بسم الله الرحمن الرحيم

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

# Mémoire de Master :

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématiques et numérique

## Thème :

# Polynômes de Chebyshev décalés pour les équations intégrales de Volterra-Fredholm de deuxiéme espèce

**Présenté par:**
BOUKHARI ABDALLAH
Soutenu publiquement le: 15/06/2025

**Devant le jury composé de:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **KHAIRANI Amina** | M.C.A, | Université de M'sila | **Président :** |
| **NADIR Mostefa** | Prof | Université de M'sila | **Encadreur :** |
| **GAGUI Bachir** | M.C.A, | Université de M'sila | **Examinateur :** |

**Année universitaire 2024/2025**

# Remerciements:

Je remercie ALLAH, qui m'a donné la force, la santé et la volonté de commencer et de terminer ce mémoire.

Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de professeur NADIR Mostefa je le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant mon préparation de ce mémoire

J'adresse mes sincères remerciements Dr. NADIR Mohamed Nasseh Qui m'a aidé dans ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements

à Monsieurs les professeurs KHIRANI Amina et GAGUI Bachir qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'évaluer ce mémoire.

Enfin, je remercie tous mes amis de près ou de loin, et les étudiants de ma promotion de spécialité Analyse Mathématique et Numérique

# Dedicace :

Je dédie ce travail à la mémoire de

à mes chers parents BOUKHARI MESSOUD & BOUSSAKRA ZOHRA , je ne saurais trop vous dire merci pour vos conseils, votre soutien et vos encouragements.

A toute ma famille qui m'a accompagné tout au long de mes années d'études. Ce travail est le fruit de sacrifices que les mots ne sauraient exprimer. J'y reflète une part de tout l'amour et de toute l'estime que j'ai reçue de votre part ma chère épouse, mes deux enfants,

A ma chers épouse : GUERRAS HODA

A mes deux enfants : SIRADJ EDDINE & MOHAMED ISLAM

A mes chers frères : NACERDDINE & ABDELAZIZ & BILLAL & ABOUBAKER & HOUSSAM

A mes chères sœurs : AKILA & NAIMA & SAIDA

A toutes mes familles : BOUKHARI & BOUSSAKRA & GUERRAS

&

La promotion de mathématiques 2025

A toutes les personnes que j'aime.

# Table des matières

# Introduction

Les équations intégrales jouent un rôle fondamental dans de nombreux domaines des sciences appliquées et théoriques. Parmi ces équations, les équations de Volterra et de Fredholm occupent une place particulière en raison de leurs applications variées et de leurs propriétés mathématiques intéressantes, plus précisément, l'équation intégrale de Volterra-Fredholm souvent rencontré dans l'analyse de phénomènes dynamiques et de systèmes à mémoire. Afin de résoudre cette équation de manière numérique, plusieurs méthodes ont été développées, parmi lesquelles les polynômes de Tchebychev se distinguent par leur efficacité et leur précision. Ces polynômes connus pour leurs propriétés de minimisation des erreurs d'approximation de fonctions.

Dans ce travail, Nous montrerons comment ces polynômes peuvent être utilisés pour transformer l'intégrale en une série discrète, offrant ainsi une méthode puissante et précise pour obtenir des solutions approchées, L'objectif principal est de présenter une approche numériquement stable et efficace pour traiter ces équations dans le contexte des applications réelles. Ainsi notre mémoire se compose de trois chapitres :

Le Premier chapitre : est une introduction à l'analyse numérique on a utilisé les notions de base de l'analyse fonctionnelle, et la théorie des opérateurs bornés, compacts et intégraux.

Le Deuxième chapitre : est une introduction à la terminologie et la classification des équations intégrales, qui a pour objectif de familiariser le lecteur de ce travail avec le concept d'équation intégrale, et quelques définitions des polynômes de Tchebychev utilisé pour résoudre cette équation. On trouve aussi une étude sur l'existence et l'unicité des équations intégrales des types Volterra-Fredholm.

Le Troisième chapitre : est destiné à l'étude de la résolution numérique des équations intégrales type Volterra-Fredholm en utilisant les méthodes collocation avec les deuxièmes polynômes de Tchebychev tout en montrant l'efficacité de cette méthode par des exemples illustrés.

# Chapitre 1

# Rappels d'analyse fonctionnelle et numérique

## 1.1 Notions d'analyse fonctionnelle

### 1.1.1 Espace vectoriel normé :[1]

**Normes**

Soit $E$ un espace vectoriel sur le corps $K = R$ ou $C$ on appelle une norme sur l'espace $E$ toute fonction notée$\|.\|$ définie sur $E$ à valeurs dans $R$, telle que

1. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ ,pour tout $x \in E$,et $\lambda \in K$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ,pour tout $x, y \in E$

on dit que $E$ est un espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme $\|.\|$

Tout espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est un espace métrisable

**Proof.** Pour tout $x, y \in E$ on définit la fonction $\phi$ par

$$\phi(x, y) = \|x - y\|$$

On remarque que cette fonction est bien une métrique sur $E$ car, on a

$$\phi(x, y) = \|x - y\| = 0$$

ou encore

$$x - y = 0$$

D'où l'égalité

$$x = y$$

Il est évident de voir que la distance $\phi(x, y)$ est symétrique

$$\begin{aligned} \phi(x,y) &= \|x-y\| \\ &= \|y-x\| = \phi(y,x) \end{aligned}$$

Pour l'inégalité triangulaire, on écrit

$$\begin{aligned} \phi(x,y) &= \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \\ &\leq \|x-z\| + \|z-y\| \\ &= \phi(x,z) + \phi(z,y) \end{aligned}$$

□

### 1.1.2 Espace de Banach :[1]

**Suite de Cauchy :**

Soit $(x_n)$ une suite d'éléments d'un espace normé $(E, \|.\|)$ ; on dit que la suite $(x_n)$ est de Cauchy si, on a la relation suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \quad \forall p, q \geq N_\varepsilon \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

Soit $x_n$ une suite de Cauchy dans un espace normé $(E, \|.\|)$ contient une sous suite $x_{n_k}$ convergente vers $x$ alors la suite $x_n$ est aussi convergente vers le même élément $x$.

