

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT ELECTRIQUE

FILIERE : AUTOMATIQUE
OPTION : ROBOTIQUE

N°:.....



Mémoire présenté pour l'obtention
Du diplôme de Master Académique

Par:

- AISSOU Amira Yassamine
- BEGHRICHE Souhayb

Intitulé

**Etude comparative entre la commande
PID fractionnaire et la commande PID
fractionnalisée d'une classe de systèmes linéaires**

Soutenu devant le jury composé de:

Riyadh ROUABHI	Prof.	UniversitéM'sila	Président
Khatir KHETTAB	Prof.	UniversitéM'sila	Rapporteur
Abdelouahab BOUKHALFA	MCA	UniversitéM'sila	examineur
Abderrahim ZEMMIT	MCA	UniversitéM'sila	examineur

Année universitaire : 2024/2025

Remerciement

Tout d'abord, nous exprimons notre profonde gratitude envers Dieu Tout-Puissant, pour la santé, la volonté, la patience et le courage qu'Il nous a accordés tout au long de notre parcours académique.

Nous tenons à remercier chaleureusement le **Prof. Khatir KHETTAB**, notre encadreur, pour ses précieux conseils, ses orientations éclairées, sa grande patience et son suivi attentif. Ses remarques et suggestions ont largement contribué à l'achèvement de ce travail.

Nos remerciements s'adressent également à tous les enseignants qui ont joué un rôle dans notre formation, ainsi qu'à tous les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail en acceptant d'en être les évaluateurs.

Enfin, nous exprimons notre sincère reconnaissance à nos ami(e)s et collègues pour leur soutien moral et matériel durant toute la période de réalisation de ce projet.

DEDICACE

ALHAMDOU LILLAH, qui m'a accordé la force, la patience et la sagesse nécessaires pour mener à bien ce travail.

Louange à Dieu pour Ses bien faits innombrables et Son soutien constant tout au long de ce parcours.

À mes chers parents,

Ma source d'amour, de soutien et de motivation. Merci pour vos prières, vos encouragements, vos sacrifices et votre présence inestimable. Cette réussite vous est dédiée.

À mes enseignants et encadreurs,

Je vous remercie sincèrement pour votre disponibilité, vos conseils avisés et votre accompagnement tout au long de ce mémoire.

À toutes les personnes qui m'ont soutenue, de près ou de loin, par un mot, un geste, un sourire ou une pensée...

Je vous suis profondément reconnaissante.

Enfin, à ceux qui ont cru en moi quand je doutais : merci du fond du cœur.

Liste des Tableaux

Tableau III.1. Règle de réglage de Ziegler-Nichols basée sur la réponse en échelon.....	37
Tableau III.2.Type du contrôleur selon les différentes valeurs de α et β	39

Liste des Figures

Fig. 2.1: Diagramme de Bode de $1/(1 + sT)^m$	8
Figure II.1.Représentation de diagramme de Bode du modèle : $1 + sT^m$	22
Figure III.1 montre le système du premier ordre fractionnalisé :	30
Figure III.1 Système fractionnalisé du premier ordre	31
Figure III.1 Système fractionnalisé du second ordre	31
Figure III.2 montre le système du seconde ordre fractionnalisé :.....	31
Figure III.3. Schéma de principe d'un moteur à courant continu.	32
Figure III.4. Performances d'un système de commande.	33
Figure III.5. Système de commande à retour unitaire classique.....	34
Figure III.6. Réponse par échelon unitaire d'une plante.	36
Figure III.7. Courbe de réponse en forme de s.	36
Figure III.8. Système de commande à retour unitaire (cas d'un PID fractionnaire).....	37
Figure III.9. (a) Ordre entier, (b) Ordre fractionnaire.	38
Figure III.10. Système de commande PID fractionnalisée à retour unitaire.	39
Figure III.11. Diagramme de Bode (amplitude et phase) : Système premier ordre (pour $\alpha=0.1$)	41
Figure III.12. Diagramme de Bode (amplitude et phase) : Système premier ordre (pour $\alpha=0.5$)	41
Figure III.13. Diagramme de Bode (amplitude et phase) : Système seconde ordre (pour $\alpha=0.1$)	41
Figure III.14. Diagramme de Bode (amplitude et phase) : Système second ordre (pour $\alpha=0.5$)	42
Figure III.15. Reponse Step : Système de premier ordre.....	42
Figure III.16. Réponse Step : Système du seconde ordre.....	43
Figure III.17. Vitesse : Commande PID/PID fractionnaire et PID fractionnalisé (pour $\alpha=0.1$).	43
Figure III.18. Vitesse : Commande PID/PID fractionnaire et PID fractionnalisé (pour $\alpha=0.5$).	43

Sommaire :

Dédicace

Remerciements

Liste des tableaux

Listes des Figures

Introduction générale	1
Partie 01 : Etude bibliographique	3
Chapitre I : Concepts fondamentaux et méthodes de calculs fractionnaires	2
I.1. Introduction	3
I.2. Opérations d'intégration et dérivation d'ordre fractionnaire	3
I.3. Domaines d'application des systèmes fractionnaires	4
I.4. Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire	4
I.5. Solutions numériques des équations différentielles fractionnaires	6
I.6. Approximations analogiques d'opérateurs analogiques d'ordre fractionnaire	7
I.7. Définitions et propriétés	12
I.8. Méthodes opérationnelles fractionnaires	13
I.9. Conclusion	16
Chapitre II : Approches pour l'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire	16
II.1. Introduction	17
II.2. Opérateurs d'ordre fractionnaire	17
II.2.1. Opérateurs analogiques d'ordre fractionnaire	
II.2.2. Opérateurs numériques d'ordre fractionnaires	
II.3. Approximation des systèmes d'ordre fractionnaire	18
II.3.1.1 Approximation par expansion en fractions continues (EFC)	
II.3.1.2. Méthode de Matsu da	
II.3.1.3. Méthode de Carlson	
II.3.1.4 Méthodes d'approximation par un modèle rationnel à temps continu	
II.3.1.4.1. Méthode d'Oust loup	
II.3.1.4.1.1. Dérivateur généralisé	
II.3.1.4.2. Méthode de Charef (Fonction de singularité)	
II.3.1.4.2.1. Approximation des systèmes fractionnaire de premier ordre	
II.3.1.4.2.2. Approximation des systèmes fractionnaires d'ordres multiples	
II.3.1.4.2.3. Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire	
II.3.1.4.2.4. Approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire	
II.3.2.2.1. Méthode d'Al Alaoui	
II.3.2.2.2. Méthode de Simpson	
II.3.2.2.3. Méthode de Tustin	

II.3.2.2.4. Méthode d'Euler (Grünwald)	
II.4 Performance des systèmes à ordre fractionnaire	28
II.5 Conclusion	28
Chapitre III: Commande PID fractionnalisée d'un MCC : études comparatives avec PID classique	29
III.1. Introduction	30
III.2. Systèmes fractionnalisés	30
III.2.1. Système du premier et seconde ordre fractionnalisé	
III.2.2. Système du moteur à courant continu (MCC)	
III.2.3. Modélisation du Moteur à courant continu	
III.2.3.1. Équation électrique	
III.3. Commande PID	33
III.4. Contrôleur PID classique	34
III.4.1. Réglage de PID	
III.5. Contrôleur $PI\alpha D\beta$ d'ordre fractionnaire	37
III.6. Contrôleur PID Fractionnalisé	39
III.7. Simulation, résultats et commentaires	40
III.8. Conclusion	44
Conclusion générale	44
Références Bibliographiques	46

Introduction générale

Introduction générale

Avec l'évolution rapide des technologies modernes, la recherche de modèles mathématiques plus représentatifs des phénomènes physiques et techniques est devenue un enjeu majeur. Dans ce contexte, les systèmes dynamiques à ordre fractionnaire se distinguent comme une alternative puissante aux modèles classiques à ordre entier. Leur capacité à intégrer des effets de mémoire, de non-localité et de dynamique intermédiaire permet une modélisation plus fidèle de nombreux processus réels, notamment dans les domaines de la commande, du traitement du signal, de l'électrochimie, ou encore de la biologie [3,7,12].

L'idée des dérivées d'ordre non entier, bien que déjà évoquée dès le XVIIe siècle par Leibniz, a longtemps été considérée comme une curiosité mathématique. Ce n'est qu'avec l'avènement de l'informatique et des outils de calcul numérique que les systèmes fractionnaires ont trouvé des applications concrètes, appuyées par des travaux théoriques solides (Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov, etc.) [7,9,22].

Cependant, ces modèles présentent une particularité importante : leur représentation mathématique est souvent irrationnelle ou infinie, ce qui rend leur implémentation directe difficile, voire impossible, dans les environnements physiques ou numériques. Cela justifie la nécessité de développer des méthodes d'approximation efficaces, capables de convertir ces représentations en modèles rationnels équivalents, tout en préservant les propriétés dynamiques essentielles du système d'origine [8,9,15].

L'objectif de ce travail est de présenter une étude comparative entre deux approches de commande avancée : la commande PID fractionnaire ($PI\lambda D\mu$) et une nouvelle approche appelée commande PID fractionnalisée, en les comparant à la commande PID classique. L'étude vise à évaluer les performances de ces méthodes sur une classe de systèmes linéaires. Des simulations sont menées afin d'analyser la précision, la stabilité et la robustesse de chaque approche. Les résultats obtenus à l'aide de MATLAB, appliqués à un système à moteur à courant continu (MCC), montrent que les approches fractionnaires (fractionnalisées) offrent, dans certaines conditions, un meilleur comportement dynamique que la commande PID classique [11].

Le présent travail s'inscrit dans cette démarche et s'articule autour de trois axes principaux :

- Le premier chapitre introduit les fondements du calcul fractionnaire : définitions classiques (Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov), propriétés, interprétations

physiques, ainsi que les avantages spécifiques de ces outils pour la modélisation des systèmes dynamiques.

- Le deuxième chapitre explore les principales méthodes d'approximation, en distinguant les approches analogiques (filtres passifs, réseaux RC) et numériques (Matsuda, Oustaloup, Charef, méthodes par optimisation fréquentielle), en soulignant leur domaine de validité, leur complexité et leurs performances respectives.
- Le troisième chapitre est consacré à l'implémentation expérimentale d'un régulateur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ appliqué à la commande d'un moteur à courant continu, permettant une comparaison entre les approches classiques et fractionnaires sur le plan pratique (performance, robustesse, stabilité).

Au-delà de cette structure, ce mémoire vise à :

- Mettre en lumière l'intérêt croissant des modèles fractionnaires dans les disciplines de pointe ;
- Analyser les défis liés à leur approximation, notamment en termes de bande de fréquence, de stabilité et de complexité ;
- Souligner les limites des approches actuelles, qu'elles soient théoriques (non-unicité des définitions) ou pratiques (implémentation en temps réel, précision numérique) ;
- Ouvrir des perspectives vers des approches hybrides, combinant intelligence artificielle, optimisation numérique et modélisation fractionnaire.

En somme, ce travail a pour ambition de démontrer la pertinence et la faisabilité de l'utilisation des systèmes à ordre fractionnaire dans un contexte de commande avancée, tout en posant les bases d'une réflexion sur les méthodes de conception et de mise en œuvre les plus adaptées à leurs spécificités.

Chapitre I :
Concepts fondamentaux et
méthodes de calculs
fractionnaires

I.1. Introduction

Le calcul fractionnaire généralise les opérations classiques de dérivation et d'intégration à des ordres réels ou complexes. Il est utilisé pour modéliser des phénomènes à mémoire longue (viscoélasticité, diffusion anormale, etc.) et offre des outils puissants pour l'analyse de systèmes dynamiques non locaux.

I.2. Opérations d'intégration et dérivation d'ordre fractionnaire

Cette partie introduit les concepts clés du **calcul fractionnaire**, une généralisation des opérations classiques de dérivation et d'intégration à des ordres réels ou complexes. Contrairement aux opérateurs d'ordre entier, une **définition unique** régit l'intégration non entière, tandis que **plusieurs approches** coexistent pour la dérivation fractionnaire [1].

I.2.1 Intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville :

Définition 1.1 : soient $\alpha \in R^+$ et $f: [t_0, \infty) \rightarrow R$ une fonction localement intégrable.

L'intégrale d'ordre α de borne inférieure t_0 est définie par :

$${}_{t_0}I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \tag{I.1}$$

Où $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{\alpha-1} dt$ désigne la fonction Gamma d'Euler.

Dérivation non entière :

Définition de Riemann-Liouville (R-L) : Soient $\alpha \in R^+$ avec $R(\alpha) > 0$, n un entier positif $t_0 \in R$ et f une fonction Localement intégrable définie sur $[t_0, \infty)$. La dérivée d'ordre α de f de borne inférieure t_0 est définie par :

$${}_{t_0}^{RL}D_t^\alpha f(t) \triangleq \frac{d^n}{dt^n} \left({}_{t_0}I_t^{(n-\alpha)} f(t) \right) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \tag{I.2}$$

Avec $(n - \alpha) < \alpha < n$.

I.2.2. Définition de Caputo :

Caputo a introduit une autre formulation de la dérivée d'ordre fractionnaire commesuit :

$${}_{t_0}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-1}} d\tau \tag{I.3}$$

Avec n est un entier positif vérifiant l'inégalité $(n - 1) < \alpha < n$.

I.2.3. Définition de Grunwald-Letnikov (G-L) : Basée sur une généralisation discrète de la dérivée entière :

La dérivée d'ordre fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de G-L est donc : [2]

$${}^{GL}_t D_t^\alpha f(t) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-\alpha}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh) \quad (I.4)$$

Où $\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{j! \Gamma(\alpha-j+1)}$ et $[x]$ dénotes la partie entière de x , h le pas d'échantillonnage et $\binom{\alpha}{j}$ sont appelés coefficient binomiaux.

I.3. Domaines d'application des systèmes fractionnaires

Les systèmes fractionnaires apparaissent de plus en plus dans les différents domaines de la recherche. Toutefois, l'intérêt progressif que l'on porte à ces systèmes est leurs applications en sciences fondamentales et appliquées.

- En Automatique
- En Physique
- Electronique
- chimie
- En Mécanique
- En Acoustique

I.4. Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire :

I.4.1. Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire :

La transformée de Laplace de l'opérateur d'intégration non entier défini par (I.9) est donnée par :

$$\mathcal{L}\{ {}_0 I_t^\alpha f(t) \} = \frac{F(s)}{s^\alpha} \quad \text{où } \alpha > 0 \quad (I.5)$$

Ou s représente la variable de Laplace et $(n - 1) < \alpha < n$.

Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire :

Nous citons dans ce qui suit la transformée de Laplace des différentes définitions de la dérivée.

a. Dérivée de Riemann-Liouville [3]

$$\mathcal{L}\{ {}_0^{RL} D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [{}_0^{RL} D^{\alpha-1-k} f(t)]_{t=0} \quad (I.6)$$

Avec $(n - 1) < \alpha < n$.

La transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville est bien établie, mais son utilisation pratique demeure limitée en raison de l'absence d'interprétation physique claire des conditions initiales pour les dérivées fractionnaires en $t = 0$.

b. Dérivée de Caputo :

$$\mathcal{L}\{ {}^C_0 D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \tag{I.7}$$

Les conditions initiales apparaissant dans (I.7) sont données en fonction d'une dérivée entière évaluée à l'origine.

c. Dérivée de Grünwald-Leitnikov :

$$\mathcal{L}\{ {}^{GL}_0 D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s)$$

Remarque :

La résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaire à l'aide de la transformée de Laplace s'effectue de manière analogue à celle des équations différentielles d'ordre entier.

I.4.2. Évaluation numérique de la dérivée fractionnaire :

Pour le calcul numérique des intégrales et des dérivées d'ordre fractionnaire, l'approche la plus couramment utilisée repose sur l'approximation de la dérivée fractionnaire selon la définition de Grünwald-Letnikov, présentée à la section précédente.

$${}^{GL}_{t_0} D_t^\alpha f(t) = \frac{a \Delta_h^\alpha f(t)}{h^\alpha} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-\alpha}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh) \tag{I.8}$$

Pour une fonction causale $f(t)$, et pour $t = kh$, nous aurons l'approximation suivante :

$${}^{GL}_{t_0} D_t^\alpha f(kh) = \frac{a \Delta_h^\alpha f(kh)}{h^\alpha} = h^{-\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(kh - jh) \tag{I.9}$$

Où $\binom{\alpha}{j}$ sont des coefficients binomiaux et $c_j^\alpha = (-1)^j \binom{\alpha}{j}$ ($j = 0, 1, \dots$)

Le calcul des coefficients se fait par formule de récurrence suivante :

$$c_0^\alpha = 1, c_j^\alpha = \left(1 - \frac{1+\alpha}{j}\right) c_{j-1}^\alpha \tag{I.10}$$

De même pour une fonction causale $f(t)$ et pour $t = kh$ l'approximation de l'intégrale est donnée par

$$I^\mu(kh) = D^{-\mu} f(kh) \equiv h^\mu \sum_{j=0}^k c_j^{(-\mu)} f(kh - jh) \tag{I.11}$$

Où les coefficients $c_j^{(-\mu)}$ sont des coefficients binomiaux qui peuvent être calculés par la formule de récurrence suivante pour $j = 1, 2, \dots k$

$$c_0^{(-\mu)} = 1, \text{ et } c_j^{(-\mu)} = \left(1 - \frac{1-\mu}{j}\right) c_{j-1}^{(-\mu)} \quad (I.12)$$

Equations différentielles fractionnaires :

On se restreint dans cette section aux équations d'un seul terme de dérivation de la forme :

$$D_0^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \quad (I.13)$$

Existence et unicité :

Soit α un réel positif vérifiant $m - 1 < \alpha < m$, ${}^c D^\alpha$ désigne l'opérateur de dérivation au sens de Caputo.

On se donne le problème aux conditions initiales suivant :

$$\begin{cases} {}^c D_0^\alpha y(t) = f(t, y) \\ D_0^\alpha y(0) = y_0^k, k = 0, 1, \dots, m - 1 \end{cases} \quad (I.14)$$

Lemme 1.1

Si la fonction f est continue alors le problème aux conditions initiales (I.14) est équivalent à l'équation intégrale non linéaire de Volterra suivante :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} y_0^k \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (I.15)$$

Dans le cas où $0 < \alpha < 1$ l'équation (I.15) devient

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (I.16)$$

I.5. Solutions numériques des équations différentielles fractionnaires :

Au contraire de la résolution numérique d'une équation différentielle ordinaire, la simulation numérique dans le cas fractionnaire pose des problèmes. Dans la littérature du chaos fractionnaire, deux méthodes des approximations ont été proposées pour résoudre une équation différentielle fractionnaire numériquement.

La première méthode, connue comme approximation de domaine fréquentiel, est basée sur l'approximation du comportement du système d'ordre fractionnaire dans le domaine fréquentiel. Dans un algorithme a été proposé de calculer les approximations de transfert linéaires de la fonction $\frac{1}{s^\alpha}$.

La deuxième méthode est une version améliorée de l'algorithme Adams Bashforth-Moulton et est proposée et basée sur les (Predictor-Correctors). Pour expliquer la méthode, nous considérons l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha y(t) = f(t, y(t)) & 0 \leq t \leq T \\ y^{(k)}(0) = y_0^k, k = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases} \quad (I.17)$$

D'après le lemme précédent l'équation (1.17) est équivalente à l'équation intégrale deVolterra suivante

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} y_0^{(k)} \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (I.18)$$

Maintenant $h = \frac{T}{N}$, $t_n = nh$ ($n = 0, 1, \dots, N$), alors l'équation (1.18) peut être discrétiser comme suit :

$$y_h(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} y_0^{(k)} \frac{t_{n+1}^k}{k!} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f(t_{n+1}, y_h^p(t_{n+1})) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{k=0}^n a_{k,n+1} f(t_k, y_h(t_k)) \quad (I.19)$$

Où la valeur prédit de $y_h^p(t_{n+1})$ est déterminée par :

$$y_h^p(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} y_0^{(k)} \frac{t_{n+1}^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^n b_{k,n+1} f(t_k, y_h(t_k))$$

et,

$$a_{k,n+1} = \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^\alpha & k=0 \\ (n-k+2)^{\alpha+1} + (n-k)^{\alpha+1} - 2(n-k+1)^{\alpha+1} & 1 \leq k \leq n \\ 1 & k=n+1 \end{cases} \quad (I.20)$$

$$b_{k,n+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} ((n-k+1)^\alpha + (n-k)^\alpha)$$

L'erreur d'estimation de cette approximation est décrite comme suit :

$$\max_{k=0,1,\dots,N} |y(t_k) - y_n(t_k)| = O(h^p)$$

Où $p = \min(2, 1 + \alpha)$

I.6. Approximations analogiques d'opérateurs analogiques d'ordre fractionnaire :

I.6.1. Méthode de Chalef : Fonction de singularité

Cette méthode est basée sur l'approximation du pole à puissance fractionnaire (PPF) représenté par la fonction suivante : [5]

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{pT}\right)^m} \quad (I.21)$$

On peut réécrire la fonction (1.12) comme suit :

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^m} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (I.22)$$

Où $(N + 1)$ est le nombre total des singularités qui peut être déterminé par la bande de fréquences du système. L'équation (I.22) peut être tronquée à un nombre fini N , et l'approximation devient :

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^m} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (I.23)$$

Les pôles et les zéros de la fonction de singularités peuvent être obtenus comme suit :

$$p_0 = p_t \sqrt{b}, p_i = p_0 (a \cdot b)^i, z_i = a \cdot p_0 (a \cdot b)^i$$

Avec :

$$a = 10^{y/10(m-1)}, b = 10^{y/10 \cdot m}, a \cdot b = 10^{y/10m(1-m)}, m = \frac{\log(a)}{\log(a \cdot b)}$$

Où y est l'erreur d'approximation en dB.

La figure 1.1 présente le Diagramme de Bode de $1/\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^m$ avec une pente de $-m \cdot 20$ dB/dec et son approximation par des lignes droites en Zig-Zag avec des pentes individuelles de -20 dB/dec et 0 dB/dec.

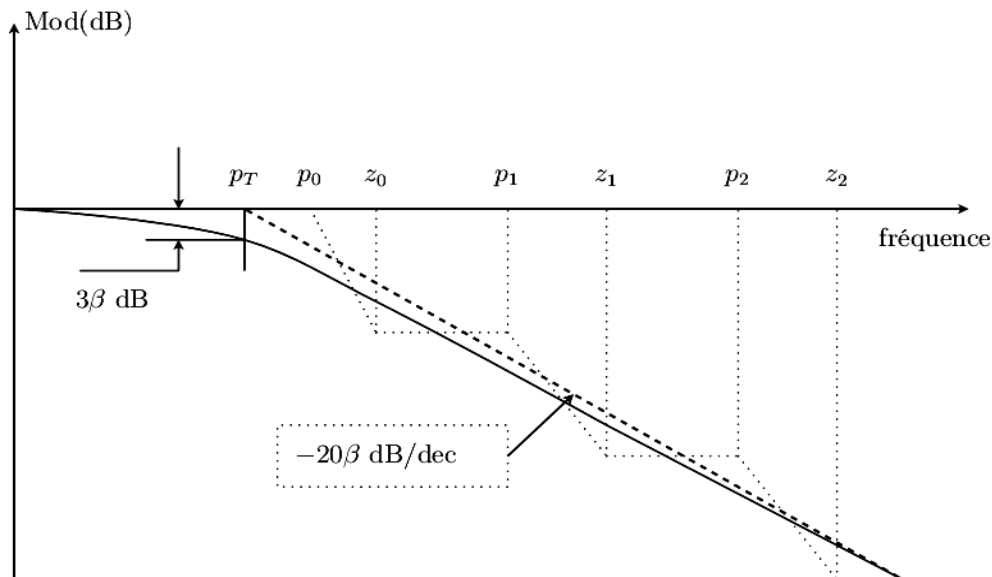


Fig. 2.1: Diagramme de Bode de $1/\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^m$.

I.6.2. Approximation rationnelle de l'intégrateur d'ordre fractionnaire

La fonction de transfert de l'opérateur intégrale d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^\alpha}$$

Avec $S = j\omega$ la fréquence complexe et α est un nombre positif tel que $0 < \alpha < 1$.

Dans une bande de fréquence donnée $[w_p, w_h]$ cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modélisé dans le domaine fréquentiel par un pôle à puissance fractionnaire (PPF) comme suit :

$$G(s) = \frac{k}{\left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^\alpha} \tag{I.24}$$

Si on suppose que pour $w \in [w_b, w_h]$ on a $w \gg w_c$, on peut écrire :

$$G(s) = \frac{k_I}{\left(\frac{s}{w_c}\right)^\alpha} = \frac{k_I w_c^\alpha}{s^\alpha} = G_I(s) \tag{I.25}$$

Avec $K_I = (1/w_c^\alpha)$ et w_c est la fréquence de coupure à $-3m$ dB du PPF qui est choisie telle qu'elle soit très grande par rapport à la fréquence w_p de la bande fréquentielle d'intérêt pratique

Donnée, c'est-à-dire $w_c \gg w_p$. Pour représenter le PPF de l'équation (I.25), et par conséquent l'intégrateur d'ordre fractionnaire, par un modèle linéaire et invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction rationnelle.

La méthode d'approximation utilisée est celle de Charef qui consiste à approximer la ligne de pente $-20m$ dB/dec, dans le plan de Bode, du PPF par un nombre de lignes en zig-zag avec des pentes alternées de -20 dB/dec et 0 dB/dec correspondant à une alternance de pôles et zéros sur l'axe réel négatif du plan s.

$$G(s) = \frac{k_I}{\left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^\alpha} \cong k_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \tag{I.26}$$

Les pôles et les zéros de cette approximation sont calculés en utilisant une méthode graphique. Cette méthode graphique commence par une erreur d'approximation spécifiée y en dB et une fréquence d'approximation w_{max} qui est choisie très grande par rapport à la fréquence w_h de la

bande fréquentielle d'intérêt pratique donnée. Une fois y et w_{max} choisies, les paramètres d'approximation a, b, p_0, z_0 et N sont déterminés comme suit :

$$a = 10^{y/10(1-\alpha)}, b = 10^{y/10\alpha}, p_0 = w_c 10^{y/20\alpha}, z_0 = ap_0$$

$$N = Integer \left[\frac{\log\left(\frac{w_{max}}{p_0}\right)}{\log(ab)} \right] \quad (I.27)$$

Alors les pôles p_i et les zéros z_i e l'équation (I.27) peuvent être facilement tirés de ces paramètres comme suit:

$$p_i = p_0(ab)^i, \text{ for } i = 0, 1, \dots, N$$

$$z_i = z_0(ab)^i \text{ for } i = 0, 1, \dots, N - 1$$

Donc, l'intégrateur d'ordre fractionnaire peut être approximé par une fonction rationnelle dans une bande fréquentielle d'intérêt pratique donnée $[w_p, w_h]$ par :

$$G_I(s) = \frac{1}{s^\alpha} = \frac{k_I}{\left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^\alpha} \approx k_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_0(ab)^i}\right)} \quad (I.28)$$

Par décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle de l'équation (I.28) il est possible de représenter l'intégrateur d'ordre fractionnaire par une combinaison linéaire de fonctions d'un seul pôle comme:

$$G_I = \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i p_0}\right)} \quad (I.29)$$

Où k_i pour $i=0, 1, \dots, N$, sont les résidus des pôles qui sont facilement obtenus par :

$$k_i = k_I = \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left[1 - \frac{(ab)^{(i-j)}}{a}\right]}{\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^N [1 - (ab)^{(i-j)}]} \quad (I.30)$$

I.6.3. Approximation rationnelle du dérivateur d'ordre fractionnaire :

La fonction de transfert de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$G_D(s) = s^\alpha$$

Où $s = j\omega$ est la fréquence complexe et α un nombre réel positif tel que $0 < \alpha < 1$.

Dans une bande de fréquence donnée $[w_b, w_h]$, cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modélisé dans le domaine fréquentiel par un zéro à puissance fractionnaire (ZPF) comme suit :

$$G_D(s) = k_D \left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^\alpha \quad (I.31)$$

En supposant que pour $w \in [w_b, w_h]$ on a $w \gg w_c$, on peut écrire :

$$G_D(s) = k_D \left(\frac{s}{w_c} \right)^\alpha = \frac{k_D}{w_c^\alpha} s^\alpha = s^\alpha \quad (I.32)$$

Avec $k_D = w_c^\alpha$ et w_c est la fréquence de coupure à $3m$ dB du ZPF qui est choisie telle qu'elle soit très grande par rapport à la fréquence w_p de la bande fréquentielle d'intérêt pratique donnée, c'est-à-dire

$w_c \gg w_p$. Pour représenter le ZPF de l'équation (I.32), et par conséquent le dérivateur d'ordre fractionnaire, par un modèle d'un système linéaire et invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction rationnelle.

