PEOPLE's DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH

Mohamed Boudiaf university of Msila
Faculty of Mathematics and computer sciences
Department of Mathematics

Master memory

Field : Mathematics and computer sciences
Branch : Mathematics
Option : Mathematical and numerical analysis

Theme

ON THE NUMERICAL SOLUTIONOF VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS

Presented by :
Mlle MADJIDI Imane

In front of the jury composed of :

Mostefa NADIR	Prof,	University of Msila	**President**.
Noui DJAIDJA	MAA,	University of Msila	**Supervisor.**
Bchir GAGUI	MCA,	University of Msila	**Examiner.**

University year 2019/2020

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو تقديم **حلول** تقريبية **لمعادلات** فولتيرا التكاملية **من النوع الأول باستعمال طريقة** كثيرات الحدود المتعامدة لشيبيشاف وطريقة شبه المنحرف **مع مقارنة النتائج المحصل** عليها.

الكلمات المفتاحية**: معادلات** فولتيرا التكاملية **من النوع الأول**- كثير الحدود لشيبيشاف طريقة شبه المنحرف

Abstract:

The goal of this memory is consecrated to the numerical solutions of the Volterra integral equations of the first kind by employing the method of collocation based on the polynomial of TChebyshev, thus the method of the trapezoid, by making comparisons..

Key words: **First kind integral equations of Volterra, the collocation method, the polynomial of TChebyshev**, **numerical quadrature .**

Résumé :

Le but de ce mémoire est consacré aux solutions numériques des équations intégrales de Volterra de première espèce en employant la méthode de collocation basé sur le polynôme de Tchebychev, ainsi la méthode du trapèze, et en faisant des comparaisons.

Mots clés : Equation intégrale de Volterra de première espèce, polynôme de Tchebychev, méthodes de collocation, méthodes de quadrature.

-.

Table des matières

Remerciements

Avant toutes choses, je remercie Allah, le tout puissant, pour m'avoir donné la force et la patience.

Je tient à remercier particuliément Dr. Noui DJAIDJA pour son soutien scientifique, ainsi que pour sa compétence et les bonnes orientations, sesprécieux conseils,mais aussi ses encouragements. Je lui exprime toute ma gratitude.

Je tiens à remercier les membres du jury :Pro,Mostefa NADIR,et Prof,Bachir GAGUI, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

Dédicace

Je dédie ce travail au symbole de la tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon bonheur, pour ma mère "Aicha", que Dieu ait pitié d'elle, elle a toujours voulu atteindre et réussir.

A mon père "Laala", qui a été la cause de mon courage et qui a été mon ombre durant toutes les années de mes études.

A mes soeurs : "Halima , Omaima".

A mes frères : "Seif Eldin , Youness".

A mes amies

Je dédie ce travail

Résumé

Le but de ce travail est la résolution numérique des équations intégrales de Volterra de première espèce,en utilisant les méthodes spéctrales (collocation) basé sur le polynome de Chebychev,et les méthodes de quadratures(méthode de trapèzes).

Introduction

Les équations intégrales sont une des branches les plus importantes des mathématiques, parmi lesquelles les équations intégrales linéaires de Volterra.

Ces équations apparaissent dans de nombreuses applications scientifiques comme : la biologie, la chimie quantique ou la physique.

Ce mémoire est construit de trois chapitres : :

Dans le **premier chapitre,** on donnera des rappels sur :les espaces de Hilbert, les opérateur linéaire,les polynômes orthogonaux.

Dans **le chapitre 2**, on donne des définitions sur des équations intégrales linéaires ,transformation de l'équation intégrale de Volterra du premier espèce a l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce, résolution de l'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce.

Le troisième chapitre présente les notions d'analyse numerique : intégration numérique, méthodes de quadratures,les méthodes spéctrales,dans ce chapitre on donne aussi des solutions numériques des équations intégrales de Volterra du premier espèce ,en employant la méthode de collocation basé sur le polynôme de Chebychev,ainssi la méthode des trapèses et en faisant des comparaison.

Chapitre 1

Notions d'analyse fonctionnelle :

1.1 rapels sur les espaces :

1.1.1 espace de banach

Définition 1.1.1 *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,on appelle une norme sur l'espace E toute fonction notée $\|.\|$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}_+$,telle que*

$$\|x\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$$
$$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| , \quad \text{pour tout } x \in E \text{,pour tout } \lambda \in \mathbb{k}$$
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ ,pour tout } x, y \in E$$

Définition 1.1.2 *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,on dit que E est un espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme $\|.\|$.*

Définition 1.1.3 *une suite (x_n)d'éléments d'un espace normé $(E, \|.\|)$ est dite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 1, \forall p, q \geq N, \textit{on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

espaces complets :

Définition 1.1.4 *On dit qu'un espace normé est complet si toute suite de Cauchy est convergente.*

espace de banach

Définition 1.1.5 *On appelle espace de Banach tout espace normé et complet*

1.1.2 espace de hilbert

Produit scalaire

Définition 1.1.6 *On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel* E *(réel ou complexe) une application* $\langle .,. \rangle : E \times E \to C$ *telle que pour tout* $x; y; z$ *dans* E *et* $\lambda \in \mathbb{k}$

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$
2. $\langle x, x \rangle = 0$ implique $x = 0$
3. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
4. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
5. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

Définition 1.1.7 *un espace de Hilbert* H *est un espace complet par rapport à la norme induite par le produit scalaire. En d'autres terme un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme induite par un produit scalaire.*

Exemple 1.1.1 ***L'éspace*** $L^2([a, b])$

L'espace de Hilbert le plus populaire est l'éspace $L^2(I, \mathbb{R})$ des fonctions de carré intégrables défini par

$$L^2(I, \mathbb{R}) = \left\{ f : I \to \mathbb{R}, \int_I |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\}$$

muni da la norme

$$\|f\|^2 = \int_I |f(t)|^2 \, dt$$

induite par le produit scalaire définit par :

