorithme complet utilisant la méthode  $\alpha$  généralisée est ci-dessous :

**Algorithme1**[méthode  $\alpha$  généralisée]

### 1. Initialisations :

- Donner les coefficients  $a(x, t), b(x, t)$  et  $\omega(x, t)$ .
- Donner le terme source  $f(x, t)$ , les données initiales  $\varphi(x)$  et  $\psi(x)$ .
- Donner les polynômes de Legendre décalés  $l_0^*(x), l_1^*(x), \dots, l_6^*(x)$ .
- Donner  $x_1, x_2, \dots, x_5$  les racines de polynôme de Legendre décalé  $l_5^*(x)$ .
- Donner le pas de temps  $\tau = \frac{T}{N_t}$  et le pas de l'espace  $h = \frac{1}{N_x+1}$ .
- choisit les paramétrés suivants :

$$\rho_\infty \in [0, 1], \alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}, \alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1}, \theta = \frac{1}{4}(1 - \alpha_m + \alpha_f)^2, \gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f.$$

(g) Donner les constantes :

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1 - \alpha_m}{\beta\tau^2}, a_1 = \frac{\gamma(1 - \alpha_f)}{\beta\tau}, \\
 a_2 &= 1 - \alpha_f, a_3 = \frac{1 - \alpha_m}{\beta\tau}, a_4 = \frac{1 - \alpha_m}{2\beta} - 1, \\
 a_5 &= \frac{\gamma(1 - \alpha_f)}{\beta} - 1, a_6 = \tau(1 - \alpha_f)(\gamma - 2\beta - 1), \\
 a_7 &= \frac{\gamma}{\beta\tau}, a_8 = 1 - \frac{\gamma}{\beta}, a_9 = \tau(1 - \frac{\gamma}{2\beta}), a_{10} = \frac{1}{\beta\tau^2}, \\
 a_{11} &= \frac{1}{\beta\tau}, a_{12} = \frac{1}{2\beta} - 1.
 \end{aligned}$$

(h) calculer les vecteurs  $d_0, v_0$  et  $A_0$ .

2. pour chaque étape de temps :

1. calculer la matrice  $M^{j+1}$ , la matrice d'amortissement  $C^{j+1}$ , la matrice de rigidité  $k^{j+1}$  et le terme source  $F_{j+1-\alpha_f}$
2. calculer la matrice  $Y^{j+1} = a_0M^{j+1} + a_1C^{j+1} + a_2k^{j+1}$  et le deuxième membre

$$B^{j+1} = F_{j+1-\alpha_f} + M(a_0d_j + a_3v_j + a_4a_j) + C(a_1d_j + a_5v_j + a_6a_j) - \alpha_f k d_j.$$

3. Résoudre le système linéaire  $A^{j+1}d_{j+1} = B^{j+1}$ .

4. calculer les vecteurs vitesse et accélération :

$$v_{j+1} = a_7(d_{j+1} - d_j) + a_8v_j + a_9A_j \text{ et } A_{j+1} = a_{10}(d_{j+1} - d_j) - a_{11}v_j - a_{12}A_j.$$

5. poser  $j = j + 1$  et aller à l'étape 2 :1.

### 3.3.1 Exemples numériques,[11]

Dans cette section ,nous présentons deux exemple numérique pour les problème inverse pour l'équation de télégraphe avec  $\alpha = 1$  dans la condition initial (2) et  $\beta = 1$  dans la condition aux limite Dirichlet .

**Exemple 3.1.**

$$\begin{cases} a = 2, b = \omega = 1, \beta = 1, \\ f(x, t) = (x - x^2) [1 - 2a + b^2] + 2 \\ \varphi(x) = x - x^2, \psi(x) = -x + x^2, g(t) = h(t) = 0, \\ \mu_1 = \mu_2 = 0, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1. \end{cases}$$