La méthode d'approximation utilisée est celle de Charef qui consiste à approximer la ligne de pente

$20 m$ dB/dec, dans le plan de Bode, du ZPF par un nombre de lignes en zig-zag avec des pentes alternées de $20m$ dB/dec et 0 dB/dec correspondant à une alternance de zéros et pôles sur l'axe réel négatif du plan s.

$$G_D(s) = k_D \left(1 + \frac{s}{w_c} \right) \cong \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i} \right)} \quad (I.33)$$

En utilisant la méthode de la fonction de singularité (méthode graphique simple), les pôles et les zéros de l'approximation se présentent sous la forme d'une progression géométrique. Cette méthode graphique commence par une erreur d'approximation spécifiée y en dB et une fréquence d'approximation w_{max} qui est choisit très supérieure à la fréquence w_h de la bande fréquentielle d'intérêt pratique donnée. Une fois y et w_{max} choisies, les paramètres d'approximation a, b, z_0, p_0 et N

sont déterminés comme suit :

$$\begin{aligned} a &= 10^{[y/10(1-\alpha)]} \text{ et } b = 10^{[y/10\alpha]} \\ z_0 &= w_c 10^{[y/20\alpha]} \text{ et } p_0 = az_0 \\ N &= \text{Integer} \left[\frac{\log \left(\frac{w_{max}}{z_0} \right)}{\log(ab)} \right] + 1 \end{aligned} \quad (I.34)$$

Alors les zéros z_i et les pôles p_i de l'équation (I.34) peuvent être facilement tirés de ces paramètres comme suit:

$$z_i = z_0(ab)^i, p_i = p_0(ab)^i$$

Donc, le dérivateur d'ordre fractionnaire peut être approximé par une fonction rationnelle dans une bande fréquentielle d'intérêt pratique donnée $[w_b, w_h]$ par :

$$G_D(s) = s^\alpha = k_D \left(1 + \frac{s}{w_c}\right)^\alpha \approx k_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_0(ab)^i}\right)} \quad (I.35)$$

Par décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle de l'équation (I.35) il est possible de représenter le dérivateur d'ordre fractionnaire par une combinaison linéaire de fonctions d'un seul pôle comme:

$$G_D(s) = k_D + \sum_{i=0}^N \frac{h_i s}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i p_0}\right)}$$

Où h_i , pour $i=0,1,\dots, N$ sont les résidus des pôles qui sont facilement obtenus par.

$$h_i = -k_D \frac{\prod_{j=0}^{N-1} [1 - a(ab)^{(i-j)}]}{az_0(ab)^i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N [1 - (ab)^{(i-j)}]}$$

I.7. Définitions et propriétés

I.7.1. Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov

La définition au sens de Grünwald-Letnikov est basée sur une approche aux différences finies fractionnaires où toute la différence par rapport au cas entier se situe dans l'extension de la factorielle à travers la fonction Gamma Euler. La dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov d'une fonction $f(t)$ est définie par la relation suivante [7]

$${}^{GL}D_t^q f(t) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t-q}{h}\right]} (-1)^j \binom{q}{j} f(t - jh) \quad (I.36)$$

où $\left[\frac{t-q}{h}\right]$ désigne la partie entière et $\binom{q}{j}$ sont des coefficients binomiaux.

I.7.2. Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Soient $\alpha \in R^+$ avec $R(q) > 0$, n un entier positif $t_0 \in R$ et f une fonction Localement intégrable définie sur $[t_0, \infty)$. La dérivée d'ordre α de f de borne inférieure t_0 est définie par [7] :

$${}^{RL}D_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-q-1} f(\tau) d\tau$$

Avec $(n - q) < q < n$.

I.7.3. Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Caputo a introduit une autre formulation de la dérivée d'ordre fractionnaire comme suit :

$${}_{t_0}^C D_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - q)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{n-q+1}} d\tau \tag{I.37}$$

Avec n est un entier positif vérifiant l'inégalité $(n - 1) < q < n$.

I.7.4. Propriétés

Les principales propriétés des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire sont les suivantes [8-9].

Si $f(z)$ est une fonction analytique de z , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire ${}_a D_z^\alpha f(z)$ est une fonction analytique de z .

1. Pour $\alpha = n$, où n est un entier, l'opération ${}_a D_z^\alpha f(z)$ donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre entier n .
2. Pour $\alpha = 0$ l'opération ${}_a D_z^\alpha f(z)$ est l'opérateur identité

$${}_a D_z^0 f(z) = f(z).$$

3. La différentiation et l'intégration d'ordres fractionnaire sont des opérations linéaires

$${}_a D_z^\alpha a f(z) + {}_a D_z^\alpha b g(z) = a {}_a D_z^\alpha f(z) + b {}_a D_z^\alpha g(z)$$

I.8. Méthodes opérationnelles fractionnaires

Le calcul opérationnel est un outil souvent utilisé pour la résolution des problèmes d'ingénierie. Il s'avère être puissant et indispensable notamment dans l'étude des systèmes fractionnaires. C'est pourquoi, nous allons rappeler dans ce paragraphe quelques éléments de base de la transformée de Laplace dans le cas entier que nous allons par la suite étendre au cas fractionnaire.

I.8.1. Eléments sur la transformée de Laplace

La fonction $F(s)$ de la variable complexe s dénie par,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t); s\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \tag{I.38}$$

La fonction originale $f(t)$ peut être retrouvée à partir de la transformée de Laplace $F(s)$ avec la transformée inverse de Laplace

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s); t\} = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{st} F(s) ds, \quad c = \text{Re}(s) > c_0 \quad (I.39)$$

Où c_0 se trouve dans le demi-plan droit de la convergence absolue de l'intégrale de Laplace (I.39).

Le produit de convolution des fonctions f et g est donné par

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (I.40)$$

des deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$, qui sont nulles pour $t < 0$, est égale au produit de la transformée de Laplace des deux fonctions

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t); s\} = F(s)G(s)$$

Sous l'hypothèse que $F(s)$ et $G(s)$ existent. On utilisera la propriété (I.40) pour l'évaluation de la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville.

Une autre propriété très utile dont nous aurons besoin est la formule de la transformée de Laplace de la dérivée d'un ordre entier n de la fonction $f(t)$

$$\mathcal{L}\{f^n(t); s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \quad (I.41)$$

Dans la partie suivante nous considérons la limite inférieure $a = 0$. [9-10]

I.8.2. Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire [11]

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville peut notamment s'écrire comme le produit de convolution de la fonction $g(t) = t^{\alpha-1}$ et $f(t)$

$${}_0D_t^{-\alpha} f(t) = \int_0^t \frac{(t - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t) \quad (I.42)$$

La transformée de Laplace de la fonction $g(t) = t^{\alpha-1}$ est donnée par

$$G(s) = \mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\} = \Gamma(\alpha)s^{-\alpha}$$

Ainsi, en utilisant la formule de la transformée de Laplace de convolution, on obtient la transformée de Laplace de l'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

$$\mathcal{L}\{{}^{RL}D_t^\alpha f(t)\} = \mathcal{L}\{{}^{GL}D_t^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha}F(s)$$

Pour obtenir la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t)$, posons

$$D^\alpha = g^{(n)}(t)$$

Ce qui entraîne

$$g(t) = D^{-(n-\alpha)} f(t) \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\tau-1} f(\tau) d\tau, \quad n-1 < \alpha < n \quad (I.43)$$

L'utilisation de la transformée de Laplace de la dérivation d'ordre entier conduit à

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{ {}_0D_t^\alpha f(t) \} &= s^\alpha G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0) \\ G(s) &= s^{-(n-\alpha)} F(s) \end{aligned}$$

A partir de la définition de la dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville, il vient

$$g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} {}_0D_t^{-(n-\alpha)} f(t) = {}_0D_t^{\alpha-k-1} f(t)$$

Nous obtenons l'expression finale de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

$$\mathcal{L}\{ {}_0D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D_t^{\alpha-k-1} f(t) \Big|_{t=0_+}, \quad n-1 < \alpha < n \quad (I.44)$$

En résumé, soit $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, la transformée de Laplace de $f(t)$.

On a les relations suivantes :

- transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Grünwald-Letnikov

$$\mathcal{L}\{ D_t^{-\alpha} f(t) \} = s^{-\alpha} F(s), \quad n-1 < \alpha < n$$

- transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

$$\mathcal{L}\{ {}_0D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D_t^{\alpha-k-1} f(t) \Big|_{t=0_+}, \quad n-1 < \alpha < n$$

- transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo

$$\mathcal{L}\left\{ {}_0^c D_t^\alpha f(t) \right\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D_t^{\alpha-k-1} \frac{d^k f(t)}{dt^k} \Big|_{t=0_+}, \quad n-1 < \alpha < n$$

I.9. Conclusion

Ce chapitre discute une introduction rigoureuse au calcul fractionnaire, en alliant les bases théoriques, les méthodes numériques et les perspectives d'application concrète. Il expose les principales définitions des opérateurs d'ordre fractionnaire, leurs propriétés fondamentales ainsi que leurs expressions en transformée de Laplace. Par ailleurs, des méthodes fréquentielles et numériques y sont présentées pour l'approximation des dérivées et intégrales fractionnaires, offrant ainsi des outils efficaces pour traiter des systèmes où le formalisme classique à ordre entier atteint ses limites.

Chapitre II :
Approches pour
l'approximation des systèmes
d'ordre fractionnaire

II.1. Introduction :

Les systèmes à ordre fractionnaire, dont les opérateurs sont décrits par des fonctions de transfert irrationnelles, ont longtemps été relégués au second plan dans les recherches sur la modélisation et la commande. Toutefois, les avancées récentes dans le domaine du génie électrique ont permis d'exploiter concrètement ces opérateurs dans diverses applications pratiques [12].

Les outils logiciels traditionnels sont principalement conçus pour l'étude et la simulation de systèmes à ordre entier. Par conséquent, lorsqu'il s'agit de concevoir ou d'analyser des correcteurs destinés à des systèmes à ordre fractionnaire, il devient indispensable d'utiliser des techniques d'approximation adaptées [13].

Ces techniques d'approximation, qui permettent de représenter des comportements fractionnaires à l'aide de modèles classiques à ordre entier, se divisent généralement en deux catégories : les méthodes discrètes (numériques) et les méthodes continues (analogiques). De nombreuses études ont été consacrées à ces approches variées [14-15].

II.2. Opérateurs d'ordre fractionnaire :

Les opérateurs fractionnaires peuvent être classés en deux grandes catégories selon leur mode d'implémentation : **les opérateurs analogiques et les opérateurs numériques**. Ces deux types permettent de modéliser le comportement d'un système à ordre non entier à travers des représentations distinctes dans les domaines fréquentiel et temporel.

II.2.1. Opérateurs analogiques d'ordre fractionnaire

Les intégrateurs et dérivateurs analogiques à ordre non entier sont exprimés comme suit respectivement [16] :

$$H_I(s) = \frac{1}{s^n} \tag{II.1}$$

$$H_D(s) = s^n \tag{II.2}$$

Avec : $0 < n < 1$

Où : $s = j\omega$ est la fréquence complexe et « n » un nombre fractionnaire positif.

II.2.2. Opérateurs numériques d'ordre fractionnaires :

Dans le contexte numérique, les opérateurs fractionnaires sont formulés en fonction de l'opérateur de décalage temporel z^{-1} (retard) ou z (avance). Les équivalents numériques des intégrateurs et dérivateurs à ordre non entier sont donnés comme suit [17] :

$$H_R(z) = z^{-n} \quad (\text{II.3})$$

$$H_A(z) = z^n \quad (\text{II.4})$$

Avec : $0 < n < 1$

Ces formulations permettent l'implémentation des systèmes fractionnaires sur des plateformes numériques, bien que leur précision dépende fortement de la méthode d'approximation choisie.

II.3. Approximation des systèmes d'ordre fractionnaire

L'approximation joue un rôle fondamental dans l'analyse, la simulation et la mise en œuvre des systèmes d'ordre fractionnaire. En effet, les fonctions de transfert associées à ces systèmes étant généralement **irrationnelles**, elles sont difficilement exploitables directement dans les outils classiques de traitement et de commande. Il est donc nécessaire de les approximer par des modèles rationnels d'ordre entier [18].

Les approches développées pour réaliser cette approximation se divisent en deux catégories principales :

- **Les méthodes analogiques** (également appelées fréquentielles), opérant dans le domaine de Laplace.
- **Les méthodes numériques**, qui s'appuie sur une discrétisation temporelle pour représenter le système de manière discrète [19].

1.1.1 II.3.1 Approximation analogique

Les méthodes analogiques visent à approximer une fonction de transfert fractionnaire par un modèle rationnel équivalent, tout en conservant un comportement dynamique similaire dans une bande de fréquences donnée. Elles sont largement utilisées dans la conception de correcteurs ou dans les simulateurs fréquentiels.

II.3.1.1 Approximation par expansion en fractions continues (EFC)

La méthode d'expansion en fractions continues (Continuos Fraction Expansion) permet de convertir une fonction de transfert irrationnelle en une forme rationnelle en développant la fonction en série. Cette technique est appréciée pour sa convergence rapide et sa facilité de mise en œuvre sur une plage fréquentielle limitée [20].

Les opérateurs fractionnaires sont alors exprimés sous la forme :

$$\frac{P(s)}{Q(s)} \approx^n S \quad (\text{II.6})$$

où $P(s)$ et $Q(s)$ sont des polynômes d'ordre entier.

II.3.1.2. Méthode de Matsu da

La méthode proposée par Matsu da dans [21] consiste à appliquer la technique d'expansion en fractions continues (EFC) en vue d'ajuster la fonction initiale sur un ensemble de points répartis logarithmiquement dans le domaine fréquentiel. L'idée principale est de générer un modèle rationnel qui reproduit fidèlement la dynamique de l'opérateur fractionnaire sur une bande de fréquences donnée.

$$H(s) = a_0 + \frac{s-s_0}{a_1+s} \frac{s-s_1}{a_2+s} \frac{s-s_2}{a_3+s} \tag{II.7}$$

Avec :

$$a_i = v_i(s_i), v_0(s) = H(s) \text{ et } v_{i+1}(s) = \frac{s-s_i}{v_i(s)-a_i}$$

II.3.1.3. Méthode de Carlson

La technique est basée sur la relation suivante [44] :

$$(H(s))^{1/\alpha} - G(s) = 0 \Rightarrow H(s) = (G(s))^\alpha \tag{II.8}$$

Dans chaque itération, en posant $\alpha = \frac{1}{q}$ et $m = \frac{q}{2}$, partant de la valeur initiale $H_0(s) = 1$, on obtient l'approximation par la formule suivante :

$$1.1.1.1 \quad H_i(s) = H_{i-1}(s) \frac{(q-m)(H_{i-1}(s))^2 + (q+m)G(s)}{(q+m)(H_{i-1}(s))^2 + (q-m)G(s)} \tag{II.9}$$

1.1.1.2 II.3.1.4 Méthodes d'approximation par un modèle rationnel à temps continu

Également appelées approximations analogiques ou approximations fréquentielles, ces méthodes consistent à représenter un opérateur fractionnaire par une fonction de transfert rationnelle définie dans le domaine de Laplace. De nombreuses approches ont été développées dans ce cadre, telles que celles présentées dans [19].

L'objectif principal est de trouver un équilibre entre la fidélité de l'approximation du comportement fractionnaire sur une bande de fréquences spécifiée, et la complexité de mise en œuvre du modèle résultant.

