



# UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

**Département de Mathématiques**

**MEMOIRE DE FIN D'ETUDE**

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

**Domaine :** Mathématiques et Informatique

**Filière :** Mathématiques

**Option :** Mathématiques Fondamentales et Appliquées

**Par**

**MOUSSAI Houda**

**Sujet**

**Compacité dans les espaces  
d'Orlicz**

**Soutenu publiquement le: 09/06/2015 devant le jury composé de :**

MEROUNI	Abdelbaki	MCA	Univ- BBA	Président
GAGUE	Bachir	MCB	Univ- M'sila	Rapporteur
HERAIZ	Toufiq	MAA	Univ- M'sila	Examineur
DILMI	Mustapha	MAA	Univ- M'sila	Examineur

**Promotion: 2014/2015**

---

## Remerciements

Avant tout je remercie **ALLAH** à tout puissant de m'avoir le courage la volonté et la patience de mener à terme ce présent travail.

On remercie chaleureusement à Monsieur:**Mostefa NADIR** d'avoir accepté de nos encadrer, On les remercie pour ses conseils et sa disponibilité.

Merci également à Monsieur:**Bachir GAGUI** pour tout ce qui a donné comme conseils.

Un grand merci aux membres du jury pour l'honneur qu'il nous on fait en acceptant d'évaluer notre modeste travail.

Merci à ma famille surtout mes parents et mon frère **Samir** pour leurs soutiens et leurs encouragements.

Merci à mes amis et à tous ceux qui ont, de près ou de loin, attribué et aidé à l'aboutissement de ce travail.

## Notations

$C(\Omega)$	L'espace des fonctions continues sur $\Omega$ .
$C_b(\Omega)$	L'espace des fonctions continues bornées.
$C_c(\Omega)$	L'espace des fonctions continues à support compact dans $\Omega$ .
$L^P(\Omega)$	L'espace de Lebesgue.
$L^{P'}(\Omega)$	L'espace dual de Lebesgue.
$L_\Phi(\Omega)$	L'espace d'Orlicz.
$\tilde{L}_\Phi(\Omega)$	La classe d'Orlicz.
$\Phi(x)$	Fonction d'Orlicz (Fonction de Young).
$\Phi^*(x)$	Fonction conjuguée de $\Phi(x)$ .
$\ f\ _O$	La norme d'Orlicz.
$\ f\ _L$	La norme de Luxemburg.
$S_r(f)$	La fonction de Steklov.
$E_n$	L'adhérence de $L^\infty$ dans l'espace d'Orlicz.

# Table des matières

0.1	Introduction . . . . .	1
<b>1</b>	<b>Rappels sur les espaces <math>C(\Omega)</math> et les espaces <math>L^p(\Omega)</math></b>	<b>3</b>
1.1	Définitions et propriétés des espaces $C(\Omega)$ . . . . .	4
1.2	La compacité . . . . .	5
1.2.1	La compacité dans $C(\Omega)$ . . . . .	6
1.2.2	La compacité dans $C[a, b]$ . . . . .	7
1.3	Espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ . . . . .	7
1.3.1	Définitions et propriétés élémentaires des espaces $L^p(\Omega)$ . . . . .	7
1.3.2	Inégalités auxiliaires . . . . .	8
1.3.3	Propriétés des espaces $L^p(\Omega)$ . . . . .	15
1.3.4	La compacité dans $L^p(\Omega)$ . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Espace d'Orlicz</b>	<b>19</b>
2.1	Définitions . . . . .	19
2.2	Fonctions conjuguées . . . . .	20
2.3	Classe d'Orlicz . . . . .	24
2.4	La condition $\Delta_2$ . . . . .	25
2.5	Norme d'Orlicz . . . . .	25
2.6	Comparaison des espaces d'Orlicz . . . . .	28
2.7	Inégalités auxiliaires . . . . .	29

<b>3</b>	<b>La compacité dans l'espace d'Orlicz</b>	<b>31</b>
3.1	La convergence dans les espaces d'Orlicz . . . . .	31
3.2	La complétude des espaces d'Orlicz . . . . .	32
3.3	Etude de la compacité dans les espaces d'Orlicz . . . . .	33
	<b>Conclusion générale</b>	<b>39</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>39</b>

## 0.1 Introduction

Les espaces fonctionnels de Banach sont très connus et très utilisés dans le domaine mathématique. L'objectif de ce travail est d'étudier un problème mathématique, qu'on trouve souvent dans le domaine fonctionnel, qui est la compacité. Cette étude sera faite dans l'espace d'Orlicz dont il est peu connu dans le domaine de recherche, mais ayant des propriétés plus riches par rapport aux autres espaces.

Les espaces d'Orlicz sont des espaces fonctionnels qui généralisent de manière adéquate les espaces de Lebesgue, ils sont définis à partir d'une N-fonction (fonction d'Orlicz), tel qu'on trouve dans les espaces d'Orlicz deux types.

Le premier espace est l'espace des fonctions d'Orlicz  $L_\Phi$  et le deuxième est l'espace des suites d'Orlicz  $l_\Phi$  avec  $\Phi$  est une N-fonction. Le premier généralise les espaces de Lebesgue  $L^p$ , et le deuxième généralise les espaces de Lebesgue  $l^p$ . Ce dernier est caractérisé par deux normes équivalentes : la norme de Luxemburg et la norme d'Orlicz.

On connaît qu'il y a plusieurs recherches dans les espaces de Lebesgue comme la continuité et la compacité des opérateurs. Cette dernière possède, en général un caractère très fort dans la résolution de plusieurs problèmes mathématiques.

En ce qui concerne notre sujet "La compacité dans les espaces d'Orlicz" On s'intéresse à l'étude du problème de la compacité dans différents espaces, en particulier les espaces des fonctions continues  $C(\Omega)$  et l'espace de Lebesgue  $L^p(\Omega)$ . En principe, on étudie la compacité dans l'espace des fonctions d'Orlicz  $L_\Phi$ , sur chaque espace on donne des définitions et des principes généraux de la compacité et aussi les conditions qui vérifient cette propriété dans les trois espaces. Enfin on applique la théorie **d'Arzela-Ascoli** pour voir la différence de cette théorie dans les espaces des fonctions continues  $C(\Omega)$ , l'espace de Lebesgue  $L^p(\Omega)$  et l'espace d'Orlicz  $L_\Phi$ . Le travail est partagé en trois parties:

La première partie est consacrée à un rappel général de l'espace des fonctions continues et de l'espace de Lebesgue et ses propriétés, suivie par une étude sur les conditions de la théorie **d'Arzela-Ascoli** dans l'espace  $C(\Omega)$  et dans l'espace  $L^p$ .

Dans la deuxième partie, on donne la définition de l'espace d'Orlicz, et on démontre l'équivalence entre les deux normes d'Orlicz et on fait une comparaison entre ses espaces. De plus une étude des propriétés principales et nécessaires dans cet espace est réalisée à la

fin de ce chapitre. Les résultats obtenus lors de cette étude sont utilisée dans le troisième chapitre et enfin on termine notre travail par une conclusion et perspectives.

Dans la troisième partie on passera à l'étude de la compacité dans cet espace,ou on utilisera la même théorie qu'on a utilisée dans le premier chapitre.

# Chapitre 1

## Rappels sur les espaces $C(\Omega)$ et les espaces $L^p(\Omega)$

Dans ce chapitre nous allons exposer un rappel général sur les espaces fonctionnels  $C(\Omega)$  et  $L^p(\Omega)$  avec leurs propriétés et on étudie aussi la compacité dans ces deux espaces.

Soit  $\Omega$  un ensemble compact, on définit  $C_b(\Omega)$  comme l'espace des fonctions continues bornées de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $C(\Omega)$  l'espace des fonctions continues sur  $\Omega$  et  $C_c(\Omega)$  l'espace des fonctions continues à support compact dans  $\Omega$ . Ces trois espaces munis de la norme suivante

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$$

Ces espaces sont des espaces vectoriels, les espaces  $C_b(\Omega)$  et  $C(\Omega)$  sont des espaces de Banach, mais  $C_c(\Omega)$  en général n'est pas un espace de Banach. En particulier on va étudier seulement dans ce chapitre l'espace des fonctions continues  $C(\Omega)$ .

## 1.1 Définitions et propriétés des espaces $C(\Omega)$

Soit  $\Omega$  un ensemble compact,  $C(\Omega)$  est un espace vectoriel des fonctions (réelles ou complexes) continues sur  $\Omega$ . On définit sur cet espace la norme suivante

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in \Omega} |f(x)|$$

Alors,  $C(\Omega)$  est un espace de Banach.

### Remarque 1.1.1

- Toute fonction réelle  $f$  continue sur  $\Omega$  est bornée et atteint ses bornes.

- On dit que  $C(\Omega)$  est un espace de Banach, donc est complet.

Cette propriété est une traduction du théorème selon lequel une limite uniforme d'une suite de fonctions continues est une fonction continue ([2]).

### - Propriétés de $C(\Omega)$

#### a-La séparabilité

##### Théorème 1.1.1

Si  $\Omega$  un compact métrisable, alors l'espace  $C(\Omega)$  est séparable.

#### b-La densité

##### Théorème 1.1.2

L'espace des fonctions continues  $C(\Omega)$  est dense dans l'espace  $L^p$ , lorsque  $1 \leq p < \infty$ .

#### c-Dual de $C(\Omega)$

pour écrire le dual de  $C(\Omega)$  il faut utiliser des mesures réelles ou complexes.