Pour ces données ,le problème inverse de télégraphe (2)-(3)est donné par :

$$Y_t^3 u(x, t) + 4Y_t^2 u(x, t) + u(x, t) = u_{xx}(x, t) + r(t)f(x, t), \quad (3.31)$$

$$u(x, 0) = x - x^2, u_t(x, 0) = -x + x^2, 1 < x < 1, \quad (3.32)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, 0 < t < T. \quad (3.33)$$

on note que la solution exacte de ce problème est  $u_e = (x - x^2) \exp(-t)$ . si  $\alpha = 1$ , nous appliquons Algorithme 1 pour  $m = 6$  et  $u_6(x, t)$  est la solution approchée définie par :

$$\sum_{i=0}^6 C_i(t) l_i^*(x).$$

Dans figure 3.1 et figure 3.2, nous présentons les courbes des solutions exactes et approchées pour  $\alpha = 1$  à  $T = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.00$  et l'erreur 3.3, nous conclure la solution de problème inverse de équation télégraphique linéaire est converge

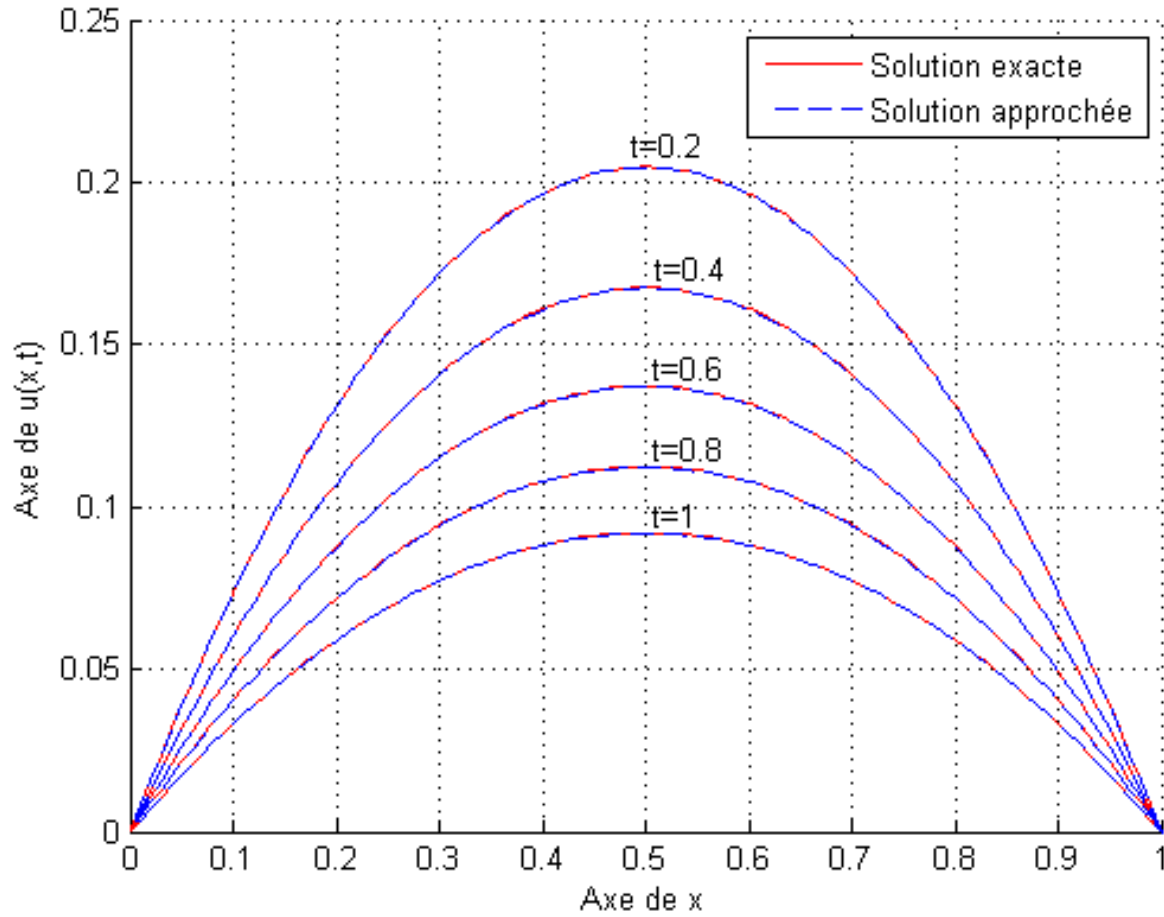


FIGURE 3.1 – la Solution de problème direct de  $u(x,t)$  pour  $t = 0.2, t = 0.4, t = 0.6, t = 0.8, t = 1.0$  et  $(M=50, N=100)$

