



N° d'ordre :

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique

Université de M'sila
Faculté des Sciences
Département de Physique

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Domaine : **Sciences de la matière**

Filière : **Physique**

Option : **Physique des Particules à haute Energie**

Par

BENKEROUCH Ahlem

THEME

Calcul de la section efficace de la diffusion électro - électron
dans le cadre de la géométrie non commutative

Soutenue le : 19 /06/2014

Devant le jury composé de :

N.Geussmia	M.A.B	Univ. de M'sila	Président
Y.Sabri	M.A.B	Univ. de M'sila	Rapporteur
M.Debbabi	M.A.B	Univ. de M'sila	Examineur

Promotion Juin 2014

تشكرات

الحمد لله الذي أنار لنا درب العلم والمعرفة واعاننا على انجاز هذا العمل

أتوجه بجزيل الشكر والامتنان الى كل من ساعدني على تذليل الصعوبات التي واجهتني

واخص بالذكر الاستاذ المحترم: صبري يوسف الذي لم يبخل عليا بتوجيهاته ونصائحه وتفضله

بالإشراف على هذا العمل

الى كل من قدم لي العون ومد لي يد المساعدة

الى كل من زرع التفاؤل في دربي وقدم لي التسهيلات

الى كل من اشعل شمعة في دروب دراستي

الى كل الاساتذة الكرام العاملين بكلية العلوم

الذين اعطونا من حصيلة افكارهم لينيروا طريقنا

الإهداء

الحمد لله الذي وفقنا لهذا ولم نكن لنصل اليه لولا فضل الله علينا
أهدي هذا العمل المتواضع الى كل من لا يمكن للكلمات أن توفي حقهما

ولا يمكن للأرقام أن تحصي فضلهما

إلى والديا العزيزان حفظهما الله ورعاهما

اللذان سهرا وتعبا على تعليمي

الى اخوتي: نبيل، محمد، مراد، أحمد، والكتكوت هشام

الى اخواتي: فطيمة، بسمة، مسعودة،

الى اقاربي واطال الله في عمرها

الى توأم روعي كريمة وابنها العزيز لحسن

الى صدقاتي: أوريدة، دليلة، نورة، عبلة، خديجة، زينب، أسماء، أم السعد

الى زملائي وزميلاتي بقسم الفيزياء وكل الأساتذة الأفاضل

وفي الاخير أرجو من الله أن يجعل عملي هذا نافعا يستفيد منه جميع الطلبة المقبلين على

التخرج

أحلام

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Théorie non commutative des champ	2
1.2	Construction du produit "étoile"	3
1.2.1	Propriétés du produit "étoile"	5
2	Quantification lagrangienne	8
2.1	Densité lagrangienne et action	8
2.2	Equation de mouvement pour le cas libre :	8
2.3	Le champ conjugué	10
2.4	Théorème de Noether	12
3	Quantification canonique	15
3.1	Propagateur de Feynman	15
3.2	Hamiltonien	17
3.3	champ de jauge	19
4	Diffusion electron-electron	20
4.1	Diagrammes de Feynman	20
4.2	Calcul de la section effecace de la diffusion électron- électron	21
5	conclusion	26
6	Bibliographie	27

Chapitre 1

Introduction

L'objet de cette thèse est l'étude de la diffusion electron-electron en utilisant les diagrammes de Feynman de la théorie quantique de l'électrodynamique non commutatif.

On se propose dans ce chapitre de donner un rappel historique sur l'apparition de la théorie des champs non commutative en physique. Puis, on donne un rappelle mathématique sur le produit de Moyal.

1.1 Théorie non commutative des champ

La théorie non commutative des champs[1, 2, 3, 4] est une théorie des champs définie sur un espace temps d'une géométrie non commutative les théories des champs sur le plan de Moyal Heisenberg et Dirac ont discuté le putpoursuivi par Heisenberg en étendant les relations d'incertitude au secteur des coordonnées est que la non commutativité des ces dernières lisseraient les singularités dues, aux courtes distances (hautes énergies) typiques de la théories quantique des champs.

Cet l'espace non commutatif le plus étudié (du poit de vue de la théorie des champs)est le plan de Moyal.cet espace peut être difini en n'importe quelle dimension il s'agit d'une déformation de l'espace plat R^n ou les coordonnées satisfont les relation de commutations.

Dans la quantification de l'espace de phase classique,l'espace -temp peut être quantifier en remplaçant les coordonnées x_μ par des opérateurs hermitiens \hat{x}_μ

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\theta_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

avec θ une matrice antisymétrique $n \times n$, ses entrées ont la dimension d'une aire et leurs racines représentent une longueur minimale. pour écrire une théorie de champs sur le plan Moyal, on remplace habituellement l'algèbre des fonctions sur R^n par l'algèbre engendrée par la relation de commutation précédente. il est alors possible de définir un isomorphisme entre cette dernière algèbre et les fonctions sur R^n munies d'un produit non commutatif c'est le produit de Moyal.

Le lagrangien d'une théorie des champs sur espace de Moyal consisterait donc en le lagrangien ordinaire ou le produit point par point et remplacé par le \star -produit de Moyal. par l'action S :

$$S[\Psi] = \int d^n x \left\{ \underbrace{-e\bar{\Psi}\gamma^\mu * \Psi * A_\mu}_{S_{int}} + \bar{\Psi} \left(i \overleftrightarrow{\partial} - m \right) * \Psi \right\} \quad (1.2)$$

le produit Moyal a pour principale caractéristique d'être non local, Néanmoins sa non commutativité a pour conséquence que le vertex de la théorie[3]

la synthèse des principes de mécanique quantique et de la relativité générale classique mène à une incertitude de l'espace-temps[5, 6]. comme il été montré par Seiberg et witten[7], le concept d'espace-temps non commutatif est appliqué aussi puisque, la théorie des électrons dans un champ magnétique projeté sur le niveau le plus bas de Landau peut être décrite par une théorie des champs non commutative[8]. Finalement la géométrie non commutative a apportée une contribution dans la résolution des problèmes relatifs à la singularité qui existe sur les espaces commutatifs[9].

1.2 Construction du produit "étoile"

L'approche de base dans la géométrie non commutative est de remplacer l'algèbre abélienne C^* par une algèbre non abélienne[10]. Dans cette algèbre non commutative A , les relations de commutations entre les coordonnées sont données par la relation (1.1), et la multiplication dans cette algèbre est donnée par \star -produit définie par :

$$\begin{aligned} w & : A \rightarrow \widehat{A} \\ w(f \star g) & = w(f) \cdot w(g) = \widehat{f} \cdot \widehat{g}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

w est un isomorphisme et ou $f, g \in A$ et $\widehat{f}, \widehat{g} \in \widehat{A}$.

pour éviter la manipulation délicate du \star -produit , on a recours à une procédure du à Weyl et qui repose sur la transformée de Fourier suivanté,ou x est un opérateur

$$\widehat{f}(x) = w(f) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k \ell^{ik_\mu x^\mu} \widetilde{f}(k), \quad (1.4)$$

$$\widetilde{f}(k) = \int d^n x e^{-ik_\mu x^\mu} f(x). \quad (1.5)$$

Ainsi l'isomorphisme (1.3)s'écrit

$$W(f * g) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \int d^n p d^n k e^{ip_\nu x^\nu} e^{ik_\mu x^\mu} \widetilde{f}(k) \widetilde{g}(p) \quad (1.6)$$

a cause de la non commutativité des coordonnées x^μ , le produit $\ell^{ip_\nu x^\nu} \ell^{ik_\mu x^\mu}$ se calcule en utilisant la formule de Campbell-Hausdorff qui donne

$$\exp(ik_\mu x^\mu) * \exp(ip_\nu x^\nu) = \exp [i (k_\mu + p_\mu) x^\mu] \exp \left[-\frac{i}{2} k_\mu \theta^{\mu\nu} p_\nu \right] \quad (1.7)$$

l'équation (1.6) devient ainsi

$$(f * g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n p d^n k e^{i(k_\mu + p_\mu) x^\mu - \frac{i}{2} k_\mu \theta^{\mu\nu} p_\nu} \widetilde{f}(k) \widetilde{g}(p). \quad (1.8)$$

D apres Moyal-Weyl [?], le \star -produit est défini par

$$\begin{aligned} (f \star g)(x) &= f(x) \left(-\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu \right) g(x) \\ &= f(x) g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2} \right)^n \frac{1}{n!} \theta^{\mu_1 \nu_1} \dots \theta^{\mu_n \nu_n} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} f(x) \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_n} g(x). \end{aligned} \quad (1.9)$$

on peut aussi écrire

$$(f \star g)(x) = \left[\exp \left(-\frac{i}{2} \partial_{\xi_\mu} \theta_{\mu\nu} \partial_{\chi_\nu} \right) f(x + \xi) g(x + \chi) \right]_{\xi=\chi=0} \quad (1.10)$$

on remarque que pour $\theta^{\mu\nu} = 0$, le \star -produit devient le produit ordinaire, on peut démontrer que le commutateur d'une fonction $f(x)$ avec les coordonnées x donne

$$x_\mu \star f(x) - f(x) \star x_\mu = i \theta_{\mu\nu} \partial_\nu f(x) \quad (1.11)$$

l'apparition des termes dérivatifs dans le second member dénote le caractère non locale de la théorie.