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(x)g(x)dx$$

Remarque 1.1.1 *$L^2(I, \mathbb{R})$ est le seul espace qui est de Hilbert dans l'espace de$L^p(I, \mathbb{R})$*

Orthogonalité

Définition 1.1.8 *(Vecteurs orthogonaux) On dit que deux vecteurs x et y d'un espace de Hilbert H sont orthogonaux si :*

$$\langle x, y \rangle = 0$$

On note $x \perp y$

Base hilbertiennes

Définition 1.1.9 *Une partie G de H est dite dense dans H si :*

$$\forall h \in H, \forall \varepsilon > 0, \exists g \in G; \|g - h\| < \varepsilon$$

Ou de manière équivalente si tout h de H est limite d'une suite (g_n)d'élèment de G telle que $\|g_n - h\| \longrightarrow 0$

Définition 1.1.10 *Soit H un espace de Hilbert et $f = (e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs. On dit que f est une base de H (ou base hilbertienne) si :*

1. f est une famille orthonormée de H, c'est-à-dire :$\forall (i,j) \in I^2 : \begin{cases} \langle e_i, ej \rangle = 0, \text{ si } i \neq j \\ \langle e_i, e_j \rangle = 1, \text{ si } i = j \end{cases}$
2. (a) La famille f est de plus complète ou total, c'est-à-dire :$H = vect(e_i) \Longleftrightarrow$l'ensemble des combinaisons linéaires finies des éléments de $f$est dense dans H

1.1.3 Opérateurs

1.1.4 Opérateurs linéaires bornés

Opérateurs continus :

Définition 1.1.11 *Soient E et F deux espaces normés ,un opérateur A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si on a ,la propriété suivante pour toute suite x_n de G converge vers x_0 , la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$. c'est à dire*

$$\lim_{n\to\infty} A(x_n) = A(\lim_{n\to\infty} x_n) = A(x_0)$$

Remarque 1.1.2 *l'opérateur A est dit continu sur G ,s'il est continu en chaque point de l'ensemble G.*

Opérateurs linéaires :

Définition 1.1.12 *soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{k}$.Une application $A : E \to F$ est dit linéaire si pour tout u et v dans E et pour tout scalaire α et β ,*

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha A(u) + \beta A(v)$$

A est appeleé aussi opérateur linéaire ou transformation linéaire.

Opérateurs bornés :

Définition 1.1.13 *Soient E et F deux espaces normés.un opérateur linéaire $A : E \to F$ est dit borné s'il existe une constante $M \geq 0$,telle que*

$$\|Au\| \leq M \|u\| \qquad \text{pour tout } u \in E$$

Norme d'un opérateur

Définition 1.1.14 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés .On définit une norme sur l'espace vectoriel de tout les opérateurs linéaires bornés de E dans F par*

$$\|A\| = \sup_{\|u\|=1} \|Au\| = \sup_{\|u\|\neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|}$$

On note par $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de E dans F. Si $E = F$,il est noté simplement par $\mathcal{L}(E)$.

Noyau et image d'un opérateur linéaire :

le noyau et l'image d'un opérateur linéaire sont deux espaces vectoriels importants.

Définition 1.1.15 *Soit $A : E \to F$ un opérateur linéaire entre deux espaces vectoriels E,F le noyau de A ,noté par $N(A)$ est le sous espace vectoriel de E, défini par*

$$N(A) = \{u \in E \mid Au = 0\}$$

l'image de A notée par $R(A)$ est le sous espace vectoriel de F défini par

$$R(A) = \{Au \in F \mid u \in E\}$$

1.1.5 Opérateurs compactes :

Définition 1.1.16 ***(Ensembles relativement compacts)****.Un ensemble $G \subset E$ est relativement compact si pour toute suite $\{u_n\}$ de G, il existe une sous suite $\{u_{n(k)}\}$ qui converge dans F*

Définition 1.1.17 *Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné G dans*

E à un ensemble relativement compact $A(G)$ dans F. Autrement dit, la fermeture $A(G)$ est compacte.

Définition 1.1.18 *Soient E et F deux espaces de banach,un opérateur $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est dit compact si l'image $A(B_E)$ de la boule unité fermée*

$$B_E = \{x \in E; \|x\|_E \leq 1\}$$

est relativement compact .Autrement dit,A est compact si et seulement si pour toute suite(x_n) borné dans E la suite (Ax_n) admet une sous suite convergente .

Notons par $\kappa(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires compacts de E dans F si $E = F$ on pose $\kappa(E) = \kappa(E, E)$.

Théorème 1.1.1 *Soit A un opérateur borné de E dans F, à image $A(E)$ de dimension finie. Alors A est compact.*

Théorème 1.1.2 *L'opérateur identique I de E dans E est compact si et seulement si* $\dim E < \infty$

Définition 1.1.19 *On dit qu'un opérateur $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang fini si* $\dim R(T) < \infty$, *il est clair qu'un opérateur continu de rang fini est un opérateur compact.*

Convergence uniforme et convergence ponctuelle :

Définition 1.1.20 *soit (A_n) une suite d'opérateurs dans $\mathcal{L}(E, F)$ .On dit que (A_n) converge uniformément vers l'opérateur $A \in \mathcal{L}(E, F)$ si*

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0.$$

On dit aussi que (A_n) converge vers A en norme d'opérateur.

Définition 1.1.21 *Soit* (A_n) *une suite d'opérateurs dans* $\mathcal{L}(E,F)$ *.On dit que* (A_n) *converge ponctuellement vers l'opérateur* $A \in \mathcal{L}(E,F)$ *si*

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n u - Au\| = 0, \ \textit{pour tout } u \in E.$$

Il est facile de vérifier que la convergence uniforme de la suite (A_n) dans $\mathcal{L}(E,F)$ implique la convergence ponctuelle, la mais réciproque n'est pas toujours vraie.