### Notation 1.1.1

$(\Omega, d)$  est un espace métrique,  $\rho$  est la tribu borlienne de  $\Omega$ . La tribu de parties de  $\Omega$  engendre par ses ouverts.  $S$  est une forme linéaire continue sur  $C(\Omega)$

$$f \in C(\Omega), \quad S(f) = \int_{\Omega} f(t) d\mu, \quad t \in \Omega$$

avec  $\|S\|_{C(\Omega)} \leq 1$ ,  $|\mu|$  est une mesure positive définie par un ouvert  $\omega$  de  $\Omega$ , on pose:

$$|\mu|(\omega) = \sup \{ |S(f)| : |f| \leq 1_{\omega} \}$$

On a donc le théorème suivant:

**Théorème 1.1.3**

Soit  $\Omega$  un espace métrique compact, toute forme linéaire continue  $S$  sur  $C(\Omega)$  provient d'une mesure  $\mu$  sur  $(\Omega, \mathcal{B})$ , et de plus

$$\|S\| = \|\mu\| = |\mu|(\Omega)$$

**1.2 La compacité**

Pour étudier la compacité dans l'espace des fonctions continues  $C(\Omega)$ , il faut connaître premièrement la compacité dans un espace normé puis dans  $C(\Omega)$ .

**-La compacité dans un espace normé X****a-La compacité d'un ensemble****Définition 1.2.1**

Un sous ensemble  $U$  d'un espace normé  $X$  est dit compact si chaque recouvrement ouvert de  $U$  contient un sous recouvrement fini. Autrement dit, si pour chaque famille  $V_j, j \in J$  des ensembles ouverts vérifiant la propriété suivante:

$$U \subset \bigcup_{j \in J} V_j$$

Il existe une sous famille finie  $V_{j(k)}, j(k) \in J, j = 1, 2, \dots, n$ , telle que:  $U \subset \bigcup_{k=1}^n V_{j(k)}$ .

**b-Un ensemble séquentiellement compact**

Un sous ensemble  $U$  de  $X$  est dit séquentiellement compact si de toute suite des éléments de  $U$ , on peut extraire une sous suite qui converge dans  $U$  ([3])

**c-Un ensemble totalement borné**

Un sous ensemble  $U$  d'un espace normé est dit totalement borné si pour chaque  $\varepsilon > 0$ , il existe un nombre fini des éléments  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$  dans  $U$  tel que:

$$U \subset \bigcup_{j=1}^n B(\Phi_j, \varepsilon)$$

Chaque élément  $\Phi \in U$  a une distance inférieure à  $\varepsilon$  aux moins avec un élément de  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ .

**Lemme 1.2.1**

Chaque ensemble  $U$  séquentiellement compact est totalement borné.

**Théorème 1.2.1**

Un sous ensemble d'un espace normé est compact si et seulement s'il est séquentiellement compact ([3]).

**Remarque 1.2.1**

On remarque dans le théorème 1.2.1 que l'ensemble compact est borné, fermé et complet.

**d-L'ensemble relativement compact**

-Un ensemble  $U$  de  $X$  est relativement compact si sa fermeture est compact.

-Une conséquence du théorème 1, l'ensemble  $U$  est relativement compact si et seulement si toute suite de  $U$  contient une sous suite convergente. Autrement dit que l'ensemble  $U$  relativement compact est totalement borné([3]).

**Théorème 1.2.2**

Dans un espace normé les sous ensembles bornés et de dimensions finies est relativement compact.

**e-Opérateur compact****Définition 1.2.2**

Soit  $A$  un opérateur linéaire d'un espace normé  $X$  dans un espace normé  $Y$ , on dit que  $A$  est un opérateur compact si l'image  $A(B_x)$  par l'opérateur  $A$  de la boule unité fermée  $B_x$  de l'espace  $X$  est relativement compact (en norme) dans  $Y$ . En d'autres termes,  $A$  est compact si pour toute suite bornée  $\{x_n\}$  de  $X$ , la suite  $\{Ax_n\}$  contient une sous suite convergente  $Y$ .

**1.2.1 La compacité dans  $C(\Omega)$** 

Le seul théorème qui parle de la compacité dans  $C(\Omega)$  est le théorème **d'Arzela-Ascoli**.

**Théorème 1.2.3 (d'Arzela-Ascoli) ([3])**

Soient  $\Omega$  un espace topologique compact et  $U$  un sous ensemble de  $C(\Omega)$ , l'ensemble  $U$  est relativement compact dans  $C(\Omega)$  si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées:

i) L'ensemble  $U$  est borné (pour la norme de  $C(\Omega)$ ); il existe une constante  $K > 0$  tel que:

$$|f(x)| \leq K \quad \text{pour tout } x \in \Omega \text{ et } f \in U.$$

ii) L'ensemble  $U$  est équicontinu, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{pour tous } x, y \in \Omega \text{ et tout } f \in U.$$

### 1.2.2 La compacité dans $C[a, b]$

Nous allons étudier le même théorème précédent pour l'espace des fonctions continues sur le segment  $[a, b]$ .

#### **Théorème 1.2.4 ( d'Arzela-Ascoli)**

Soit l'ensemble  $A \subset C[a, b]$ , il est relativement compact si et seulement si il est borné et équicontinu dans  $C[a, b]$ , i.e.,

-Il existe une constante  $K > 0$  tel que:  $|f(x)| \leq K$ , pour tous les  $x \in [a, b]$  et toutes les fonctions  $f \in A$

-Pour tout  $\varepsilon > 0$  on peut faire correspondre un nombre  $\delta > 0$  tel que:  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  pour tous les  $x, y \in [a, b]$  et pour toutes les fonctions  $f \in A$ .

## 1.3 Espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$

### Définition 1.3.1

Soient  $\Omega$  un espace mesuré et  $p \in [1, +\infty]$ , pour  $p < +\infty$ , on définit  $L^p(\Omega)$  l'espace des fonctions mesurables.

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que  $|f|^p$  soit intégrable, et pour  $p = +\infty$ ,  $L^\infty(\Omega)$  est l'espace des fonctions mesurables  $f$  telle que  $f$  est presque partout bornée par une constante finie. L'étude de cet espace sera l'objet de ce chapitre.

### 1.3.1 Définitions et propriétés élémentaires des espaces $L^p(\Omega)$

Soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p < \infty$ , alors

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurables telle que } |f|^p \in L^1(\Omega)\},$$

où la norme est noté par

$$\|f\|_{L^p} = \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Si  $p = \infty$ , alors  $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable: } \exists C > 0 \text{ tel que } |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}$  avec la norme

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{C; |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

**Remarque 1.3.1**

Si  $f \in L^\infty$ , on a

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} \text{ p.p sur } \Omega.$$

En effet il existe une suite des constantes  $K_n$  qui convergent vers  $\|f\|_{L^\infty}$ , i.e,

$$K_n \rightarrow \|f\|_{L^\infty},$$

pour chaque  $n$ ,  $|f(x)| \leq K_n$  p.p sur  $\Omega$  donc  $|f(x)| \leq K_n$  pour tout  $x \in \Omega \setminus E_n$  avec  $E_n$  négligeable.

on pose  $E = \bigcup_n E_n$  de sorte que  $E$  est négligeable et  $|f(x)| \leq K_n$  pour tout et pour tout  $x \in \Omega \setminus E$ , par conséquent  $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$  pour tout  $x \in \Omega \setminus E$ .

**-Espace dual**

On désigne par  $L^{p'}(\Omega)$  le dual topologique de  $L^p(\Omega)$ , i.e.

$$[L^p(\Omega)]' = L^{p'}(\Omega) \quad \text{telque :} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \text{ avec } 1 \leq p < \infty.$$

**1.3.2 Inégalités auxiliaires**

**a-Inégalité de Hölder**

Soient  $f \in L^p$  et  $g \in L^q$  deux fonctions mesurables sur un espace mesuré  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  avec  $1 \leq p, q \leq \infty$ , alors  $f.g \in L^1$  et

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| d\mu \leq \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}} \left[ \int_{\Omega} |g(x)|^q d\mu \right]^{\frac{1}{q}}$$

avec

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

**b-Inégalité généralisée de Hölder**

Soient les fonctions mesurables  $f, g$  et  $h$  définies sur un ensemble  $\Omega$ , on a l'inégalité suivante

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)h(x)| d\mu \leq \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}} \left[ \int_{\Omega} |g(x)|^q d\mu \right]^{\frac{1}{q}} \left[ \int_{\Omega} |h(x)|^r d\mu \right]^{\frac{1}{r}}$$

Tels que les nombres  $p, q$  et  $r$  strictement positifs et vérifient la condition suivante

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1.$$

**Remarque 1.3.2**

D'après les deux inégalités de Hölder, il en résulte une inégalité très utile, soient  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ , des fonctions telles que

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega), \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \dots + \frac{1}{p_n} \leq 1$$

Alors le produit  $f = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \dots \cdot f_n$  appartient à  $L^p(\Omega)$  et

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \dots \|f_n\|_{L^{p_n}}.$$

**c-Inégalité de W.H.Young**

Soient  $a, b$  des réels positifs et  $1 < p, q < \infty$ , des réels conjugués, alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

**d-Inégalité de Minkowsky**

Soit  $p \in ]1, +\infty[$ , et soient  $f$  et  $g$  deux fonctions mesurables sur  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  des valeurs dans  $[0, +\infty]$  alors  $f + g \in L^p$  et

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p},$$

Il en résulte que  $L^p$  est un espace vectoriel normé pour  $1 \leq p \leq +\infty$ , pour  $0 < p < 1$ ,  $L^p$  n'est pas un espace vectoriel.