La généralisation de la formule (1.9),est donnée par

$$f_1(x_1) \star \dots \star f_n(x_n) = \Pi_{a < b} \exp \left(-\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x_a^\mu} \theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_b^\nu} \right) f_1(x_1) \dots f_n(x_n) \quad (1.12)$$

1.2.1 Propriétés du produit "étoile"

– Le \star -produit entre deux exponentiels est donné par

$$\begin{aligned}
\exp(ikx) \star \exp(iqy) &= \exp\left(-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu}\right) \exp(ikx) \exp(iqy) \Big|_{x=y} \\
&= \left[1 - \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu} + \dots\right] e^{ikx} e^{iqy} \Big|_{x=y} \\
&= \left[1 - \frac{i}{2}k\theta q + \dots\right] e^{ikx} e^{iqy} \\
&= \exp\left(-\frac{i}{2}k\theta q\right) \exp[i(k+q)x], \tag{1.13}
\end{aligned}$$

en utilisant cette relation, on obtient la distribution de Dirac dans le cas non commutative donnée par

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta}^D(k) &= \int d^D x \exp(ikx) \star \exp(iqy) \\
&= \exp\left(-\frac{i}{2}k\theta q\right) \int d^D x \exp[i(k+q)x] \\
&= \exp\left(-\frac{i}{2}k\theta q\right) (2\pi)^D \delta^D(k+q) \tag{1.14}
\end{aligned}$$

– Associativité

$$[(f \star g) \star h](x) = [f \star (g \star h)](x) \tag{1.15}$$

En effet, dans l'espace des moments

$$\begin{aligned}
((f \star g) \star h)(x) &= \int d^4 k d^4 q \hat{f}(k) \hat{g}(q) e^{-\frac{i}{2}k\theta q} e^{-i(k+q)x} \star h(x) \\
&= \int d^4 k d^4 q d^4 p \hat{f}(k) \hat{g}(q) \hat{h}(p) e^{-\frac{i}{2}k\theta q} e^{-\frac{i}{2}(k+q)\theta p} e^{i(k+q+p)x} \tag{1.16}
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
(f \star (g \star h))(x) &= \int d^4 q d^4 p f(x) \star \left[\hat{g}(q) \hat{h}(p) e^{-\frac{i}{2}q\theta p} e^{i(q+p)x}\right] \\
&= \int d^4 k d^4 q d^4 p \hat{f}(k) \hat{g}(q) \hat{h}(p) e^{\frac{i}{2}q\theta p} e^{-\frac{i}{2}k\theta(q+p)} e^{i(k+q+p)x} \tag{1.17}
\end{aligned}$$

en comparant entre (1.16) et (1.17), on déduit que (1.15) est vérifiée.

– Produit sous le signe intégrale

$$\int (f \star g)(x) d^4x = \int (g \star f)(x) d^4x. \quad (1.18)$$

en effet, on remarque que les deux relations suivantes

$$\int (f \star g)(x) d^4x = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \widehat{f}(k) \widehat{g}(q) \exp(-\frac{i}{2}k\theta q) \exp[i(k+q)x]. \quad (1.19)$$

$$\int (g \star f)(x) d^4x = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \widehat{g}(q) \widehat{f}(k) \exp(-\frac{i}{2}q\theta k) \exp[i(q+k)x], \quad (1.20)$$

sont equivalentes ou on deduit que la relation (1.18) est correcte.

de l'equation precedente nous pouvons déduire la propriété cyclique

$$\int (f_1 \star f_2 \star \dots \star f_n)(x) d^4x = \int (f_n \star f_1 \star f_2 \dots \star f_{n-1})(x) d^4x. \quad (1.21)$$

– La conjugaison complexe

$$(f \star g)^* = g^* \star f^* \quad (1.22)$$

– La règle leibniz

il est facile de vérifier que la dérivée de \star -produit satisfait à la règle de leibniz

$$\partial_\mu(\Psi_1 \star \Psi_2)(x) = (\partial_\mu \Psi_1) \star \Psi_2 + \Psi_1 \star \partial_\mu \Psi_2$$

$$\begin{aligned} (\widehat{\Psi}_1 \star \widehat{\Psi}_2)(x) &= \left[\exp\left(-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) \Psi_1(x) \Psi_2(y) \right]_{x=y} \\ &= \Psi_1(x) \Psi_2(x) - \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Psi_1(x) \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Psi_2(x) + O(\theta^2), \end{aligned} \quad (1.23)$$

Ce travail est divisé en quatre chapitre.

Dans le premier chapitre nous allons donné un rappel historique sur l'apparition de la théorie des champ non commutative et un rappel mathématique sur le produit étoile.

Dans le deuxième chapitre nous allons étudier le formalisme lagrangien de la théorie non commutative des champs, ou nous déduire les équations de mouvement et le champ conjugué à partir de d'une densité lagrangienne non commutative. et on termine par le théorème de Neother.

Dans le troisième chapitre nous nous intéresserons à la quantification canonique. ou nous allons calculer le propagateur de Feynman, le tenseur de moment-énergie pour le cas non commutative.

Le quatrième chapitre concerne l'étude de l'interaction au cas non commutative, où nous allons déduire les règles de Feynman pour ce cas en calculant la fonction de vertex, et on terminera par le calcul de la section efficace de la diffusion électron-électron.

Chapitre 2

Quantification lagrangienne

2.1 Densité lagrangienne et action

La densité lagrangienne de la théorie des champs non commutative s'obtient en remplaçant le produit habituel de la théorie des champs habituelle par le produit de Moyal, et elle est donnée par

$$L(\Psi, \partial_\mu \Psi, \bar{\Psi}, \partial_\mu \bar{\Psi}) = \bar{\Psi} i \gamma^\mu * \partial_\mu \Psi + i \gamma^\mu \partial_\mu \bar{\Psi} * \Psi - m \bar{\Psi} * \Psi + V \quad (2.1)$$

L'action S définie sur une région arbitraire R de l'espace-temps est donnée par la définition habituelle

$$\begin{aligned} S &= \int_R d^4x L(\Psi, \partial_\mu \Psi, \bar{\Psi}, \partial_\mu \bar{\Psi}) \\ &= \int_R d^4x (\bar{\Psi} i \gamma^\mu * \partial_\mu \Psi + i \gamma^\mu \partial_\mu \bar{\Psi} * \Psi - m \bar{\Psi} * \Psi + V) \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.2 Equation de mouvement pour le cas libre :

Pour déduire l'équation de mouvement nous utilisons le principe de moindre action qui stipule que $\delta S = 0$. En introduisant ce principe sur l'expression (2.2), on obtient