Chapitre 2

Introduction à la théorie des équations intégrales :

Dans ce chapitre, on donne des définitions sur des équations intégrales linéaires et quelques méthodes pour résoudre des équations intégrales .

Opérateur intégral :

Définition 2.0.22 *Soit Ω un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et k une fonction mesurable sur $\Omega \times \Omega$, l' opérateur linéaire A défini par :*

$$A\varphi(x) = \int_{\Omega} K(x,y)\varphi(y)dy$$

est appelé opérateur intégral à noyou k.

Equations intégrales linéaires

Définition 2.0.23 *On appelle équation intégrale linéaire toute équation de la forme*

$$\varphi(x) + \lambda \int_{\Omega} k(x,y)\varphi(y)dy = f(x) \tag{2.0.1}$$

où φ est l'inconnu, $k(x,y)$ et $f(x)$ sont des fonctions données.

$k(x,t)$ appelé le noyau de l'équation intégrale(2.0.1)

$\Omega = ([a;b], ou\ [a;x])$, *$\lambda$ un paramètre.*

Remarque 2.0.3 *L'équation (2.0.1) peut être écrite sous forme d'opérateur*

$$(I - \lambda A)\varphi(x) = f(x)$$

où I est l'application identité,et A l'opérateur intégral défini par :

$$A\varphi(x) = \int_E k(x,y)\varphi(y)dy$$

Définition 2.0.24 *Soit k une fonction de l'espace $L^2(]a,b[\times]a,b[)$,alors l'opérateur A défini par :*

Lemme 2.0.1

$$A\varphi(x) = \int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy \quad , \ x \in [a,b] \tag{2.0.2}$$

est bien défini,en tant qu'opérateur de $L^2(]a,b[)$ dans lui-même.

Preuve. *La linéarité est évidente,seule la continuité (et le fait que $A\varphi$ est un élément de $L^2(]a,b[)$,si $u \in L^2(]a,b[)$,qui en sera une conséquence immédiate) est à démontrer bien entendu,nous voulons majorer*

$$\int_a^b (A\varphi(x))^2 dx = \int_a^b (\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy)^2 dx \qquad x \in]a,b[$$

par l'inégalité de cauchy-schwar,il vient

$$\int_a^b (A\varphi(x))^2 \leq \int_a^b (\int_a^b |k(x,y)|^2 dy)(\int_a^b |\varphi(y)|^2 dy)dx \leq M^2 \int_a^b |\varphi(x)|^2 dy$$

avec

$$M^2 = \int\int_{]a,b[\times]a\times b[} |k(x,y)|^2 dydx \prec \infty$$

puisquek$\in L^2(]a,b[\times]a,b[)$.ce qui prouve que(2.0.2) défini bien un opérateur continu de $L^2(]a,b[)$ dans lui-même,et montre au passage que sa norme est majorée par M ■

Théorème 2.0.3 *Soit $k \in L^2(]a,b[\times]a,b[)$.L'opérateur intégral A de noyau k est compact de $L^2(]a,b[)$ dans lui-même.*

Preuve. *Nous admettrons qu'il est possible d'approcher le noyau k dans $L^2(]a,b[\times]a,b[)$ par une suite de noyau $(k_n)_{n\in N}$ dégénérés notons A_n*

l'operateur intégral de noyau k_n .

D'aprés la proposition(1.4.1) , A_n *est un opérateur de rang fini .Montrons que la suite (A_n) converge vers A .*

On a

$$(A_n - A)\varphi(x) = \int_a^b (k_n(x,y) - k(x,y))\varphi(y)dy$$

et

$$\begin{aligned}
\|(A_n - A)\varphi\| &= \int_a^b (\int_a^b (k_n(x,y) - k(x,y))\varphi(y)dy)^2)dx \\
&\leq (\int\int_{]a,b[\times]a,b[} |k_n(x,y) - k(x,y)|^2 dy)dx \|\varphi\|^2 \\
&= \|k_n - k\|_{L^2(]a,b[\times]a,b[)} \|\varphi\|^2
\end{aligned}$$

le premier terme tend vers 0,d'aprés le choix de k_n,ce qui achéve la démonstration. ■

2.1 Classification des équations intégrales :

2.1.1 Les équations intégrales de Fredholm

Définition 2.1.1 *La forme générale des équations intégrales linéaires deFredholm est*

$$h(x)\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,y)\varphi(t)dt=f(x) \tag{2.1.3}$$

Où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, $k(x;y)$ et $f(x)$ des fonctions donnée, x et t deux variables réelles parcourant l'intervalle$[a;b]$ et λ un paramètre numérique.

La fonction $k(x;y)$ est le nayau de l'équation intégrale(2.1.3) ,telle que

$$\int_a^b (\int_a^b |(k(x,y)|^2\, dxdy<\infty.$$

Si la fonction $h(x)=0$, l'equation (2.1.3) s'écrit :

$$\int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy=f(x)$$

est s'appelle l'équation intégrale linéaire de Fredholm de premiére espéce.

Si la fonction $h(x)=1$, l'equation (2.1.3) devient tout simplement

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy=f(x)$$

est s'appelle l'équation intégrale linéaire deFredholm de seconde espéce.

Si $f(x)\neq 0$, l'équation intégrale (2.1.3)est dite non homogène.Dans le cas contraire,l'équation intégrale (2.1.3) s'écrit

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,y)\varphi(y)dy=0$$

et on dit qu'elle est homogène.

