



جامعة المسيلة
كلية الرياضيات و الإعلام الآلي
كتيبة الكلية
MAS/MAT/94
UNIVERSITE DE M'SILA



FACULTE DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et informatiques

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées et Discrètes

Par :

ROUBACHE SAMIA

Sujet

**SUR QUELQUES METHODES
DE RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS
INTEGRALES**

Soutenu le : 18 / 06 / 2014

Dirigé par: Mr. MERZOUGUI ABDELKARIM

- | | | | |
|------------------------------|------|--------------|-----------|
| 1) Benhamidouche Nourdine | Prof | UNIV.M'SILA | Président |
| 2) Benabderrahmane Benyattou | Prof | UNIV. M'SILA | Examineur |
| 3) Dilmi Mourad | Prof | UNIV. M'SILA | Examineur |

Promotion : 2013/2014

NOTATIONS

A	Opérateur intégral.
A_n	Suite d'approximation de A .
$C[a, b]$	Ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$.
$C^n[a, b]$	Classe des fonctions n fois continument dérivables sur $[a, b]$.
\mathbb{C}	Ensemble des nombres complexes.
$k(x, t)$	Noyau de l'équation intégrale.
λ	Paramètre numérique.
u	Fonction inconnue dans l'équation intégrale.
\langle, \rangle	Produit scalaire
\mathbb{R}	Ensemble des réels
R^n	Ensemble des vecteurs réels à n dimensions.

Table des figures

Figure 1: Solution exacte et la proché des méthodes (trapèze, adaptative, adaptative modifie) sur un problème à solution oscillaire.

Figure 2: Erreur des méthodes (trapèze, adaptative, adaptative modifie) sur un problème à solution oscillaire.

Figure 3: Solution exacte et la proché des méthodes (trapèze, adaptative, adaptative modifie) sur un problème à solution quadratique polynomiale

Figure 4: Erreur des méthodes (trapèze, adaptative, adaptative modifie) sur un problème à solution quadratique polynomiale

Figure 5: Solution exacte et la proché des méthodes (trapèze, adaptative, adaptative modifie) sur un problème à solution exponentielle.

Liste des tableaux

Tableau 1: Solution exacte et la prochee des méthodes (trapèze, adaptative, adaptative modifie) sur un problème à solution oscillaire.

Tableau 2: Erreur des méthodes (trapèze, adaptative, adaptative modifie) sur un problème à solution oscillaire.

Tableau 3: Solution exacte et la prochee des méthodes (trapèze, adaptative, adaptative modifie) sur un problème à solution quadratique polynomiale

Tableau 4: Erreur des méthodes (trapèze, adaptative, adaptative modifie) sur un problème à solution quadratique polynomiale.

Tableau 5: Solution exacte et la prochee des méthodes (trapèze, adaptative, adaptative modifie) sur un problème à solution exponentielle

1.1	Opérateurs intégrés linéaires	2
1.2	Opérateurs adjoints	2
1.3	Opérateurs commutés	4
1.4	Opérateurs produits	8
1.2	Classification des fractions intégrales	7
1.2.1	Equations intégrales linéaires	7
1.2.2	Equations intégrales non-linéaires	9
1.2.3	Equations intégrales stochastiques	10
1.2.4	Equations intégrales singulières	10
1.3	Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale	13
2	Méthodes directes de résolution des équations intégrales	16
2.1	Méthodes linéaires	16
2.1.1	Méthode usuelle	16
2.2	Equations intégrales de Volterra	17
2.2.1	Méthode de transformation de Laplace	17
2.2.2	Méthode de la substitution de la série	21
2.2.3	Méthode des approximations successives	21
2.2.4	Méthode de décomposition d'Adomian	23