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_R d^4x \cdot \delta L(\Psi, \partial_\mu \Psi, \bar{\Psi}, \partial_\mu \bar{\Psi}) \\
&= \int_R d^4x [L(\Psi + \delta\Psi, \partial_\mu \Psi + \delta(\partial_\mu \Psi); \bar{\Psi} + \delta\bar{\Psi}, \partial_\mu \bar{\Psi} + \delta(\partial_\mu \bar{\Psi})) - L(\Psi, \partial_\mu \Psi, \bar{\Psi}, \partial_\mu \bar{\Psi})] \\
&= \int_R d^4x [i(\bar{\Psi} + \delta\bar{\Psi}) \gamma^\mu * \partial_\mu (\Psi + \delta\Psi) + i\gamma^\mu \partial_\mu (\bar{\Psi} + \delta\bar{\Psi}) * (\Psi + \delta\Psi) - m(\bar{\Psi} + \delta\bar{\Psi}) * (\Psi + \delta\Psi) \\
&\quad - [\bar{\Psi} i\gamma^\mu * \partial_\mu \Psi + i\gamma^\mu \partial_\mu \bar{\Psi} * \Psi - m\bar{\Psi} * \Psi]] \\
&= \int_R d^4x [i(\bar{\Psi} \gamma^\mu * \partial_\mu \delta\Psi + \delta\bar{\Psi} \gamma^\mu * \partial_\mu \Psi + \delta\bar{\Psi} \gamma^\mu * \partial_\mu \delta\Psi + \gamma^\mu \partial_\mu \bar{\Psi} * \delta\Psi \\
&\quad + \gamma^\mu \partial_\mu \delta\bar{\Psi} * \Psi + \gamma^\mu \partial_\mu \delta\bar{\Psi} * \delta\Psi) - m(\delta\bar{\Psi} * \Psi + \bar{\Psi} * \delta\Psi + \delta\bar{\Psi} * \delta\Psi)] \tag{2.3}
\end{aligned}$$

Eliminant les termes de la variation du champ au deuxième ordre et en utilisant la propriété $\partial_\mu \delta\Psi = \delta\partial_\mu \Psi$, on obtient

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_R d^4x [i\bar{\Psi} \gamma^\mu * \partial_\mu \delta\Psi + \delta\bar{\Psi} * \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + \partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu * \delta\Psi + \gamma^\mu \partial_\mu \delta\bar{\Psi} * \Psi) - m(\delta\bar{\Psi} * \Psi + \bar{\Psi} * \delta\Psi)] \\
&= \int_R d^4x [i\bar{\Psi} \gamma^\mu * \partial_\mu \delta\Psi + i\delta\bar{\Psi} \gamma^\mu * \partial_\mu \Psi + i\gamma^\mu \partial_\mu \bar{\Psi} * \delta\Psi + i\gamma^\mu \partial_\mu \delta\bar{\Psi} * \Psi) \\
&\quad - m(\delta\bar{\Psi} * \Psi + \bar{\Psi} * \delta\Psi)] \tag{2.4}
\end{aligned}$$

en utilisant la propriété $\partial_\mu \delta\Psi = \delta\partial_\mu \Psi$, on obtient

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_R d^4x [i\bar{\Psi} \gamma^\mu * \delta\partial_\mu \Psi + i\delta\bar{\Psi} \gamma^\mu * \partial_\mu \Psi + i\gamma^\mu \partial_\mu \bar{\Psi} * \delta\Psi + \gamma^\mu \delta\partial_\mu \bar{\Psi} * \Psi) \\
&\quad - m(\delta\bar{\Psi} * \Psi + \bar{\Psi} * \delta\Psi)] \tag{2.5}
\end{aligned}$$

Comme la variation de S sur de R s'annule, et utiliser la propriété

$$\int f * g d^4x = \int f \cdot g d^4x \tag{2.6}$$

on arrive à

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_R d^4x \delta\bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi + \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \delta\Psi \\
&= \delta\bar{\Psi} \left(i\gamma^\mu \left(\overleftarrow{\partial}_\mu + \overrightarrow{\partial}_\mu \right) - m \right) \delta\Psi = 0
\end{aligned}$$

Comme sur la frontière de l'hypersurface on

$$\delta\bar{\Psi} = \delta\Psi = 0 \quad (2.7)$$

Dans cette le cas on trouve les équations de mouvement pour champ fermionique libre

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi = 0 \quad (2.8)$$

et pour son conjugué par

$$\bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) = 0 \quad (2.9)$$

On remarque que ces deux equations sont les memes de cas commuative, ou on deduit ces solution données par

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \Psi^+(x) + \Psi^-(x) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega(k)} \sum_\alpha [(a_\alpha(k)U^\alpha(k)e^{-ikx} + b_\alpha^+(k)V^\alpha(k)e^{-ikx})] \end{aligned} \quad (2.10)$$

et

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(x) &= \Psi^*(x)\gamma^0 = \bar{\Psi}^+(x) + \bar{\Psi}^-(x) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega(k)} \sum_\alpha [b_\alpha(k)\bar{V}(k)e^{-ikx} + a_\alpha^+(k)\bar{U}(k)e^{ikx}] \end{aligned} \quad (2.11)$$

avec

$$\bar{U}(k) = U^+(k)\gamma^0 \quad (2.12)$$

$$\bar{V}(k) = V^+(k)\gamma^0 \quad (2.13)$$

2.3 Le champ conjugué

Par analogie avec la théorie des champs commutative ,nous définissons le champ canoniquement conjugué $\Pi(x)$ dans la théorie des champ non commutative par

$$\Pi(x) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\circ \Psi)} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}} \quad (2.14)$$

$$\Pi(x) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\circ \bar{\Psi})} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\Psi}}} \quad (2.15)$$

La densité lagrangienne libre est

$$\begin{aligned} L &= i \left[e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu}} (\bar{\Psi}(x)\gamma^\alpha \partial_\alpha \Psi(y) + \partial_\alpha \bar{\Psi}(x)\gamma^\alpha \Psi(y) - m\bar{\Psi}(x)\Psi(y)) \right]_{x=y} \\ &= i\bar{\Psi}(x)\gamma^\alpha \partial_\alpha \Psi(x) - \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} \partial_\mu \bar{\Psi}(x)\gamma^\alpha \partial_\nu \partial_\alpha \Psi(x) + i\partial_\alpha \bar{\Psi}(x)\gamma^\alpha \Psi(x) - \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\mu \bar{\Psi}(x)\gamma^\alpha \partial_\nu \Psi(x) \\ &\quad - m\bar{\Psi}(x)\Psi(x) + \frac{im}{2}\theta^{\mu\nu} \partial_\mu \bar{\Psi}(x)\partial_\nu \Psi(x) + O(\theta^2) \end{aligned} \quad (2.16)$$

où $\mu, \nu = \overline{0, 3}$. puisque θ est antisymétrique, $\theta^{00} = \theta^{ii} = 0$ et $\theta^{\mu\nu} = -\theta^{\nu\mu}$, on obtient

$$\begin{aligned} L &= i\bar{\Psi}(x)\gamma^0 \partial_0 \Psi(x) + \bar{\Psi}(x)\gamma^i \partial_i \Psi(x) - \frac{i}{2}\theta^{0i} \partial_0 \bar{\Psi}(x)\gamma^0 \partial_i \partial_0 \Psi(x) - \frac{i}{2}\theta^{0i} \partial_0 \bar{\Psi}(x)\gamma^j \partial_i \partial_j \Psi(x) \\ &\quad - \frac{i}{2}\theta^{i0} \partial_i \bar{\Psi}(x)\gamma^0 \partial_0 \partial_0 \Psi(x) - \frac{i}{2}\theta^{i0} \partial_i \bar{\Psi}(x)\gamma^j \partial_0 \partial_j \Psi(x) + i\gamma^0 \partial_0 \bar{\Psi}(x)\Psi(x) \\ &\quad + i\gamma^i \partial_i \bar{\Psi}(x)\Psi(x) - \frac{i}{2}\theta^{0i} \partial_0 \partial_0 \bar{\Psi}(x)\gamma^0 \partial_i \Psi(x) - \frac{i}{2}\theta^{0i} \partial_j \partial_0 \bar{\Psi}(x)\gamma^j \partial_i \Psi(x) \\ &\quad - \frac{i}{2}\theta^{i0} \partial_0 \partial_i \bar{\Psi}(x)\gamma^0 \partial_0 \Psi(x) - \frac{i}{2}\theta^{i0} \partial_j \partial_i \bar{\Psi}(x)\gamma^j \partial_0 \Psi(x) - m\bar{\Psi}(x)\Psi(x) \\ &\quad + \frac{im}{2}\theta^{0i} \partial_0 \bar{\Psi}(x)\partial_i \Psi(x) + \frac{im}{2}\theta^{i0} \partial_i \bar{\Psi}(x)\partial_0 \Psi(x) + O(\theta^2) \end{aligned} \quad (2.17)$$