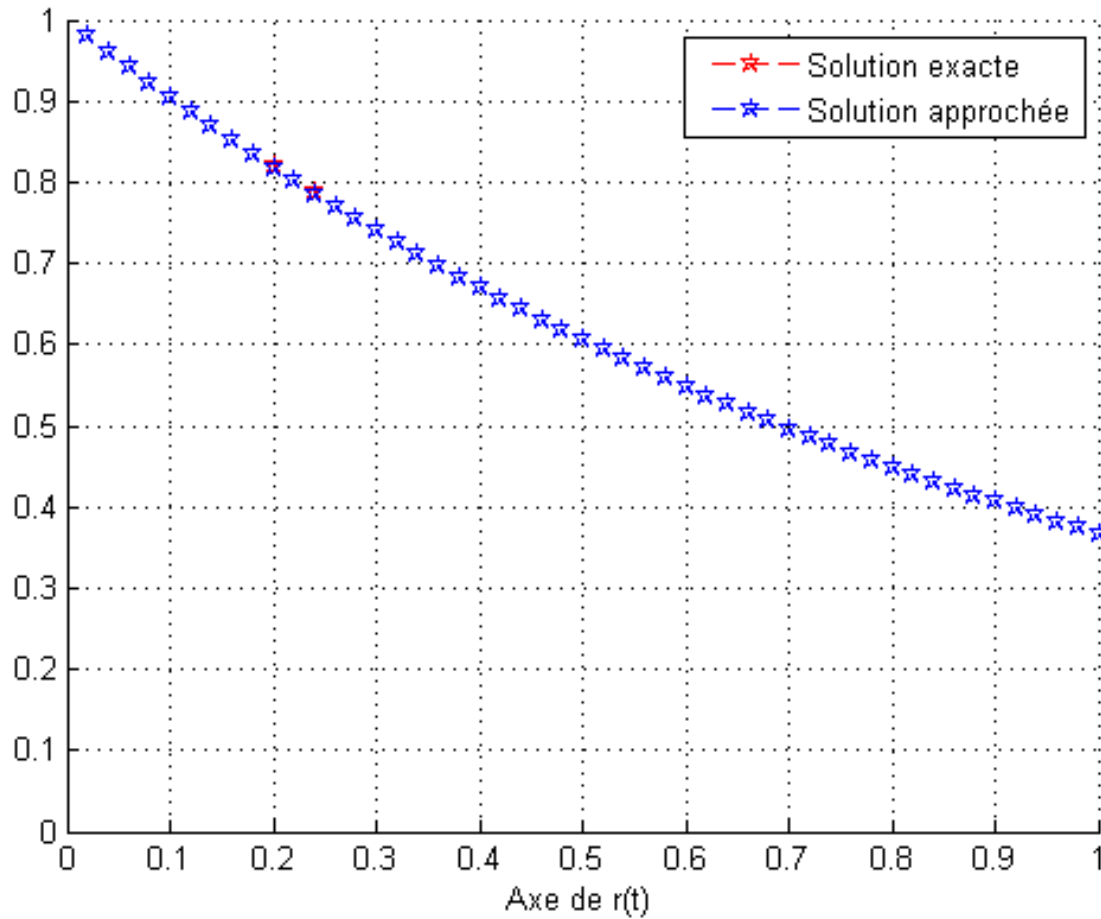


FIGURE 3.2 – la Solution de problème inverse de  $r(t)$  pour  $t = 0.2, t = 0.4, t = 0.6, t = 0.8, t = 1.0$  et ( $M=50, N=100$ )