2.1.2 Les équations intégrales de Volterra

Les équations intégrales de volterra sont des cas particuliers de ceux de Fredholm dans lesquelles le noyau k est tel que :

$$k(x,y) = 0 \text{ pour } y > x \text{ et } b = x$$

Définition 2.1.2 *La forme générales des équations intégrales de Volterra est*

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^x k(x,y)\varphi(y)dy \tag{2.1.4}$$

.

comme dans les équations de Fredholm, les équations intégrales de volterra sont de deux types.

Si la fonction $h(x) = 1$,*alors l'équation (2.1.4) devient tout simplement*

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^x k(x,y)\varphi(y)dy = f(x)$$

et s'appelle l'équation intégrale intégrale linéaire deVolterra de seconde espéce.

Si la fonction $h(x) = 0$,*alors l'équation (2.1.4) s'écrit :*

$$\int_a^x k(x,y)\varphi(y)dy = f(x)$$

cette équation est appelée l'équation intégrale linéaire de Volterra de premiére espéce.

Si $f(x) \neq 0$, *l'équation (2.1.4) est dite non homogène.Dans le cas contraire,l'équation intégrale (2.1.4) s'écrit*

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^x k(x,y)\varphi(y)dy = 0$$

et on dit qu'elle est homogène.

2.2 Existence et unicité de la solution de l'équation de Volterra de second espèce

2.2.1 Introduction à la théorie du point fixe [1]

Définition 2.2.1 *(**opérateur contractant**). Soient H est un espace de Hilbert et A un opérateur borné, l'opérateur A est dit opérateur contractant s'il existe une constante k telle que :*

$$0 < k < 1, \text{ et } \parallel A\varphi_1 - A\varphi_2 \parallel \leq k \parallel \varphi_1 - \varphi_2 \parallel, \quad \text{pour tout } \varphi_1, \varphi_2 \in H$$

Théorème 2.2.1 *Soit A un opérateur contractant dans un espace de Hilbert H, alors l'équation*

$$A\varphi = \varphi \tag{2.2.5}$$

admet une solution unique φ dans H, cette solution est le point fixe de cet opérateur.

Preuve. voir [1] ■

Théorème 2.2.2 *Soit H est un espace de Hilbert et A un opérateur borné dans H avec la propriété suivante*

$$\parallel A\varphi_1 - A\varphi_2 \parallel \leq k \parallel \varphi_1 - \varphi_2 \parallel$$

alors l'équation suivante

$$\varphi - \lambda A\varphi = f$$

admet une solution unique pour toute $f \in H$ à condition que $\mid \lambda \mid$ est petit.

Preuve. voir [1] ■

Théorème 2.2.3 *Soit $k(x, y)$ est une fonction continue pour $x, y \in [a, b]$, alors l'équation de Volterra*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \ a \leq y \leq x \leq b \tag{2.2.6}$$

admet une solution unique $\varphi(x)$ pour toute f dans $L^2([a,b])$ et λ dans $\mathbb{R}$.

Preuve. voir [1] ■

2.3 Transformation de EIV de première espèce à EIV de second espèce

Formule de Leibniz

Soient $f(x,y)$ et $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ des fonctoins continue dans un domaine de plan $x-y$ qui inclut dans le rectangle $a \leq x \leq b, y_0 \leq y \leq y_1$ et soit la fonction

$$F(x) = \int_{A(x)}^{B(x)} f(x,y)dy \tag{2.3.7}$$

alors la différenciation de l'intégrale (2.3.7) existe et donnée par

$$F^{'}(x) = \frac{dF}{dx} = f(x,B(x))\frac{dB(x)}{dx} - f(x,A(x))\frac{dA(x)}{dx} - \int_{A(x)}^{B(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy \tag{2.3.8}$$

Si $A(x) = a$ et $B(x) = x$ où a est une constante, alors la formule de Leibnitz (2.3.8) réduite à

$$\frac{dF}{dx} = f(x,x) + \int_a^x \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy \tag{2.3.9}$$

Définition 2.3.1 *Soit $k(x,t)$ un noyau de volterra sur $([a,b])^2$,l'équation de volterra de première espèce est une équation de la forme :*

$$\int_a^x k(x,y)\varphi(y)dy = f(x)$$

Cette équation en géneral est plus difficile à résoudre que celle de seconnde espèce sauf si les fonctions f et k sont assez régulières ,dans ce cas l'équation peutêtre ramenée à une équation intégrale de Volterra de seconde espéce .

Théorème 2.3.1 *On considère l'équation intégrale de Volterra du premier éspèce*

$$\int_a^x k(x,y)\varphi(y)dy = f(x) \tag{2.3.10}$$

Sous les hypothéses suivantes

1. f *de classe* $\mathbb{C}^1[a,b]$ *et* $f(a)=0$
2. $k(x,y)$ *et* $k_x(x,y) = \dfrac{\partial k(x,y)}{\partial x}$ *sont continues dans l'intervalle* $a \leq y \leq x \leq b$
3. $k(x,x) \neq 0 \qquad$ *pour tout* $x \in [a,b]$

L'équation (2.3.10) se raméne alors à une équation intégrale de Volterra de seconde espèce .

Preuve. *En dérivant l'équation(2.3.10) par rapport à* x *on obtient :*

$$\varphi(x) + \int_a^x \frac{1}{k(x,x)}\frac{\partial k(x,y)}{\partial x}\varphi(y)dy = \frac{f'(x)}{k(x,x)} \tag{2.3.11}$$

L'équation (2.3.11) peut écrite sous la forme

$$\varphi(x) + \int_a^x k_1(x,y)\,\varphi(y)dy = f_1(x) \tag{2.3.12}$$

où

$$k_1(x,y) = \frac{1}{k(x,x)}\frac{\partial k(x,y)}{\partial x}, \text{ et } f_1(x) = \frac{f'(x)}{k(x,x)}$$

Qui est une équation intégrale de Volterra de second espèce

L'équation (2.3.12) admet une solution unique dans $L_2[a,b]$ *si* $k_1(x,y)$ *est carré intégrable et* $f_1(x) \in L_2[a,b]$ *.*

$\blacksquare$

2.4 polynômes orthogonaux :[3]

Les polynômes orthogonaux jouent un rôle important dans les méthodes spectrales, dans cette section on donne quelques polynomes orthogonaux et leurs propriétés.