En remplaçant dans (2.14, 2.15), on obtient

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= i\bar{\Psi}(x)\gamma^0 - \frac{i}{2}\theta^{i0} \partial_0 \partial_i \bar{\Psi}(x)\gamma^0 - \frac{i}{2}\theta^{i0} \partial_j \partial_i \bar{\Psi}(x)\gamma^j + \frac{im}{2}\theta^{i0} \partial_i \bar{\Psi}(x) \\ &= i \left(\bar{\Psi}(x)\gamma^0 - \frac{i}{2}\theta^{i0} \partial_\alpha \partial_i \bar{\Psi}(x)\gamma^\alpha + \frac{im}{2}\theta^{i0} \partial_i \bar{\Psi}(x) \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

puisque $\theta^{00} = 0$, on peut ajouter les termes $\frac{im}{2}\theta^{00} \partial_0 \bar{\Psi}(x)$ et $\frac{i}{2}\theta^{00} \partial_\alpha \partial_0 \bar{\Psi}(x)\gamma^\alpha$, d'où

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= i \left(\bar{\Psi}(x)\gamma^0 - \frac{i}{2}\theta^{i0} \partial_0 \partial_\alpha \bar{\Psi}(x)\gamma^\alpha + \frac{im}{2}\theta^{i0} \partial_i \bar{\Psi}(x) + \frac{im}{2}\theta^{00} \partial_0 \bar{\Psi}(x) \right) \\ &= i\bar{\Psi}(x)\gamma^0 + \frac{i}{2}\theta^{\mu 0} \partial_\mu (-\partial_\alpha \bar{\Psi}(x)\gamma^\alpha + m\bar{\Psi}(x)) \end{aligned} \quad (2.19)$$

en utilisant l'équation (2.9), on obtient

$$\Pi(x) = i\bar{\Psi}(x)\gamma^0 \quad (2.20)$$

On remarque que le champ conjugué de la théorie non commutative est le même de la théorie commutative.

2.4 Théorème de Noether

Maintenant que nous avons développé la différentiation fonctionnelle pour nôtre théorie. nous pouvons prolonger le théorème de Noéther aux théories non commutatives des champs. Supposons que notre action possède une symétrie continue et que l'ensemble de toutes les symetries de l'action forme un groupe de symétrie.

La variation de l'action est donnée par

$$\delta S = \int_R d^4x \delta \mathcal{L}(\Psi, \partial_\mu \Psi, \bar{\Psi}, \partial_\mu \bar{\Psi}, x^\mu) \quad (2.21)$$

alors

$$\delta S = \int_R d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} * \delta \Psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} * \delta (\partial_\mu \Psi) + \delta \bar{\Psi} * \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} + \delta (\partial_\mu \bar{\Psi}) * \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} * \delta x^\mu \right]$$

on les propriétés suivantes

$$\delta (\partial_\mu \Psi) = \partial_\mu (\delta \Psi) \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} * \delta (\partial_\mu \Psi) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} * \delta \Psi \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} \right) * \delta \Psi \quad (2.23)$$

$$\delta (\partial_\mu \bar{\Psi}) * \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} = \partial_\mu \left(\delta \bar{\Psi} * \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} \right) - \delta \bar{\Psi} * \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} \right) \quad (2.24)$$

d ou

$$\begin{aligned} \delta S = \int_R d^4x & \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} \right) \right] * \delta \Psi + \delta \bar{\Psi} * \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} \right) \right] \\ & + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} * \delta \Psi + \delta \bar{\Psi} * \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} \right] + \partial_\mu \mathcal{L} \delta x^\mu \end{aligned} \quad (2.25)$$

En utilisant les équation d'Euler-lagrange on obtient

$$\delta S = \int_R d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} * \delta \Psi + \delta \bar{\Psi} * \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} + \delta \mathcal{L} \delta x^\mu \right) \quad (2.26)$$

$$= \int_{\partial R} d\sigma_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} * \delta \Psi + \delta \bar{\Psi} * \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} + \delta \mathcal{L} \delta x^\mu \right) \quad (2.27)$$

Utilisons maintenant la variation totale des champs Ψ et $\bar{\Psi}$

$$\begin{aligned}
\Delta\Psi'(x') &= \Psi'(x') - \Psi(x) \\
&= \Psi'(x') - \Psi(x') + \Psi(x') - \Psi(x) \\
\Delta\Psi'(x') &= \delta\Psi + (\partial_\mu\Psi) \delta x^\mu
\end{aligned} \tag{2.28}$$

et

$$\Delta\bar{\Psi}'(x') = \delta\bar{\Psi}(x) + (\partial_\mu\bar{\Psi}) \delta x^\mu \tag{2.29}$$

D'où

$$\begin{aligned}
S &= \int_{\partial R} d^4x \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\Psi)} * (\delta\Psi(x) + \partial_\nu\Psi(x) * \delta x^\nu) + (\delta\bar{\Psi}(x) + \partial_\nu\bar{\Psi}(x) * \delta x^\nu) * \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\bar{\Psi})} \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\Psi)} * \partial_\nu\Psi + \partial_\nu\bar{\Psi} * \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\bar{\Psi})} - \delta_\nu^\mu L \right) \delta x^\nu \right] \partial\sigma_\mu
\end{aligned} \tag{2.30}$$

On obtient finalement

$$\delta S = \int_{\partial R} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)} * \Delta\Psi(x) + \Delta\bar{\Psi}(x) * \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\Psi})} - T_\nu^\mu \delta x^\nu \right] \partial\sigma_\mu \tag{2.31}$$

Où le tenseur moment-énergie est défini par

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\Psi)} * (\partial_\nu\Psi) + (\partial_\nu\bar{\Psi}) * \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\bar{\Psi})} - \delta_\nu^\mu L \tag{2.32}$$

On suppose maintenant que l'action S est invariante sous le groupe des transformations de $x^\mu, \Psi, \bar{\Psi}$, où les transformations infinitésimales sont caractérisées par un paramètre infinitésimal $\delta\omega^\nu$

$$\Delta x^\mu = X_\nu^\mu \delta\omega^\nu, \Delta\Psi = \Psi_\mu \delta\omega^\mu, \Delta\bar{\Psi} = \bar{\Psi}_\mu \delta\omega^\mu. \tag{2.33}$$

$$\int_{\partial R} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)} * \Psi(x) + \bar{\Psi}(x) * \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\Psi})} - T_k^\mu X_\nu^k \right) \delta\omega^\mu \partial\sigma_\mu = 0 \tag{2.34}$$

Comme $\delta\omega^\mu$ arbitraire on peut écrire

$$\delta S = \int_{\partial R} J_\nu^\mu \partial\sigma_\mu = 0 \tag{2.35}$$

avec le courant J_ν^μ définie par

$$J_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)} * \Psi(x) + \bar{\Psi}(x) * \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\Psi})} - T_k^\mu X_\nu^k \tag{2.36}$$

E utilisant le théoreme de Gauss, on obtient

$$\delta S = \int_{\partial R} J_\nu^\mu \partial \sigma_\mu = \int_R \partial_\mu J_\nu^\mu d^4x = 0 \quad (2.37)$$

Finalement l'équation de continuité est

$$\partial_\mu J_\nu^\mu = 0 \quad (2.38)$$

Chapitre 3

Quantification canonique

Par analogie avec la théorie commutative, la description quantique se construit en remplaçant les quantités classiques par des opérateurs. Nous allons utiliser la même algèbre des opérateurs de la théorie commutative et nous déduirons les trois principaux résultats de la quantification qui sont les conditions quantique, énergie et la fonction de propagation. On donne d'abord l'algèbre des opérateurs $(a_\alpha(k), a_\beta^+(q), b_\alpha(k), b_\beta^+(q))$ [31]

$$[a_\alpha(k), a_\beta^+(q)] = (2\pi)^3 \frac{\omega_k}{m} \delta(k - q) \delta_{\alpha\beta} \quad (3.1)$$

$$[b_\alpha(k), b_\beta^+(q)] = (2\pi)^3 \frac{\omega_k}{m} \delta(k - q) \delta_{\alpha\beta} \quad (3.2)$$

$$[b_\alpha^+(k), a_\beta^+(q)] = [b_\alpha(k), a_\beta(q)] = 0 \quad (3.3)$$

3.1 Propagateur de Feynman

On termine la quantification canonique du champ de Dirac, non commutative par le calcul de propagateur. L'expression du propagateur est donnée par la moyenne sur le vide du produit étoile des champs de Dirac