**Théorème 1.3.1**

Pour  $1 \leq p \leq +\infty$ , les espaces  $L^p$  sont des espaces vectoriels normés ([1]).

**Démonstration**

Pour  $p = 1$  et  $p = +\infty$  on peut dire que  $L^1$  et  $L^\infty$  sont des espaces vectoriels normés. En effet ;  $f, g \in L^1$  d'après la remarque 1.3.1, on a pour  $p = 1$

$$|f(x)| \leq \|f\|_1 \text{ et } |g(x)| \leq \|g\|_1$$

On additionne les deux inégalités on trouve:

$$|f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$$

De plus on a

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|.$$

On intègre on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x) + g(x)| dx &\leq \int_{\Omega} |f(x)| dx + \int_{\Omega} |g(x)| dx, \\ \|f + g\|_{L^1} &\leq \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}. \end{aligned}$$

D'ou

$$f + g \in L^1.$$

Donc  $L^1$  est un espace vectoriel normé.

·Pour  $p = +\infty$

Soit  $f, g \in L^\infty$  d'après la remarque 1.3.1, on a

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} \text{ et } |g(x)| \leq \|g\|_{L^\infty}.$$

On additionne les deux inégalités, on trouve

$$|f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)| &\leq |f(x)| + |g(x)| , \\ \sup |f(x) + g(x)| &\leq \sup |f(x)| + \sup |g(x)| . \end{aligned}$$

D'où

$$\|f + g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty} ,$$

donc  $f + g \in L^\infty$ ; il en résulte que  $L^\infty$  est un espace vectoriel normé.

·Supposons que  $1 < p < +\infty$

Soit  $f, g \in L^p$ , on a

$$|f(x) + g(x)|^p \leq [|f(x)| + |g(x)|]^p \leq 2^p [|f(x)|^p + |g(x)|^p] .$$

On intègre sur  $\Omega$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^p dx &\leq \int_{\Omega} [|f(x)| + |g(x)|]^p dx \\ &\leq 2^p \int_{\Omega} [|f(x)|^p + |g(x)|^p] dx \\ \|f + g\|_{L^p}^p &\leq 2^p [\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p] . \end{aligned}$$

par conséquent  $f + g \in L^p$ , mais  $\|\cdot\|_{L^p}$  n'est pas une norme.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{L^p}^p &= \int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^p dx \\ &= \int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^{p+1-1} dx \\ &= \int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x) + g(x)| dx \\ &\leq \int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x)| dx + \int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^{p-1} |g(x)| dx \dots (I) \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hölder on peut écrire

$$\int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x)| dx \leq \left[ \int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^{(p+1)q} dx \right]^{\frac{1}{q}} \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

Où  $q$  est l'exposant conjugué de  $p$  et

$$\int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^{p-1} |g(x)| dx \leq \left[ \int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right]^{\frac{1}{q}} \left[ \int_{\Omega} |g(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

On en déduit, compte tenu de  $(p-1)q = p$ , et en remplaçant (1) et (2) dans (I), on trouve

$$\int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^p dx \leq \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} + \left[ \int_{\Omega} |g(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

On remarque que  $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$  donc si on divise les deux membres par

$$\left[ \int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

on obtient

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} .$$

Donc  $L^p$  est un espace vectoriel normé.

**Lemme 1.3.1 (de Fatou)**

Soit  $\{f_n\}$  une suite de fonctions de  $L^1$  telle que

- a) pour chaque  $n, f_n(x) \geq 0$  p.p sur  $\Omega$
- b)  $\sup_n \int f_n < \infty$  pour chaque  $x \in \Omega$ , on pose

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf f_n(x) \text{ Alors } f \in L^1(\Omega) \text{ et } \int f \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf \int f_n .$$

**Théorème 1.3.2 (de convergence monotone)**

Soit  $\{f_n\}$  une suite croissante de fonctions de  $L^1$ , telle que  $\sup_n \int f_n < \infty$  alors  $f_n(x)$  converge p.p sur  $\Omega$  vers une limite finie notée  $f(x)$ , de plus

$$f \in L^1 \text{ et } \|f_n - f\|_1 \rightarrow 0 .$$

**Théorème 1.3.3 (de Lebesgue)**

Soit  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  une suite de fonctions dans  $L^p(\Omega)$  pour  $p \geq 1$ ,  $f_n$  converge  $\mu$  p.p vers une fonction mesurable  $f$ , si la condition

$$\exists g \in L^p(\Omega) \text{ tel que } \forall n \geq 0, |f_n| \leq g \quad \mu.p.p$$

est vérifiée alors  $f \in L^p(\Omega)$  et  $f_n \rightarrow f$

(on dit que  $g$  est une majorant intégrable des fonctions  $(f_n)$ ) ([1, 2])

**Théorème 1.3.4 (de Fischer-Riesz)**

Pour  $1 \leq p \leq \infty$  les espaces  $L^p$  sont des espaces vectoriels normés complets, i.e. sont des espaces de Banach ([2]).

**Démonstration**

Pour montrer que  $L^p$  est de Banach, il faut montrer que toute suite de Cauchy converge dans  $L^p$ .

1) pour  $p = +\infty$

Soit  $\{f_n\}$  une suite de Cauchy dans  $L^p$ , et un entier  $C \geq 1$ , il existe  $N_C$  tel que

$$\|f_m - f_n\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{C} \text{ pour } m, n \geq N_C$$

Donc il existe un ensemble  $E_C$  négligeable tel que

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{C} \quad \forall x \in \Omega \setminus E_C; \forall m, n \geq N_C . \quad (*)$$

On pose  $E = \bigcup_c E_C$  (avec  $E$  est négligeable), on a pour tout  $x \in \Omega \setminus E$  la suite  $f_n(x)$  est une suite de Cauchy dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  pour  $x \in \Omega \setminus E$ .

Si on pose la limite dans (\*) quand  $m \rightarrow \infty$ , on obtient

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{C} \quad \forall x \in \Omega \setminus E_C; \forall n \geq N_C .$$

D'où

$$f \in L^\infty, \text{ et } \|f - f_n\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{C} \quad \forall n \geq N_C .$$

Donc

$$\|f - f_n\|_{L^\infty} \rightarrow 0 .$$

2) Supposons que  $1 \leq p < \infty$ .

Soit  $\{f_n\}$  une suite de Cauchy dans  $L^p$ , Il suffit de montrer qu'une sous suite extraite converge dans  $L^p$ .

On extrait une sous suite  $\{f_{n_k}\}$ , telle que

$$\Delta f_{n_k} = \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \leq 2^{-k}, \quad \forall k \geq 1.$$

pour simplifier la notation on écrit  $f_k$  au lieu de  $f_{n_k}$

$$\Delta f_k = \|f_{k+1} - f_k\| \leq 2^{-k} \quad \forall k \geq 1,$$

soit

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|.$$

avec

$$\|g_n\|_{\infty} \leq 1.$$

Et d'après le théorème de la convergence monotone,  $g_n(x)$  converge vers une limite finie notée  $g(x)$  (i.e la série  $\{\Delta f_{n_k}\}$  converge vers une limite finie p.p sur  $\Omega$ .), d'autre part, on a pour  $m \geq n \geq 2$ .

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + \dots + |f_{n-1}(x) - f_n(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x)$$

Il en résulte que  $f_n$  est de Cauchy et converge vers une limite notée  $f(x)$  et on a p.p sur  $\Omega$  :

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x) \text{ pour } n \geq 2.$$

On obtient

$$f \in L^p \text{ et } \|f - f_n\|_{L^p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

D'où l'espace  $L^p$  est complet.

**1.3.3 Propriétés des espaces  $L^p(\Omega)$** 

Nous allons étudier les trois cas:

- a)  $1 < p < \infty$ .
- b)  $p = 1$ .
- c)  $p = +\infty$ .

**-Réflexivité****Définition 1.3.2**

Soit  $E$  un espace de Banach et soit  $J$  l'injection canonique de  $E$  dans  $E'$ , i.e

$$J : E \rightarrow E'.$$

tel que

$$J(x) = f \rightarrow \langle f, x \rangle.$$

On dit que  $E$  est réflexif si  $J$  est bijective de  $E$  dans  $E'$ , i.e.,  $J(E) = E'$

**Théorème 1.3.5**

$L^p(\Omega)$  est réflexif pour  $1 < p < \infty$ .

**Proposition 1.3.1**

$L^\infty$  et  $L^1$  ne sont pas réflexifs.

**-Densité****Théorème 1.3.6 (de densité)**

L'espace  $C_c(\Omega)$  est dense dans  $L^p(\Omega)$  pour  $1 \leq p < \infty$  : c'est-à-dire  $\forall f \in L^p(\Omega)$  et  $\forall \varepsilon > 0, \exists f_0 \in C_c(\Omega)$  tel que

$$\|f - f_0\|_{L^p} < \varepsilon.$$

**Proposition 1.3.2**

L'espace  $C_c^\infty(\Omega)$  est dense dans le sous espace de  $L^p$  ( $C_c^\infty(\Omega)$  l'espace des fonctions bornées que tendent vers 0 à l'infini).

**Théorème 1.3.7**

L'ensemble des fonctions simples intégrables est dense dans  $L^p$  pour  $p \in [1, +\infty[$ .