Soit $x_n$ une suite de Cauchy alors il vient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \quad \forall p, q \geq N_\varepsilon \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

en particulier pour $n_k \geq N_\varepsilon$, on a

$$\forall p, n_k \geq N_\varepsilon, \ \|x_p - x_{n_k}\| < \varepsilon$$

avec la convergence de la suite $x_{n_k}$ vers $x$

$$n_k \geq N_\varepsilon, \|x_{n_k} - x\| < \varepsilon$$

D'où la convergence de la suite $x_n$ vers l'élément $x$

$$\begin{aligned} \forall p, n_k \geq N_\varepsilon \ , \ \|x_p - x\| &= \|x_p - x + x_{n_k} - x_{n_k}\| \\ &\leq \|x_p - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| < \varepsilon \end{aligned}$$

Espaces complets

**Definition 1.1** *Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est dit complet, si toute suite de Cauchy $x_n$ d'élément de $E$ est une suite convergente dans $E$*

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \ \ \forall p, q \geq N_\varepsilon \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

Implique l'existence d'un élément $x \in E$ tel que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x$$

**Espaces de Banach**

**Definition 1.2** *On appelle espace de Banach $(E, \|.\|)$ tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de sa norme.*

### 1.1.3 Espace de Hilbert[1]

**Produit scalaire**

**Definition 1.3** *On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel $E$ (réel ou complexe) une application : $\langle ., . \rangle : E \times E \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $x, y, z \in E$ et $\lambda \in \Bbbk$*

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$
2. $\langle x, x \rangle = 0 \Longrightarrow x = 0$

3. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

4. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

5. $\langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle$

**Definition 1.4** *un espace de Hilbert $H$ est un espace complet par rapport à la norme induite par le produit scalaire. En d'autres terme un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme induite par un produit scalaire.*

Généralement l'espace $H$ est séparable est de dimension infinie, en d'autre terme, il existe un ensemble dénombrable partout dense dans $H$ et pour tout

entier $n \in N$, il existe $n$ vecteurs dans $H$ linéairement indépendants.

**Example 1.5** ***L'espace*** $L^2(a, b)$

L'espace $L^2(I, \mathbb{R})$ des fonctions de carré intégrales défini par

$$L^2(I, \mathbb{R}) = \left\{ f; \int_I |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\}$$

ou l'intégrale est prise au sens de Lebesgue, muni da la norme

$$\|f\|^2 = \int_I |f(t)|^2 \, dt$$

induite par le produit scalaire définit par

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(x) g(x) dx$$

est un espace de Hilbert

**Orthogonalité**

**Definition 1.6** *(Vecteurs orthogonaux)On dit que deux vecteurs $x$ et $y$ d'un espace de Hilbert $H$ sont orthogonaux si :*

$$\langle x, y \rangle = 0$$

**Base hilbertiennes**

Une partie $X$ de $H$ est dite dense dans $H$ si :

$$\forall y \in H, \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X; \|x - y\| < \varepsilon$$

de manière équivalente si tout $y$ de $H$ est limite d'une suite d'élément $x_n$ de $X$ : $\|x_n - y\| \longrightarrow 0$

**Definition 1.7** *Soit $H$ un espace de Hilbert sur le corps $\Bbbk$ et $F = (e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs. On dit que $F$ est une base de Hilbert ( base hilbertienne) de $H$ si :*

1. $F$ est une famille orthonormée de $H$, c'est-à-dire :$\begin{cases} \forall (i,j) \in I^2 \quad i \neq j \Longrightarrow \langle e_i, ej \rangle = 0 \\ \forall i \in I, \ \langle e_i, e_j \rangle = \|e_i\|^2 = 1 \end{cases}$
2. La famille $F$ est de plus complète ou total, c'est-à-dire : l'ensemble des combinaisons linéaires finies des éléments de $F$ est dense dans $H$

**Theorem 1.8** *(Riesz-Fischer) Soit un système orthonormé dans un espace de Hilbert $H$, et soient les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, .., \alpha_i$ telles que la série $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ soit convergente, alors on peut trouver un vecteur $f \in H$, tel que*

$$\alpha_i = \langle f ; \varphi_i \rangle, \quad \forall i = 1, 2, ..$$

et de plus, on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f ; \varphi_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$$

ou encore

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$$

Soit $\{\varphi_k\}$ un système orthonormé d'éléments d'un espace de Hilbert $H$, pour que ce système soit complet, il faut et il suffit que, le seul vecteur de $H$ orthogonal au système $\{\varphi_k\}$ est le vecteur nul. Cela signifie qu'il n'existe pas un vecteur non nul de $H$, qui soit orthogonal à tous les vecteurs du système $\{\varphi_k\}$