Table des matières		
Introduction		1
1 Notations générales sur les équations intégrales		2
1.1 Introduction et notations sur les opérateurs		2
1.1.1 Opérateurs intégrales linéaires		2
1.1.2 Opérateurs adjoints		3
1.1.3 Opérateurs compacts		4
1.1.4 Opérateurs produits		5
1.2 Classifications des équations intégrales		6
1.2.1 Equations intégrales linéaires		6
1.2.2 Equations intégrales non-linéaires		8
1.2.3 Equations intégrales mixtes		10
1.2.4 Equations intégrales singulières		10
1.3 Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale:		11
2 Méthodes directes de résolution des équations intégrales		16
2.1 Méthodes directes		16
2.1.1 Méthode exacte		16
2.2 Equations intégrales de Volterra		17
2.2.1 Méthode de transformation de Laplace		17
2.2.2 Méthode de la solution de la série		19
2.2.3 Méthode des approximations successives		21
2.2.4 Méthode de décomposition d'Adomian:		25

2.3	Equations intégrales de Fredholm	27
2.3.1	Méthode des approximations successives(série de Newmann)	27
2.3.2	Méthode de décomposition D'Adomian	30
2.3.3	Méthode de direct calcul	31
3	Résolution numérique des équations intégrales	33
3.1	Equations intégrales de Volterra	33
3.1.1	Introduction	33
3.1.2	Méthode de trapèze	33
3.1.3	Méthode adaptative	35
3.1.4	Méthode adaptative modifié	36
3.1.5	Implémentation numérique:	38
	Conclusion générale	47
	Bibliographie	48

Introduction

Les méthodes de résolution numérique des équations intégrales jouent un rôle très important dans divers domaines scientifiques à savoir (élasticité, plasticité, chaleur, dynamique des fluides, etc...). Avec l'avantage des machines de calcul numérique, notamment les ordinateurs, ces méthodes sont devenues aujourd'hui un outil essentiel pour l'investigation dans les différents problèmes fondamentaux de notre assimilation des phénomènes scientifiques qui sont difficiles, à savoir impossible à résoudre dans le passé. Ainsi, notons qu'il existe actuellement un grand nombre de méthodes numériques pour résoudre ce genre d'équations. Historiquement J. Fourier (1768-1830) est le premier mathématicien qui a découvert ce genre d'équations intégrales dû au fait qu'il a obtenu la formule de la transformation de Fourier. Il est clair qu'on peut interpréter la formule d'inversion en tant que fournir l'opérateur inverse de l'opérateur d'intégrale de Fourier.

En 1837, J. Liouville (1809-1882) a publié un article sur la relation entre les équations intégrales et les équations différentielles dans lequel il montrait qu'une solution particulière d'une équation différentielle linéaire est obtenue en résolvant une équation intégrale.

En 1887, V. Volterra (1860-1940) a établi la méthode de résolution des équations intégrales par les noyaux itérés. En outre, il a étendu la théorie des équations intégrales aux équations intégro-différentielles et aux équations intégrales singulières.

Ainsi, la théorie des équations intégrales est devenue un domaine de recherche actif dans les mathématiques appliquées et la physique mathématique.

L'importance des équations intégrales dans toutes les branches de la science et l'ingénierie nous amène à étudier certaines de ces équations et les réaliser numériquement.

Dans ce mémoire, nous allons traiter quelques méthodes de résolution numériques des équations intégrales.

Suivant ces axes normaux, notre travail est divisé en trois chapitres :

Le premier chapitre: nous rappelons les notions sur les opérateurs et donnons les définitions de l'opérateur intégrale linéaire, l'opérateur adjoint et opérateur compacts et ses propriétés, on représenté ensuite la classification des équations intégrales linéaires et non linéaires, puis on étudie l'existence et l'unicité.

Le deuxième chapitre: On présente les méthodes directes de résolution des équations intégrales, comme on donne quelques méthode suivies par des exemples sur ces méthodes.

Le troisième chapitre: On traite la résolution numérique de l'équation intégrale linéaire de Volterra par différentes méthodes, à savoir (la méthode de trapèze, la méthode adaptative et adaptative modifiée) en comparant pour chaque cas les résultats approchés avec la solution exacte. On termine notre mémoire par une conclusion générale.

Le but visé dans ce premier chapitre est de familiariser le lecteur avec le concept de l'équation intégrale. Dans un premier temps on donne quelques notations sur les opérateurs (opérateur intégral linéaire, l'opérateur adjoint, l'opérateur compact...). Ensuite la classification des équations à variables linéaires et non linéaires, équations intégrales linéaires et équations intégrales non linéaires. Puis on étudie l'existence et l'unicité.