**-Séparabilité**

**Définition 1.3.3**

Soit  $X$  un espace métrique, on dit que  $X$  est séparable s'il existe un sous-ensemble  $D \subset X$  dénombrable et dense.

**Théorème 1.3.8**

$L^p(\Omega)$  est séparable pour  $1 \leq p < \infty$ .

**Proposition 1.3.3**

$L^\infty(\Omega)$  n'est pas séparable.

**-Comparaison de l'espace  $L^p(\Omega)$** **Théorème 1.3.9**

On suppose que  $mes(\Omega) < \infty$  si  $1 \leq p \leq q \leq \infty$  alors  $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ .

Donc on peut dire que

$$L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$

**Démonstration**

Soit  $f \in L^p(\Omega)$ , tel que

$$\left[ \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} < \infty .$$

pour presque tout  $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x)|^p dx &\leq \int_{\Omega} |f(x)|^q dx \text{ puisque } p \leq q \\ \implies \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} &\leq \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} < \infty . \end{aligned}$$

D'où

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^q} \implies L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega) \text{ pour } p \leq q.$$

**Remarque 1.3.3**

Le dual topologique de  $L^p$  contient seulement  $L^1$  et  $L^\infty$  est strictement plus grand que  $L^1$ .

**La convolution dans  $L^p$** **Définition 1.3.4**

On définit le produit de convolution  $h = f * g$ , telles que  $f$  et  $g$  sont deux fonctions intégrables par

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy .$$

**Théorème 1.3.10**

On prend  $\Omega = \mathbb{R}^n$ . Soient  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et  $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$  avec  $1 \leq p \leq +\infty$ , pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , la fonction  $y \rightarrow f(x-y)g(y)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^n$ , on pose

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy .$$

Alors

$$f * g \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

et

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p} .$$

**1.3.4 La compacité dans  $L^p(\Omega)$** 

Pour étudier la compacité dans l'espace  $L^p$ , il faut et il suffit de connaître un théorème très important qui est le théorème **d'Arzela-Ascoli** qui répond à la même question dans l'espace  $C(\Omega)$ .

**Théorème 1.3.11**

Un ensemble  $G$  des éléments de  $L^p(\Omega)$ ,  $1 < p < \infty$ , est relativement compact dans  $L^p(\Omega)$  si et seulement s'il satisfait les conditions suivantes:

- 1)  $G$  est borné dans  $L^p(\Omega)$  (i.e., il existe une constante  $C$  telle que pour toute fonction  $f(x)$  de  $G$  on a  $\|f(x)\|_{L^p(\Omega)} \leq C$ ),
- 2)  $G$  est équicontinu dans  $L^p(\Omega)$  (i.e., pour tout  $\varepsilon > 0$  on peut trouver  $\delta > 0$ , dépendant de  $\varepsilon$ , telle que si  $|h| < \delta$  alors, pour toute  $f(x) \in G$ ,  $\|f(x+h) - f(x)\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$ ).

**La compacité dans  $L^p(\Omega)$** 

On prend  $p = 2$ .

**Théorème 1.3.12**

Un ensemble  $G$  des éléments de  $L^2(\Omega)$ , est relativement compact dans  $L^2(\Omega)$  si et seulement s'il satisfait les conditions suivantes:

1-  $G$  est borné dans  $L^2(\Omega)$ , est relativement compact dans  $L^2(\Omega)$  (i.e., il existe une constante  $C$  telle que pour toute fonction  $f(x)$  de  $G$  on a  $\|f(x)\|_{L^2(\Omega)} \leq C$ ).

2-  $G$  est équicontinu dans  $L^2(\Omega)$  (i.e., pour tout  $\varepsilon > 0$  on peut trouver  $\delta > 0$ , dépendant de  $\varepsilon$ , telle que si  $|h| < \delta$  alors, pour toute  $f(x) \in G$ ,  $\|f(x+h) - f(x)\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon$ ).

**Théorème 1.3.13 (de Fréchet-Kolmogorov)**

Soit  $1 \leq p < \infty$ ,  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $D \subset \Omega$  un sous ensemble borné  $A$  de  $L^p(\Omega)$  est relativement compact si la condition suivante est vérifiée

i)  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  avec  $\delta < \text{dist}(D, \Omega^c)$  tel que:

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon, \forall h \in \mathbb{R}^n$$

avec  $|h| < \delta$  et  $\forall x \in A$ .

Cette condition traduit l'équicontinuité de  $A$ . On peut dire que  $A \setminus D$  est relativement compact.

**Notation 1.3.1**

1) On désigne par  $\tau_h(f)$  la translation de  $f$  par  $h$ , telle que

$$\tau_h(f)(x) = f(x - h).$$

2) Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , et soit  $D$  un ouvert est fortement inclus dans  $\Omega$ , c-à-d:

$D \subset \Omega$  si la fermeture de  $D$  dans  $\mathbb{R}^n$  est compact (i.e.,  $\overline{D}$  est compact).

# Chapitre 2

## Espace d'Orlicz

Dans ce chapitre on définit l'espace d'Orlicz puis on démontre la norme de cet espace et ses propriétés nécessaires qu'on va utiliser dans le troisième chapitre.

Les espaces d'Orlicz ont été présentés la première fois en 1931 par le mathématicien polonais W.Orlicz et plus tard a été baptisé du nom de lui.

### 2.1 Définitions

Les espaces d'Orlicz généralisent de manière adéquate les espaces  $L^p$ .ils sont définis à partir de N-fonction(fonction d'Orlicz) ([4, 5])

#### Définition 2.1.1

Soit  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , on dit que est une N-fonction (fonction de Young), si elle vérifie les conditions suivantes:

i)  $\Phi$  continue, paire, convexe et  $\Phi(0) = 0$ ,

ii)  $\Phi(x) > 0$  pour tout  $x > 0$ ,

iii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x)}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi(x)}{x} = +\infty$ .

Il en résulte que  $\Phi$  est croissante et continue. On peut définir  $\Phi$  de manière équivalente par sa dérivée  $\varphi$ , dont on exige que:

#### Définition 2.1.2

Soit  $\varphi$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  et vérifier les propriétés suivantes:

- 1)  $\varphi$  est continue à droite pour tout point de  $\mathbb{R}^+$ ,
- 2)  $\varphi$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$ ,
- 3)  $\varphi(0) = 0, \varphi(x) > 0$  si  $x > 0$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = +\infty$ .

On pose alors:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \Phi(x) = \int_0^{|x|} \varphi(t) dt.$$

### Remarque 2.1.1

Si  $\Phi$  est une N-fonction, elle satisfait les propriétés suivantes:

i)  $\Phi$  est monotone croissante. En effet, si  $x < y \implies \Phi(x) < \Phi(y)$  car  $\Phi$  positive sur  $\mathbb{R}^+$ .

ii)  $\Phi(0) = 0$ . En effet, on a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x)}{x} = 0$

D'après (iii) et  $\Phi$  continue, donc on peut écrire  $\Phi(0) = 0$ .

## 2.2 Fonctions conjuguées

### Définition 2.2.1 ([14.15])

On définit sur  $\mathbb{R}$ , N-fonction  $\Phi^*$  par:  $\Phi^*(x) = \sup_{-\infty < y < +\infty} [xy - \Phi(y)]$

$\Phi^*$  est appelée la N-fonction conjuguée de  $\Phi$ .

La fonction  $\Phi^*$  vérifie les propriétés:

- 1)  $\Phi^*$  est une N-fonction.
- 2)  $\Phi^{**} = \Phi$  ([14, 15])

### Démonstration

1) Pour démontrer que  $\Phi^*$  est une N-fonction, il faut que  $\Phi^*$  vérifie les conditions (i), (ii), (iii)

de la définition 2.1.1

(i)-D'après la condition de  $\Phi^*$  on peut dire que  $\Phi^*$  est continue car  $\Phi$  est continue.

$-\Phi^*$  est paire, si elle vérifie la condition:

$$\begin{aligned} \Phi^*(-x) &= \Phi^*(x) \\ \Phi^*(-x) &= \sup_{-\infty < y < +\infty} ((-xy) - \Phi(y)). \end{aligned}$$

On peut écrire

$$\sup(-xy) = \sup(xy),$$

on trouve

$$\begin{aligned}\Phi^*(-x) &= \sup_{-\infty < y < +\infty} [(xy - \Phi(y))] \\ \Phi^*(-x) &= \Phi^*(x).\end{aligned}$$

Donc  $\Phi^*$  est paire.