**Theorem 1.9** *Tous les espaces de Hilbert séparables sont isomorphes entre eux.*

**Remark 1.10** *Comme il est connu en algèbre linéaire, que tous les espaces vectoriels ou euclidiens de mêmes dimensions finies n sont isomorphes entre eux, car chacun est isomorphe à l'espace $K^n$ alors de même tous les espaces de Hilbert sont isomorphes entre eux, car chacun est isomorphes à $L_2$*

### 1.1.4 Opérateurs continue [1]

**Linéarité des opérateurs**

Soient $E$ et $F$ deux espaces normés, un opérateur $A$ défini sur $E$ dans $F$ est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes

- *Condition additive*

$$\forall \varphi_1,\ \varphi_2 \in E,\ \text{on a}\ \ A(\varphi_1+\varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2).$$

- *Condition homogène*

$$\forall \varphi \in E,\ \lambda \in K = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}),\ \text{on a}\ \ A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi).$$

**Continuité des opérateurs linéaires**

Soient $E$ et $F$ deux espaces normés, un opérateur linéaire $A$ défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans $F$ est dit continu au point $x_0$ de $G$ si, on a la propriété suivante

Pour toute suite $x_n$ de $G$ converge vers $x_0$, la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$ c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty} A(x_n) = A\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = A(x_0).$$

L'opérateur linéaire $A$ est dit continu sur $G$, s'il est continu en chaque point de l'ensemble $G$.

*Soient $E$ et $F$ deux espaces normés, un opérateur linéaire $A$ défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans $F$, est dit continu partout sur $G$ s'il est continu en point $x_0$ de $G$.*

### 1.1.5 Opérateurs bornés [1]

*Un opérateur linéaire $A$ défini sur $E$ dans $F$ est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que*

$$\|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \ \ \forall\, x \in E.$$

*La norme $\|A\| = \sup \|A(x)\|_F$ sur la boule unité est toujours finie pour tout opérateur linéaire continu.*

*Un opérateur linéaire $A$ est continu, si et seulement si, il est borné.*

La notion d'isométrie est plus forte que celle de l'isomorphie.

**Normes équivalentes**

Soit $E$ un espace vectoriel muni de deux normes $(E, \| \ \|_1)$ et $(E, \| \ \|_2)$, ces deux normes sont dites équivalentes, si on peut trouver deux constantes positives $\alpha$ et $\beta$, telles que

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1, \ \forall\, x \in E.$$

Autrement dit, les deux normes sont dites équivalentes si et seulement si, l'application identique de $E$ dans $E$ soit un isomorphisme entre les espaces vectoriels normés $(E, \| \ \|_1)$ et $(E, \| \ \|_2)$.

### 1.1.6 Opérateurs compact : [1]

**Definition 1.11** *Soit $A$ un opérateur linéaire d'un espace normé $E$ dans un espace normé $F$, on dit que $A$ est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné $G$ dans $E$ à un ensemble relativement compact $A(G)$ dans $F$. Autrement dit, la fermeture $\overline{A(G)}$ est compacte.*

**Ensembles relativement compacts**

Un ensemble $G \subset E$ est relativement compact si pour toute suite $\{u_n\}$ de $G$, il existe une sous suite $\{u_{n(k)}\}$ qui converge dans $F$.

**Theorem 1.12** *(critère de compacité)*

Un opérateur linéaire $A : E \to F$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée $\varphi_n$ de $E$, la suite $A\varphi_n$ contient une sous suite convergente dans $F$.

**Proof.** Il suffit d'appliquer les définitions appropriés d'un ensemble borné et un ensemble relativement compact. □

**Theorem 1.13** *Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact.*

**Theorem 1.14** *Le produit $AB$ de deux opérateurs bornés $A$ et $B$ est compact si l'un des opérateurs $A$ ou $B$ est compact.*

**Proof.** Soit $\{\varphi_n\}$ un suite bornée de $E$, alors si $B$ est un opérateur borné la suite $B\varphi_n(x)$ est aussi bornée, et de la compacité de l'opérateur $A$ il existe une sous suite de $A(B\varphi_n(x))$ qui converge, ce qui implique que $AB$ est compact.

D'autres part si $B$ est compact, on peut extraire de la suite $B\varphi_n(x)$ une sous suite convergente $B\varphi_{n(k)}(x)$, et de la continuité de l'opérateur $A$ car il est borné la suite $A(B\varphi_{n(k)}(x))$ converge, ce qui implique que $AB$ est compact. □

**Theorem 1.15** *Soit $E$ un espace normé et $F$ un espace de Banach, et soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs compacts de $E$ dans $F$, convergente en norme vers l'opérateur linéaire $A$ de $E$ dans $F$*

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Alors $A$ et compact.