$$\{\Psi(x), \bar{\Psi}(y)\}_{x_0=y_0} = \Psi(x) * \bar{\Psi}(y) + \bar{\Psi}(y) * \Psi(x) \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
S(x-y) &= \langle 0 | T \{ \Psi_i(x), \bar{\Psi}_j(y) \} | 0 \rangle \\
&= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \{ \Psi_i(x) * \bar{\Psi}_j(y) \} | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \{ \bar{\Psi}_j(y) * \Psi_i(x) \} | 0 \rangle \\
&= \int \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\omega(k)\omega(q)} \sum_{\alpha,\beta} \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [a_\alpha(k)U_i^\alpha(k)e^{-ikx} + b_\alpha^+(k)V_i^\alpha(k)e^{ikx}] \\
&* [a_\beta^+(q)\bar{U}_j^\beta(q)e^{iqy} + b_\beta(q)\bar{V}_j^\beta(q)e^{-iqy}] | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | [a_\beta^+(q)\bar{U}_j^\beta(q)e^{iqy} + b_\beta(q)\bar{V}_j^\beta(q)e^{-iqy}] \\
&* [a_\alpha(k)U_i^\alpha(k)e^{-ikx} + b_\alpha^+(k)V_i^\alpha(k)e^{ikx}] | 0 \rangle
\end{aligned} \tag{3.5}$$

sachant que

$$a_\alpha | 0 \rangle = b_\alpha | 0 \rangle = 0 \tag{3.6}$$

$$\langle 0 | a_\beta^+ = \langle 0 | b_\beta^+ = 0 \tag{3.7}$$

et en introduisant la representatio integrale de la fonction de Heiviside donnée par

$$\theta(x^0 - y^0) = \frac{-1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{d\tau}{\tau + i\varepsilon} e^{(-i\tau(x^0 - y^0))} \tag{3.8}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
S(x-y) &= -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\omega(k)\omega(q)} \\
&\times \sum_{\alpha,\beta} \left[\int \frac{d\tau}{\tau + i\varepsilon} \exp(-i\tau(x^0 - y^0)) [a_\alpha(k)a_\beta^+(q)U_i^\alpha(k)\bar{U}_j^\beta(q)] e^{-ikx} * e^{+iqy} \right. \\
&+ \left. \int \frac{d\tau}{\tau + i\varepsilon} \exp(-i\tau(y^0 - x^0)) [b_\beta(q)b_\alpha^+(k)V_j^\alpha(k)\bar{V}_i^\beta(q)] e^{ikx} * e^{-iqy} \right]
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$e^{-ikx} * e^{iqy} = e^{-\frac{i}{2}k\theta q} e^{-ikx - iqy}$$

$$e^{ikx} * e^{-iqy} = e^{-\frac{i}{2}k\theta q} e^{ikx - iqy}$$

on ajoute au premier terme la quantité $0 = \langle 0 | a_\alpha^+(k)a_\beta(q) | 0 \rangle$ et la deuxième terme la quantité $0 = \langle 0 | b_\beta^+(k)b_\alpha(q) | 0 \rangle$, nous utiliserons les relations d'anticommutation (??, 3.2) et itegrant sur q on obtient

$$\begin{aligned}
S_F(x-y) &= \frac{-1}{i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int \frac{d^3k d\tau}{(2\pi)^4} \frac{m}{w_k} \times (\partial_\mu \gamma^\mu + m) \exp \frac{(-i\tau(x^0 - y^0))}{\tau + i\varepsilon} \exp(-ik(x-y)) \\
&+ (\partial_\mu \gamma^\mu - m) \exp \frac{(-i\tau(y^0 - x^0))}{\tau + i\varepsilon} \exp(ik(x-y))
\end{aligned} \tag{3.10}$$

utilisons les relations suivantes

$$\begin{aligned}\sum U(x)\bar{U}(y) &= \frac{k_\mu\gamma^\mu + m}{2m} \\ \sum \bar{V}(y)V(x) &= \frac{k_\mu\gamma^\mu - m}{2m}\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}S_F(x-y) &= \frac{-1}{i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int \frac{d^3k d\tau}{(2\pi)^4} \frac{m}{w_k} \frac{k_\mu\gamma^\mu + m}{2m} \exp\left(\frac{-i\tau(x^0 - y^0)}{\tau + i\varepsilon}\right) \exp(-ik(x-y)) \\ &\quad + (k_\mu\gamma^\mu - m) \exp\left(\frac{-i\tau(y^0 - x^0)}{\tau + i\varepsilon}\right) \exp(ik(x-y)) \\ &= \frac{-1}{i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\gamma^\mu \partial_\mu + m}{2m}\right)_{ij} \int \int \frac{d^3k d\tau}{(2\pi)^4} \frac{m}{w_k} \\ &\quad \left(\frac{e^{-i\tau(x^0 - y^0)}}{\tau + i\varepsilon} e^{-ik(x-y)} - \frac{e^{-i\tau(y^0 - x^0)}}{\tau + i\varepsilon} e^{ik(x-y)}\right)\end{aligned}\quad (3.11)$$

Maintenant nous considérons $\tau = k_0 - w_k$ pour le premier terme et $\tau = -k_0 - w_k$ pour le deuxième terme puis nous faisons le changement $k \rightarrow -k$ dans le deuxième terme

$$\begin{aligned}\frac{e^{-i\tau(x^0 - y^0)}}{\tau + i\varepsilon} e^{-ik(x-y)} &= \frac{e^{-ik(x-y)}}{k_0 - w_k + i\varepsilon} & \tau = k_0 - w_k \\ \frac{e^{-i\tau(x^0 - y^0)}}{\tau + i\varepsilon} e^{ik(x-y)} &= \frac{e^{-ik(x-y)}}{-w_k - k_0 + i\varepsilon} & \tau = -k_0 - w_k\end{aligned}$$

En remplaçant dans la formule précédente on obtient

$$\begin{aligned}S_F(x-y) &= \frac{-1}{i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int \frac{d^3k d\tau}{(2\pi)^4} \frac{m}{w_k} \times \left[\frac{(k_\mu\gamma^\mu + m) e^{-ik(x-y)}}{k_0 - w_k + i\varepsilon} + \frac{(k_\mu\gamma^\mu - m) e^{-ik(x-y)}}{-k_0 - w_k + i\varepsilon} \right] \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i(k_\mu\gamma^\mu + m)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \exp(-ik(x-y))\end{aligned}\quad (3.12)$$

alors

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i(k_\mu\gamma^\mu + m)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \exp(-ik(x-y))\quad (3.13)$$

3.2 Hamiltonien

On peut facilement exprimer, en fonction des opérateurs $a(k)$ et $a^+(k)$, $b(k)$ et $b^+(k)$, opérateur hamiltonien en utilisant les règles de commutations .

Par analogie avec la théorie des champs non commutative, l'hamiltonien s'écrit

$$H_0 = \int d^3x T^{00}. \quad (3.14)$$

$$H_0 = P_0$$

On a l'expression du tenseur moment-énergie

$$T^{\mu\nu} =$$

$$= i [\bar{\Psi} \gamma^\mu * \partial_\nu \Psi - \partial_\nu \bar{\Psi} \gamma^\mu * \Psi] \quad (3.15)$$