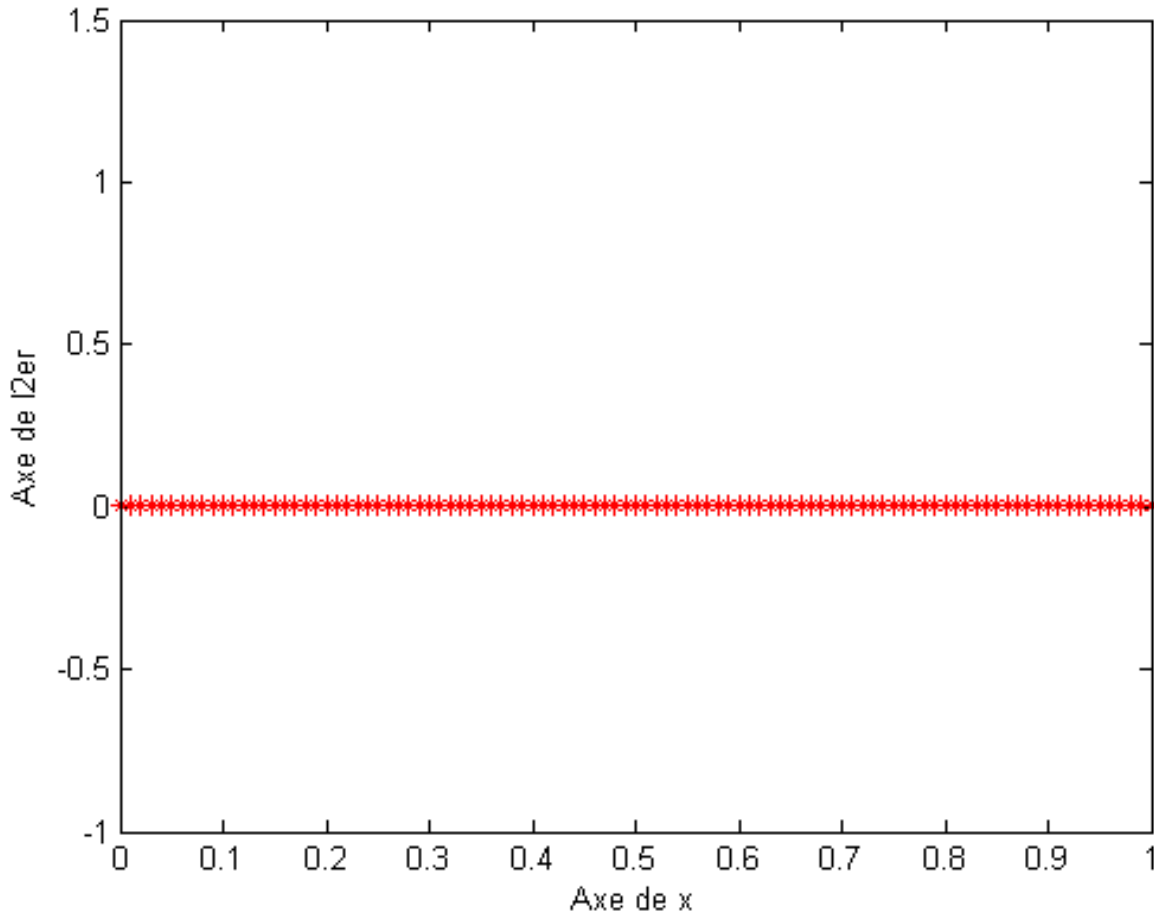


FIGURE 3.3 – l'erreur1 de problème direct avec inverse

**Exemple 3.2.**

$$\begin{cases} a = 10, b = \omega = 5, \beta = 1, \\ f(x, t) = (2t^2 + \frac{4a}{t} + b^2)(1 - \cos(2\pi x)) - 4\pi^2 \cos(2\pi x) \\ \varphi(x) = 0, \psi(x) = 0, g(t) = h(t) = 0, \\ \mu_1 = \mu_2 = 0, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1. \end{cases}$$

Pour ces données ,le problème inverse de télégraphe (2)-(3)est donné par :

$$Y_t^{11}u(x, t) + 20Y_t^{10}u(x, t) + 25u(x, t) = u_{xx}(x, t) + r(t)f(x, t), \quad (3.34)$$

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, 1 < x < 1, \quad (3.35)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, 0 < t < T. \quad (3.36)$$

on note que la solution exacte de ce problème est  $u_e = t^2(1 - \cos(2\pi x))$ . si  $\alpha = 1$ , nous appliquons l'Algorithme 1 pour  $m = 6$  et  $u_6(x, t)$  est la solution approchée définie par :

$$\sum_{i=0}^6 C_i(t) l_i^*(x).$$

Dans la figure 3.4 et la figure 3.5, nous présentons les courbes des solutions exactes et approchées pour  $\alpha = 1$  à  $T = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.00$  et l'erreur 3.6, nous concluons que la solution du problème inverse de l'équation télégraphique linéaire converge.