**Corollary 1.16** *La boule unité $B(0,1)$ dans un espace de dimension infinie n'est pas compact.*

**Theorem 1.17** *Un opérateur compact est un opérateur borné. La réciproque est fausse.*

**Theorem 1.18** *L'opérateur intégral $A$ de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau continu est un opérateur compact.*

**Noyau faiblement singulier**

**Definition 1.19** *On appelle noyau faiblement singulier la fonction $K$ continue sur $G \times G \subset R^n \times R^n$ sauf peut être aux points $x = y$ et telle que,*

$$\forall x, y \in G,\ x \neq y,\ \exists M > 0,\ |K(x,y)| < \frac{M}{|x-y|^{n-\alpha}}, \quad 0 < \alpha \leq n$$

**Theorem 1.20** *L'opérateur intégral $A$ de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau faiblement singulier est un opérateur compact.*

### 1.1.7 Equations aux Opérateurs compacts : [1]

**Equations de second espèce**

Soit $A$ un opérateur compact d'un espace normé $X$ dans lui même alors l'opérateur $T = I - A$ défini l'équation de second espèce donné par

$$\varphi - A\varphi = f \ ; \ \ \varphi,\ f \in X$$

où $f$ est un fonction donnée et $\varphi$ la fonction inconnue

**Theorem 1.21** *Le noyau de l'opérateur $T$ défini par*

$$\ker T = N(T) = \{\varphi \in X \ ; \ T\varphi = (I - A)\varphi = 0\},$$

*est un sous espace fermé et de dimension finie*

**Theorem 1.22** *La suite d'ensemble des noyaux*

$$N(T), N\left(T^2\right), ......, N(T^n), ...$$

*est une suite croissante stationnaire. Autrement dit,elle ne contient qu'un nombre fini d'ensemble distincts , c'est à dire il existe un entier* $p \in N$ *tel que*

$$\{0\} \subset N(T), N\left(T^2\right) \subset .... \subset N(T^p) = N\left(T^{p+1}\right) = .....$$

Le nombre $p$ est appelé le nombre de Riez de l'opérateur compact $A$ pour l'ensemble des noyaux $\{N(T^n)\}$

**Theorem 1.23** *L'image de l'opérateur* $T$ *défini par ,*

$$\operatorname{Im} T = T(X) = R(T) = \{\psi = T\varphi; \text{ telle que } \varphi \in X\}$$

*est un sous espace fermé*

Le nombre de Riez $p$ pour l'ensemble des noyaux $\{N(T^n)\}$ et le nombre de Riez $q$ pour l'ensemble des images $\{R(T^n)\}$ sont égaux. Autrement dit

$$p = q$$

**Theorem 1.24** *Les sous espaces* $N(T^n)$ *et* $R(T^n)$ *sont supplémentaires. Autrement dit*

$$X = \ker T^n \oplus \operatorname{Im} T^r \equiv N(T^n) \oplus R(T^n)$$

où $r = p = q$ est le nombre de Riesz

**Lemma 1.25** *L'opérateur* $T = I - A$ *est injectif si et seulement si,*$T^r$ *est injectif pour tout* $r \in \mathbb{N}$

**Lemma 1.26** *L'opérateur* $T = I - A$ *est surjectif si et seulement si* $T^r$ *est surjectif pour tout* $r \in \mathbb{N}$

**Theorem 1.27** *soit* $A$ *un opérateur compact d'un espace normé* $X$ *dans lui même alors l'opérateur*$T = I - A$ *est injectif si et seulement si il est surjectif, de plus l'opérateur admet un inverse* $T^{-1} = (I - A)^{-1}$ *borné*

**Theorem 1.28** *soit* $A$ *un opérateur compact d'un espace normé* $X$ *dans lui même alors, pour que l'équation non homogène*

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = f$$

*admette une solution unique* $\varphi \in X$*, pour tout* $f \in X$*, il faut et il suffit que l'équation homogène*

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = 0$$

*admette la solution triviale* $\varphi = 0$.

# Chapitre 2

# Equations intégrales et leurs classification

## 2.1 Classification des équations intégrales

### 2.1.1 Equations intégrales de Volterra [4]

Les équations de Volterra sont des cas particuliers d'équations intégrales de Fredholm il suffit de prendre le noyau $k$ est tel que $k(x,t) = 0$ pour $x < t$

**Definition 2.1** *On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce de la forme :*

$$\int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x)$$

**Definition 2.2** *On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce une équation à inconnue $\varphi(x)$ de la forme :*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x)$$

### 2.1.2 Equations intégrales de Fredholm [8]

**Definition 2.3** *On appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce une équation de la forme :*

$$\int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt = f(x)$$

où $\varphi$ est la fonction inconnue, $f$ et $k$ sont des fonctions connues,les bornes d'intégration sont constantes. C'est la caractéristique principale d'une équations de Fredholm .

**Definition 2.4** *On appelle équation intégrale de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt$$

où $\varphi(x)$ est la fonctions inconnue ,$k(x,t)$ et $f(x)$des fonctions donnés, $\lambda$ est un facteur inconnu

### 2.1.3 Equations intégrales de Volterra -Fredholm [4]

Une équation intégrale de Volterra -Fredholm est une combinaison des intégrales de Volterra et Fredholm disjoints ,apparaît dans une équation intégrale .

**Definition 2.5** *On appelle équation intégrale de Volterra-Fredholm une équation de la forme :*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)dt \ , \ x \in [a,b] \tag{2.1}$$

On appelle équation intégrale mixte une équation de la forme :2

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \int_a^b k(s,t)\varphi(t)dtds$$

où les fonctions $k_1$, $k_2$ et $f$ sont connues et $\varphi(x)$ la fonction inconnue.