On déduit que le quadri-vecteur impulsion est donnée par la relation

$$P_\mu = \int d^3x T_{0\mu}$$

$$= \int d^3x i \bar{\Psi} \gamma^0 * \overleftrightarrow{\partial}^\mu \Psi$$

$$= -\frac{i}{2} \int d^3x \int \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\omega_k \omega_q} \sum_{\alpha, \beta} \left[[(iq_\mu) a_\beta^+(q) \bar{U}^\beta(q) e^{iqy} + (-iq_\mu) b_\beta(q) \bar{V}^\beta(q) e^{-iqy}] \gamma^0 \right.$$

$$* [a_\alpha(k) U^\alpha(k) e^{-ikx} + b_\alpha^+(k) V^\alpha(k) e^{ikx}] - [a_\beta^+(q) \bar{U}^\beta(q) e^{iqy} + b_\beta(q) \bar{V}^\beta(q) e^{-iqy}] \gamma^0$$

$$\left. * [(-ik_\mu) a_\alpha(k) U^\alpha(k) e^{-ikx} + ik_\mu b_\alpha^+(k) V^\alpha(k) e^{ikx}] \right] \quad (3.16)$$

ou bien

$$P_\mu = -\frac{i}{2} \int d^3x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\omega(k) \omega(q)} (q_\mu + k_\mu) \sum_{\alpha, \beta} a \left[a_\beta^+(q) a_\alpha(k) \bar{U}^\beta(q) \gamma^0 U^\alpha(k) e^{-ikx} * e^{iqy} \right.$$

$$\left. - (b_\beta(q) b_\alpha^+(k) \bar{V}^\beta(q) \gamma^0 V^\alpha(k) e^{ikx} * e^{-iqy}) \right]$$

$$= \frac{i}{2} \int d^3x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\omega(k) \omega(q)} (q_\mu + k_\mu) \times \sum_{\alpha, \beta} \left[a_\beta^+(q) a_\alpha(k) \bar{U}^\beta(q) \gamma^0 U^\alpha(k) e^{-ikx} e^{iqy} e^{-\frac{i}{2} k \theta q} \right.$$

$$\left. - (b_\beta(q) b_\alpha^+(k) \bar{V}^\beta(q) \gamma^0 V^\alpha(k) e^{ikx} e^{-iqy} e^{-\frac{i}{2} q \theta k}) \right] \quad (3.17)$$

L'intégration sur x nous donne un $\delta(k - q)$. En intégrant sur q on obtient

$$P_\mu = 2k \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{w_k^2} \times \sum_{\alpha, \beta} [(a_\beta^+(k) a_\alpha(k) \bar{U}^\beta(q) \gamma^0 U^\alpha(k) - (b_\beta(k) b_\alpha^+(k) \bar{V}^\beta(q) \gamma^0 V^\alpha(k))]$$

L'integration sur x nous donne un $\delta(k - q)$. En integrant sur q on obtient

$$P_\mu = 2k \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{w_k^2} \times \sum_{\alpha, \beta} [a_\beta^+(k) a_\alpha(k) \bar{U}^\beta(q) \gamma^0 U^\alpha(k) - (b_\beta(k) b_\alpha^+(k) \bar{V}^\beta(q) \gamma^0 V^\alpha(k))]$$

En utilisant les relations

$$\bar{U}^\beta(q) \gamma^0 U^\alpha(k) = \bar{V}^\beta(q) \gamma^0 V^\alpha(k) = \frac{w_k}{m} \delta_{\alpha\beta} \quad (3.18)$$

on obtient

$$P_\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_k} k_\mu \sum_\alpha [a_\beta^+(k) a_\alpha(k) - b_\alpha(k) b_\alpha^+(k)]$$

en posant $\mu = 0$ dans P_μ on obtient l'expression de l'energie

$$H = P_0 = m \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_\alpha [a_\beta^+(k) a_\alpha(k) - b_\alpha(k) b_\alpha^+(k)] \quad (3.19)$$

3.3 champ de jauge

En utilisant la meme demarche utilisée au calcul de propagateur fermionique, on obtient la solution non commutative de champ de gauge donnée par

$$A_{M\beta}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega(k)} [a_\alpha(k) \epsilon^\mu(k) e^{-ikx} + a_\alpha^+(k) \epsilon^\mu(k) e^{ikx}] \quad (3.20)$$

et l'expression du son propagateur de feynman par

$$D^{\mu\nu}(x - y) = \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ik(x-y)} \quad (3.21)$$

Chapitre 4

Diffusion electron-electron

4.1 Diagrammes de Feynman

Comme nous savons le calcul de la section efficace se fait en utilisant les diagrammes de Feynman. Par analogie avec la théorie commutative, les diagrammes de Feynman s'obtiennent en calculant les propagateurs qu'on a déjà calculés et la fonction de vertex.

En effet, l'action d'interaction de l'électrodynamique au cas non commutative est donnée par

$$\begin{aligned} S_{int} &= -ie\gamma^\mu \int d^4x (\bar{\Psi}\gamma^\mu * \Psi * A_\mu)(x) \\ &= -ie\gamma^\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} d^4x e^{-\frac{i}{2}k\theta q} e^{-\frac{i}{2}(k+q)\theta p} e^{i(k+q+p)x} \widetilde{\Psi}(q)\gamma^\mu \widetilde{\Psi}(k)\widetilde{A}_\mu(p) \end{aligned} \quad (4.1)$$

et comme $p = k + q$, et $\theta_{\mu\nu}$ est anti-symétrique nous obtenons $e^{-\frac{i}{2}(k+q)\theta p} = e^{-\frac{i}{2}(k+q)\theta(k+q)} = 0$, d'où on obtient

$$S_{int} = -ie\gamma^\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-\frac{i}{2}k\theta q} \widetilde{\Psi}(q)\gamma^\mu \widetilde{\Psi}(k)\widetilde{A}_\mu(p) (2\pi)^4 \delta^4(k + q + p) \quad (4.2)$$

Donc les règles de Feynman pour le calcul des fonctions de Green dans l'espace des moments sont alors :

- A chaque boucle fermionique est associé un signe négatif
- Dessiner tous les diagrammes topologiquement inéquivalents.
- Calculer le signe du diagramme en déterminant le signe associé à chaque ligne fermionique ouverte en ajoutant un signe négatif à chaque boucle fermionique fermée.

–Pour chaque ligne fermionique interne entrante ,on associe le propagateur

$$\frac{i(k_\mu \gamma^\mu - m)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (4.3)$$

–pour chaque ligne fermionique interne sortante,on associe le propagateur

$$\frac{i(-k_\mu \gamma^\mu - m)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (4.4)$$

–pour chaque ligne photonique interne ,on associe le propagateur

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} \quad (4.5)$$

–A chaque vertex on associe le facteur

$$-ie(\gamma^\mu)(2\pi)^4 \ell^{-\frac{i}{2}k\theta q} (2\pi)^4 \delta^4(k) \quad (4.6)$$

4.2 Calcul de la section efficace de la diffusion électron-électron

La représentation diagrammatique de la diffusion $e^- e^- \longrightarrow e^- e^-$ est donnée par

diffusion electron-electron

(4.7)

Le premier représente l'amplitude directe M_1 et le deuxième l'amplitude M_2 obtenu du premier par symétrie d' échange. L'application des règles de Feynman nous donne

$$\begin{aligned} M_1 &= \overline{U}(p'_1, s'_1) \left(-ie\gamma^\mu e^{-\frac{i}{2}p_1\theta p'_1} \right) U(p_1, s_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 - p'_1)^2} \overline{U}(p'_2, s'_2) \left(-ie\gamma^\nu e^{-\frac{i}{2}p'_2\theta p_2} \right) U(p_2, s_2) \\ &= -e^2 \frac{e^{-\frac{i}{2}(p_1\theta p'_1 + p'_2\theta p_2)}}{(p_1 - p'_1)^2} \overline{U}(p'_1, s'_1) \gamma^\mu U(p_1, s_1) \overline{U}(p'_2, s'_2) \gamma_\nu U(p_2, s_2) \end{aligned} \quad (4.8)$$

et

$$\begin{aligned} M_2 &= \overline{U}(p'_2, s'_2) \left(-ie\gamma^\mu e^{-\frac{i}{2}p_1\theta p'_2} \right) U(p_1, s_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 - p'_2)^2} \overline{U}(p'_1, s'_1) \left(-ie\gamma^\nu e^{-\frac{i}{2}p'_1\theta p_2} \right) U(p_2, s_2) \\ &= -e^2 \frac{e^{-\frac{i}{2}(p_1\theta p'_2 + p'_1\theta p_2)}}{(p_1 - p'_1)^2} \overline{U}(p'_2, s'_2) \gamma^\mu U(p_1, s_1) \overline{U}(p'_1, s'_1) \gamma_\nu U(p_2, s_2) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Maintenant nous allons calculer la section efficace donnée en fonction de l'amplitude de diffusion par

$$d\sigma == \frac{m^4}{\sqrt{p_1 p_2 - m^4}} \int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^2 E_4^2} \frac{d^4 p_4}{(2\pi)^2 E_4^2} (2\pi)^4 \delta(p_4 + p_3 - p_2 - p_1) |M|_{moy}^2 \quad (4.10)$$