**$-\Phi^*$  convexe.**

On a la définition de la convexité suivante:

$$\forall \lambda \in [0, 1], \forall x, z \in \mathbb{R}^+ : \Phi^*[(1 - \lambda)x + \lambda z] \leq (1 - \lambda)\Phi^*(x) + \lambda\Phi^*(z)$$

On montre cette condition pour la fonction  $\Phi^*$

$$\begin{aligned}\Phi^*[(1 - \lambda)x + \lambda z] &= \sup_{-\infty < y < +\infty} [(1 - \lambda)x + \lambda z]y - \Phi(y) \\ &= \sup_{-\infty < y < +\infty} [(1 - \lambda)x + \lambda z]y - \Phi(y - \lambda y + \lambda y)\end{aligned}$$

Puisque  $\Phi$  convexe, on a

$$\begin{aligned}\Phi^*[(1 - \lambda)x + \lambda z] &\leq \sup_{-\infty < y < +\infty} [(1 - \lambda)x + \lambda z]y - (1 - \lambda)\Phi(y) - \lambda\Phi(y) \\ &\leq \sup_{-\infty < y < +\infty} [(1 - \lambda)[xy - \Phi(y)] + \lambda[zy - \Phi(y)]] \\ \Phi^*[(1 - \lambda)x + \lambda z] &\leq (1 - \lambda) \sup_{-\infty < y < +\infty} [xy - \Phi(y)] + \lambda \sup_{-\infty < y < +\infty} [zy - \Phi(y)]\end{aligned}$$

donc

$$\Phi^*[(1 - \lambda)x + \lambda z] \leq (1 - \lambda)\Phi^*(x) + \lambda\Phi^*(z)$$

donc  $\Phi^*$  est **convexe**

$$\Phi^*(0) = \sup_{-\infty < y < +\infty} [0 - \Phi(0)]$$

On a

$$\Phi(0) = 0 \text{ et } \Phi^*(0) = 0$$

ii)  $\Phi^* > 0$  pour tout  $x > 0$

D'après les conditions de la N-fonction  $\Phi$ , on sait que  $\Phi$  est positive d'où  $\Phi(x) > 0$ , de plus on a le "sup" est positif d'où

$$\sup_{-\infty < y < +\infty} [xy - \Phi(y)]$$

est positif, on écrit donc

$$\sup_{-\infty < y < +\infty} [xy - \Phi(y)] > 0 \text{ pour tout } y > 0.$$

D'où  $\Phi^*$  est positive (i.e,  $\Phi^* > 0$  pour tout  $x > 0$ )

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Phi^*(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sup_{-\infty < y < +\infty} [xy - \Phi(y)]}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sup_{-\infty < y < +\infty} \left[ y - \frac{\Phi(y)}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \sup_{-\infty < y < +\infty} \left[ y - \frac{\Phi(y)}{y} \frac{y}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sup_{-\infty < y < +\infty} \lim_{y \rightarrow 0} \left[ y - \frac{\Phi(y)}{y} \frac{y}{x} \right]. \end{aligned}$$

On a

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\Phi(y)}{y} = 0$$

donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Phi^*(x)}{x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Phi^*(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sup_{-\infty < y < +\infty} [xy - \Phi(y)]}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sup_{-\infty < y < +\infty} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[ y - \frac{\Phi(y)}{y} \frac{y}{x} \right], \end{aligned}$$

on a

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\Phi(y)}{y} = +\infty,$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Phi^*(x)}{x} = +\infty.$$

2)  $\Phi^{**} = \Phi$

On a

$$\begin{aligned} \Phi^*(x) &= \sup_{-\infty < y < +\infty} [xy - \Phi(y)] \\ \Phi^{**}(x) &= [\Phi^*(x)]^* \\ \Phi^{**}(x) &= \left[ \sup_{-\infty < y < +\infty} [xy - \Phi(y)] \right]^* \\ &= \sup_{-\infty < y < +\infty} [xy - \Phi^*(y)] \end{aligned}$$

Suivant la définition de  $\Phi^*$  on trouve:

$$\begin{aligned} \Phi^{**}(x) &= \sup_{-\infty < y < +\infty} \left[ xy - \sup_{-\infty < y < +\infty} [xy - \Phi(x)] \right] \\ \Phi^{**}(x) &= \Phi(x) \end{aligned}$$

## 2.3 Classe d'Orlicz

### Définition 2.3.1

Soit  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  un espace de mesure de Lebesgue de dimension finie, soit  $\Phi$  une N-fonction, on appelle classe d'Orlicz toute fonction  $f \in S(\Omega, \Sigma, \mu)$  mesurable, telle que

$$\int_{\Omega} \Phi(|f(x)|) dx < \infty$$

On note par  $\tilde{L}_{\Phi}(\Omega, \Sigma, \mu)$  la classe d'Orlicz  $(\tilde{L}_{\Phi})$  ([4, 7, 9, 10]).

### Remarque 2.3.1

La classe d'Orlicz ne peut pas être munie d'un espace vectoriel plus exact pour  $f \in \tilde{L}_{\Phi}$  mais  $2f \notin \tilde{L}_{\Phi}$ .

On peut donner un exemple pour expliquer  $L^{\infty} \subset \tilde{L}_{\Phi}$

### Exemple 2.3.1

Soit  $f \in \tilde{L}_{\Phi}$ , on pose,  $\Omega = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ .

$$\Phi(u) = e^{|u|} - 1$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}n \text{ pour tout } 2^{-n} < x \leq 2^{-n+1}, n = 1, 2, \dots, \\ \int_{\Omega} \Phi(|f(x)|) dx &= \int_0^1 \Phi\left(\left|\frac{1}{2}n\right|\right) dx \\ &= \int_0^1 |e^{\frac{n}{2}} - 1| dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^n - 1 < \infty \end{aligned}$$

Donc  $f \in \tilde{L}_{\Phi}$ . On prend  $2f$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi(2|f(x)|) dx &= \int_0^1 \Phi(|n|) dx \\ &= \int_0^1 |e^n - 1| dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{2}\right)^n - 1 = \infty \end{aligned}$$

Donc  $2f \notin \tilde{L}_\Phi$ . il est clair que  $L^\infty \subset \tilde{L}_\Phi$ ; en effet soit  $f \in \tilde{L}_\Phi$  :

$$\int_{\Omega} \Phi(|f(x)|) dx \leq \sup \int_{\Omega} \Phi(|f(x)|) dx \leq \|f\|_{\infty}$$

Donc  $f \in L^\infty$

$$L^\infty \subset \tilde{L}_\Phi.$$

## 2.4 La condition $\Delta_2$

### Définition 2.4.1

On dit qu'une N-fonction  $\Phi(x)$  vérifie la condition  $\Delta_2$ , s'il existe une constante  $C > 2$  et  $x_0$ , telle que

$$\Phi(2x) \leq C \Phi(x) \text{ pour tout } x \geq 0 \text{ (} x \geq x_0 \text{)}.$$

-Si  $\Phi$  et  $\Phi^*$  vérifient la condition  $\Delta_2$  alors l'espace  $L_\Phi$  est un espace de Banach réflexif.

- $(L_\Phi)' = L_{\Phi^*}$ . car  $\Phi$  vérifie la condition  $\Delta_2$  ([4, 9]).

On peut donner un exemple pour expliquer la condition  $\Delta_2$ .

### Exemple 2.4.1

1-La fonction  $\Phi(x) = |x| \ln(|x| + 1)$  est satisfaite la condition  $\Delta_2$ . En effet, on peut vérifier aisément que  $\Phi$  est un N-fonction et on a :  $C = 4$ .

2-On a aussi, la fonction  $\Phi(x) = \frac{1}{P} |x|^P$ , pour  $P > 1$  est vérifiée la condition  $\Delta_2$ . En effet, on a :  $C = 2^P$ .

## 2.5 Norme d'Orlicz

On appelle espace d'Orlicz l'ensemble de toutes les fonctions  $f \in S(\Omega, \Sigma, \mu)$  mesurables, pour le quel

$$\int_{\Omega} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx < \infty, \forall \lambda > 0.$$

On note par  $L_\Phi(\Omega, \Sigma, \mu)$  où  $L_\Phi$  est l'espace d'Orlicz ([11]).

**Remarque 2.5.1**

$\tilde{L}_\Phi \subseteq L_\Phi$  pour  $\lambda = 1$

**Définition 2.5.1**

Soit  $\Phi$  une N-fonction et  $\Phi^*$  sa conjuguée, on définit sur l'espace d'Orlicz les deux normes suivantes:

$$\|f\|_O = \sup \left\{ \int_\Omega |fg| dx : \int_\Omega \Phi^*(g) dx \leq 1 \right\}$$

est appelée norme d'Orlicz de  $f$ .

$$\|f\|_L = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_\Omega \Phi \left( \frac{|f(x)|}{\lambda} \right) dx \leq 1 \right\}$$

est appelée norme de Luxemburg de  $f$ .

**Proposition 2.5.1** ([5])

A)  $\|\cdot\|_O$  et  $\|\cdot\|_L$  sont des normes

B) La norme d'Orlicz est équivalente à la norme de Luxemburg.

**Démonstration**

Il faut montrer que les normes  $\|\cdot\|_O$  et  $\|\cdot\|_L$  vérifient les conditions suivantes:

1)  $\|f\|_{O,L} < \infty$

2)  $\|f\|_{O,L} = 0 \Leftrightarrow f = 0$

3)  $\forall \alpha \in \mathbb{k}, \forall f \in L_\Phi : \|\alpha f\|_{O,L} = |\alpha| \|f\|_{O,L}$

4) L'inégalité triangulaire,  $f, h \in L_\Phi; \|f + h\| \leq \|f\|_{O,L} + \|h\|_{O,L}$

**Remarque 2.5.2**

On désigne par  $E_n$  l'adhérence de  $L^\infty$  dans l'espace d'Orlicz  $L_\Phi$ .

**Lemme 2.5.1**

Soit les propriétés suivantes:

a) si  $\{f_n\} \subset L_\Phi$  et  $f_n \rightarrow f$  en norme dans  $L_\Phi$ , alors la suite  $\{f_n\}$  converge en moyenne vers une fonction, c'est-à-dire

$$\int_\Omega \Phi(|f_n(x) - f(x)|) dx \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

b) si dans le hypothèse de (a):  $2f \in \tilde{L}_\Phi$ , alors  $f \in \tilde{L}_\Phi$ .

c)  $E_\Phi \subset \tilde{L}_\Phi$ .