2.4.1 orthogonalité :

Soit $I = [a, b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$, $w : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive appelée fonction poids telle que

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \int_a^b |x|^n \, w(x) dx < \infty$$

On considère l'espace vectoriel E des fonctions continues $f : I \to \mathbb{R}$ telles que

$$\int_a^b |f(x)|^n \, w(x) dx < \infty$$

L'espace E muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) w(x) dt$$

est un espace préhilbertien. Les polynômes orthogonaux relativement à la fonction de poids $w(x)$ sont les polynômes P_n de degré n vérifiant la relation d'orthogonalité

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_a^b P_n(x) P_m(x) dx = 0, \quad n \neq m, \quad n, m = 0, 1, 2, ...$$

2.4.2 Zéros de polynômes orthogonaux

Les zéros des polynômes orthogonaux jouent un rôle fondamental dans les méthodes spectrales.Ils sont choisis comme noeuds.

Théorème 2.4.1 *Tout polynôme P_n avec $n \geq 1$, admet n racines distinctes, qui sont toutes réelles, simples et situées à l'intérieur de l'intervalle d'intégration $[a, b]$*

2.4.3 Polynômes de Tchebychev

Définition 2.4.1 *Les polynômes de Tchebychev T_n d'ordre n de première espèce, sont définis par la relation de récurrence*

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \text{ pour tout } n \geq 1$$

et les conditions d'initialisation :

$$T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x$$

Les premiers polynômes de Tchebychev sont :

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 1 \\
T_1(x) &= x \\
T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\
T_6(x) &= 32x^5 - 48x^4 + 18x^2 - 1
\end{aligned}$$

propriétés :

1. Le polynômede Tchebychev $T_n(x)$ peut être défini par la relation :

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

ou bien encore par la relation

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n\right)$$

$T_n(x)$ est un polynôme de degré n dont le coeffcient de plus haut degré est 2^{n-1} vérifiant

$$T_n(1) = 1 \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Ces polynômes vérifient la relation

$$T_n(-x) = (-1)^n \; T_n(x)$$

2. Les polynômes de Tchebychev sont solutions de l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$$

3. Les polynômes de Tchebychev satisfont la relation de récurrence

$$(1-x^2)T_n'(x) = -nxT_n(x) + nT_{n-1}(x)$$

4. Pour $i = 0, ..., n$ la relation du produit de deux polynômes

$$T_i(x)T_n(x) = \frac{1}{2}\left(T_{n+i}(x) + T_{n-i}(x)\right)$$

5. Majorations

$$\begin{aligned} \forall x \;\; &\in \;\; [-1,1]\,, \quad |T_n(x)| \leq 1 \\ \forall x \;\; &\in \;\; [-1,1]\,, \quad \left|\frac{dT_n(x)}{dx}\right| \leq n^2 \end{aligned}$$

6. Les polynômes de Tchebychev sont des polynômes orthogonaux sur $\mathcal{L}_2(]-1,1[)$, relativement à la fonction de poids définie sur l'intervalle $[-1,1]$ par $\omega(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et on a

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} T_n(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \frac{\pi}{2}\delta_{n,m}, \text{pour} \quad n \neq 0 \\ \int_{-1}^{+1} T_0^2(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \pi, \text{pour } n = 0 \end{aligned}$$

7. Les polynôme de Tchebychev de degré n admet exactement n racines réelles données

par

$$\cos\left(\frac{(2k+1)\,\pi}{2n}\right) \qquad\qquad k=0,1,...,n-1$$

2.4.4 les polynômes de Legendre

Les polynômes de legendre $P_n(x)$ de degré n sont donnés par la relation de récurrence

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

initialisée par

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x$$

Les premiers polynômes sont :

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_{1(x)} &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^2-3x) \end{aligned}$$

propriétés :

1. Les polynômes de legendre satisfont la relation de récurrence

$$(1-x^2)P_n'(x) = -nxP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

2. Les polynômes de Legendre sont solutions de l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

3. Majorations

$$\begin{aligned}
\forall x &\in [-1,+1], \quad |P_n(x)| \leq 1 \\
\forall x &\in [-1,+1], \quad |P_n'(x)| \leq \frac{n(n+1)}{2} \\
\forall x &\in [-1,+1], \quad |P_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{8\pi(1-x^2)}}
\end{aligned}$$

4. Les polynômes de Legendre sont des polynômes orthogonaux relativement à la fonction de poids $\omega(x) = 1$ sur l'intervalle $[-1,+1]$.

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{n,m}$$

En particulier, $P_n(1) = 1$ et

$$\|P_n(x)\|_2 = \left(\int_{-1}^{+1} P_n^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

Les polynômes de Legendre vérifient la formule

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \frac{2^{3/2}}{2n+1}$$

2.4.5 polynômes de Laguerre

Les polynômes de laguerre L_n de degré n sont donnée par la relation de récurrence :

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

Les premiers polynômes de Laguerre sont :

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= 1 \\
L_1(x) &= 1-x \\
L_2(x) &= \frac{1}{2}(x^2-4x+2) \\
L_3(x) &= \frac{1}{6}(-x^3+9x^2-18x+6)
\end{aligned}$$

propriétés :

La norme des polynômes de Laguerre

$$\|L_n\| = 1$$

Les polynômes de Laguerre sont solutions de l'équation différentielle

$$xy'' + (1-x)y'(x) + ny = 0$$

Chapitre 3

Résolution numérique des équations intégrales

Dans ce chapitre on traite numériquement les équation intégrale de Volterra de seconde espèce qui était une équation intégrale de Volterra de première espèce par la méthode du trapèzes et collocation- Tchybechev.