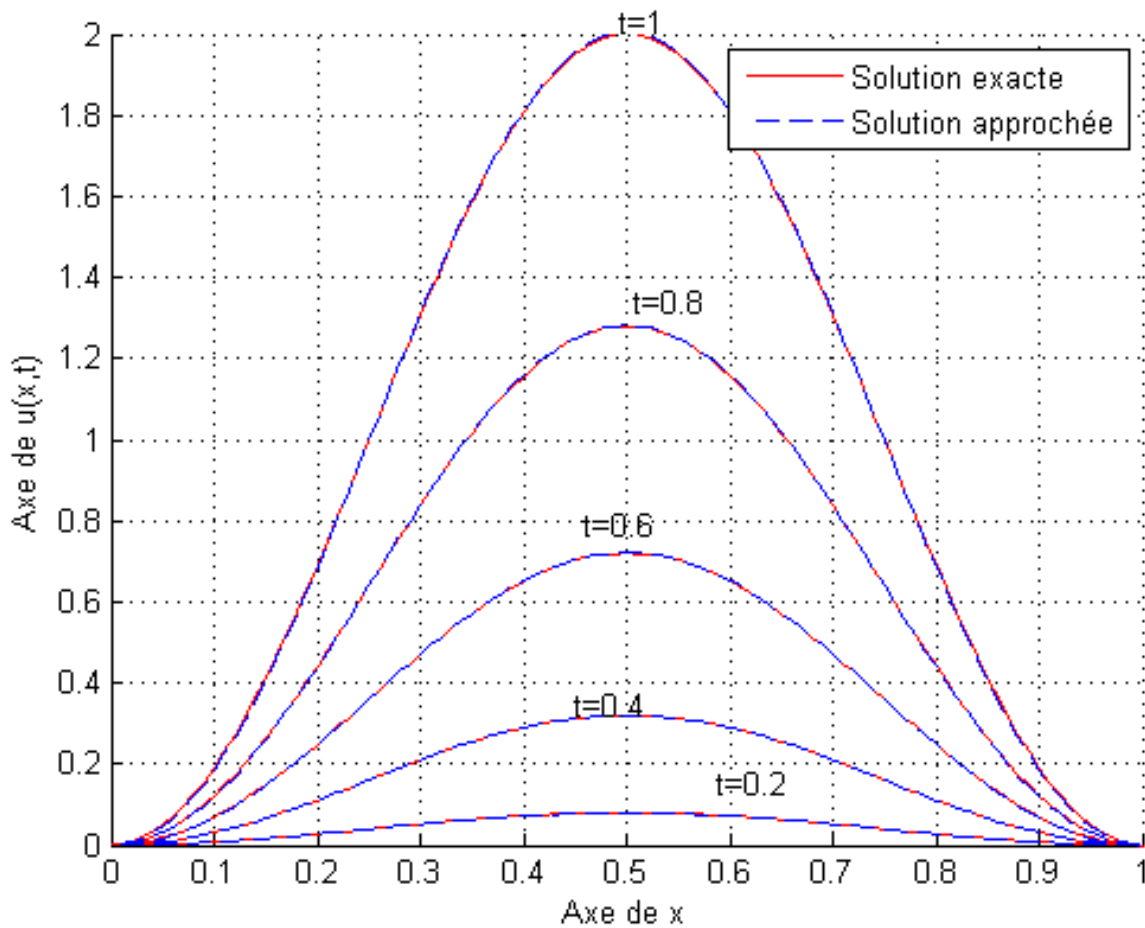


FIGURE 3.4 – la Solution de problème direct de  $u(x, t)$  pour  $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.00$  et ( $M=50$ ,  $N=100$ )