Parmi ces approches, les plus largement reconnues et adoptées sont celles proposées par Oust loup [19] et Charef [22]. Cette dernière, fondée sur la notion de fonction de singularité, se distingue par sa robustesse, sa précision et sa facilité d'intégration dans des systèmes de commande réels. Elle fera l'objet d'une attention particulière dans ce qui suit.

II.3.1.4.1. Méthode d'Oust loup :

La méthode proposée par Oust loup [45] constitue l'une des approches les plus efficaces pour approximer un opérateur fractionnaire de type S^α dans une bande de fréquences spécifiée $[\omega_l, \omega_h]$. Elle repose sur la construction d'une **fonction de transfert rationnelle**, obtenue par une **distribution récursive de pôles et de zéros à ordre entier**, répartis de manière logarithmique dans l'intervalle considéré. Cette approximation permet de reproduire le comportement fréquentiel de l'opérateur fractionnaire avec une précision contrôlée, tout en assurant une implémentation réalisable dans les systèmes physiques ou simulés.

II.3.1.4.1.1. Dérivateur généralisé

Le **dérivateur généralisé** est défini par une fonction de transfert exprimée sous la forme :

$$D(s) = \left(\frac{s}{\omega_c} \right)^m \quad (\text{II.10})$$

Lorsque « m » appartient à l'ensemble des réels ($m \in \mathbb{R}$) et que ω_c est définie comme la fréquence transitionnelle, l'équation (II.10) caractérise un dérivateur fractionnaire pour des valeurs d'ordre strictement positives, et un intégrateur fractionnaire pour des valeurs d'ordre strictement négatives [23].

Ainsi, nous introduisons le dérivateur à ordre fractionnaire limité en fréquence, comme suggéré par Oust loup.

$$D_{\text{bf}}(s) = \left(C_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_l}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^m, \quad -1 < m < 1 \quad (\text{II.11})$$

Où :

$$C_0 = \frac{\omega_l}{\omega_c} = \frac{\omega_c}{\omega_h} \Rightarrow \omega_c = \sqrt{\omega_h \omega_l} \quad (\text{II.12})$$

Ceci afin de garantir un gain unitaire à la fréquence ω_c .

Dans une étape ultérieure, la technique adoptée implique l'approximation de dérivateur limité en fréquence (voir II.11) en utilisant une distribution récursive de pôles et de zéros réels. Cette approximation conduit à un transfert d'ordre entier.

$$D_{\text{bf}}(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} D_N(s) \quad (\text{II.13})$$

Où :

$$D_N(s) = \left(\frac{\omega_c}{\omega_h} \right)^m \prod_{i=-N}^N \frac{1 + \frac{s}{z_i}}{1 + \frac{s}{p_i}} \quad (\text{II.14})$$

Z_i et P_i correspondent aux zéros et aux pôles de rang i . On détermine ces $N+1$ paires de zéro-pôle comme suit :

$$\frac{P_i}{z_i} = \alpha > 0 \quad (II.15)$$

$$\frac{z_{i+1}}{P_i} > \eta > 0 \quad (II.16)$$

$$\frac{z_{i+1}}{z_i} = \frac{P_{i+1}}{P_i} = \alpha\eta > 1 \quad (II.17)$$

Les paramètres α et η sont dénommés facteurs récurrents. Habituellement, la valeur de N est fixée de manière à obtenir une approximation où $\alpha\eta$ est approximativement égal à 5.

La relation entre α et η peut être déduite par le calcul de leur rapport :

$$m = \frac{\log(\alpha)}{\log(\alpha\eta)} \quad (II.18)$$

On peut également déduire les expressions suivantes :

$$\frac{w_h}{w_l} = (\alpha\eta)^{2N+1} \Rightarrow (\alpha\eta) = \left(\frac{w_h}{w_l}\right)^{1/2(N+1)} \quad (II.19)$$

$$\alpha = (\alpha\eta)^m \text{ et } \eta = (\alpha\eta)^{1-m} \quad (II.20)$$

Il est également possible d'exprimer les pôles et zéros de rang i de la manière

$$\text{suivante : } \begin{cases} z_i = \left(\frac{w_h}{w_l}\right)^{\frac{i+N+1/(2-n/2)}{2N+1}} w_l \\ P_i = \left(\frac{w_h}{w_l}\right)^{\frac{i+N+1/(2+n/2)}{2N+1}} w_l \end{cases} \quad (II.21)$$

Lorsque l'ordre m est supérieur à 1 ou inférieur à -1, une approximation par un modèle d'ordre entier est réalisée pour la partie non entière [24].

II.3.1.4.2. Méthode de Charef (Fonction de singularité)

La méthode développée par Charef [22], vise à approximer les opérateurs fractionnaires tels que l'intégrateur et le dérivateur non entiers — à l'aide de **fonctions rationnelles**, de manière à faciliter leur mise en œuvre pratique dans des correcteurs de type $(PI^\lambda D^\mu)$.

L'approche repose sur l'utilisation de fonctions à pôle de puissance fractionnaire (*PPF*, pour *Pôle à Puissance Fractionnaire*) qui permettent de reproduire le comportement fréquentiel d'un opérateur fractionnaire sur une plage de fréquences donnée.

Dans les sections suivantes, nous allons présenter cette méthode en détail, en nous basant sur les travaux originaux de Charef [22].

II.3.1.4.2.1. Approximation des systèmes fractionnaire de premier ordre :

On modélise un système du premier ordre d'ordre fractionnaire (système fractal unique) de la manière suivante :

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^m} \tag{II.22}$$

Où $\frac{1}{P_T}$ représente la constante de temps, et $0 < m < 1$ est l'ordre non entier.

La formule (II.18) peut être reformulée de la manière suivante [15]:

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^m} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \tag{II.23}$$

Ici, $N+1$ représente le nombre total de singularités, lequel est déterminé par la bande de fréquences du système.

L'équation (II.19) peut être tronquée à un nombre fini N , transformant ainsi l'approximation en :

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^m} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \tag{II.24}$$

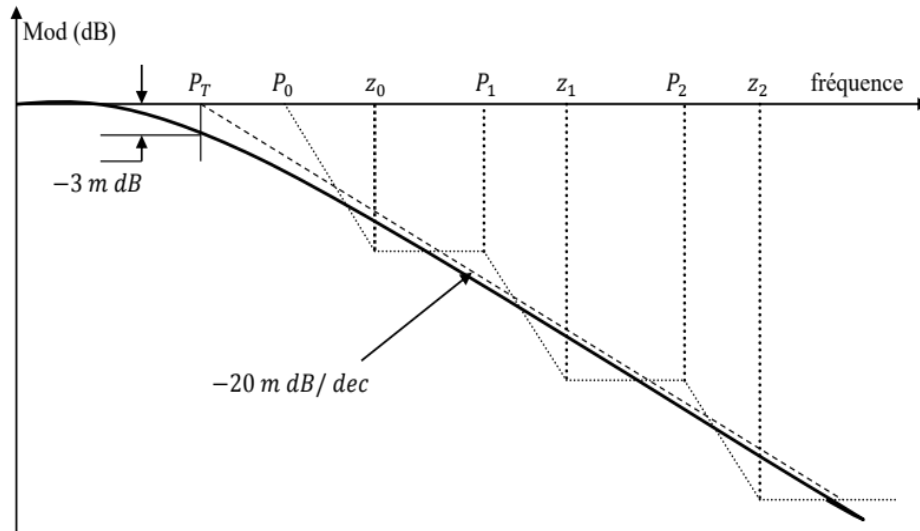


Figure II.1. Représentation de diagramme de Bode du modèle $1/\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^m$.

On peut déterminer les pôles et les zéros de la fonction de singularités de la façon suivante :

- Le premier pôle : $P_0 = P_T 10^{\left(\frac{y}{20m}\right)}$
- Le premier zéro : $z_0 = P_0 10^{\left(\frac{y}{10[1-m]}\right)}$

- Le deuxième pôle : $P_1 = z_0 10^{\left(\frac{y}{10m}\right)}$
- Le deuxième zéro : $z_1 = P_1 10^{\left(\frac{y}{10[1-m]}\right)}$
- Le Neme zéro : $z_{N-1} = P_{N-1} 10^{\left(\frac{y}{10[1-m]}\right)}$
- Le $(N + 1)$ ème pôle : $P_N = z_{N-1} 10^{\left(\frac{y}{10m}\right)}$

Avec : P_T représente est la fréquence à $-3m$ dB, P_0 et P_N est la première et dernière singularité déterminée par y (dB) et par N respectivement.

Considérons :

$$a = 10^{\left[\frac{y}{10(1-m)}\right]} \quad (\text{II.25})$$

$$b = 10^{\left[\frac{y}{10m}\right]} \quad (\text{II.26})$$

Les termes a et b sont désignés comme les rapports de position.

Alors :

$$ab = 10^{\left[\frac{y}{10(1-m)}\right]} \quad (\text{II.27})$$

$$m = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (\text{II.28})$$

Ainsi, les valeurs de P_i et z_i peuvent être déduites de la manière suivante :

$$P_i = (ab)^i P_0 \quad (\text{II.29})$$

$$z_i = (ab)^i a P_0 \quad (\text{II.30})$$

Par conséquent, la fonction (II.23) peut être exprimée de la manière suivante :

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^m} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} = \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{(ab)^i a P_0}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i P_0}\right)} \quad (\text{II.31})$$

Avec [22] :

$$N = \text{Partie entière} \left[\frac{\log\left(\frac{\omega_{\max}}{P_0}\right)}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (\text{II.32})$$

Dans cette expression (II.32), ω_{\max} représente la fréquence maximale de la plage de fréquences de travail spécifiée, sachant que : $P_{N-1} < \omega_{\max} < P_N$.

II.3.1.4.2.2. Approximation des systèmes fractionnaires d'ordres multiples

Ce type de système peut être, formulée de la manière suivante [22]:

$$H(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^p \left(1 + \frac{s}{P_{Ti}}\right)^{m_i}} \quad (\text{II.33})$$

Où : $P_{Ti} < P_{T_{i+1}}$, $0 < m_i < 1$ pour $i = 1, 2, \dots, p$ sont des fréquences de coupure.

Il est possible d'approximer la fonction décrite par (II.33) de la façon suivante [22] :

$$H(s) = \frac{\prod_{i_1=0}^{N_1} \left(1 + \frac{s}{z_{i_1}}\right) \prod_{i_2=0}^{N_2} \left(1 + \frac{s}{z_{i_2}}\right) \dots \prod_{i_p=0}^{N_p} \left(1 + \frac{s}{z_{i_p}}\right)}{\prod_{i_1=0}^{N_1} \left(1 + \frac{s}{P_{i_1}}\right) \prod_{i_2=0}^{N_2} \left(1 + \frac{s}{P_{i_2}}\right) \dots \prod_{i_p=0}^{N_p} \left(1 + \frac{s}{P_{i_p}}\right)} \quad (\text{II.34})$$

On sélectionne les singularités de manière à alterner les pôles et les zéros afin de garantir que les résidus soient réels et positifs. Tout d'abord, on sélectionne les pôles pour chaque section.

$$P_n = (ab)^n P_0 \quad n = 1, 2, 3, \dots, M \quad (\text{II.35})$$

Avec : $M = N_1 + N_2 + \dots + N_p + (p - 1)$

Les zéros sont choisis de la manière suivante :

- 1^{ère} section : $z_{i_1} = (ab)^{i_1} a_1 P_0$, $i_1 = 0, 1, 2, \dots, N_1$
- 2^{ème} section : $z_{i_2} = (ab)^{[N_1+1+i_2]} a_2 P_0$, $i_2 = 0, 1, 2, \dots, N_2$
- p^{ème} section : $z_{i_p} = (ab)^{[N_1+N_2+\dots+N_{p-1}+(p-1)+i_p]} a_p P_0$, $i_p = 0, 1, 2, \dots, N_p$

La détermination de N_1, N_2, \dots, N_p se fait de la même manière que pour le système de l'ordre 1 fractionnaire, c'est-à-dire en définissant la bande de fréquences et l'écart y (dB) souhaité. Et avec « ab » invariable pour l'ensemble du système. L'approximation du système sera donc comme suit :

$$H(s) \approx \sum_{n=0}^M \frac{k_n}{\left[1 + \frac{s}{(ab)^n P_0}\right]} \quad (\text{II.36})$$

Avec :

$$k_n = \frac{\prod_{i_1=0}^{N_1} \left[1 - \frac{(ab)^{n-i_1}}{a_1}\right] \prod_{i_2=0}^{N_2} \left[1 - \frac{(ab)^{n-(N_1+1+i_2)}}{a_2}\right] \dots \prod_{i_p=0}^{N_p} \left[1 - \frac{(ab)^{n-(N_1+\dots+N_{p-1}+(p-1)+i_p)}}{a_p}\right]}{\prod_{i=0}^M [1 - (ab)^{n-1}]}$$

II.3.1.4.2.3. Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire :

L'approximation d'un intégrateur d'ordre fractionnaire à l'aide d'un modèle rationnel constitue une solution à la fois pratique et performante pour l'implémentation dans les systèmes de commande. Cette méthode, fondée sur la stratégie de Charef, se distingue par sa simplicité de mise en œuvre et par la précision qu'elle offre dans une plage de fréquences spécifiée [25].

Le processus commence par la modélisation de l'opérateur fractionnaire dans une bande de fréquences d'intérêt, généralement déterminée selon les exigences de l'application. Ensuite, cette

bande est approximée par une fonction rationnelle construite à partir de pôles et de zéros positionnés stratégiquement, selon le principe des fonctions à puissance fractionnaire (PPF) exposé précédemment.

Cette approche permet d'assurer une approximation fidèle du comportement intégrateur fractionnaire, tout en maintenant un équilibre entre complexité du modèle et exactitude fréquentielle.

La formule (II.1), peut être modélisé à l'aide de la PPF suivante [25] :

$$G(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \left[\frac{s}{\omega_c}\right]\right)^m} \quad (\text{II.37})$$

En supposant que ω appartient à $[\omega_l, \omega_h]$, et que ω est nettement plus grand que $\omega_c (\omega \gg \omega_c)$, alors :

$$G(s) = \frac{K_I}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^m} = \frac{k_I \omega_c^m}{s^m} = \frac{1}{s^m} = G_I(s) \quad (\text{II.38})$$

Avec $k_I = \frac{1}{\omega_c^m}$ et ω_c c'est la fréquence de coupure qui est donnée par $\omega_c = \omega_l \sqrt{10^{\left(\frac{\varepsilon}{10m}\right)} - 1}$, où ε est l'erreur maximale permise entre les pentes de l'intégrateur d'ordre fractionnaire (II.1) est sa fonction PPF (II.37) dans une bande de fréquence donnée.

Pour une séquence des pôles et de zéros Nous obtenons l'approximation ci-dessus :

$$G(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \left[\frac{s}{\omega_c}\right]\right)^m} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \quad (\text{II.39})$$

En choisissant y et ω_{\max} , cette dernière pouvant être fixée à $100 \omega_h$, et avec $P_0 = \omega_c 10^{\lfloor y/20m \rfloor}$ et $z_0 = a P_0$, où a, b et N restent identiques à ceux des équations (II.25), (II.26) et (II.32) respectivement.