3.1 Notion d'analyse numérique

3.1.1 Intégration numérique

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue donnée sur un intervalle $[a,b]$, nous voulons calculer numériquement la quantité

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Pour ce faire nous commençons par partitionner l'intervalle d'intégration en n intervalle de même longueur $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, ..., n$ tels que

$$a =< x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b,$$

où

$$x = a + h(i-1), \quad h = \frac{b-a}{n-1}.$$

Il est clair que lorsque n augmente, nous pouvons placer les points x_i de sorte à ce que h soit petit.

Posons

$$x_i = a + h(i-1), \quad i = 1, ..., n$$

alors

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{i=n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx.$$

3.1.2 Méthodes de quadratures

la formule du trapèze

Cette formule est obtenue en remplaçant f par $I_1 f$, son polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 1 aux noeuds $x_0 = a$ et $x_1 = b$.

Les noeuds de la formule de quadrature sont alors $x_0 = a$, $x_1 = b$ et ses poids $\alpha_0 = \alpha_1 = (b-a)/2$:

$$I_1(f) = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]. \tag{3.1.1}$$

Si $f \in C^2([a,b])$, l'erreur de quadrature est donnée par

$$E_1(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi), \; h = b-a, \tag{3.1.2}$$

où ξ est un point de l'intervalle d'intégration.

Pour obtenir la formule du trapèze composite, on procède comme dans le cas où $n = 0$: on remplace f sur $[a,b]$ par son polynôme composite de Lagrange de degré 1 sur n sous–intervalles, avec $n \geq 1$. En introduisant les noeuds de quadrature $x_k = a + kh$, pour $k = 0, \cdots, n$ et $h = (b-a)/(n-1)$, on obtient

$$I_{1,n}(f) = \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(x_k\right) + f\left(x_{k+1}\right)\right), \quad n \geq 1, \tag{3.1.3}$$

où $x_0 = a$ et $x_n = b$.*Chaque terme dans (*3.1.3) *apparaît deux fois, exceptés le premier et le dernier. La formule peut donc s'écrire*

$$I_{1,n}\left(f\right) = h\left[\frac{1}{2}f\left(x_0\right) + f\left(x_1\right) + \ldots + f\left(x_{n-1}\right) + \frac{1}{2}f\left(x_n\right)\right]. \tag{3.1.4}$$

*Comme on l'a fait pour (*3.1.1), *on peut montrer que l'erreur de quadrature associée à (*3.1.4) *s'écrit,si* $f \in C^2\left([a,b]\right)$,

$$E_{1,n}(f) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''\left(\xi\right),$$

où $\xi \in \left]a,b\right[$. Le degré d'exactitude est à nouveau égale à 1, telle que

$$E_{0,n}(f) = \frac{b-a}{24}h^2 f''\left(\xi\right),$$

3.1.3 Méthode de collocation

Généralement, le principe de la méthode de collocation appliqué à la résolution approchée de l'équation opérateur

$$\varphi - A\varphi = f \tag{3.1.5}$$

consiste à chercher une solution approchée dans un sous espace de dimension finie, en exigeant que l'équation (3.1.5) soit vérifiée seulement sur un nombre fini de points appelés points de collocation

En paratique, nous choisissons une suite de sous espaces $X_n \subset X$, $n \geq 1$ de dimension finie, généralement des sous espaces de $C(G)$ ou de $L^2(G)$. Soit $\{\psi_1, ..., \psi_n\}$ une base de X_n. On cherche une fonction $\varphi_n \in X_n$, de la forme

$$\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j\psi_j(x) \text{ },x \in G \tag{3.1.6}$$

Pour déterminer les coefficients (c_j), on substituant, cette fonction dans l'équation (3.1.5), et on exigeant que l'équation soit exacte dans le sens où le résidu

$$r_n(x) = \varphi_n(x) - \int_G k(x,t)\varphi_n(t)dt - f(x) \ ,x \in G$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j\psi_j(x) - \int_G k(x,t)\sum_{j=1}^{n} c_j\psi_j - f(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j \left\{\psi_j(x) - \int_G k(x,t)\psi_j(x)dt\right\} - f(x) \qquad ,x \in G \tag{3.1.7}$$

soit nul sur un système de noeuds $x_1, ..., x_n \in G$, (i.e, aux points de collocation).

Ce qui conduit systématiquement à la résolution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{\psi_j(x_i) - \int_G k(x_i,t)\psi_j(x_i)dt\right\} c_j = f(x_i) \quad ,i = 1, ..., n \tag{3.1.8}$$

de la forme $\Psi_n X = f_n$. Évidemment, ce système admet une solution unique si le det (Ψ_n)est non nul, ce qui dépend d'ailleurs du choix des points de collocation.

3.2 *Equation intégrale de Volterra de seconde espèce*

3.2.1 Méthode de quadrature

Schéma générale

On considère l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) - \int_a^x k(x,y)\,\varphi(y)\,dy = f(x), \ \ a \leq x \leq b \tag{3.2.9}$$

où $k(x,y)$ et $f(x)$ sont des fonctions continues.