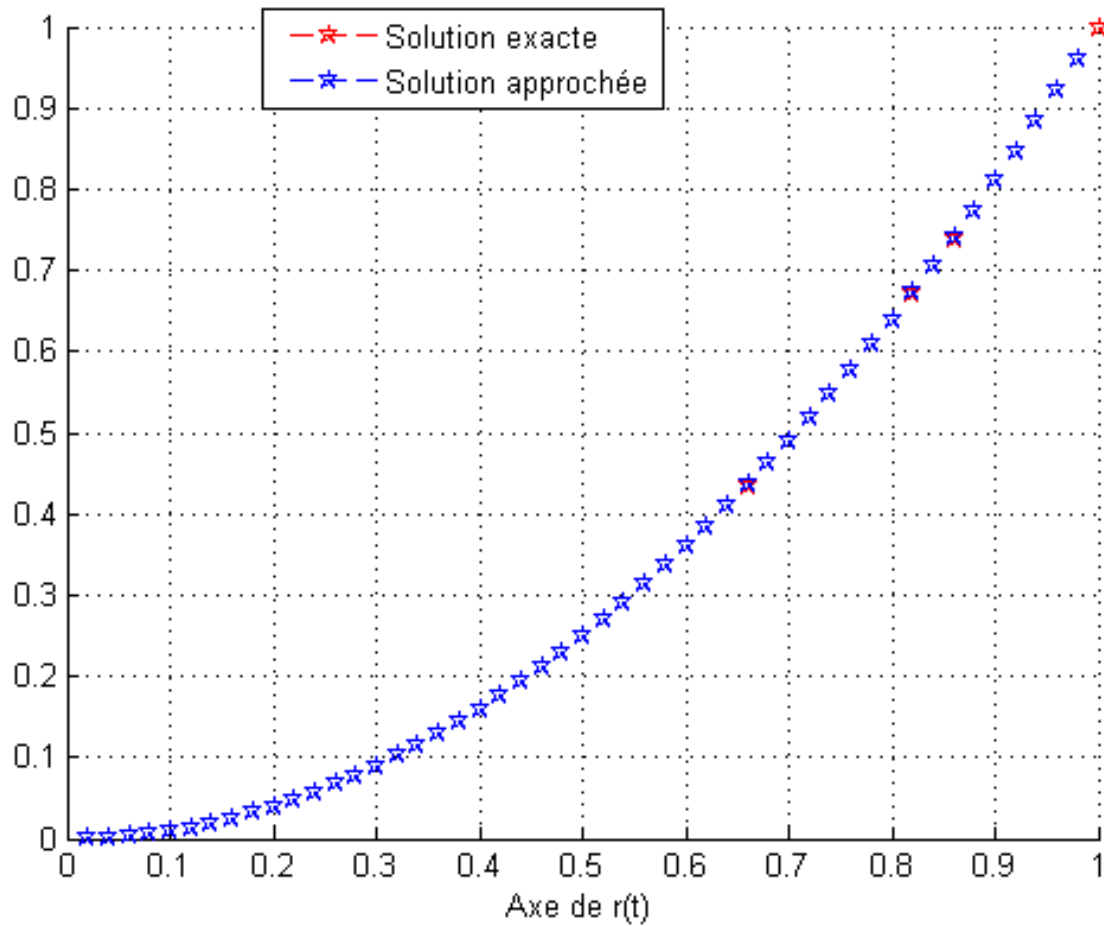


FIGURE 3.5 – la Solution de problème inverse de  $r(t)$  pour  $t = 0.2, t = 0.4, t = 0.6, t = 0.8, t = 1.0$  et ( $M=50, N=100$ )