En utilisant les deux équations (II.29) et (II.30), l'équation (II.39) peut être écrite comme suit :

$$G(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \left[\frac{s}{\omega_c}\right]\right)^m} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_0(ab)^i}\right)} \quad (\text{II.40})$$

Afin de comprendre l'apport de chaque pôle, on divise la fonction (II.35) en une somme de fractions simples (ou résidus). Nous obtenons :

$$G(s) = K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_0(ab)^i}\right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{P_0(ab)^i}\right)} \quad (\text{II.41})$$

Avec :

$$h_i = K_I \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left[1 - \frac{(ab)^{i-j}}{a} \right]}{\prod_{j=0, j \neq 1}^N [1 - (ab)^{i-j}]} \quad (\text{II.42})$$

II.3.1.4.2.4. Approximation du dérivateur d'ordre fractionnaire :

Lorsqu'on souhaite approximer un dérivateur d'ordre fractionnaire dans une plage de fréquences bien définie, il est possible de recourir à la fonction ZPF (*Zéro à Puissance Fractionnaire*), selon la méthode développée par Charef. Cette approche constitue le pendant de la fonction PPF utilisée pour les intégrateurs.

L'idée repose sur la modélisation du comportement du dérivateur fractionnaire à l'aide d'une séquence de zéros et de pôles répartis stratégiquement, de manière à reproduire une pente de 20m20m20m dB/décade dans le diagramme de Bode — typique d'un dérivateur d'ordre non entier.

En pratique, cette approximation consiste à alterner les pentes de 202020 dB/déc et 000 dB/déc le long de l'axe réel négatif du plan complexe, en positionnant successivement des zéros et des pôles. Cette alternance permet d'atteindre une précision fréquentielle ciblée tout en conservant la simplicité du modèle.

Grâce à cette méthode, on obtient une fonction rationnelle bien adaptée aux besoins des systèmes de commande, tout en représentant de façon fidèle le comportement dynamique du dérivateur fractionnaire sur la plage de travail choisie.

$$G(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c} \right)^m \quad (\text{II.43})$$

En faisant la supposition que $\omega \in [\omega_l, \omega_h]$, on a $\omega \gg \omega_c$, alors :

$$G(s) = K_D \left(\frac{s}{\omega_c} \right)^m = \frac{K_D s^m}{\omega_c^m} = s^m = G_D(s) \quad (\text{II.44})$$

Afin de modéliser la fonction (II.43) par un modèle temps-invariant, nous allons l'approximer en utilisant la méthode des singularités mentionnée précédemment. Dans ce cas, elle consiste à approximer la pente à 20m dB/dec du diagramme de Bode de la ZPF en alternant entre des pentes de 20 dB/dec et 0 dB/dec. Cela correspond à une séquence d'alternance de zéros et de pôles sur l'axe réel négatif du plan complexe S comme suit :

$$z_0 < P_0 < z_1 < P_1 < \dots < z_N < P_N$$

Nous obtenons la relation ci-dessus :

$$G(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m = K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (\text{II.45})$$

En indiquant les valeurs de y et ω_{\max} , qui peuvent être définies à $100 \omega_h$, nous trouvons les paramètres suivants :

$$z_0 = \omega_c 10^{[y/20m]} \text{Et } P_0 = az_0$$

Les paramètres a , b , et N conservent leurs valeurs telles qu'indiquées dans les équations (II.25), (II.26), et (II.32) respectivement.

L'approximation suivante est obtenue en remplaçant les expressions de P_i et Z_i par leurs formules décrites dans (II.29) et (II.30) :

$$G_D(s) = s^m = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{z_0(ab)^i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_0(ab)^i}\right)} \quad (\text{II.46})$$

En calculant les résidus de la fonction (II.46), on obtient :

$$G_D(s) = G_0 + \sum_{i=0}^N \frac{k_i s}{\left(1 + \frac{s}{P_0(ab)^i}\right)} \quad (\text{II.47})$$

Avec : $G_0 = K_D$

$$K_i = -\frac{K_D}{P_0(ab)^i} \frac{\prod_{j=0}^N [1 - a(ab)^{i-j}]}{\prod_{j=0, j \neq i}^N [1 - (ab)^{i-j}]} \quad (\text{II.48})$$

II.3.2.2.1. Méthode d'Al Alaoui

$$\begin{aligned} (w(z^{-1}))^\alpha &= \left[\frac{8}{7T} \frac{1-z^{-1}}{(1+z^{-1})} \right]^\alpha \\ &= \left(\frac{8}{7T}\right)^\alpha \left[1 - \frac{8}{7}\alpha z^{-1} + \left(-\frac{24}{49}\alpha + \frac{32}{49}\alpha^2\right)z^{-2} + \dots \right] \end{aligned} \quad (\text{II.53})$$

II.3.2.2.2. Méthode de Simpson

$$\begin{aligned} (w(z^{-1}))^\alpha &= \left[\frac{3}{T} \frac{(1-z^{-1})(1+z^{-1})^{\alpha-1}}{1+4z^{-1}+z^{-2}} \right]^\alpha \\ &= \left(\frac{3}{T}\right)^\alpha [1 - 4\alpha z^{-1} + 2\alpha(4\alpha + 3)z^{-2} + \dots] \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

II.3.2.2.3. Méthode de Tustin

$$(w(z^{-1}))^\alpha = \left[\frac{2}{T} \frac{(1-z^{-1})}{1+z^{-1}} \right]^\alpha = \left(\frac{2}{T}\right)^\alpha [1 - 2\alpha z^{-1} + 2\alpha^2 z^{-2} + \dots] \quad (\text{II.55})$$

II.3.2.2.4. Méthode d'Euler (Grünwald)

$$(w(z^{-1}))^\alpha = \left[\frac{1}{T} (1 - z^{-1}) \right]^\alpha = \frac{1}{T^\alpha} \left[1 - \alpha z^{-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^{-2} + \dots \right] \quad (\text{II.56})$$

Dans le domaine de Laplace, les approximations présentées montrent clairement que les systèmes à ordre fractionnaire sont décrits par des fonctions de transfert irrationnelles. Lorsqu'on transpose ces systèmes dans le domaine discret, on obtient des représentations de dimension infinie, ce qui reflète une propriété fondamentale : la mémoire longue des systèmes d'ordre fractionnaire.

II.4 Performance des systèmes à ordre fractionnaire :

De nombreuses recherches antérieures ont mis en évidence les avantages significatifs des modèles à ordre fractionnaire par rapport aux modèles classiques à ordre entier. Ainsi, plusieurs travaux [26] soulignent que les systèmes fractionnaires constituent une référence privilégiée dans les applications de commande avancée.

En effet, ces modèles offrent des performances supérieures sur plusieurs aspects clés, notamment:

- Une meilleure stabilité de la réponse transitoire,
- Untemps de réponse plus adapté aux exigences dynamiques complexes,
- Ainsi qu'une robustesse accrue face aux perturbations externes et au bruit [27].

Ces qualités font des systèmes d'ordre fractionnaire des candidats de choix pour des environnements où la précision, la souplesse dynamique et la résilience sont cruciales.

II.5 Conclusion

L'approximation constitue une étape incontournable dans la **synthèse et la mise en œuvre des systèmes à ordre fractionnaire**, en raison du caractère irrationnel de leurs fonctions de transfert. Ce chapitre a permis de dresser un panorama théorique des principales techniques d'approximation développées dans la littérature.

Nous avons d'abord présenté les différentes approches couramment utilisées pour la **simulation** et l'**implémentation** des systèmes d'ordre non entier, en distinguant les méthodes **analogiques** et **numériques**. Une attention particulière a été portée aux méthodes analogiques, notamment celles de **Charef** et **Oustaloup**, reconnues pour leur efficacité et leur robustesse dans le domaine fréquentiel.

Enfin, nous avons mis en lumière les **performances améliorées** offertes par les modèles à ordre fractionnaire en comparaison avec leurs équivalents à ordre entier, notamment en termes de stabilité, de réactivité et de robustesse. Ces propriétés renforcent leur intérêt dans des applications de commande avancée.

Chapitre III:
Commande PID
fractionnalisée d'un MCC :
études comparatives avec PID
classique et fractionnaire.

III.1. Introduction

Ces dernières années, les systèmes d'ordre fractionnaire ainsi que les méthodes permettant de les modéliser et de les approcher ont connu un intérêt croissant au sein de la communauté scientifique. Ces outils offrent des avantages notables en termes d'amélioration des performances dynamiques des systèmes, tant dans le domaine temporel que fréquentiel.

Le principal objectif de ce chapitre est d'étudier une nouvelle approche comparative des méthodes d'approximation des systèmes fractionnaires. Cette stratégie consiste à enrichir la structure classique du système initial en intégrant des éléments à ordre fractionnaire, sans modifier sa fonction de transfert globale.

Nous présentons plus particulièrement une méthode baptisée « Fractionnalisation », qui consiste à remplacer certains composants du système original (d'ordre entier) par leurs versions fractionnalisées. À cet effet, plusieurs modèles sont introduits : l'intégrateur fractionnarisé, le système du premier ordre fractionnarisé, ainsi que le système du second ordre fractionnarisé.

Afin d'évaluer l'efficacité de cette approche, des simulations sont réalisées pour comparer les performances des trois méthodes d'approximation les plus répandues : Oustaloup, Matsuda et Charef à la fois sur les systèmes d'ordre entier et sur les systèmes fractionnalisés.

Les régulateurs PID ont longtemps été les contrôleurs les plus utilisés au cours du siècle dernier, et ils restent largement dominants grâce à leur simplicité de mise en œuvre, leur robustesse et leur large champ d'applications.

Ce chapitre s'inscrit dans une démarche d'enrichissement des techniques de commande classiques. Il propose une méthode innovante de conception de correcteurs d'ordre fractionnaire basée sur la "Fractionnalisation" des régulateurs PID standards, dans le but d'optimiser les performances des systèmes asservis. Afin de valider cette approche, elle est appliquée au contrôle de la vitesse d'un moteur à courant continu.

III.2. Systèmes fractionnalisés

III.2.1. Système du premier et seconde ordre fractionnalisé

Le système du premier ordre est converti en un système d'ordre fractionnalisé comme suit : [30-31]

$$H(s) = \frac{K}{1+\tau s} = \frac{1}{1+\tau s^\alpha s^{1-\alpha}} \quad \text{with : } 0 < \alpha < 1.$$

Figure III.1 montre le système du premier ordre fractionnalisé :

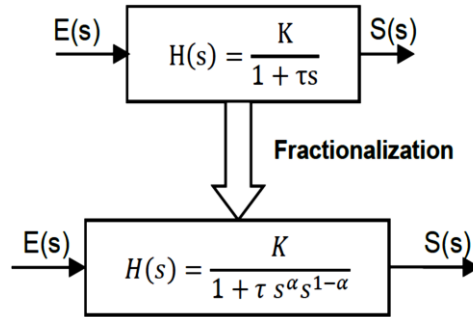


Figure III.1 Système fractionnalisé du premier ordre

Figure III.2 montre le système du seconde ordre fractionnalisé :

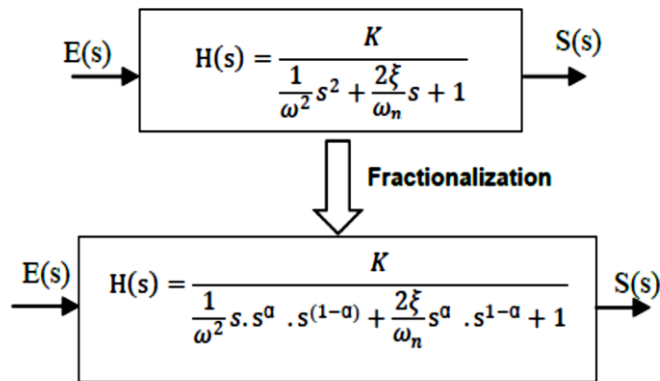


Figure III.1 Système fractionnalisé du second ordre

Le système du second ordre est converti en un système du second ordre fractionnalisé comme suit :

$$H(s) = \frac{K}{\frac{1}{\omega^2} s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1} = \frac{K}{\frac{1}{\omega^2} s^\alpha \cdot s^{1-\alpha} + \frac{2\xi}{\omega_n} s^\alpha \cdot s^{1-\alpha} + 1}$$

III.2. Système du moteur à courant continu (MCC)

III.2.1. Définition

Un moteur à courant continu est un type de machine électrique capable de convertir de l'énergie électrique, fournie sous forme de courant continu, en énergie mécanique. Cette conversion peut s'effectuer dans les deux sens, le moteur pouvant également fonctionner en générateur.

Il est constitué principalement d'un rotor bobiné, appelé induit, et d'un stator qui peut être réalisé soit avec des bobinages (inducteur), soit avec des aimants permanents. Le rotor, lorsqu'il est en mouvement, possède une certaine inertie (J) et subit des pertes dues aux frottements mécaniques engendrés par son support sur paliers (fr).

Le schéma fonctionnel d'un moteur à courant continu est illustré dans la figure (III.3) :

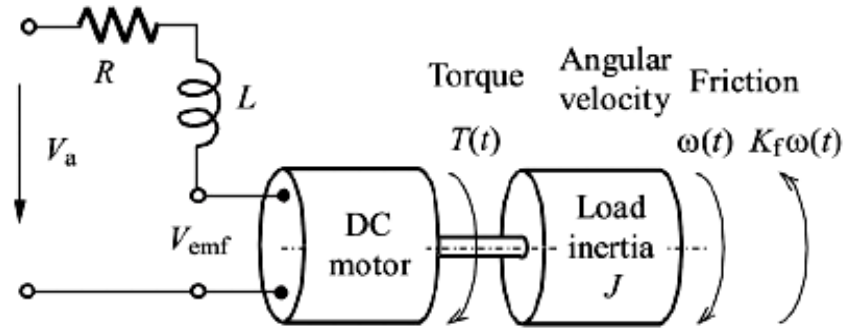


Figure III.3. Schéma de principe d'un moteur à courant continu.

III.2.3. Modélisation du Moteur à courant continu

III.2.3.1. Équation électrique

L'équation qui lie la tension $u(t)$ de l'induit (rotor) et le courant d'induit $i(t)$ est la suivante :

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + E \quad (III.1)$$

$$E = k_e \Omega = k_e \frac{d\theta}{dt} \quad (III.2)$$

Où : R et L est la résistance et l'inductance du rotor respectivement ; E est la force électromotrice et k_e est la constante de vitesse.