De l'équation (3.2.9) on obtient

$$\varphi\left(a\right) = f(a).$$

Choisissons une constante d'intégration h (le pas de la discrétisation) et considérons l'ensemble discret de point

$$x_i = a + h(i-1), i = 1, 2, ..., n$$

Pour $x = x_i$,l'équation (3.2.9) s'écrit

$$\varphi\left(x_i\right) - \int_a^{x_i} k\left(x_i, y\right)\varphi\left(y\right)dy = f(x_i), i = 1, 2, ..., n \tag{3.2.10}$$

En appliquant la méthode de quadrature à l'intégrale en (3.2.10) et posons $y = x_j, j = 1, ..., i$, il vient

$$\varphi\left(x_i\right) - \sum_{j=1}^{i} A_{ij}k\left(x_i, x_j\right)\varphi\left(x_j\right) = f(x_i) + \varepsilon_i(\varphi),\ \ i = 2, ..., n \tag{3.2.11}$$

où $\varepsilon_i(\varphi)$ est l'erreur et A_{ij} sont les coefficients de la méthode de quadrature sur l'intervalle $[a, x_i]$.

Supposons que $\varepsilon_i(\varphi)$ sont petits et les négligent, alors on obtient un système d'équations algébriques linéaires de la forme

$$\varphi_1 = f_1,\ \ \varphi_i - \sum_{j=1}^{i} A_{ij}k_{ij}\varphi_j = f_i,\ \ i = 2, ..., n \tag{3.2.12}$$

où $k_{ij} = k\left(x_i, x_j\right),\ f_i = f(x_i),\ \varphi_i = \varphi\left(x_i\right)$.

De (3.2.12) il vient

$$\varphi_1 = f_1,\ \ \varphi_i = \frac{f_i + \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}k_{ij}\varphi_j}{1 - A_{ii}k_{ii}},\ \ i = 2, ..., n \tag{3.2.13}$$

avec la condition $(1 - A_{ii}k_{ii}) \neq 0$.

Ce qui peut toujours être assuré par un chois approprié des nœuds et en garantissant cela les coefficients A_{ii} sont suffisamment petits.

Application de la méthode du Trapèze

Selon la méthode du trapèze nous avons

$$A_{i1} = A_{ii} = \frac{1}{2}h,\ A_{i2} = ... = A_{i,i-1} = h,\ i = 2, ..., n$$

et le système (3.2.13) s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= f_1,\ \varphi_i = \frac{f_i + h\sum_{j=1}^{i-1}\beta_j k_{ij}\varphi_j}{1 - \frac{1}{2}hk_{ii}},\ i = 2, ..., n \\ x_i &= a + h(i-1), n = \frac{b-a}{h} + 1,\ \beta_j = \begin{cases} \frac{1}{2}\ si\ j = 1 \\ 1\ si\ j > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

3.2.2 Méthode de collocation- Tchebychev

Discrétisation d'équation intégrale

On considére l'équation de Volterra de second espèce

$$\varphi(x) - \int_a^x k(x, y)\,\varphi(y)\,dy = f(x), \quad x \in a \leq x \leq b \tag{3.2.14}$$

On utilise la méthode de Galerkin pour approxmier la solution exact $\varphi(x)$ de l'équation (3.2.14).

On suppose

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} C_i T_i(x) \tag{3.2.15}$$

où T_i sont les polynômes de Tchebechev de degré i définé par la relation

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

et C_i des coeficiants à déterminier substitant (3.2.15) dans (3.2.14)

$$\sum_{i=0}^{n} C_i T_i(x) - \int_a^x \left[k(x,y) \sum_{i=0}^{n} C_i T_i(y) \right] dy = f(x) \qquad (3.2.16)$$

d'où

$$\sum_{i=0}^{n} C_i \left[T_i(x) - \int_a^x k(x,y) T_i(y)\, dy \right] = f(x) \qquad (3.2.17)$$

L'équation (3.2.17)représente un système linéaires de $(n+1)$ inconnue s'écrit sous la forme

$$AX = B \qquad (3.2.18)$$

3.3 Exemples Numériques

Exemple 1.*Considirons* l'équation intégrale de Volterra du premier espéce

$$\int_0^x (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - xy + 1)\varphi(y)\, dy = \frac{1}{2}x^2, \quad 0 \leq x \leq 1, \qquad (3.3.19)$$

La solution exacte de cette équation est $\varphi(x) = \sin(x)$.

Dirivons l'équation (3.3.19) parraport à x on obtient

$$\varphi(x) - \int_0^x (x-y)\varphi(y)\, dy = x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

Tableau 1. On présente la solution approchée de la solution exacte $\varphi(x)$ de l'équation (3.3.19) obtenue par la méthode de Chebychev et la méthode de trapèzes pour $n = 10$.

x	Sol.exact $\varphi(x)$	Sol.app.trap	Sol.app.Tcheby	Err.Trap	Err.Tcheby
0.0000	0.0000	0.0000	2.5999e-10	0.0000	2.5999e-10
0.1000	9.9833e-02	1.0000e-01	9.9833e-02	1.6659e-04	4.5871e-10
0.2000	1.9867e-01	1.9900e-01	1.9867e-01	3.3067e-04	7.2673e-10
0.3000	2.9552e-01	2.9601e-01	2.9552e-01	4.8977e-04	1.0092e-09
0.4000	3.8942e-01	3.9006e-01	3.8942e-01	6.4155e-04	1.2318e-09
0.5000	4.7943e-01	4.8021e-01	4.7943e-01	7.8365e-04	1.3117e-09
0.6000	5.6464e-01	5.6556e-01	5.6464e-01	9.1392e-04	1.1745e-09
0.7000	6.4422e-01	6.4525e-01	6.4422e-01	1.0304e-03	7.8117e-10
0.8000	7.1736e-01	7.1849e-01	7.1736e-01	1.1311e-03	1.6575e-10
0.9000	7.8333e-01	7.8454e-01	7.8333e-01	1.2146e-03	5.1069e-10
1.0000	8.4147e-01	8.4275e-01	8.4147e-01	1.2795e-03	8.8644e-10

Exemple 2.[5] *Considirons* l'équation intégrale de Volterra du premier espéce

$$\int_0^x (\exp(x+y)\varphi(y)\,dy = \frac{1}{2}(\exp(2x)-1), \quad 0 \le x \le 1, \tag{3.3.20}$$