**Démonstration**

D'Après les propriétés de  $\Phi$ , on a  $\Phi(0) = 0$  et convexe donc:  $\Phi(ax) \leq a \Phi(x)$  pour  $0 \leq a \leq 1$ . (1.8)

Si  $\|f_n - f\|_L \rightarrow 0$ , alors  $\|f_n - f\|_L \leq 1$  pour  $n \geq N$ .

pour tout  $n$ , on applique (1, 8) pour ( $a = \|f_n - f\|_L$ )

$$\int_{\Omega} \Phi \left( \frac{|f_n - f|}{\|f_n - f\|_L} \right) d\mu \leq \frac{1}{\|f_n - f\|_L} \int_{\Omega} \Phi(|f_n - f|) d\mu \leq 1$$

D'où

$$\int_{\Omega} \Phi(|f_n - f|) d\mu \leq \|f_n - f\|_L \rightarrow 0$$

b) on a  $2f_n \in \tilde{L}_\Phi$  et on montre que:  $f \in \tilde{L}_\Phi$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi(|f|) d\mu &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \Phi(2|f + f_n - f_n|) d\mu, \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Phi(|2f - 2f_n|) d\mu + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Phi(|2f_n|) d\mu < \infty. \end{aligned}$$

donc  $f \in \tilde{L}_\Phi$ .

c) si  $f \in E_n$ , il existe  $\{f_n\} \in L^\infty$  telle que  $f_n \rightarrow f$  en norme.

si  $2f_n \in L^\infty \subset \tilde{L}_\Phi$ , alors d'après (b) on a  $f \in \tilde{L}_\Phi$  donc  $E_\Phi \subset \tilde{L}_\Phi$ .

**Corollaire 2.5.1** ([19, 20])

L'espace d'Orlicz  $L_\Phi(D)$  [ $D$  est un domaine de  $\mathbb{R}^n$  de mesure de Lebesgue finie] est séparable si seulement si  $\Phi$  vérifie la condition  $\Delta_2$ .

**Démonstration**

On note que les espaces  $L^p$  ( $1 < p < \infty$ ) appartiennent à la classe des espaces d'Orlicz.

En effet; on pose  $\Phi(x) = \frac{x^p}{p}$ . on remarque que la norme de l'espace d'Orlicz  $L_\Phi$  équivalente à celle de  $L^p$ , donc on montre que:

$$\|f\|_{L^p} = p^{\frac{1}{p}} \|f\|_L \quad (1.10)$$

si

$$\int_{\Omega} \Phi \left( \frac{|f|}{\|f\|_L} \right) dx \leq 1 \text{ alors } \int_{\Omega} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_L^p} dx \leq p$$

D'où

$$\left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq p^{\frac{1}{p}} \|f\|_L \iff \|f\|_{L^p} \leq p^{\frac{1}{p}} \|f\|_L \quad (I)$$

D'autre part

$$\int_{\Omega} \Phi \left( \frac{|f(x)|}{p^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}} \right) dx = 1.$$

D'où

$$\|f\|_{L^p} \geq p^{\frac{1}{p}} \|f\|_L \quad (II)$$

donc d'Après (I) et (II), on obtient (1.10).

## 2.6 Comparaison des espaces d'Orlicz

**Proposition 2.6.1** ([5])

Soient  $\Phi_1, \Phi_2$  deux N-fonctions tels que : si  $\Phi_1 \geq \Phi_2$ , alors  $\tilde{L}_{\Phi_1} \subseteq \tilde{L}_{\Phi_2}$

**Démonstration**

Soit  $f \in \tilde{L}_{\Phi_1}$  et p.p tout  $x \in \Omega$  tel que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  (ouvert borné), on a:

$$\int_{\Omega} \Phi_1(|f(x)|) d\mu < \infty.$$

On peut diviser  $\Omega$  en deux

$$\begin{aligned}
\Omega &= \Omega_0 \cup \Omega_1 \\
\Omega_0 &= \{x \mid x \in \Omega : |f(x)| < c\} \\
\Omega_1 &= \{x \mid x \in \Omega : |f(x)| \geq c\} \\
\int_{\Omega} \Phi_2(|f(x)|) d\mu &= \int_{\Omega/\Omega_1} \Phi_2(|f(x)|) d\mu + \int_{\Omega/\Omega_2} \Phi_2(|f(x)|) d\mu \\
&= \int_{\{|f|<c\}} \Phi_2(|f(x)|) d\mu + \int_{\{|f|\geq c\}} \Phi_2(|f(x)|) d\mu \\
&\leq \Phi_2(c)\mu(\Omega_0) + \int_{\{|f|\geq c\}} \Phi_1(|f(x)|) d\mu \\
\int_{\Omega} \Phi_2(|f(x)|) d\mu &\leq \Phi_2(c)\mu(\Omega_0) + \int_{\Omega_1} \Phi_1(|f(x)|) d\mu < \infty
\end{aligned}$$

donc

$$f \in \tilde{L}_{\Phi_2} \implies \tilde{L}_{\Phi_1} \subseteq \tilde{L}_{\Phi_2}$$

et on a d'après la remarque 2.4.1;  $\tilde{L}_{\Phi_1} \subseteq L_{\Phi_1}$  donc on peut dire que:

$$\begin{aligned}
L_{\Phi_1} &\subseteq L_{\Phi_2} \\
\tilde{L}_{\Phi_1} &\subseteq \tilde{L}_{\Phi_2} \Leftrightarrow L_{\Phi_1} \subseteq L_{\Phi_2}
\end{aligned}$$

## 2.7 Inégalités auxiliaires

### a-Inégalité de Hölder

Soient  $f \in L_{\Phi}$  et  $g \in L_{\Phi^*}$  deux fonctions mesurables sur un espace mesuré  $(\Phi, \Sigma, \mu)$  avec  $\Phi$  et  $\Phi^*$  deux N-fonctions conjuguées, alors  $f.g \in L^1$

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| d\mu \leq 2 \|f\|_{\Phi} \|g\|_{\Phi^*}.$$

**Démonstration**

Pour presque par tout  $x \in \Omega : |f| < \infty, |g| < \infty, \|f\|_{\Phi} \neq 0$  et  $\|g\|_{\Phi^*} \neq 0$ .

$$\int_{\Omega} \Phi \left( \frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi}} \right) d\mu \leq 1 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \Phi^* \left( \frac{|g(x)|}{\|g\|_{\Phi^*}} \right) d\mu \leq 1.$$

On utilise l'inégalité de Young

$$xy \leq \Phi(x) + \Phi^*(y)$$

On pose

$$x = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi}}, y = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{\Phi^*}}$$

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{\Phi} \|g\|_{\Phi^*}} \leq \Phi \left( \frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi}} \right) + \Phi^* \left( \frac{|g(x)|}{\|g\|_{\Phi^*}} \right)$$

en intégrant sur  $\Omega$

$$\int_{\Omega} \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{\Phi} \|g\|_{\Phi^*}} d\mu \leq \int_{\Omega} \Phi \left( \frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi}} \right) + \Phi^* \left( \frac{|g(x)|}{\|g\|_{\Phi^*}} \right) d\mu$$

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| d\mu \leq \|f\|_{\Phi} \|g\|_{\Phi^*} \int_{\Omega} \Phi \left( \frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi}} \right) + \Phi^* \left( \frac{|g(x)|}{\|g\|_{\Phi^*}} \right) d\mu,$$

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| d\mu \leq 2 \|f\|_{\Phi} \|g\|_{\Phi^*}.$$

### **b-Inégalité de W.H.Young dans l'espace d'Orlicz $L^{\Phi}$ ([14, 15])**

Soient  $\Phi$  et  $\Phi^*$  deux N-fonctions conjuguées de dérivées  $\varphi$  et  $\varphi^*$  respectivement, donc on a

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad xy \leq \Phi(x) + \Phi^*(y)$$

$$xy = \Phi(x) + \Phi^*(y) \iff x = \varphi^*(|y|) \text{ sign } y \text{ ou } y = \varphi(|x|) \text{ sign } x .$$

# Chapitre 3

## La compacité dans l'espace d'Orlicz

Dans ce dernier chapitre, on étudie dans l'espace d'Orlicz la convergence, la complétude et on définit la fonction de Steklov et enfin la compacité.

Avant d'étudier la compacité dans ces espaces, il faut que nous étudions quelques propriétés qui sont très nécessaires pour la démonstration des théorèmes de la compacité.

### 3.1 La convergence dans les espaces d'Orlicz

#### Proposition 3.1.1

Soit  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions qui converge en norme vers  $f$ , alors  $f_n$  converge en moyenne d'ordre  $\Phi$  vers  $f$  ([5]).

$$\int_{\Omega} \Phi(|f_n - f|) d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

#### Démonstration

D'après les propriétés de  $\Phi$  on a

$$\Phi(0) = 0$$

$\Phi$  convexe

$$\Phi(ax) \leq a\Phi(x) \quad 0 \leq a \leq 1 \quad (*)$$

si

$$\|f_n - f\|_{\Phi} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

alors  $\|f_n - f\|_{(\Phi)} \leq 1$  pour  $n \geq N \quad \forall n$

Donc d'après (\*) on pose:

$$(a = \|f_n - f\|_{\Phi})$$

$$\int_{\Omega} \Phi \left( \frac{f_n - f}{\|f_n - f\|_{\Phi}} \right) d\mu \leq 1.$$

$$\int_{\Omega} \Phi \left( \frac{|f_n - f|}{\|f_n - f\|_{\Phi}} \right) d\mu \geq \frac{1}{\|f_n - f\|_{\Phi}} \int_{\Omega} \Phi(|f_n - f|) d\mu.$$

D'où

$$\int_{\Omega} \Phi(|f_n - f|) d\mu \leq \|f_n - f\|_{\Phi} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

## 3.2 La complétude des espaces d'Orlicz

**Théorème 3.2.1** ([5])

L'espace d'Orlicz  $L_{\Phi}$  est un espace de Banach muni de la norme.

$$\|f\|_L = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \Phi \left( \frac{|f(x)|}{\lambda} \right) dx \leq 1 \right\}$$

**Lemme 3.2.1 (de Fatou)**

Si  $f_n \geq 0, f_n \uparrow f$  et  $\|f_n\|_{\Phi} \leq 1$  pour tout  $n$ , alors  $f \in L_{\Phi}$  et  $\|f\|_{\Phi} \leq 1$ .