**Example 2.6**

$$\varphi(x) = \exp(x) + x + 1 + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + \int_0^1 \exp(x-t)\varphi(t)dt, \quad x \in [0,1]$$

$$\varphi(x) = \frac{17}{2}x^2 + 11x + \int_a^x \int_a^b (s-t)\varphi(t)dtds$$

## 2.2 Existence et unicité de la solution des équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm [4]

Dans cette section nous rappelons les théorèmes que nous allons utilisées pour obtenir des résultats d'existence et unicité de solutions de l'équation (2.1)

**Definition 2.7** *Soit $X$ un espace normé et $T : X \to X$ un opérateur, $T$ est dit un opérateur de Picard s'il existe $\varphi_0 \in X$ unique tel que*

$$T(\varphi_0) = \varphi_0, \, et \lim_{n\to\infty} T^n(\varphi_0) = \varphi_0, \text{ pour tout } \varphi \text{ de } X$$

**Theorem 2.8** *(principe de contraction).Soit $X$ un espace normé. Si $T : X \to X$ un opérateur de contraction admis un point fixe unique $\varphi$ , alors $T$ est un opérateur de Picard*

$$\|\varphi_0 - T^n(\varphi_0)\| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|\varphi - T(\varphi)\|, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

**Théorèmes d'existence et d'unicité :**

On considère l'équation linéaire de Volterra-Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)dt \ , \, x \in [a,b] \tag{2.2}$$

où

1. $f \in C[a,b]$ , $k_1(x,t) \in C(D_1)$,avec $D_1 = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } a \leq t \leq x \leq b\right\}$
2. $\varphi \in C[a,b]$ , $k_2(x;t) \in C(D_2)$,avec $D_2 = [a,b] \times [a,b]$
3. $M_1 = \max_{(x,t)\in D_1} |k_1(x,t)|$ , et $M_2 = \max_{(x,t)\in D_2} |k_2(x,t)|$

**Theorem 2.9** *Dans les conditions de continuité ci-dessus, supposons qu'il existe une constante $c > 0$ tel que :*

$$\frac{1}{c}\left[M_1 + M_2 \exp(c(b-a))\right] \ < 1$$

Alors l'équation (2.2) a une solution unique $\varphi \in C\ [a,b]$, et cette solution peut être obtenir par la méthode d'approximation successive, à partir de $\varphi_0 \in C\ [a,b]$

**Proof.** Soit l'opérateur intégral $T : C\,[a,b] \to C\,[a,b]$, défini par

$$T\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)dt$$

On a

$$\begin{aligned}
|T\varphi(x) - T\psi(x)| &= \left|\int_a^x k_1(x,t)\left(\varphi(t)-\psi(t)\right)dt + \int_a^b k_2(x,t)\left(\varphi(t)-\psi(t)\right)dt\right| \\
&\leq \int_a^x |k_1(x,t)|\,|(\varphi(t)-\psi(t))|\,dt + \int_a^b |k_2(x,t)|\,|(\varphi(t)-\psi(t))|\,dt \\
&\leq M_1 \int_a^x |(\varphi(t)-\psi(t))| \exp(-c\,(t-a)) \exp(c\,(t-a))\,dt + \\
&\quad M_2 \int_a^b |(\varphi(t)-\psi(t))| \exp(-c\,(t-a)) \exp(c\,(t-a))\,dt \\
&\leq \left[\frac{M_1}{c}\left(\exp(c(x-a)-1\right) + \frac{M_2}{c}\left(\exp(c(b-a)-1\right)\right] \|\varphi - \psi\| \\
&\leq \left[\frac{M_1}{c}\exp(c(x-a) + \frac{M_2}{c}\exp c(x-a+b-x)\right] \|\varphi - \psi\| \\
&\leq \frac{\exp(c(x-a)}{c}\left(M_1 + M_2 \exp(c(b-x)\right) \|\varphi - \psi\| \\
&\leq \frac{\exp(c(x-a)}{c}\left(M_1 + M_2 \exp(c(b-a)\right) \|\varphi - \psi\|
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$|A\varphi(x) - A\psi(x)| \exp(-c(x-a)) \leq \frac{1}{c}\left(M_1 + M_2 \exp(c(b-a)\right) \|\varphi - \psi\|\,, \text{pour tout } x \in [a,b]\,.$$

Alors

$$\|A\varphi - A\psi\| \leq \frac{1}{c}\left(M_1 + M_2 \exp(c(b-a)\right) \|\varphi - \psi\|$$

On déduit que l'opérateur $A$ est Lipschitzien de constante $k = \frac{1}{c}\left(M_1 + M_2 \exp(c(b-a)\right)$

La condition supposée garantit que $A$ est une contraction. Alors on applique principe de contraction □

## 2.3 Polynômes de Tchebychev de deuxième espèce $U_n(x)$[2]

Les polynômes de Tchebychev $U_n(x)$ de seconde espèce sont des polynômes en $x$ de degré $n$, définis par la relation

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \text{ quand } x = \cos\theta \tag{(2.2)}$$

La formule de récurrence des termes satisfaite par les polynômes de Tchebychev est la traduction de l'identité trigonométrique élémentaire :

$$\sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta = 2\cos\theta\sin n\theta$$

qui donne :

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \qquad n = 2, 3, ....$$

avec :

$$U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x$$

Notons que les fonctions $\{U_n(x), n = 0, 1, 2, ....\}$ forment un système orthogonal sur l'intervalle $[-1, 1]$ par rapport au poids $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et que le système de polynômes $S_n(x)$ est donné par :

$$\left\{ S_0(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} U_0(x) \ , S_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} U_1(x) \ , S_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} U_2(x), ......S_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} U_n(x) \right\}$$

forment un système orthonormal sur l'intervalle $[-1, 1]$ par rapport au poids $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