En appliquant la transformée de Laplace sur l'équation (III.2) et (III.3), on aura :

$$U(s) = R \cdot I(s) + L \cdot s \cdot I(s) + E \quad (III.3)$$

$$E = k_e \Omega(s) \quad (III.4)$$

Alors :

$$U(s) - k_e \Omega(s) = (R + Ls)I(s) \quad (III.5)$$

Donc on peut écrire :

$$\frac{I(s)}{U(s) - k_e \Omega(s)} = \frac{1}{(R + Ls)} \quad (III.6)$$

L'équation (III.9) peut être réécrite comme suit :

$$c_m - c_r = J\ddot{\theta} + f\dot{\theta} \quad (III.7)$$

En appliquant la transformée de Laplace en vitesse, on obtient :

$$c_m - c_r = J\Omega \cdot s + f\Omega \quad (III.8)$$

$$c_m - c_r = (Js + f)\Omega \quad (III.9)$$

Donc, on peut dire que :

$$\frac{\Omega}{c_m - c_r} = \frac{1}{(Js+f)} \quad (III.10)$$

La fonction de transfert est donnée comme suit :

$$G(s) = \frac{k_c}{(R+Ls)(f+Js)+k_c k_e} \quad (III.11)$$

On remarque que cette relation correspond à un système du deuxième ordre.

III.3. Commande PID

Une commande PID est un type de régulation utilisé dans les systèmes de contrôle automatique. Les lettres "PID" signifient Proportionnelle, Intégrale, et Dérivée, qui sont les trois termes principaux de cette méthode de contrôle.

- **Proportionnelle (P)** : La sortie de la commande est proportionnelle à l'erreur actuelle, c'est-à-dire la différence entre la valeur désirée et la valeur mesurée.
- **Intégrale (I)** : La sortie de la commande est proportionnelle à l'intégrale dans le temps de l'erreur. Cela permet de corriger les erreurs persistantes au fil du temps.
- **Dérivée (D)** : La sortie de la commande est proportionnelle à la dérivée dans le temps de l'erreur. Cela anticipe les changements futurs et aide à stabiliser le système.

En ajustant les coefficients de ces trois termes, on peut régler le comportement de la commande PID pour répondre aux exigences spécifiques du système contrôlé.

Les performances des contrôleurs PID selon les spécifications un cahier des charges sont représentées par la figure (III.4).

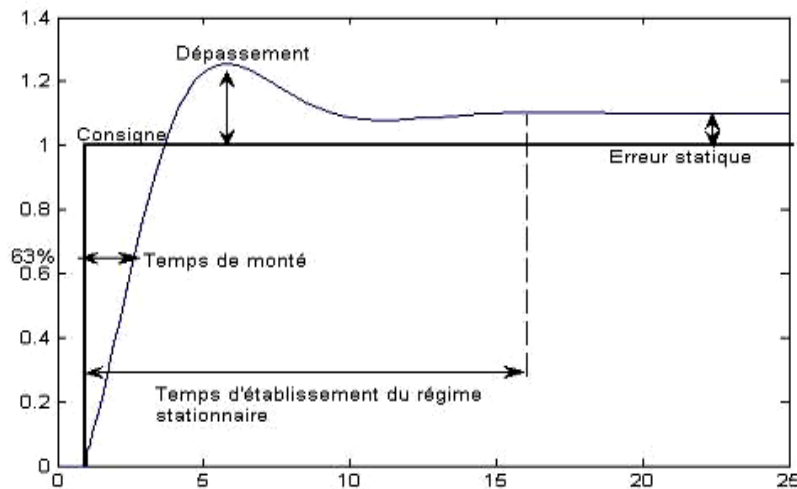


Figure III.4. Performances d'un système de commande.

- **Temps de réponse** : Il mesure le temps nécessaire pour que le système atteigne une certaine valeur après un changement de référence. Un bon contrôle PID doit assurer un temps de réponse rapide tout en évitant les oscillations excessives.
- **Précision de suivi de référence** : Cette performance indique dans quelle mesure le système suit la référence désirée. Une bonne performance signifie que le système suit de près la référence sans erreurs significatives.
- **Rejet des perturbations** : Cela mesure la capacité du contrôle PID à maintenir le système proche de la référence malgré les perturbations externes. Un bon contrôle PID doit réduire l'impact des perturbations sur la sortie du système.
- **Stabilité du système** : La stabilité est cruciale pour éviter les oscillations indésirables ou le comportement instable. Un contrôle PID bien réglé maintient le système stable dans différentes conditions de fonctionnement.
- **Robustesse** : Les paramètres du système peuvent varier en raison de changements de température, d'usure des composants, etc. Un bon contrôle PID doit être robuste face à ces variations pour maintenir de bonnes performances dans diverses conditions.

III.4. Contrôleur PID classique

Actuellement, le contrôleur PID est la méthode de commande la plus couramment utilisée dans les systèmes de rétroaction. Plus de 90% des systèmes de contrôle utilisent des contrôleurs PID. En général, le contrôleur PID classique est mis en œuvre dans des systèmes de commande à rétroaction unitaire, comme illustré dans la figure (III.5).

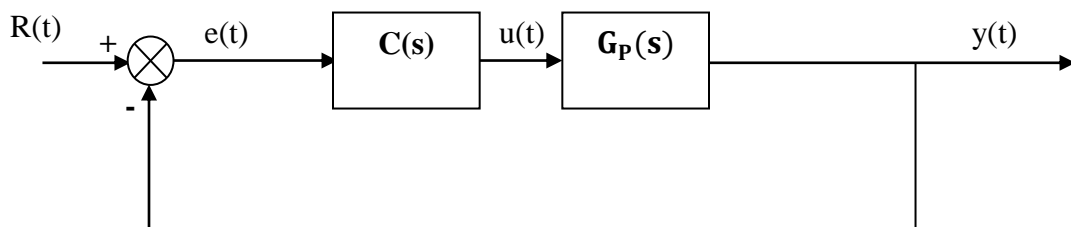


Figure III.5. Système de commande à retour unitaire classique.

Sachant que :

- $u(t)$: le signal de commande.
- $e(t)$: l'écart résultant de la différence entre la consigne $r(t)$ et la sortie $y(t)$: .
- $y(t)$: la grandeur à commander.

- $C(s)$: la fonction de transfert du correcteur.
- $G_p(s)$: est la fonction de transfert de système.

La loi de commande qui décrit le comportement du correcteur proportionnel intégral dérivé (PID) classique est la suivante :

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (\text{III.12})$$

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (III.12) avec des conditions initiales nulles, on trouvera :

$$U(s) = K_p E(s) + \frac{k_i}{s} E(s) + k_d s E(s) \quad (\text{III.13})$$

Donc, on peut écrire :

$$U(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) E(s) \quad (\text{III.14})$$

La fonction de transfert du correcteur PID peut s'exprimer ainsi

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (\text{III.15})$$

Avec : $T_i = \frac{K_p}{K_i}$ et $T_d = \frac{K_p}{K_d}$

Les paramètres du correcteur comprennent le gain proportionnel K_p , la constante d'intégration T_i et la constante de dérivation T_d . Chacun de ces termes, proportionnel, intégral et dérivé, présente des caractéristiques distinctes et agit de manière complémentaire.

La composante proportionnelle représente la forme la plus basique de rétroaction, où le signal de commande est simplement l'écart entre la consigne et la grandeur à contrôler, multiplié par le gain K_p . Intuitivement, augmenter ce gain fait en sorte que le signal de commande agisse de manière plus forte sur le système, réduisant ainsi plus rapidement l'écart. Par conséquent, lorsque K_p augmente, le temps de réponse varie peu et l'erreur statique est améliorée.

III.4.1. Réglage de PID

La conception de la commande permet souvent de modifier plusieurs paramètres pour améliorer les performances du système. Il existe plusieurs méthodes de réglage du PID, notamment :

- La méthode de réglage Ziegler-Nichols,
- La méthode de réglage Cohen-Coon,
- Les méthodes de réglage PID assistées par logiciel.

Pour notre travail on s'intéresse à la méthode de réglage **Ziegler-Nichols**. Dans cette méthode, nous obtenons expérimentalement la réponse de la plante à une entrée à échelon unitaire, comme illustré dans la figure (III.6). Si la plante ne comporte ni intégrateur(s) ni pôles complexes conjugués dominants, la courbe de réponse à l'échelon unitaire peut prendre la forme d'un S, comme illustré à la figure (III.7). Cette méthode s'applique lorsque la réponse à une entrée échelon présente une courbe en forme de S. De telles courbes de réponse à un échelon peuvent être générées expérimentalement ou à partir d'une simulation dynamique du système.

La courbe en forme de S peut être caractérisée par deux constantes : le temps de retard L et la constante de temps T . Le temps de retard et la constante de temps sont déterminés en traçant une ligne tangente au point d'inflexion de la courbe en S, puis en déterminant les intersections de cette ligne tangente avec l'axe du temps et la courbe en S, comme illustré dans la Figure (III.6).

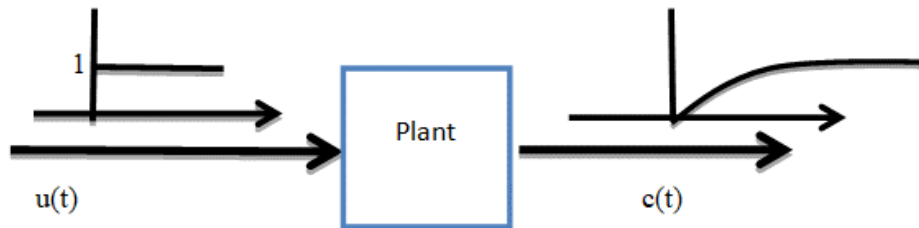


Figure III.6. Réponse par échelon unitaire d'une plante.

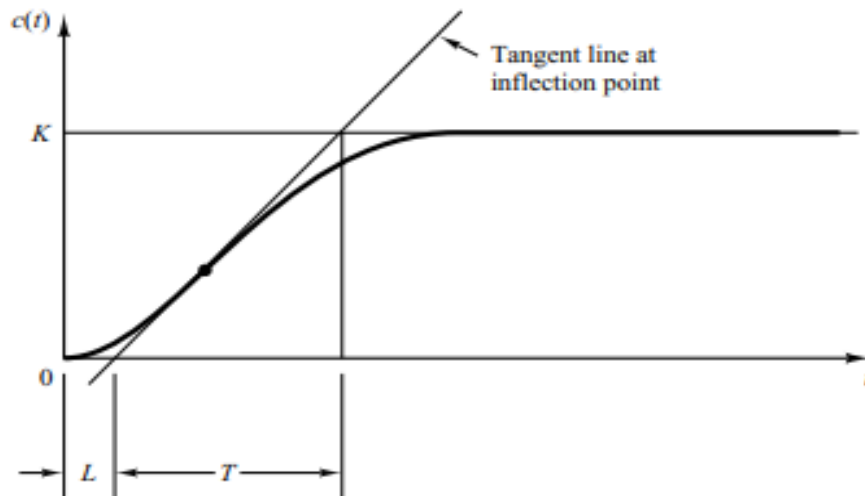


Figure III.7. Courbe de réponse en forme de s.

Tableau III.1. Règle de réglage de Ziegler-Nichols basée sur la réponse en échelon.

Types de contrôleurs	K_p	T_i	T_d
P	T/L	∞	0
PI	$0.9 \times (T/L)$	L/0.3	0
PID	$0.9 \times (T/L)$	$2 \times L$	$0.5 \times L$

III.5. Contrôleur $PI^\alpha D^\beta$ d'ordre fractionnaire

Le contrôleur PID est largement utilisé dans l'industrie, cependant, ces performances peuvent devenir insuffisantes en raison de retards significatifs dans le modèle du processus ou lorsque les paramètres du processus varient. Dans de tels cas, d'autres algorithmes de réglage sont utilisés, tels que le réglage par retour d'état, le réglage par modèle interne, le réglage par régime glissant, etc.

Mais récemment, Podlubny a proposé une amélioration du comportement du correcteur PID en introduisant le contrôleur $PI^\alpha D^\beta$ fractionnaire, comprenant un intégrateur d'ordre α et un différentiateur d'ordre β , où α et β appartiennent à l'ensemble des nombres réels., le contrôleur PID fractionnaire est mis en œuvre dans des systèmes de commande à rétroaction unitaire, comme illustré dans la figure (III.8).

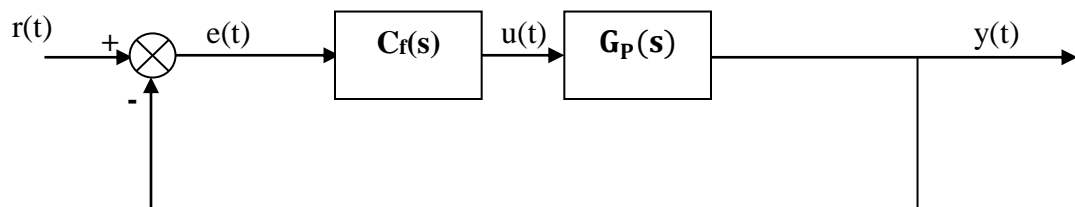


Figure III.8. Système de commande à retour unitaire (cas d'un PID fractionnaire).

Sachant que :

- $u(t)$: le signal de commande.
- $e(t)$:l'écart résultant de la différence entre la consigne $r(t)$ et la sortie $y(t)$: .
- $y(t)$: la grandeur à commander.
- $C_f(s)$:la fonction de transfert du correcteur fractionnaire.

- $G_p(s)$: est la fonction de transfert de système.

L'équation de sortie du correcteur $PI^\alpha D^\beta$ d'ordre fractionnaire dans le domaine temporel est donnée sous la forme :

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} D^{-\alpha}(e(t)) + T_d D^\beta(e(t)) \right] \quad (III.16)$$

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (III.18) avec des conditions initiales nulles, on peut exprimer la fonction de transfert de ce correcteur de manière suivante :

$$C_f(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\alpha} + K_d s^\beta \quad (III.17)$$

Les termes d'intégration K_i et de dérivation K_d sont reliés aux paramètres de la forme classique par les relations suivantes :

$$K_i = \frac{K_p}{T_i} \quad (III.18)$$

$$K_d = K_p T_d \quad (III.19)$$

La fonction de transfert $C_f(s)$ d'un correcteur est donné comme suit :

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s^\alpha} + T_d s^\beta \right) \quad (III.20)$$

En plus des paramètres classiques K_p , K_i et K_d , le correcteur $PI^\alpha D^\beta$ dispose de deux autres paramètres de réglage, α et β . Cette caractéristique le rend plus adaptable, offrant ainsi une meilleure possibilité d'ajustement des propriétés dynamiques des systèmes de commande d'ordre fractionnaire. Inspirés par cette idée, de nombreux travaux sur les techniques de réglage sont actuellement publiés[7,65].