**Démonstration**

Nous démontrons que toute suite de Cauchy converge dans  $L_{\Phi}$ . Soit  $\{f_n\}$  une suite de Cauchy dans  $L_{\Phi}$ , pour simplifier, il suffit de montrer qu'une sous suite extraite de  $f_n$  converge dans  $L_{\Phi}$ . On extrait une sous suite  $\{f_{n_k}\}$  strictement croissante, telle que

$$\Delta f_{n_k} = \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \leq 2^{-k}, \quad \forall k \geq 1.$$

Alors on démontre que  $\{f_{n_k}\}$  est convergente sur  $L_\Phi$ . Pour simplifier les notations, on écrit  $f_k$  au lieu de  $f_{n_k}$ . Soit

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$$

D'après le **lemme de Fatou**, on a:  $\|g_n\|_\Phi \leq 1$ , d'où

$$\int_{\Omega} \Phi\left(\frac{|g(x)|}{\lambda}\right) d\mu \leq 1$$

et comme  $\Phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$ ;  $g$  est finie p.p sur  $\Omega$ . donc la série  $\{\Delta f_{n_k}\}$  converge vers une limite finie p.p sur  $\Omega$ .

D'autre part on a pour  $m \geq n \geq 2$ .

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &\leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + \dots + |f_{n-1}(x) - f_n(x)| \\ &\leq g(x) - g_{n-1}(x). \end{aligned}$$

il en résulte que  $f_n$  est de Cauchy et converge vers une limite notée  $f(x)$ , et on a p.p sur  $\Omega$ :

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x) \text{ pour } n \geq 2.$$

il en résulte que  $f \in L_\Phi$  et  $\|f - f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . donc l'espace d'Orlicz  $L_\Phi$  est complet.

### 3.3 Etude de la compacité dans les espaces d'Orlicz

Pour étudier la compacité dans les espaces d'Orlicz, il faut connaître la fonction de Steklov.

#### Définition 3.3.1 (fonction de Steklov)

Soit  $B(x, r)$  une boule de centre  $x \in \mathbb{R}^n$  et de rayon  $r > 0$ , alors on définit la fonction de Steklov comme suit:

$$\begin{aligned} S_r(f) &= \frac{1}{\text{mes}(B(t,r))} \int_{B(x,r)} f(y) dy \\ &= \frac{1}{m_r} \int_{|y|<r} f(x+y) dy \end{aligned}$$

**Remarque 3.3.1**

Soit  $\Phi$  une N-fonction et soit  $f \in L_\Phi$  telle que  $\|f\|_\Phi \neq 0$ , alors on a:

$$\int_{\Omega} \Phi\left(\frac{1}{\|f\|_\Phi} |f(x)|\right) d\mu \leq 1.$$

**Démonstration**

Soit  $f \in L_\Phi, \|f\|_\Phi \neq 0$ , on a

$$\begin{aligned} \|f\|_\Phi &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) d\mu \leq 1 \right\}. \\ \int_{\Omega} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_\Phi}\right) d\mu &\leq \int_{\Omega} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) d\mu \leq 1. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\Omega} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_\Phi}\right) d\mu \leq 1.$$

**Définition 3.3.2**

Soit  $k$  un sous ensemble de  $L_\Phi$ , on dit que  $k$  est  $\Phi$ -équicontinue si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tel que  $|h| < \delta \Rightarrow \forall f \in k; \|f - f_h\|_\Phi < \varepsilon$

$$\|f(x) - f_h(x)\|_\Phi < \varepsilon$$

avec  $f_n(x) = f(x+h)$  ou  $x+h \in \Omega$ .

**Remarque 3.3.2**

La fonction de Steklov  $S_r(f)$  est continue et un support compact, de plus

$$\|S_r(f)\|_{\Phi} \leq \|f\|_{\Phi} \tag{1.11}$$

**Démonstration**

Pour montrer cette inégalité, on suppose que la boule de rayon  $r > 0$  et d'origine centre de  $\mathbb{R}^n, B(0, r)$

$$\begin{aligned} \|S_r(f)\|_{\Phi} &\leq \frac{1}{mes(B(t, r))} \sup_{\|g\|_{\Phi^*} \leq 1} \int_{\Omega} \int_{B(x, r)} |f(y)g(x)| dy dx, \\ &= \frac{1}{m_r} \sup_{\|g\|_{\Phi^*} \leq 1} \int_{\Omega} \int_{|y| \leq r} |f(s+y)g(x)| dy dx. \end{aligned}$$

On intègre sur  $B_0$

$$\|S_r(f)\|_{\Phi} \leq \frac{1}{m_r} \sup_{\|g\|_{\Phi^*} \leq 1} \int_{\Omega} \int_{|y| \leq r} |f(y)g(x)| dy dx.$$

On change l'ordre d'intégration tel qu'on prend le  $\langle \sup \rangle$  sous le signe de l'intégrale, on trouve:

$$\|S_r(f)\|_{\Phi} \leq \left[ \frac{1}{m_r} \int_{|y| \leq r} \sup_{\|g\|_{\Phi^*} \leq 1} \int_{\Omega} |f(y)g(x)| dx \right] dy \leq \|f\|_{\Phi}$$

**Théorème 3.3.1**

Un sous ensemble  $K$  de  $\tilde{L}_{\Phi}$  est relativement compact si et seulement si:

- 1)  $K$  est borné dans  $\tilde{L}_{\Phi}$ .
- 2)  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tel que la condition  $r < \delta \implies \forall f \in K, \|S_r(f) - f\|_{\Phi} < \varepsilon$ .

**Démonstration**

1-On dit que  $K$  est borné dans  $\tilde{L}_{\Phi}, \forall f \in K, \exists C > 0$  tel que  $\|f\|_{\Phi} < C$  puisque  $K \subset \tilde{L}_{\Phi}$  donc  $f \in \tilde{L}_{\Phi}$  et  $f$  borné dans  $\tilde{L}_{\Phi}$ , d'où on a

$$\forall f \in \tilde{L}_{\Phi} \exists C > 0 \text{ telque } \|f\|_{\Phi} < C$$

et d'après la remarque 3.3.1 on a

$$\int_{\Omega} \Phi \left( \frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi}} \right) d\mu \leq 1.$$

On peut écrire

$$\int_{\Omega} \Phi \left( \frac{|f(x)|}{C} \right) d\mu \leq \int_{\Omega} \Phi \left( \frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi}} \right) d\mu \leq 1.$$

D'où

$$\int_{\Omega} \Phi(|f(x)|) d\mu \leq \|f\|_{\Phi} \leq C.$$

il en résulte que  $K$  est borné dans  $\tilde{L}_{\Phi}$ .

2-pour montrer cette condition,il suffit d'utiliser le théorème de Fréchet et pour tout ensemble des fonctions compactes dans  $C$ ,sont aussi compactes dans tous l'espace d'Orlicz.

### Rappel

D'après le théorème de Fréchet,un ensemble  $K$  est compact s'il peut être approximé par un ensemble compact.

Soit  $f^{(1)}(x), f^{(2)}(x), \dots, f^{(n)}(x)$  un ensemble des fonctions continues dans  $K$ .On note par  $c$  de  $\sup_{\|g\|_{\Phi^*}} \int_{\Omega} |g(x)| dx$  tel que:

$$|f^{(i)}(x) - f^{(i)}(y)| < \frac{\varepsilon}{3c} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

pour tout  $d(x, y) < r$ ,alors on peut écrire

$$\begin{aligned} |S_r^{(i)}(f(x)) - f^{(i)}(x)| &= \left| \left[ \frac{1}{mes(B(t, r))} \int_{B(x, r)} f^{(i)}(y) dy \right] - f^{(i)}(x) \right|, \\ &\leq \frac{1}{mes(B(t, r))} \int_{B(x, r)} |f^{(i)}(y) - f^{(i)}(x)| dy < \frac{\varepsilon}{3c}. \end{aligned}$$

Pour tout  $(i = 1, 2, \dots, n)$  et pour la norme on a

$$\begin{aligned} \|S_r^{(i)} - f^{(i)}\|_{\Phi} &= \sup_{\|g\|_{\Phi^*} \leq 1} \int_{\Omega} |[S_r^{(i)}(f(x)) - f^{(i)}(x)] g(x)| dx dy \\ &\leq \sup_{\|g\|_{\Phi^*} \leq 1} \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{mes(B(t,r))} \int_{B(x,r)} |f^{(i)}(y) - f^{(i)}(x)| dy \right] |g(x)| dx \end{aligned}$$