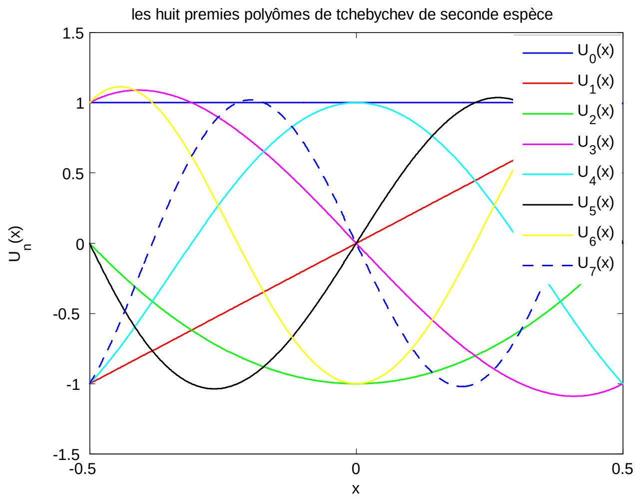
En d'autres termes :

$$\langle S_k(x), S_L(x) \rangle = \int_{-1}^{1} S_k(x) S_L(x) \sqrt{1-x^2} dx = \begin{cases} 1 \text{ si } k = l \\ \\ 0 \text{ si } k \neq l \end{cases}$$

## 2.4 Graphes des polynômes de Tchebychev

Les polynômes de Tchebychev de deuxième espèce $U_n(x)$ ont des graphes oscillants sur l'intervalle $[-1, 1]$, avec des zéros situés à des points spécifiques. Par exemple :

- $U_0(x) = 1$
- $U_1(x) = 2x$
- $U_2(x) = 4x^2 - 1$
- $U_3(x) = 8x^3 - 4x$
- $U_4 = 16x^4 - 12x^2 + 1$
- $U_5 = 32x^5 - 32x^3 + 6x$
- $U_6 = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$
- $U_7 = 128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x$



# Chapitre 3

# Résolution numériques des équations intégrales de Volterra-Fredholm[3][4][8]

## 3.1 Méthodes numériques pour les équations intégrales de Volterra-Fredhlolm :[3]

Dans ce chapitre on va résoudre numériquement des équation intégrales de Volterra-Fredholm de second espèce en utilisant les polynômes de Tchebychev.

### 3.1.1 Méthode de collocation [4]

On considère l'équation intégrale de Volterra-Fredholm suivante

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)dt \tag{3.1}$$

Généralement, le principe de la méthode de collocation appliqué à l'équation (3.1) consiste à chercher une solution approchée dans un sous espace de dimension finie, en exigeant que l'équation (3.1) soit vérifiée seulement sur un nombre fini de points appelés points de collocation.

En pratique, nous choisissons une suite de sous espaces $X_n \subset X$, $n \geq 1$ de dimension finie, généralement des sous espaces de $C([a,b])$ ou de $L^2([a,b])$. Soit $\{\psi_1, ..., \psi_n\}$ une base de $X_n$. On cherche une fonction $\varphi_n \in X_n$, telle que

$$\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \psi_j(x), \quad x \in [a,b]$$

Pour déterminer les coefficients $(\alpha_j)$, on substituant, cette fonction dans l'équation (3.1), et on exigeant que l'équation soit exacte dans le sens où le résidu

$$r_n(x) = \varphi_n(x) - \int_a^x k_1(x,t)\varphi_n(t)dt - \int_a^b k_2(x,t)\varphi_n(t)dt - f(x)\ ,\ \ x \in [a,b]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \psi_j(x) - \int_a^x k_1(x,t)dt \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \psi_j\left(t\right) - \int_a^b k_2(x,t)dt \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \psi_j\left(t\right) - f(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left\{ \psi_j(x) - \int_a^x k_1(x,t)\psi_j(t)dt - \int_a^b k_2(x,t)\psi_j(t)dt \right\} - f(x) \quad , x \in [a,b]$$

soit nul sur un système de noeuds $x_1, ..., x_n \in [a,b]$ , (i.e, aux points de collocation) ce qui conduit à la résolution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{ \psi_j(x_i) - \int_a^x k_1(x_i,t)\psi_j(t)dt - \int_a^b k_2(x_i,t)\psi_j(t)dt \right\} \alpha_j = f(x_i) \quad , i = 1, ..., n$$

qui s'écrit sous la forme $A\alpha = F$, où

$$\begin{aligned} A &= \psi_j(x_i) - \int_a^x k_1(x_i,t)\psi_j(t)dt - \int_a^b k_2(x_i,t)\psi_j(t)dt,\ i,j = 1, ..., n \\ \alpha &= (\alpha_i)\ ,\ i = 1, ..., n \\ F &= f\left(x_i\right),\ i = 1, ..., n \end{aligned}$$

ce système admet une solution unique si $\det A \neq 0$, ce qui dépend d'ailleurs du choix des points de collocation.

### 3.1.2 Méthode de collocation-Tchebyshev [4]

On considère l'équation de Volterra-Fredholm de second espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)dt,\ x \in [a,b] \tag{3.2}$$

On définit les polynômes de Tchebychev $U_i^*(x)$ de degré $i$ sur $[a,b]$ comme suit

$$U_i^*\left(x\right) = U_i \left( \frac{2x - (a+b)}{b-a} \right)$$

où $U_i(x)$ sont les polynômes de Chebyshev de degré $i$ définit sur $[-1,1]$

On utilise la méthode de Collocation pour approximer la solution exacte $\varphi\left(x\right)$ de l'équation (3.2).