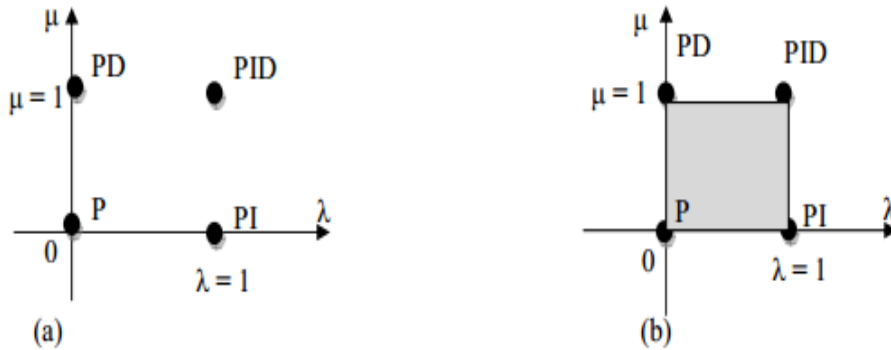


Figure III.9. (a) Ordre entier, (b) Ordre fractionnaire.

Selon la figure (III.9), Les cas suivants peuvent être identifiés dans le tableau ci-dessous :

Tableau III.2.Type du contrôleur selon les différentes valeurs de α et β .

Paramètres	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$0 < \alpha < 1$
$\beta = 0$	Contrôleur « P » classique	Contrôleur « PI » classique	
$\beta = 1$	Contrôleur « PD » classique	Contrôleur « PID » classique	Contrôleur « PI » fractionnaire
$0 < \beta < 1$		Contrôleur « PD » fractionnaire	Contrôleur « PID » fractionnaire

À partir de ces résultats, on observe que les correcteurs classiques peuvent être considérés comme des cas particuliers des correcteurs d'ordre fractionnaire.

III.6. Contrôleur PID Fractionnalisé

Le contrôleur PID fractionnalisé d'un système d'ordre entier (système d'origine) est mis en œuvre dans des systèmes de commande à rétroaction unitaire, comme illustré dans la figure (III.10) [64].

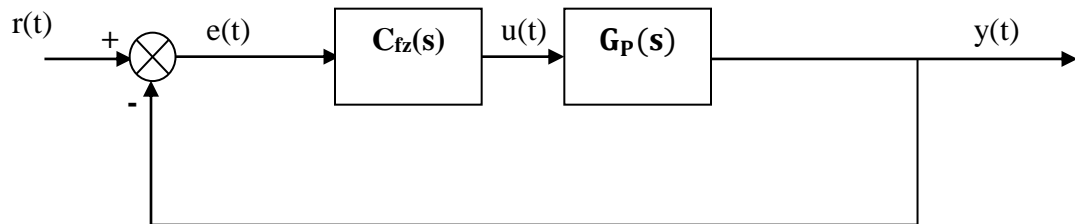


Figure III.10. Système de commande PID fractionnalisée à retour unitaire.

Sachant que :

- $u(t)$: le signal de commande.
- $e(t)$: l'écart résultant de la différence entre la consigne $r(t)$ et la sortie $y(t)$: .
- $y(t)$: la grandeur à commander.
- $C_{fz}(s)$: la fonction de transfert du contrôleur fractionnalisé.
- $G_p(s)$: est la fonction de transfert de système.

Le contrôleur PID d'ordre entier fractionnalisé à concevoir pour notre système de commande est sous la forme suivante :

$$C_{fz}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (III.21)$$

L'équation (III.23) peut être écrite de la manière suivante :

$$C_{fz}(s) = \frac{1}{s} \left[\frac{K_p T_i T_d s^2 + K_p T_i s + K_p}{T_i} \right] \quad (III.22)$$

Après Fractionnalisation de l'intégrateur « $\frac{1}{s}$ », Le contrôleur PID fractionnalisé est défini par la fonction suivante :

$$C_{fz}(s) = \frac{1}{s^\alpha} \frac{1}{s^{1-\alpha}} \left[\frac{K_p T_i T_d s^2 + K_p T_i s + K_p}{T_i} \right] \quad (III.23)$$

Avec $0 < \alpha < 1$.

III.7. Simulation, résultats et commentaires

Notre étude présente une comparaison entre trois méthodes de contrôle d'un moteur à courant continu (PID classique, PID fractionnaire et PID fractionnalisé), dans le but d'assurer un suivi précis des consignes de vitesse et de réduire la sensibilité du système aux perturbations liées aux variations de charge.

Le modèle identifié pour représenter la relation entre la tension appliquée et la vitesse du moteur est le suivant [66]:

$$G_{DC_moteur}(s) = \frac{K_{DC_moteur}}{\tau s + 1} = \frac{0.25}{1.4s + 1} \quad (III.24)$$

Les figures (III.11)- (III.14) montrent les diagrammes de Bode des nos systèmes approximmés (premoires et second ordre)

Les figures (III.15)- (III.16) montrent les Réponse indicielle de nos systèmes approximés (premiers et seconde ordre)

Les figures (III.17), (III.18) montrent la vitesse du moteur à courant continu en utilisant le contrôleur PID entier pour $\alpha=0,1$ et $\alpha=0,5$ respectivement, avec les valeurs optimisées des paramètres suivants [30-31]:

$$K_p = 966.6787, K_i = 126.8123 \text{ et } K_d = 48.3883$$

1. Approximation :

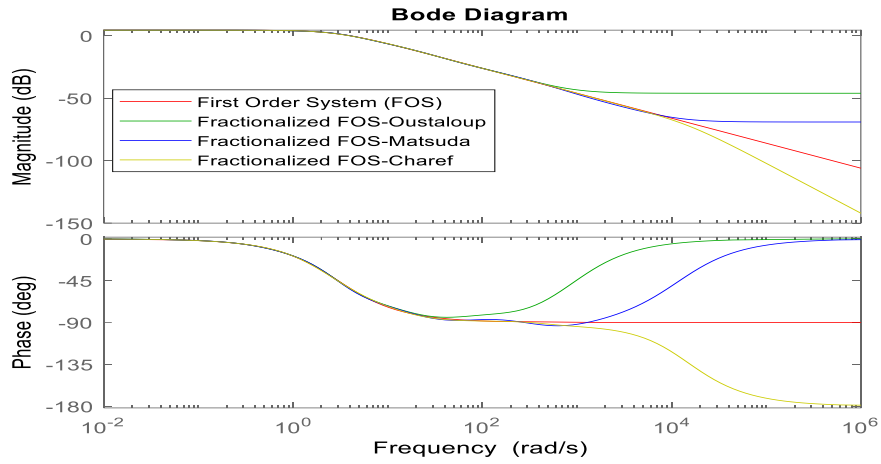


Figure III.11. Diagramme de Bode (amplitude et phase) : Système premier ordre (pour $\alpha=0.1$)

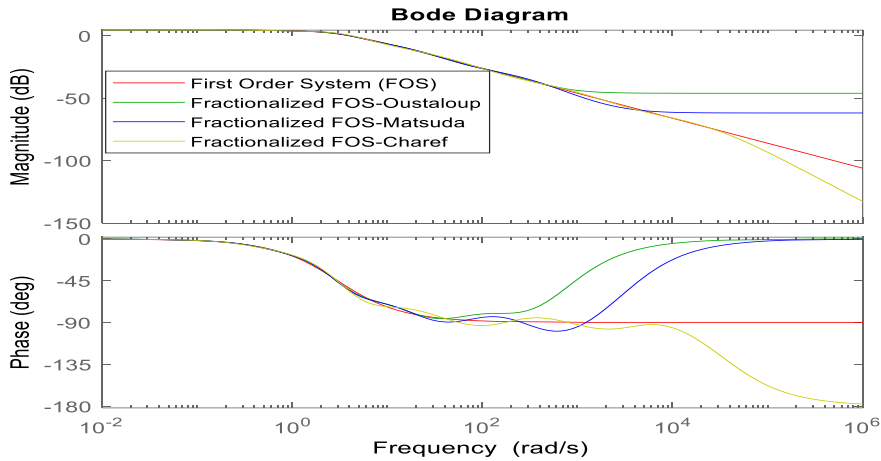


Figure III.12. Diagramme de Bode (ampmtude et phase) : Système premier ordre (pour $\alpha=0.5$)

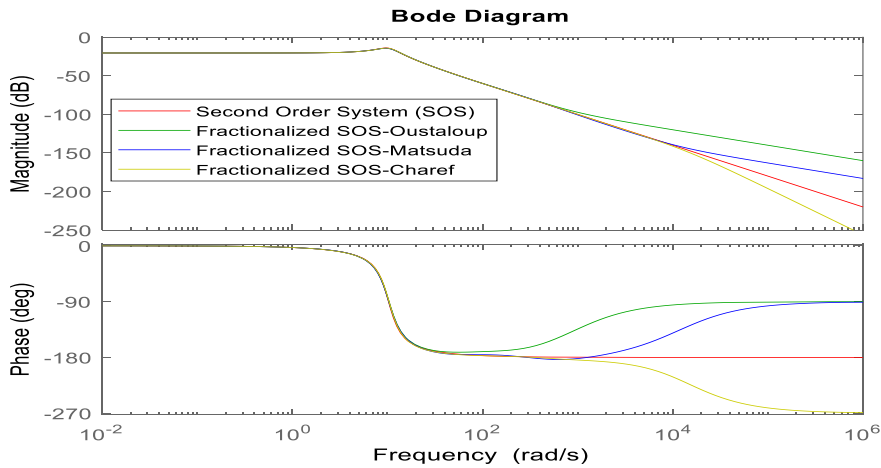


Figure III.13. Diagramme de Bode (ampmtude et phase) : Système seconde ordre (pour $\alpha=0.1$)

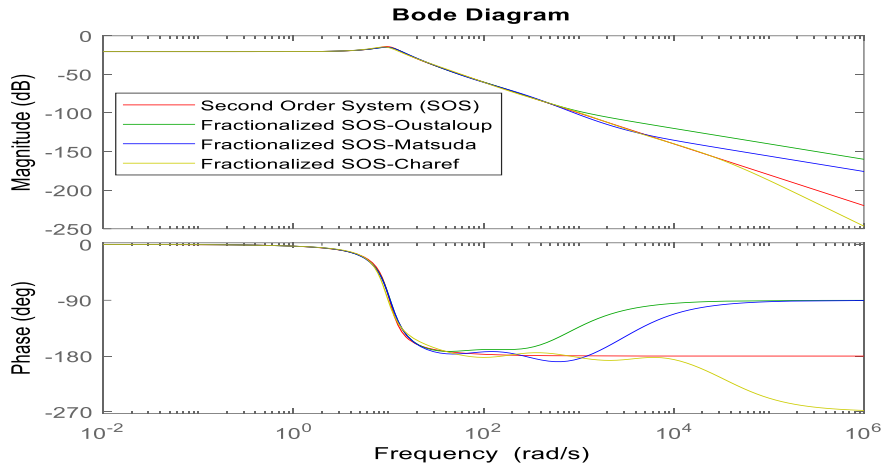


Figure III.14. Diagramme de Bode (amplitude et phase) : Système second ordre (pour $\alpha=0.5$)

1. Réponse step :

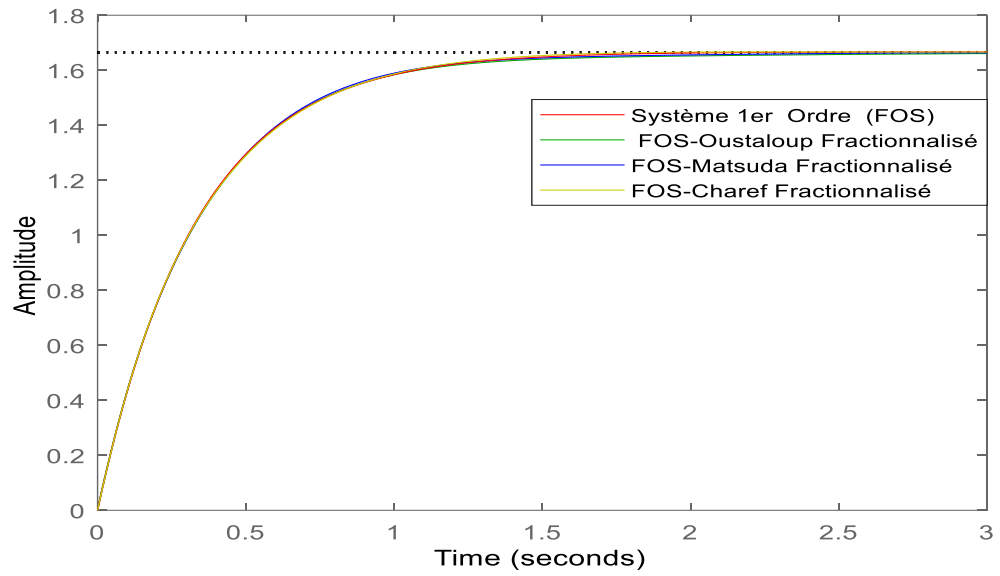


Figure III.15. Reponse Step : Système de premier ordre

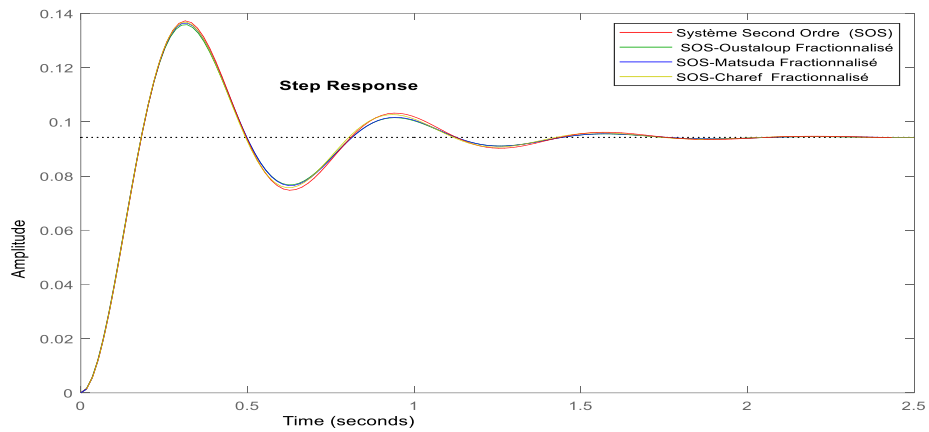


Figure III.16. Réponse Step : Système du seconde ordre

2- Commande PID

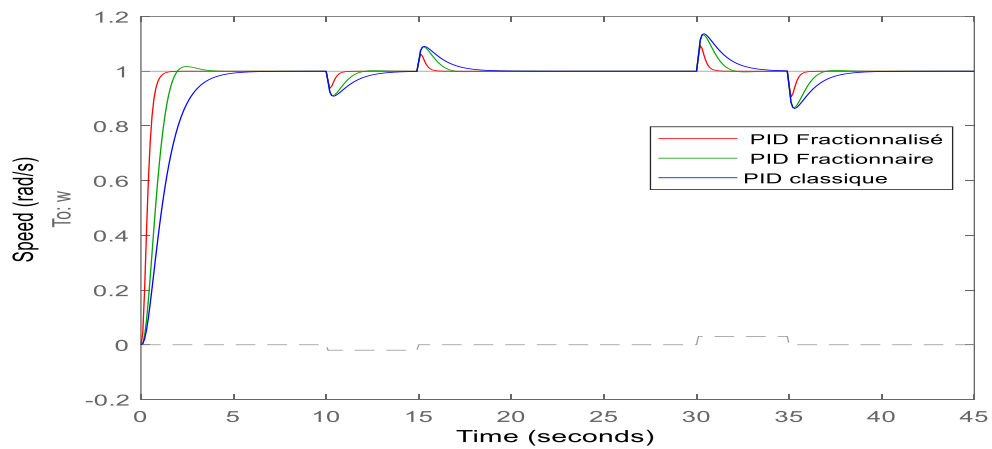


Figure III.17. Vitesse : Commande PID/PID fractionnaire et PID fractionnalisé (pour $\alpha=0.1$).