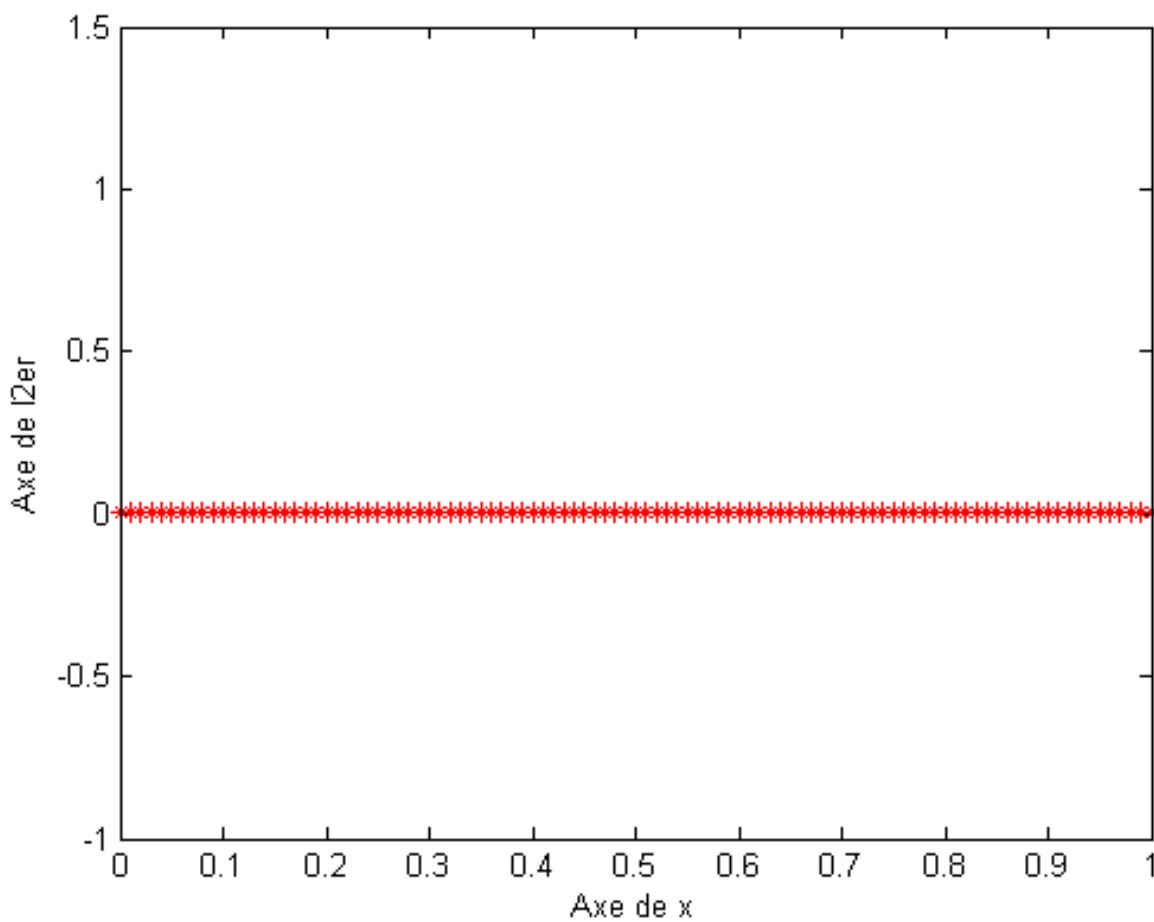


FIGURE 3.6 – l'erreur2 de problème direct avec inverse

---

# Conclusion générale

---

Dans ce mémoire, nous avons analysé un problème inverse pour déterminer un coefficient de source terme en fonction du temps  $t$  dans une équation télégraphique linéaire avec des conditions aux limites de Dirichlet et une condition supplémentaire sous forme intégrale. Ce travail se déroule en deux étapes :

- ✓ **Étude théorique** : Pour le temps  $T$  est suffisamment petit et avec des hypothèses sur les données du problème, nous avons démontré un résultat d'existence et d'unicité de la solution par un théorème de point fixe.
- ✓ **Étude numérique** : nous avons proposé un algorithme pour calculer la solution numérique de ce problème inverse. Cet algorithme basé sur la méthode de collocation de Legendre et l'algorithme  $\alpha$ -généralisé. Des exemples numériques sont présentés pour valider l'efficacité de cet algorithme.

Comme perspectives, nous avons prévu le sujet de recherche suivant :

- ☞ Trouver le couple  $(u(x, t), \varphi(x))$  pour le problème suivant :

$$u_{tt}(x, t) + 2\alpha u_t(x, t) + \beta^2 u(x, t) = u_{xx}(x, t) + f(x, t), 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$$

$$u(x, 0) = \varphi(x); u_t(x, 0) = \psi(x), 0 \leq x \leq l,$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, 0 \leq t \leq T,$$