On suppose

$$\varphi(x) \simeq \varphi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i U_i^*(x) \tag{3.3}$$

où $U_i^*(x)$ sont les polynômes de Tchebychev de degré $i$ définit sur $[a, b]$ et $\alpha_i$ des coefficients à déterminer.

Substituant (3.3) dans (3.2) on obtient

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i U_i^*(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x,t) \sum_{i=0}^{n} \alpha_i U_i^*(t)dt + \int_a^b k_2(x,t) \sum_{i=0}^{n} \alpha_i U_i^*(t)dt$$

d'où

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \left[ U_i^*(x) - \int_a^x k_1(x,t) U_i^*(t)dt - \int_a^b k_2(x,t) U_i^*(t)dt \right] = f(x) \tag{3.4}$$

l'équation (3.4) peut s'écrire :

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \psi_i(x) = f(x)$$

où

$$\psi_i(x) = U_i^*(x) - \int_a^x k_1(x,t) U_i^*(t)dt - \int_a^b k_2(x,t) U_i^*(t)dt$$

Soit $\dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2} \cos\left(\dfrac{(2i-1)\pi}{2n}\right)$, $i = 1, ..., n$ les points de Tchebichev :

Alors les équations de collocation sont obtenues en prend des points $x_j$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi_i(x_j) = f(x_j), \quad j = 1, ...., n \tag{3.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi_{ij} = f_j, \quad j = 1, ...., n \tag{3.6}$$

L'équation (3.5) représente un système linéaires de $(n)$ inconnue qui s'écrit sous la forme

$$A\alpha = F$$

où

$$\begin{aligned} A &= \psi_{ij}, i, j = 1, ..., n \\ \alpha &= (\alpha_1, ..., \alpha_n)^t \\ F &= (, f_1, ..., f_n)^t \\ \alpha &= A^{-1}F \end{aligned}$$

## 3.2 Exemples Numériques[8]

Dans cette section on va traité quelques exemples pour résoudre les équations intégrales linéaire de Volterra-Fredholm de second espèce par la méthode de collocation-Tchebyshev

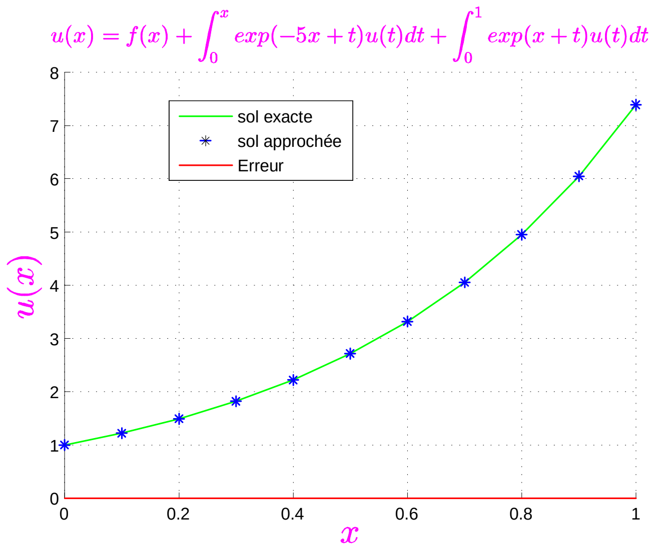
**Exemple 1** Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce.

$$\varphi(x) - \int_0^x e^{(-5x+t)}\varphi(t)\,dt - \int_0^1 e^{-(x+t)}\varphi(t)\,dt = e^{2x} - e^{-x}(e^1 - 1) - \frac{1}{3}\left(e^{-2x} - e^{5x}\right)$$

admets la solution $\varphi_{ex}(x) = e^{2x}$

**Tableau 1 :**Nous présentons la solution approchée $\varphi_{app}(x)$,de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues par la méthode de collocation , l'erreur est calculée pour $n = 8$

| Point de x | Sol exacte $\varphi_{ex}$ | sol approchée $\varphi_{app}$ | Erreur |
|---|---|---|---|
| 0.000000e+000 | 1.000000e+000 | 1.000000e+000 | 3.797141e-007 |
| 1.000000e-001 | 1.221403e+000 | 1.221403e+000 | 5.674145e-007 |
| 2.000000e-001 | 1.491825e+000 | 1.491825e+000 | 6.450359e-007 |
| 4.000000e-001 | 2.225541e+000 | 2.225542e+000 | 5.985893e-007 |
| 6.000000e-001 | 3.320117e+000 | 3.320117e+000 | 4.536987e-007 |
| 8.000000e-001 | 4.953032e+000 | 4.953033e+000 | 3.457187e-007 |
| 1.000000e+000 | 7.389056e+000 | 7.389056e+000 | 2.648393e-007 |



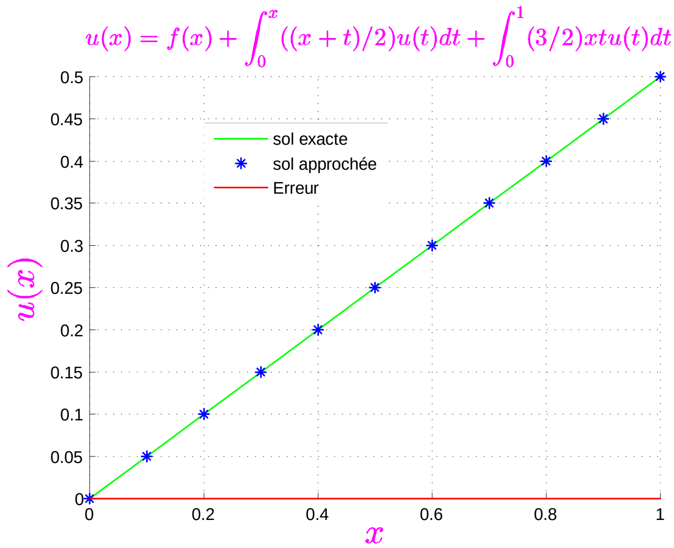
**Exemple 2** Considérons l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce.