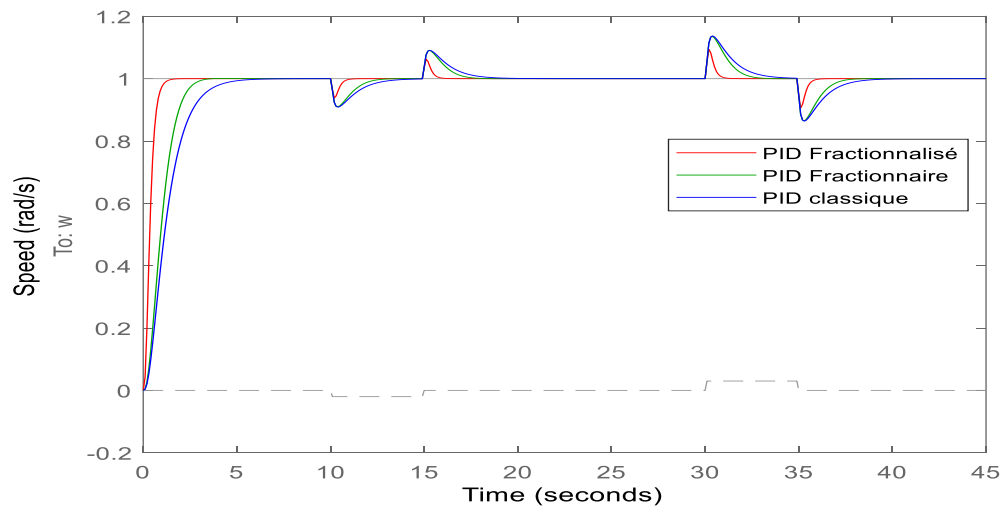


Figure III.18. Vitesse : Commande PID/PID fractionnaire et PID fractionnalisé (pour $\alpha=0.5$).

Selon les figures de simulation précédentes : nous observons que, par rapport au contrôleur PID classique, notre contrôleur PID fractionnalisé offre une amélioration notable en termes de performances, notamment :

- **Dépassement** : le dépassement constaté est nettement réduit, voire quasi-inexistant.
- **Temps d'établissement** : nettement plus court, traduisant une convergence plus rapide vers la valeur désirée.
- **Temps de montée** : plus rapide, indiquant une réponse dynamique améliorée.
- **Erreur absolue moyenne** : significativement plus faible, ce qui témoigne d'une meilleure précision globale.
-

III.8. Conclusion

Au terme de ce chapitre, nous avons introduit et analysé le concept de la commande PID Fractionnalisée, une extension avancée des régulateurs classiques PID basée sur le calcul fractionnaire. Cette approche permet une plus grande flexibilité dans le réglage des paramètres, offrant ainsi des possibilités accrues pour l'optimisation des performances des systèmes commandés.

Afin d'évaluer son efficacité, une comparaison détaillée a été menée entre le régulateur PID classique d'ordre entier et sa version fractionnaire/fractionnalisée. À travers diverses simulations réalisées sous des conditions similaires, il est apparu clairement que le contrôleur PID fractionnalisé présente des avantages significatifs. En particulier, il se distingue par une réponse plus rapide, un dépassement largement réduit, ainsi qu'une meilleure robustesse face aux variations des paramètres du système et aux perturbations externes.

Ces résultats soulignent l'intérêt croissant porté à l'utilisation des ordres non entiers en automatique et montrent que la PID fractionnalisée constitue une alternative prometteuse et performante par rapport aux méthodes traditionnelles, notamment dans les applications exigeant une précision et une stabilité élevées.

Ainsi, cette étude ouvre la voie à de futures recherches visant à explorer d'autres structures de contrôle basées sur le calcul fractionnaire, ainsi qu'à leur mise en œuvre dans des cas pratiques plus complexes et réels.

Conclusion générale

Conclusion générale

Les systèmes à ordre fractionnaire constituent aujourd'hui un champ de recherche en pleine expansion, à la croisée de la théorie mathématique avancée et des besoins pratiques en modélisation et commande de systèmes complexes. Leur capacité à capturer des dynamiques intermédiaires, des effets de mémoire, et à mieux représenter certains phénomènes physiques ou biologiques, en fait une alternative sérieuse aux approches traditionnelles à ordre entier.

Ce travail a permis d'explorer en profondeur les fondements théoriques de ces systèmes, ainsi que les méthodes pratiques permettant leur exploitation dans des environnements réels. Dans un premier temps, les principes fondamentaux du calcul fractionnaire ont été clarifiés, en détaillant les principales définitions (Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov) ainsi que leurs implications en termes de modélisation. Une attention particulière a été portée aux propriétés différentielles spécifiques de l'ordre fractionnaire, notamment la non-localité et la dépendance à l'historique du système, caractéristiques souvent négligées dans les modèles classiques.

Par la suite, les méthodes d'approximation ont été étudiées en profondeur, car elles constituent une étape incontournable pour rendre les modèles fractionnaires exploitables dans les systèmes numériques ou analogiques. Plusieurs approches de la littérature ont été analysées, telles que les méthodes de Matsuda, Oustaloup, Charef ou encore les approximations numériques par séries et transformées. Ces méthodes ont été comparées selon plusieurs critères : précision fréquentielle, bande de validité, complexité de mise en œuvre, et stabilité du système approximé.

Enfin, une étude expérimentale a permis de valider les apports concrets des modèles à ordre fractionnaire. À travers la mise en œuvre d'un régulateur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ appliqué au contrôle d'un moteur à courant continu, les performances obtenues sont montrées des améliorations significatives : meilleure qualité de la réponse temporelle, réduction du dépassement, temps de réponse plus court, et robustesse accrue face aux perturbations et incertitudes. Ces résultats confortent les travaux théoriques et démontrent l'intérêt pratique de cette approche.

Quelques **perspectives** ont été identifiées, notamment l'optimisation des paramètres par intelligence artificielle, l'implémentation embarquée, ou l'extension à certains types de systèmes plus complexes. Cependant, ces pistes restent à explorer dans des travaux futurs.

Références Bibliographiques

Références Bibliographiques

- [1] Petráš. I, « Fractional Derivatives, Fractional Integrals, and Fractional Differential Equations in Matlab », Published by InTech, Assi, Janeza Trdine 9, 51000 Rijeka, Croatia, 2011.
- [2] A. Ammour, « contribution à la commande par modes glissants d'ordre fractionnaire », thèse de Doctorat, Université de Tizi-Ouzou, Algérie, 2011.
- [3] Ibrahima N'DOYE « Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires », thèse de Doctorat, Ecole doctorale IAEM Lorraine, Maroc, 2011.
- [4] S. Ladaci, « Contribution à la commande adaptative d'ordre fractionnaire » thèse de Doctorat, Université de Constantine, Algérie, 2007.
- [5] Petráš. I, « A note on the fractional-order Chua's system », ELSEVIER, Chaos Solitons Fractals, VOL 38, I 1, October 2008.
- [6] Petráš. I, « A Note on the Fractional-Order Cellular Neural Networks » International Proceedings of the IEEE world congress on computational intelligence, international joint conference on neural networks. 2006. p. 16–21
- [8] Tsung-C. L , Chia-H. K, Valentina E. B, « Fractional Order Chaotic System Tracking Design Based on Adaptive Hybrid Intelligent Control » IEEE International Conference on Fuzzy Systems, June 27-30, 2011.
- [9] Diethelm K, Ford NJ, « Analysis of fractional differential equations » Journal of Mathematical Analysis and Applications 265,229–248 2002.
- [10] Diethelm K, Ford NJ, Freed AD, « A predictor–corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations » Nonlinear Dynamics 29: 3–22, 2002.
- [11] A. El Ougli, « Intégration des techniques floues à la synthèse de contrôleurs adaptatifs » thèse de Doctorat, Université Sidi Mohamed Ben Abdellah, Maroc, 2009.
- [12] A. CHAREF « Analogue Realization of fractional order integrator and differentiator and fractional $PI\lambda D\mu$ controller».Original paper. The institution of engineering and technology. IEE proceedings on line 20050019 ,2006.
- [13] K. Bettou, « Analyse et réalisation de correcteurs analogiques d'ordre fractionnaire »,Thèse de Doctorat en science, Université Frères Mentouri de Constantine (Algérie), 2011.
- [14] M. Assaba, « Contribution à la commande d'ordre fractionnaire ».Thèse de Doctorat en science, Université de Frères Mentouri Constantine (Algérie), 2015.

Références Bibliographiques

- [15] S. Ladaci, « contribution à la commande adaptative d'ordre fractionnaire ».Thèse de Doctorat en Science, Département d'Electronique, Université des Frères Mentouri-Constantine (Algérie) ,2007.
- [16] T. BENSUOICI « Implémentation numérique du retard d'ordre fractionnaire ». Thèse de Doctorat. Université de Constantine(Algerie), 2012
- [17] H. NEZZARI «Contribution à l'analyse des systèmes d'ordre fractionnaire ». Thèse de Doctorat. Université Mentouri de Constantine(Algérie). 2011.
- [18] G.E. Carlson and C.A. Halijak, « Approximation of fractional capacitors $[(1/s)]^{(1/N)}$ by regular newton process». IRE Transactions on Circuit Theory, 11(2) :210–213,1964.
- [19] A. Oustaloup, « La dérivation non entière : théorie, synthèse et applications », Hermès, Paris,1995
- [20] W. Krajewski, U. Viaro,«A method for the integer-order approximation of fractional-order systems».Journal of the Franklin Institute 351(1): 555–564, 2014.
- [21] R. Mansouri, M. Bettayeb, S. Djennoune,« Multivariable fractional system approximation with initial conditions using integral state space representation».Computers and MathematicswithApplications, 59: 1842–1851, 2010.
- [22] A. Charef, H.H. Sun, Y.Y. Tsao, and B. Onaral,«Fractal System as Represented by Singularity Function».IEEE Trans, On Automatic Control, vol. 37, No .9, pp.1465-1470,1992.
- [23] X. Moreau, P.Serrier, A. Oustaloup, «La dérivation non entière en isolation vibratoire : application au contrôle global de la suspension de véhicule ». (Equipe CRONE - LAPS - UMR 5131 CNRS - ENSEIRB - Université Bordeaux 1).
- [24] M. Chetoui, «Identification des systèmes par modèle non entier à partir de signaux d'entrée sortie bruités ». Thèse de Doctorat. Universités de Gabès et Bordeaux(France), 2013.
- [25] A. Charef, « Modelling and Analog Realization of the Fundamental Linear Fractional Order Differential Equation». Nonlinear Dynamics, 46:195-210, 2010.
- [26] S. Ladaci, A. Charef, « On fractional adaptive control». Nonlinear Dynamics 43(4): 365–378, 2006.
- [27] S. Ladaci., J. Loiseau, A. Charef, « Using fractional order filter in adaptive control of noisy plants». Proceedings of the International Conference on Advances in Mechanical Engineering and Mechanics, ICAMEM 2006, Hammamet, Tunisie, 2006.

Références Bibliographiques

- [28] Y. Bensafia, « Utilisation des Filtres Fractionnaires pour la Conception de Régulations Adaptatifs Robustes ». Thèse de Doctorat en Science, Département de Génie Electrique, Université de Skikda (Algérie),2016.
- [29] BarKana, «Positive realness in discrete-time adaptive control systems». International Journal of Systems Science, Vol. 17, No. 7, pp. 1001-1006, 1986.
- [30] R. Dib, Y. Bensafia, K. Khettab, « "Fractionalization": A new approach for comparing different approximation methods of fractional order systems and disturbances Rejection in PID Control».Przeegląd Elektrotechniczny, nr. 7, 227-231, 2023.
- [31] A. Idir, K. Khettab, &Y. Bensafia, «Design of an Optimally Tuned Fractionalized PID Controller for DC Motor Speed Control Via a Henry Gas Solubility Optimization Algorithm». Int. J. Intell. Eng. Syst., N 15, 59–70, 2022.

Titre :

Etude comparative entre la commande PID fractionnaire et la commande PID fractionnalisée d'une classe de systèmes linéaires

المخلص :

يقدم هذا العمل دراسة مقارنة بين نهجين لتحكم متقدمين: تحكم PID الكسري ($PI^{\lambda}D^{\mu}$) والتحكم PID المُقسَّم كسرياً (نهج جديد) بالتحكم PID الكلاسيكي. الهدف هو تقييم أدائهما على مجموعة من الأنظمة الخطية. أجريت محاكاة لتحليل الدقة والاستقرار والمتانة لكل طريقة. تظهر نتائج المحاكاة باستخدام برنامج Matlab على نظام MCC أن المناهج المقسمة كسرياً توفر سلوكاً ديناميكياً أفضل تحت ظروف معينة.

الكلمات المفتاحية : الأنظمة الجزئية، التقريبات، PID الكلاسيكي، PID الجزئي .

Résumé :

Ce travail présente une étude comparative entre deux approches de commande avancée : la commande PID fractionnaire ($PI^{\lambda}D^{\mu}$) et la commande PID fractionnalisée (nouvelle approche) avec celle PID classique. L'objectif est d'évaluer leurs performances sur une classe de systèmes linéaires. Des simulations sont réalisées pour analyser la précision, la stabilité et la robustesse de chaque méthode. Les résultats de simulation par Matlab sur un système de MCC montrent que les approches fractionnaires (fractionnalisés) offrent un meilleur comportement dynamique dans certaines conditions.

Mot-clés: Systèmes fractionnaires, PID classique, PID fractionnaire, PID fractionnalisé, approximations.

Abstract :

This work presents a comparative study between two advanced control approaches: fractional PID control ($PI^{\lambda}D^{\mu}$) and fractionalized PID control (a new approach) with classical PID control. The objective is to evaluate their performance on a class of linear systems. Simulations are performed to analyze the accuracy, stability, and robustness of each method. Matlab simulation results on an MCC system show that fractionalized approaches offer better dynamic behavior under certain conditions.

Keywords: Fractional systems, classical PID, fractional PID, fractionalized PID, approximations.