La solution exacte de cette équation est $\varphi(x) = \frac{1}{2}(\exp(-2x)+1)$
Dirivons l'équation (3.3.20) parraport à x on obtient

$$\varphi(x) - \int_0^x -(\exp(x-y)\varphi(y)\,dy = 1, \quad 0 \le x \le 1,$$

Tableau 2. On présente la solution approchée de la solution exacte $\varphi(x)$ de l'équation (3.3.20) obtenue par la méthode de Chebychev et la méthode de trapèzes pour $n = 10$.

x	Sol.exact $\varphi(x)$	Sol.app.trap	Sol.app.Tcheby	Err.Trap	Err.Tcheby
0.0000	1.0000e+00	1.0000e+00	1.0000e+00	0.0000	3.1946e-11
0.1000	9.0937e-01	9.0929e-01	9.0937e-01	7.1883e-05	5.3480e-11
0.2000	8.3516e-01	8.3504e-01	8.3516e-01	1.2457e-04	1.8558e-11
0.3000	7.7441e-01	7.7424e-01	7.7441e-01	1.6266e-04	4.6550e-11
0.4000	7.2466e-01	7.2447e-01	7.2466e-01	1.8966e-04	9.3967e-11
0.5000	6.8394e-01	6.8373e-01	6.8394e-01	2.0832e-04	6.9400e-11
0.6000	6.5060e-01	6.5038e-01	6.5060e-01	2.2089e-04	7.4723e-11
0.7000	6.2330e-01	6.2307e-01	6.2330e-01	2.2894e-04	3.5620e-10
0.8000	6.0095e-01	6.0071e-01	6.0095e-01	2.3359e-04	7.3467e-10
0.9000	5.8265e-01	5.8241e-01	5.8265e-01	2.3592e-04	1.0699e-09
1.0000	5.6767e-01	5.6743e-01	5.6767e-01	2.3657e-04	1.0672e-09

Exemple3. *Considirons* l'équation intégrale de Volterra du premier espéce

$$\int_0^x (\cos(x-y)\varphi(y)\,dy = \sin(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{3.3.21}$$

La solution exacte de cette équation est $\varphi(x) = 1$.

Dirivons l'équation (3.3.21) parraport à x on obtient

$$\varphi(x) - \int_0^x -(\sin(x-y)\varphi(y)\,dy = 1, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

Tableau 3. On présente la solution approchée de la solution exacte $\varphi(x)$ de l'équation (3.3.21) obtenue par la méthode de Chebychev et la méthode de trapèzes pour $n = 10$.

x	Sol.exact $\varphi(x)$	Sol.app.trap	Sol.app.Tcheby	Err.Trap	Err.Tcheby
0.0000	1.0000e+00	1.0000e+00	1.0000e+00	0.0000	3.3228e-10
0.1000	1.0000e+00	1.0000e+00	1.0000e+00	4.1723e-06	4.2467e-10
0.2000	1.0000e+00	9.9998e-01	1.0000e+00	1.6630e-05	4.5488e-10
0.3000	1.0000e+00	9.9996e-01	1.0000e+00	3.7491e-05	4.3038e-10
0.4000	1.0000e+00	9.9993e-01	1.0000e+00	6.6638e-05	3.7137e-10
0.5000	1.0000e+00	9.9990e-01	1.0000e+00	1.0407e-04	3.0545e-10
0.6000	1.0000e+00	9.9985e-01	1.0000e+00	1.4991e-04	2.5651e-10
0.7000	1.0000e+00	9.9980e-01	1.0000e+00	2.0403e-04	2.2589e-10
0.8000	1.0000e+00	9.9973e-01	1.0000e+00	2.6649e-04	1.6364e-10
0.9000	1.0000e+00	9.9966e-01	1.0000e+00	3.3724e-04	7.2795e-11
1.0000	1.0000e+00	9.9958e-01	1.0000e+00	4.1634e-04	7.7460e-10

Conclusion

Dans ce mémoire on a traité numériquement des équations intégrales de volterra de premiere éspèce par des méthodes d'approximations : méthode de trapèzes et méthode de collocation-Chebychev.

Les résultas obtenues dans les exemples précédents, montrent que la méthode de collocation-Chebychev a un degré de précision plus élevé que la méthode de trapèzes,car l'ordre de l'erreur ne dépend que de la solution à approcher.

Bibliographie

[1] M.Nadir ,Cours sur les équations intégrales, Université de M'sila.

[2] M, Nadir, Cours d'analyse fonctionnelle, université de M'sila 2004.

[3] M.M.Rahman, Numerical Solutions of Volterra Integral Equations Using Galerkin method With Hermite Polynomials, Islamic University Kuchita ,Bangladesh, 201Franck

[4] Jedrzejewski,Introduction aux méthodes numériques,Deuxième édition, Springer-Verlag France, Paris 2005

[5] Mstefa NADIR,and DJAIDJA Noui,Approximation Method for Volterra Integral Equation of the First Kind,International Journal of Mathematics and Computation,Vol.29 ; Issue NO.4 ;Year 2018.

[6] Andrei. D, Polyanin and Alexander, Manzhirov. V, Hand book of Integral Equation, CRC Press, Boca Roca Ration 1998.

[7] F, Mirzaee, Numerical Solution for Volterra Integral Equations of the First Kind via Quadrature Rule, Applied Mathematical Sciences, Vol. 6(20) (2012) pp. 969 - 974.

[8] A. Rahmoune,Cours d'équations intégrales linéaires, université de Bordj Bou Arréridj, 2018.

[9] W,Abdul.Majid. A first course in integral equations,second edition,World Scientific,2015

[10] A. Rahmoune, Résolution numérique des équations intégrales. Mémoire de Magistère,Université de M'sila, 2004.