$$\varphi(x) - \int_0^x \frac{(x+t)}{2}\varphi(t)\,dt - \int_0^1 \frac{3}{2}xt\varphi(t)\,dt = -5/24 * x\hat{}3 + x/4$$

admets la solution $\varphi(x) = \dfrac{x}{2}$

**Tableau 2** Nous présentons la solution approchée $\varphi_{app}(x)$ , de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues par la méthode de collocation, l'erreur est calculée pour $n = 8$

| Point de x | Sol exacte $\varphi_{ex}$ | sol approchée $\varphi_{app}$ | Erreur |
|---|---|---|---|
| 0.000000e+000 | 0.000000e+000 | 1.474511e-017 | 1.474511e-017 |
| 1.000000e-001 | 5.000000e-002 | 5.000000e-002 | 1.387779e-017 |
| 2.000000e-001 | 1.000000e-001 | 1.000000e-001 | 2.775558e-017 |
| 4.000000e-001 | 2.000000e-001 | 2.000000e-001 | 0.000000e+000 |
| 6.000000e-001 | 3.000000e-001 | 3.000000e-001 | 0.000000e+000 |
| 8.000000e-001 | 4.000000e-001 | 4.000000e-001 | 5.551115e-017 |
| 1.000000e+000 | 5.000000e-001 | 5.000000e-001 | 0.000000e+000 |



## 3.3 Conclusion

Dans cette mémoire nous avons traité la méthode de collocation pour résoudre des équations intégrales de Volterra–Fredholm le but de ce travail est de trouver des solutions approchées à l'équation de Volterra–Fredholm par des polynômes de Tchebychev de deuxième espèce

La méthode de collocation consiste à discrétiser l'équation intégrale en un système d'équations algébriques en évaluant la fonction inconnue aux points de collocation appropriés. Les polynômes de Tchebychev de deuxième espèce sont utilisés comme fonctions de base pour approximer la fonction inconnue sur un intervalle donné. Les polynômes de Tchebychev sont connus pour leur capacité à fournir une bonne approximation des fonctions continues et régulières.

Les résultats numériques obtenus à partir de les exemples, démontrent l'efficacité et la bonne précision de cette méthode.

# Bibliographie


[1] M. NADIR .Cours d'analyse fonctionnelle,université de M'sila Algérie 2004.

[2] L. Aissa, N. Mostefa, N. Mohamed. Nasseh. Application of Chebyshev Polynomials to Volterra-Fredholm Integral. The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, 7, 10 (2022), pp. 1-8.

[3] K.E Atkinson ,The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind,cambridge university Press,2009.

[4] M,N,NADIR,Sur la solution numérique des équations intégrales de Volterra- Fredholm en utiisant les polynômes de Chebyshev,Master,université de M'sila 2022

[5] A. M.Wazwaz, Linear and nonlinear integral equations methods and applications,Saint Xavier University chicago, IL 60655, USA.

[6] Abd-Elhameed, W.M. ; Youssri, Y.H. : Numerical solutions for Volterra–Fredholm–Hammerstein integral equations via second kind Chebyshev quadrature collocation algorithm. Adv. Math. Sci. Appl. 24, 129–141 (2014)

[7] L. Yucheng, Application of the Chebyshev polynomial in solving Fredholm integral equations,Mathematical and Computer Modelling, 50 (2009), pp. 465 469

[8] M. Nadir, Solving Fredholm integral equations with application of the four Chebyshev polynomials,Journal of Approximation Theory and Applied Mathematics, 4 (2014), pp. 15-20.

## الملخص :

الهدف من هذه المذكرة هو ايجاد حلول تقريبية لمعادلة فولتيرا-فريدهولم التكاملية من النوع الثاني ، وذلك باستخدام كثير حدود شبيشيف من الدرجة الثانية وعلى ذلك تم تقديم امثلة مختلفة لتوضيح دقة الطريقة.

## الكلمات المفتاحية:

المعادلات التكاملية لفولتيرا ، المعادلات التكاملية لفريدهولم ،كثير حدود شبيشيف ، المعادلات التكاملية لفولتيرا-فريدهولم ، طريقة التجميع

## *Résumé :*

Le but de ce mémoire, est la résolution numérique de l'équation intégrale de Volterra Fredholm de la seconde espèce, en utilisant le polynôme de Tchebychev de degré deux. De plus, de nombreux exemple sont présentés pour illustrer la précision et l'efficacité de la méthode proposée

## *Mots clés :*

Equation intégrale de Volterra, Equation intégrale de Fredholm, polynôme de Tchebychev, Equation intégrale de Volterra- Fredholm, Méthode de collocation.

## *Abstract :*

The propose of This work is the numérical solution of the de Volterra-Fredholm intégral equation of the second kind using Tchebychev polynomial of the second kind , many examples are presened to illustrate the accuracy and effciency of the method .

## *Keywords :*

Volterra intégrale Equation , Fredholm intégrale Equation , polynomial Tchebychev , Volterra- Fredholm intégrale Equation, collocation method .