$$u(x, d) = h(x), 0 \leq x \leq l, 0 < d \leq T.$$

---

# Bibliographie

---

- [1] H.A. Al-Hazaimeh. *Time dependent source identification problems for telegraph equation*. PhD thesis, Near East University, Nicosia, 2019.
- [2] Y.E. Anikonov. A uniqueness theorem for solutions to an inverse problem for the wave equation. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 19(2) :127–128, 1976.
- [3] I. Aouina. Problème inverse pour une équation de diffusion avec une condition au limite non locale. Master's thesis, Université de M'sila, Algérie, Juin 2021.
- [4] A. Ashyralyev. On source identification problem for telegraph differential equations. *In International Conference on Differential & Difference Equations and Applications*, pages 39–50, 2015.
- [5] A. Ashyralyev and F. Emharab. Identification hyperbolic problems with the neumann boundary condition. *Bulletin of the Karaganda University-Mathematics*, pages 89–98, 2018.
- [6] J. Banasiak and J. Mika. Singularly perturbed telegraph equations with applications in the random walk theory. *J. Appl. Math. Stoch. Anal.*, 11(1) :9–28, 1998.
- [7] O. Heaviside. *Electromagnetic theory, Vol-2*. Chelsea Publishing Company, New York, 1899.
- [8] P. Jordan and A. Puri. Digital signal propagation in dispersive media. *J. Appl. Phys.*, 85(3) :1273–1282, 1999.
- [9] A.I. Kozhanov and R.R. Safiullova. Determination of parameters in telegraph equation. *Ufimskii Matematicheskii Zhurnal*, 9(1) :63–74, 2017.
- [10] A. Saad. *Étude de quelques problèmes d'évolution pour des équations aux dérivées fractionnaires*. PhD thesis, Université mohamed boudiaf de m'sila, Algérie, 2022.
- [11] A. Saad and N. Brahim. An efficient algorithm for solving the conformable time-space fractional telegraph equations. *Moroccan J. of Pure and Appl. Anal. (MJPAA)*, 7(3) :413–429, 2021.
- [12] I. Tekin, Yashar T. Mehraliyev, and Mansur I. Ismailov. Existence and uniqueness of an inverse problem for nonlinear Klein-Gordon equation. *mat meth appsci*, pages 1–15, 2019.
- [13] V. Weston and S. He. Wave splitting of the telegraph equation in  $\mathbb{R}^3$  and its application to inverse scattering. *Inverse Probl.*, 9 :789–812, 1993.
- [14] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I*. Springer-Verlag, 1985.

**ملخص:** في هذه المذكرة، قمنا بتحليل مسألة عكسية لتحديد معامل المصدر كدالة للوقت  $t$  في معادلة التلغراف الخطي مع شروط حدية لدريكلي وشرط إضافي في شكل متكامل. إذا كان مجال الوقت  $T$  صغيراً بدرجة كافية ومع افتراضات حول معطيات المسألة، أثبتنا وجود ووحدانية الحل من خلال نظرية النقطة الثابتة. ثم اقترحنا خوارزمية لحساب الحل العددي لهذه المسألة العكسية. تعتمد هذه الخوارزمية على طريقة تجميع لجوندر وخوارزمية الفا المعممة. تم تقديم أمثلة عديدة للتحقق من كفاءة هذه الخوارزمية.

**كلمات مفتاحية:** طريقة فورييه ، طريقة با ناخ للنقطة الثابتة ، كثيرات حدود لجوندر ، خوارزميات معمة ألف المعممة.

---

Dans ce mémoire, nous avons analysé un problème inverse pour déterminer un coefficient de terme source en fonction du temps  $t$  dans une équation télégraphique linéaire avec des conditions aux limites de Dirichlet et une condition supplémentaire sous forme intégrale. Pour le temps  $T$  est suffisamment petit et avec des hypothèses sur les données du problème, nous avons démontré un résultat d'existence et d'unicité de la solution par un théorème de point fixe. Ensuite, nous avons proposé un algorithme pour calculer la solution numérique de ce problème inverse. Cet algorithme basé sur la méthode de collocation de Legendre et l'algorithme  $\alpha$ -généralisé. Des exemples numériques sont présentés pour valider l'efficacité de cet algorithme.

**Mots-Clés :** Méthode de Fourier, Méthode de point fixe de Banach, les polynômes de Legendre , Algorithmes  $\alpha$ -généralisé.

---

In this memory, we have analyzed an inverse problem to determine a term source coefficient as a function of time  $t$  in a linear telegraph equation with Dirichlet boundary conditions and an additional condition in integral form. For the time  $T$  is sufficiently small and with assumptions on the data of the problem, we proved a result of existence and unicity of the solution by a fixed point theorem. Then, we proposed an algorithm to calculate the numerical solution of this inverse problem. This algorithm based on the Legendre collocation method and the  $\alpha$ -generalized algorithm. Numerical examples are presented to validate the efficiency of this algorithm.

**Keywords :** Fourier method, Banach fixed point method, Legendre polynomials,  $\alpha$ -generalized algorithm.