1.1 Introduction et notations sur les opérateurs

1.1.1 Opérateurs intégrales linéaires

Définition 1.1.1

Soit $x \in [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, on appelle l'opérateur T défini par $(Tx)(t) = \int_a^b k(x, t) \phi(x) dx$ est un opérateur qui admet une formulation de la forme suivante.

$$Tx(t) = \int_a^b k(x, t) \phi(x) dx$$

La fonction $k(x, t)$ est appelée noyau de l'opérateur T .

RESUMES

Dans ce travail on s'intéresse à la résolution numérique des équations intégrales de Volterra et Fredholm.

Notre travail consiste à trouver la solution exacte et approchées, pour ce faire on a premièrement utilisé la méthode de la transformé de Laplace, la méthode de la série, la méthode de décomposition d'Adomian,

etc... Deuxièmement, pour les solutions approchées, on a utilisé la méthode de crappe, la méthode adaptative et adaptative modifiée, en comparant pour chaque cas les résultats approchées à-ec la solution

Bibliographie

- [1] **A.D. Polyanin, A.V. Manzhirov:** Integral equations, CRC press, 1998.
- [2] **A.M. Wazwaz:** Linear and nonlinear integral equations, Springer, 2011.
- [3] **A. Rahmoun:** Résolution numérique des équations intégrales, mémoire de Magister, Université de m'sila, 2002.
- [4] **A. Rahmoune:** Sur la Résolution numérique des équations intégrales en utilisant des fonctions spéciales, Thèse Doctora, Université de Batna, 2011.
- [5] **B. GAGUI:** Résolution des équations integrales par les méthodes adaptatives, mémoire de Magister, Université de m'sila, 2006.
- [6] **D. Shulia:** On one Fredholm integral equation of third kind, Georgian Mathematical Journal, Vol. 4, No. 5, 1997, 461-476.
- [7] **M. Guesba:** Sur quelques équations intégrales non linéaires, mémoire de Magister, Université de kasdi merbah Ouargla, 2012.
- [8] **M. Nadir:** Cours sur les équations intégrales, université de M'sila, 2013.
- [9] **M. Rahman:** Integral equations and their applications, WITpress, 2007.

RESUMES

Dans ce travail on s'intéresse à la résolution numérique des équations intégrales de Volterra et Fredholm.

Notre travail consiste à trouver la solution exacte et approchée, pour se faire on a premièrement utilisé la méthode de la transformé de Laplace, la méthode de la série, la méthode de décomposition d'Adomian, etc...Deuxièmement, pour évalué la solution approchée on a utilisé la méthode de trapèze, la méthode adaptative et adaptative modifiée, en comparant pour chaque cas les résultats approchés avec la solution exacte.

Mots clés: Equation intégrale, solution exacte, équation de Fredholm, équation de Volterra, opérateur.

ABSTRACT

In this work we are interested in the numerical solution of integral equations of Volterra and Fredholm.

Our job is to find the exact and approximate solution to be used first was the method of Laplace transform, the method of the series, the method of Adomian decomposition, etc ... Second, to evaluated the solution were used the approximate trapezoid method, adaptive and modified adaptive method, by comparing the results in each case between the approximate and the exact solutions.

Keywords: Integral equation, exact solution, Fredholm equation, Volterra equation, operator

ملخص

في هذا البحث لقد تم دراسة بعض حلول المعادلات الخطية التي تدعى فولتيرا وفريد هولم التكاملية التي تستخدم في المجالات التكنولوجية والرياضية والفيزياء الرياضية.

بحثنا هذا يرتكز إيجاد الحلول الدقيقة والتقريبية لأجل ذلك في الأول استخدمنا طريقة تحويل لابلاس وطريقة السلسلة، طريقة تحليل أدومان... الخ، ثانيا لتقييم الحلول التقريبية استعمالنا طريقة شبه المنحرف وطريقة التكيف وطريقة التكيف المعدلة، حيث من أجل كل حالة قمنا بمقارنة النتائج التقريبية مع النتائج الدقيقة.