Il s'agit ensuite de calculer le carré de l'amplitude . Pour évaluer la section efficace de diffusion d'un état initial non polarisé il faut également prendre la moyenne sur les état de polarisation de l'électron et du électron . Chaque polarisation apparait d'un état initial avec la même probabilité. Ensuite si l'on s'intéresse pas aux polarisation des particules de état final, il faut sommer sur celles-ci. La section efficace non polarisée est alors obtenue à partir de la moyenne suivante

$$|M|_{moy}^2 = \frac{1}{4} \sum_{s_1 s_2} |M|^2 \quad (4.11)$$

où

$$|M|_{moy}^2 = |M_1|_{moy}^2 + |M_2|_{moy}^2 + |M_1 M_2^*|_{moy} + |M_2 M_1^*|_{moy} . \quad (4.12)$$

on calcul d'abord $|M_1|^2$.en effet

$$\begin{aligned} |M_1|^2 = M_1 M_1^* &= \frac{e^4}{(p_1 - p_2')^4} [\overline{U}(p_1', s_1') \gamma^\mu U(p_1, s_1) \overline{U}(p_2', s_2') \gamma_\mu U(p_2, s_2)] \\ &\times \left[\overline{U}(p_2, s_2) \gamma_\nu U(p_2', s_2') \overline{U}(p_1, s_1) \gamma^\nu U(p_1', s_1') \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

qu on peut l ecrire sous la forme matricielle suivante

$$\begin{aligned} |M_1|^2 &= \frac{e^4}{(p_1 - p_2')^4} [\overline{U}_{\alpha_2}(p_1', s_1') (\gamma^\mu)_{\alpha_2 \alpha_1} U_{\alpha_1}(p_1, s_1) \overline{U}_{\alpha_3}(p_2', s_2') (\gamma_\mu)_{\alpha_3 \alpha_4} U_{\alpha_4}(p_2, s_2)] \\ &\times \left[\overline{U}_{\beta_4}(p_2, s_2) (\gamma_\nu)_{\beta_4 \beta_3} U_{\beta_3}(p_2', s_2') \overline{U}_{\beta_1}(p_1, s_1) (\gamma^\nu)_{\beta_1 \beta_2} U_{\beta_2}(p_1', s_1') \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

cette dernière expression peut être arrangée comme suit

$$\begin{aligned} |M_1|^2 &= \frac{e^4}{(p_1 - p_2')^4} [U_{\beta_2}(p_1', s_1') \overline{U}_{\alpha_2}(p_1', s_1') (\gamma^\mu)_{\alpha_2 \alpha_1} U_{\alpha_1}(p_1, s_1) \overline{U}_{\beta_1}(p_1, s_1) (\gamma^\nu)_{\beta_1 \beta_2}] \\ &\times \left[U_{\alpha_4}(p_2, s_2) \overline{U}_{\beta_4}(p_2, s_2) (\gamma_\nu)_{\beta_4 \beta_3} U_{\beta_3}(p_2', s_2') \overline{U}_{\alpha_3}(p_2', s_2') (\gamma_\mu)_{\alpha_3 \alpha_4} \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

on remarque que les quantités entre crochets sont des traces . Alors on écrit

$$\begin{aligned} |M_1|^2 &= \frac{e^4}{(p_1 - p_2')^4} [U(p_1', s_1') \overline{U}(p_1', s_1') \gamma^\mu U(p_1, s_1) \overline{U}(p_1, s_1) \gamma^\nu] \\ &\times Tr \left[U(p_2, s_2) \overline{U}(p_2, s_2) \gamma_\nu U(p_2', s_2') \overline{U}(p_2', s_2') \gamma_\mu \right] . \end{aligned} \quad (4.16)$$

Grâce aux relation suivantes

$$\sum_{\alpha} \overline{U}(p, s) U(p, s) = \frac{\gamma^{\mu} p_{\mu} + m}{2m}, \quad (4.17)$$

L'équation (4.16) devient

$$\begin{aligned} \sum_{s_1 s_2 s'_1 s'_2} |M_1|^2 &= \frac{e^4}{(p_1 - p'_2)^4} Tr \left[\frac{\gamma^{\mu} P'_{1\mu} + m}{2m} \gamma^{\mu} \frac{\gamma^1 P_1 - m}{2m} \gamma^{\nu} \right] \\ &\times Tr \left[\frac{\gamma^2 P_2 - m}{2m} \gamma_{\nu} \frac{\gamma'^2 P_2 + m}{2m} \gamma_{\mu} \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

Les traces dans se calculent aisement en utilisant la relation suivante

$$Tr \left[\frac{\gamma'^1 p'_1 + m}{2m} \gamma^{\mu} \frac{\gamma^1 p_1 - m}{2m} \gamma^{\nu} \right] = 4 \left[P_1^{\nu} P'_1{}^{\mu} - g^{\mu\nu} p_1 p'_1 + p_{1\nu} p'_{1\nu} + M^2 g^{\mu\nu} \right] \quad (4.19)$$

donc

$$\begin{aligned} &Tr \left[\frac{\gamma'^1 p'_1 + m}{2m} \gamma^{\mu} \frac{\gamma^1 p_1 - m}{2m} \gamma^{\nu} \right] \times Tr \left[\frac{\gamma^2 p_2 - m}{2m} \gamma_{\nu} \frac{\gamma'^2 p_2 + m}{2m} \gamma_{\mu} \right] \\ &= 32[(p_1 p_2)^2 + (p_1 p'_2)^2 + 2M^2(p_1 p'_2 - p_1 p_2)]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Finalement le carré de l'amplitude du diagramme directe est donné par

$$\sum_{s_1 s_2 s'_1 s'_2} |M_1|^2 = \frac{32e^4}{(p_1 - p'_2)^4} [(p_1 p_2)^2 + (p_1 p'_2)^2 + 2M^2(p_1 p'_2 - p_1 p_2)] \quad (4.21)$$

En changeant p'_2 par p'_1 et p'_1 par p'_2 dans l'expression de $\sum_{s_1 s_2 s'_1 s'_2} |M_1|^2$, on obtient

$$\sum_{s_1 s_2 s'_1 s'_2} |M_2|^2 = \frac{32e^4}{(p_1 - p'_1)^4} [(p_1 p_2)^2 + (p_1 p'_1)^2 + 2M^2(p_1 p'_1 - p_1 p_2)] \quad (4.22)$$

En utilisant la même méthode on obtient

$$\sum_{s_1 s_2 s'_1 s'_2} M_1 M_2^* = \frac{e^4 \ell^{-\frac{1}{2}} (p_1 \theta p'_2 + p'_1 \theta p_2 - p_1 \theta p'_1 - p'_2 \theta p_2)}{(p_1 - p'_1)^2 (p_1 - p'_2)^2} [32(p_1 p_2)^2 + 2M^2 p_1 p_2] \quad (4.23)$$

et

$$\sum_{s_1 s_2 s'_1 s'_2} M_2 M_1^* = \frac{e^4 \ell^{+\frac{1}{2}} (p_1 \theta p'_2 + p'_1 \theta p_2 - p_1 \theta p'_1 - p'_2 \theta p_2)}{(p_1 - p'_1)^2 (p_1 - p'_2)^2} [32(p_1 p_2)^2 + 2M^2 p_1 p_2] \quad (4.24)$$

FIG. 4.1 – diffusion electron-electron dans le repere de centre de masse

En remplaçant (4.21, 4.22, 4.23, 4.24) dans (4.12), on obtient

$$\begin{aligned}
|M|_{moy}^2 &= \frac{32e^4[(p_1p_2)^2 + (p_1p'_2)^2 + 2M^2(p_1p'_2 - p_1p_2)]}{(p_1 - p'_1)^4} + \frac{32e^4[(p_1p_2)^2 + (p_1p'_1)^2 + 2M^2(p_1p'_1 - p_1p_2)]}{(p_1 - p'_1)^4} \\
&+ \frac{e^4e^{-\frac{i}{2}(p_1\theta p'_2 + p'_1\theta p_2 - p_1\theta p'_1 - p'_2\theta p_2)}}{(p_1 - p'_1)^2(p_1 - p'_2)^2} [32(p_1p_2)^2 + 2M^2p_1p_2] \\
&+ \frac{e^4e^{+\frac{i}{2}(p_1\theta p'_2 + p'_1\theta p_2 - p_1\theta p'_1 - p'_2\theta p_2)}}{(p_1 - p'_1)^2(p_1 - p'_2)^2} [32(p_1p_2)^2 + 2M^2p_1p_2] \tag{4.25}
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
|M|_{moy}^2 &= 8e^4 \left[\frac{(p_1p_2)^2 + (p_1p'_2)^2 + 2M^2(p_1p'_2 - p_1p_2)}{(p_1 - p'_2)^4} + \frac{(p_1p_2)^2 + (p_1p'_1)^2 + 2M^2(p_1p'_1 - p_1p_2)}{(p_1 - p'_1)^4} \right. \\
&\left. + 2 \frac{(p_1p_2)^2 - 2M^2p_1p_2}{(p_1 - p'_1)^2(p_1 - p'_2)^2} \cos(p_1\theta p'_2 + p'_1\theta p_2 - p_1\theta p'_1 - p'_2\theta p_2) \right] \tag{4.26}
\end{aligned}$$