On peut changer l'ordre de l'intégrale, si on prend le "sup" sous l'intégrale, on trouve:

$$\begin{aligned} \|S_r^{(i)} - f^{(i)}\|_{\Phi} &\leq \frac{1}{mes(B(t,r))} \int_{\Omega} \sup_{\|g\|_{\Phi^*} \leq 1} \int_{B(x,r)} |g(x)| |f^{(i)}(y) - f^{(i)}(x)| dx dy, \\ &\leq \frac{1}{mes(B(t,r))} \int_{B(x,r)} |f^{(i)}(y) - f^{(i)}(x)| \int_{\Omega} \sup_{\|g\|_{\Phi^*} \leq 1} |g(x)| dy dx, \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3c} \sup_{\|g\|_{\Phi^*} \leq 1} \int_{\Omega} |g(x)| dx. \end{aligned}$$

et on a

$$\sup_{\|g\|_{\Phi^*} \leq 1} \int_{\Omega} |g(x)| dx = c$$

on trouve:

$$\|S_r^{(i)} - f^{(i)}\|_{\Phi} < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1.12)$$

Soit  $f(x)$  une fonction arbitraire de  $K$ , il existe une fonction  $f^{(i_0)}(x)$  telle que

$$\|f - f^{(i_0)}\|_{\Phi} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'après l'inégalité (1.11) et (1.12) on a:

$$\|f - S_r(f)\|_{\Phi} \leq \|f - f^{(i_0)}\|_{\Phi} + \|f^{(i_0)} - S_r^{(i_0)}(f)\|_{\Phi} + \|S_r^{(i_0)}(f) - S_r(f)\|_{\Phi}.$$

D'après l'inégalité (1.11) on a:

$$\|S_r^{(i_0)}(f) - S_r(f)\|_{\Phi} \leq \|f - f^{(i_0)}\|_{\Phi}.$$

Donc en remplaçant la formule ci-dessus on trouve:

$$\begin{aligned} \|f - S_r(f)\|_{\Phi} &\leq 2 \|f - f^{(i_0)}\|_{\Phi} + \|f^{(i_0)} - S_r^{(i_0)}(f)\|_{\Phi}, \\ &\leq 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où

$$\|f - S'_r(f)\|_{\Phi} < \varepsilon.$$

On obtient que  $K$  est relativement compact.

**Théorème 3.3.2**

Soit  $\Phi$  une N-fonction alors le sous ensemble  $K$  de  $L_{\Phi}$  est relativement compact si et seulement si .

1- $\exists C > 0$ , telle que

$$\int_{\Omega} \Phi(|f(x)|) dx \leq C, \quad \forall f \in K.$$

2-  $r < \delta \implies \int_{\Omega} \Phi(|f(x) - S_r(f)(x)|) < \varepsilon$ .

**Théorème 3.3.3**

Un sous ensemble  $K$  de  $\tilde{L}_{\Phi}$  est relativement compact si et seulement si:

1- $K$  est borné dans  $\tilde{L}_{\Phi}$ .

2- $K$  et  $\Phi$ -équicontinus.

# Conclusion générale

Les espaces fonctionnels sont des espaces très importants dans plusieurs problèmes mathématiques et dans le domaine de la physique. Ces espaces ont des propriétés différentes comme la complétude, la densité, la réflexivité, la continuité et la compacité.

On utilise la compacité dans plusieurs espaces fonctionnels, puisque la compacité dans ces espaces est très nécessaire pour les opérateurs et les ensembles puisqu'elle possède en général un caractère très fort dans les équations intégrales et différentielles et dans d'autres équations.

Pour cette raison et dans le cadre de notre travail, «(La compacité dans les espaces d'Orlicz)» on a trouvé des difficultés pour appliquer les conditions de la compacité qui sont étudiés dans les autres espaces fonctionnels, telles que les conditions de la théorie d'**Arzela-Ascoli**.

On peut expliquer cette différence dans les trois espaces. Dans l'espace des fonctions continues  $C(\Omega)$  et l'espace de Lebesgue  $L^p(\Omega)$ , on applique directement les conditions de la théorie d'**Arzela-Ascoli**, mais dans l'espace d'Orlicz, on ne peut pas appliquer cette théorie directement, on a changé la fonction d'Orlicz par une autre fonction vérifiant les mêmes conditions de la fonction d'Orlicz qui s'appelle la fonction de Steklov, de plus on utilise la classe d'Orlicz au lieu de la norme d'Orlicz puisqu'elle est une sous-espace vectoriel qui vérifie plusieurs conditions. Ces dernières nous ont aidé dans notre démonstration.

On a trouvé quelques propriétés dans l'espace d'Orlicz que nous n'avons pas démontré telles que: la densité, la réflexivité et généralisation de l'inégalité de Hölder. Ces difficultés peuvent être considérées comme des perspectives à notre modeste travail.

# Bibliographie

- [1] A.Boucara.Analyse fonctionnelle.
- [2] A.Hajji.Frome Equivalente à la condition  $\Delta_2$  et certains résultats de séparations dans les espaces Modulaires.ar XIV :math.F1 0509482 V1. 21 -Sep-2005.
- [3] Benchekroun B.M.et Benkirane A.Sur l'algèbre d'Orlicz-Sobolev,Bull,Belg.Math,Soc,2 (2005).463-476.
- [4] D.Feyel Résumé d'analyse fonctionnelle élémentaire.Université d'Evey-Val d'Essonne,MI,année 2006-2007.
- [5] Fetch CHEBANA.Estimation et testes par des méthodes fonctionnelles applications aux M-estimateurs et aux testes de Bickel-Rosenblatt.Thèse de doctorat de l'université parise 6.
- [6] G.Djairo de Figueiredo,jaôo marcos doo,Bernhard Ruf,Journal of Functional Analysis 224 (2005) 471-496.
- [7] Gunter Luner.Annales de l'institut Fourier.On the isometries of reflexive Orlicz spaces.Tome 13,N° 1(1996), 99-109.
- [8] Haim Brezis.Analyse fonctionnelle théorie et applications.
- [9] Henryk Hudzik and Baoxing Wang,Journal of Approximation Theory 95,82-89 (1998).
- [10] J.Alexpoulos,Ilionods Mathematical and Science Academy,October 15,1992.
- [11] Jear Jacod.Théorie de l'intégration. 2002-2003.

- [12] Mostefa NADIR,cours de post graduation 2006-2007.
- [13] Mathew Rudd,Nonlinear Analysis,60 (2005) 129-147.
- [14] MT.404,année 2002-2003.Analyse fonctionnelle et théorie spectrale.Thomas K.Donaldson and Neil S.Trudinger,Journal of Functional Analyses 8,52-75 (1971).
- [15] Maximilian F,Hasler,Cours de Mathématiques 2 première partie Analyse 2.Version du 21 avril 2002.
- [16] N.Aissoui,Ann.Sci.Math.Québec 19 (1995),no,2,107-113.
- [17] N.Aissaoui et A.Benkirane,Ann.Sci.Math.Québec 18 (1995),no,1,1-23.
- [18] Orlicz spaces and fixed point theory by Shutao Chen,PH.D.Thesis,Décembre 1996,Graduate College The University of Iowa.Iowa.
- [19] R.A.Admas,Journal of Functional Analysis 24,241-257 (1977).
- [20] R.F.Streater Quantam Orlicz Spaces in Information Geomtry.Dep of Mathematics King's college London.Strand,WC2R2LS.9.June 2004.
- [21] Stefan Neuwith.Ensembles  $\Lambda(2)$  uniformisables.
- [22] Sylvie Fabre,Jean-Michel Morel,Yann Gousseau,Notes du cours d'analyse,ENS cachan première année,9-Juillet-2002.
- [23] Yueyn Hu et Mohamed Mellouk.Régularité Besov-Orlicz du temps local Brownien.Laboratoire de probabilités URA 224.

## ختمص :

الغرض الرئيسي لهذا العمل المتواضع هو دراسة التراص في فضاءات دالية مختلفة و متداولة بكثرة في مختلف المجالات العلمية، وكذلك دراسة التراص في فضاءات غير معروفة بكثرة ألا وهو الفضاء الدالي ل أورليز الذي يمتاز بخواص مختلفة عن الفضاءات الأخرى.

من خلال هذا العمل إستنتجنا بأنا خاصية التراص هي خاصية جد مهمة ومميزة عن باقي الخواص الأخرى وأنه توطئة لإيجاد حلول للمعادلات التكاملية في هذه الفضاءات .

**الكلمات المفتاحية:** التراص في فضاءات غير معروفة، فضاء أورليز.

---

## Abstract:

The aim of this work is the study of the compactness in different functional spaces, witch are very known in the scientific domain and study also the compactness in another space that is not very known a lot of witch is the Orlicz space, witch have a properties different wich another spaces.

We conclude of this work, that the propeprties of the compactness in the different spaces is very important and it is different another properties, also it is lemma of existence of solutions for integral equations.

**Key words:** Compactness in the concrete spaces, Orlicz space.

---

## Résumé:

L'objectif essentiel de ce travail est l'étude de la compacité dans des espaces fonctionnels différents très connus dans le domaine scientifique, et l'étude aussai de la compacité dans un espace peu connu, en l'occurrence l'espace d'Orlicz. Cet espace a des propriétés différentes par rapport aux autres espaces.

On déduit de ce travail que la propriété de de la compacité dans les différents espaces est une propriété très importante et différente par rapport aux autres propriétés, de plus c'est un lemme pour trouver les solutions des équations intégrales dans ces espaces.

**Mots clés :** Compacité dans les espaces concrets, espace d'Orlicz.