Comme cette quantité est invariant de Lorentz, elle peut être calculée dans n'importe quel référentiel, et le choix le plus naturel est d'utiliser le référentiel du centre de masse dans lequel les lois de conservations donnent

$$\begin{aligned}
p_1^0 &= p_2^0 = p_1'^0 = p_2'^0 = E \\
\mathbf{p}_1 &= -\mathbf{p}_2, \quad \mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2 \\
p_1^2 &= p_2^2 = m_0^2, \quad p_1'^2 = p_2'^2 = m_0^2 \cos^2 \theta \\
p_1p_2 &= p_1'p_2' = p_1^{02} + \mathbf{p}_1^2 = E^2 + E^2 - m_0^2 = 2E^2 \\
p_1p'_2 &= p_2p'_1 = p_1^{02} + \mathbf{p}_1\mathbf{p}'_2 = E^2 + (E^2 - m_0^2) \cos \theta = E^2 (1 + \cos \theta) = 2E^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \\
p_1p'_1 &= p_2p'_2 = p_1^{02} + \mathbf{p}_1\mathbf{p}'_1 = E^2 - (E^2 - m_0^2) \cos \theta = E^2 (1 - \cos \theta) = 2E^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \tag{4.27} \\
s &= (p_1 + p_2)^2 = 4E^2, s = (p_1 - p'_1)^2 = 2E^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, u = (p_1 - p'_2)^2 = 2E^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \\
p_1\theta p'_2 &= -E (\mathbf{p}_1\theta_{0i} + \theta_{0i}\mathbf{p}'_1) - \mathbf{p}_1\theta_{ij}\mathbf{p}'_1 \\
p'_1\theta p_2 &= -E (\mathbf{p}'_1\theta_{0i} + \theta_{0i}\mathbf{p}_1) - \mathbf{p}'_1\theta_{ij}\mathbf{p}_1 \\
p_1\theta p'_1 &= -E (\mathbf{p}_1\theta_{0i} - \theta_{0i}\mathbf{p}'_1) + \mathbf{p}_1\theta_{ij}\mathbf{p}'_1 \\
p'_2\theta p_2 &= -E (-\mathbf{p}'_1\theta_{0i} + \theta_{0i}\mathbf{p}_1) + \mathbf{p}'_1\theta_{ij}\mathbf{p}_1
\end{aligned}$$

Dans le cas ultrarelativiste on a ($E \gg m_0$), et ceci nous permet de negliger les termes en m_0^2 et m_0^4 . En remplaçant dans (3.66) on obtient

$$|M|_{\text{moy}}^2 = 8e^4 \left[\frac{1 + \cos^4 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1 + \sin^4 \frac{\theta}{2}}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{2}{\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} \cos(p_1 \theta p'_2 + p'_1 \theta p_2 - p_1 \theta p'_1 - p'_2 \theta p_2) \right] \quad (4.28)$$

En remplaçant dans l'expression de la section efficace (2.15) et utilisant la relation suivante

$$\sqrt{p_1 p_2 - m^2} = 2E \mathbf{p}_2 \quad (4.29)$$

la section efficace différentielle pour la diffusion électron-positron dans le cadre de la théorie non locale de l'électrodynamique quantique est finalement donnée par l'expression

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \frac{\alpha^4}{8E^2} \left[\frac{1 + \cos^4 \frac{\theta}{2}}{2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1 + \sin^4 \frac{\theta}{2}}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} \cos(4E\theta_{0i} \mathbf{p}'_1) \right] \quad (4.30)$$

on remarque l'apparition de parametre θ au expressio de la section efficace

Chapitre 5

conclusion

Dans ce mémoire nous avons procédé à l'étude détaillée d'électrodynamique quantique non commutative qui s'obtient en remplaçant le produit habituel par le produit étoile.

En effet en théorie des champs non commutative, à cause des propriétés du produit $*$, la partie quadratique de l'action n'est pas changée et par conséquent seulement la partie dans l'interaction peut marquer la non commutativité. C'est un point très important à maintenir dans l'esprit que la théorie des champs non commutative libre est la même que celle de la théorie commutative et par conséquent les équations classiques de mouvement des deux formalismes sont semblables.

Le deuxième chapitre contient deux parties. Dans la première partie, nous avons procédé à l'étude classique de la théorie à travers l'utilisation de formalisme lagrangien, où nous avons pu montrer que les équations de mouvement de cette théorie ont la même forme que celles de la théorie non commutative, et nous avons conduit à un courant conservé.

Le troisième chapitre qui concernait la quantification canonique, nous avons obtenu un propagateur de Feynman égale à celui de la théorie commutative. Aussi les solutions des équations de mouvement nous ont conduit à un tenseur de moment-énergie égale à celui de la théorie commutative.

Dans le quatrième chapitre nous avons déduit de nouvelles règles de Feynman, où on a obtenu un vertex déformé. Nous avons terminé ce chapitre par l'application de ces nouvelles règles de Feynman au calcul de section efficace différentielle de la diffusion électron-électron où on a trouvé une correction dépend de paramètre de non commutativité θ .

Chapitre 6

Bibliographie

- [1] H.Goldstein,"ClassicalMechanics", AddisonWesly,(3rdEd.,2000)
- [2] p.A.M Dirac "The principles of Quantum Mechanic",OX Ford University press,(1958)
- [3], M.R.Douglas, N.A.Nekrasov, non commutative .field theory,Rev :Mod.phys.73(2001) 977–1029,hep-th/010604810
- [4] Richard J.Szabo,Quantum .field theory on non commutative spaces,Phys.Rept 378(2003) 207-299,hep-th/0109162
- [5] S.Doplicher,K.Fredenhagen,and J.E.Roberts.Space-time Quantization In- duced by Clas- sical Gravity,Phys.Lett.B331,39(1994).
- [6] S.Doplicher,K.Fredenhagen,and J.E.Roberts.The Quantum Structure of Space-time at the planck Scale and Quantum Fields, Commun.Math.phys.172,187(1995)
- [7] N.Seiberg,E.Witten.String Theory and non commutative Geometry.JHEP 09, 032(1999),hep- th/9908142
- [8] L.Susskind.The Quantum Hall Fluid and non commutative Chern Simons Theory.(2001),hep- th/0101029
- [9] Masashi Hamanaka,non commutative Solitons and D-branes ,hep-th/0303256
- [10] Michael Wohlgenannt,Field Theoretical Models on Non commutative Spaces,am Institut fur theoretische physik der Ludwig-Maximilians-Universitat M unchen,25 Februar 2003.

ملخص

في هذه الأطروحة درسنا نظرية الديناميكا الكهربائية غير تبادلية حيث تبين أن تأثير الهندسة غير تبادلية لا يظهر في النظرية الحرة. ولكن في حالة التفاعل، حصلنا على قواعد فينمن جديدة أين لاحظنا ظهور معامل أسي. وهذا ما أدى إلى تغيير في الزاوية الصلبة للتفاعل إلكترون-إلكترون.

Abstract

In this thesis we studied the theory of no-commutative electrodynamics where it was found that the non commutativity does not appear in the free theory. But in case of interaction was obtained Feynman new rules or we notice the appearance of an exponential factor in the vertex function. This leads to a corrected cross section of the electron-electron scattering.

RESUME

Dans ce mémoire on a étudié la théorie de l'électrodynamique non commutative où on a trouvé que la non commutativité n'apparisse pas à la théorie libre. Mais au cas d'interaction, on a obtenu des nouvelles règles de Feynman ou on remarque l'apparition d'un facteur exponentiel dans la fonction de vertex. Cela conduit à une section efficace corrigée de la diffusion électron-électron.