TREPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse fonctionnelle

Thème

Etude de la propriété de composition sur certains espaces fonctionnels

Présenté par :
FELLAK SABRINA

Devant le jury composé de :

$\mathrm{M^r}$ Saadi Khalil	Université de M'sila	**Président**
$\mathrm{M^r}$ Ferahtia Nassim	Université de M'sila	**Encadreur**
$\mathrm{M^r}$ Benmeddour mohamed Ourabah	Université de M'sila	**Examinateur**

Année universitaire 2020/2021

Remerciements

Je remercer tout d'abord , notre vénéré Allah . Le tout puissance,à qui nous devons tout.

Je remercie vont tout particulièrement à **Mr NASSIM FERAHTIA** enseignant chargé de cours au département de Mathématique de M'sila qui à bien voulu assurer mon encadrement , c'est un très grand honneur pour moi qu'il ait accepté d'être mon directeur de mémoire.Je lui dois une immense reconnaissance et un très grand respect, je remercie également pour vos encouragement et votre soutien tout au long de la période de travail.

Je remercie vont également à tous les membres de jury Mr Benmeddour mohamed Ourabah et Mr SAADI KHALIL ,pour avoir accepté d'en faire partie et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce mémoire.

je remercie... m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance.

En fin , et bien que des simples remerciements ne suffisent pas pour exprimer tout ce que je leurs dois , mes remerciements les plus chaleurs à mes parents et à tous les membres de ma famille à tous mes amies sans oublier les membres de promotion de Master Analyse Fonctionnel 2021.

Merci à tous pour votre soutien et votre compréhension sans limite.

DEDICACE

Alhamdolillah pour avoir Terminer cette recherche .

A cette qui a donné à sa fille toute la tendresse à celle qui a été patiente avec tout,à celle qui a été mon soutien face aux difficultés de la vie, et ses m'ont aider sur le chemin du succès : **"Ma mère".**

A celui qui donné tout ce qu'il avait pour que Je puisse réaliser ses rêves et ses espoires,à celui qui possedait l'humanité de toutes ses forces,à celui qui a travaillé dur pour m'enseigner avec de grands sacrifices.

A ma première école de la vie : **"Mon père"** que dieu protège-le.

A eux je dédie cette recherche.

A mes sœurs qui ont partagé avec moi les ennuis de la vie : **Khawla** et **Abir**. Aux lampes qui éclairent notre maison, mes frères : **Khair Eddine , Allae Eddine , Bahae Eddin**

Aux femmes de mes frères : **Raouia , Sabrina .**

Aux enfants de ma sœur : **Baraa** et **yazan .**

Aux Jeunes enfants : **Razan , siradj Eddine**.

A Mon mari qui m'a soutenu pendant mes étude : **"Housseyn"**

A toute la famille de **Mon mari** .

A l'âme de ma grande-mère : **"Al Zohra".**

A mon ancle **Mohammed** , sa femme et ses enfants .

A ma tante **Nassima** , son mari, et ses filles .

A mes ancles , mes tantes et leurs enfants .

A tout mes Camarades de la promotion **2021**

Table des matières

Introduction

Le problème de composition sur certains espaces fonctionnels s'est intéressé par plusieurs mathématiciens, S. Igari [11] en 1965 a étudié les fonctions qui opèrent par composition à gauche sur l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ pour $0 < s < 1$, où il a trouvé que cette fonctions qui opèrent sur cet espace, c'est les fonctions localement lipschitziennes et s'annulant à l'origine, si $H^s(\mathbb{R})$ s'injecte dans $L^\infty(\mathbb{R})$, les fonctions globalement lipschitziennes et s'annulant à l'origine, si $H^s(\mathbb{R})$ ne s'injecte pas dans $L^\infty(\mathbb{R})$. Après quelques années plusieurs mathématiciens ont cherché à caractériser les fonctions qui opèrent par composition à gauche sur les espaces fonctionnels classiques, B. Dahlberg [7] puis G. Bourdaud [3] montrent que les seules fonctions qui opérent sur les espaces de Sobolev $H_p^s(\mathbb{R}^n)$, ou les espaces de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, avec la condition $1 + \frac{1}{p} \leq s < \frac{n}{p}$, sont les fonctions linéaires.

Dans ce mémoire, nous étudions la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction f est opère sur les espaces de Besov et Lizorkin-Triebel pour $0 < s < 1$, aussi on étudie le cas $s = \frac{n}{p}$ avec $0 < s < 1$. Finalement, on étudie les conditions nécessaires de Lipschitz pour $s > 0$.

Notre mémoire est organisé en trois chapitres

• Dans le premier chapitre, on va rappeler les notions essentielles sur les espaces de Besov et les espaces de Lizorkin-Triebel, et quelques lemmes et résultats principaux qu'on va utiliser dans la suite.

• Dans le deuxième chapitre, on va étudier les fonctions qui opèrent par composition à gauche sur certains espaces fonctionnels $E_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ avec $s > 0$, $n \in \mathbb{N}^\star$, $p[1, +\infty[$ et $q \in [1, +\infty]$, où $E_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ désigne les espaces de Besov ou les espaces de Lizorkin-Triebel.

• Dans le troisième chapitre, on va étudier les fonctions qui opèrent par composition à gauche sur certains espaces de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, où $s > 0$, $p, q \in [1, +\infty]$. On cherche à caractériser les fonctions qui opèrent par composition à gauche sur l'espace $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, i.e., nous étudions les conditions nécessaires de Lipschitz pour $s > 0$.

• Finalement, des conclusions générales et des perspectives sont tirées.

Notations

• $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace de Besov, et $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace de Lizorkin-Triebel.

• $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace de Besov ou l'espace de Lizorkin-Triebel, quand il n'y a pas besoin de distinguer les espaces B et F.

• Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. La dérivée partielle de f $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 ... \partial^{\alpha_n} x_n}$ est notée $\partial^\alpha f$.

• $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est la base canonique dans $\mathbb{R}^n$.

• $x \cdot y = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

• $|x|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.

• $(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$ est le produit du convolution des fonctions f et g.

• Q est le cube unité $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$ et Q^+ le cube $[0, \frac{1}{2}]^n$.

• Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, le support de f est noté par $supp f$.

• $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace dual de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, est appelé aussi l'espace des distributions sur $\mathbb{R}^n$.

• $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Schwartz, de fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^n$, le dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions tempérées.

• Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors sa transformée de Fourier est :

$$\mathcal{F}(f(x))(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix.\xi) f(x) dx$$

et sa transformée de Fourier inverse est :

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}(\xi))(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(ix.\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi$$

• p' est l'exposant conjugué de p, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ où $p \in [1, +\infty]$.

• $L^p(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions mesurables f sur $\mathbb{R}^n$ telles que

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = (\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

• ℓ^q est l'espace des suites $(a_k)_k$ telles que $\|(a_k)\|_{\ell^q} = (\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^q)^{\frac{1}{q}} < \infty$.

• Nous introduisons l'opérateur de composition T_f et l'opérateur de différence finie Δ_h, définis sur les fonctions via les formules $T_f(g) = f \circ g$ et $\Delta_h f = f(.+h) - f(.)$.

Chapitre 1

Quelques notions essentielles sur les espaces de Besov et Lizorkin-Triebel

Dans ce chapitre on va rappeler les notions essentielles sur les espaces de Besov et les espaces de Lizorkin-Triebel, et quelques lemmes et résultats principaux qu'on va utiliser dans la suite.

1.1 Séries de Littlewood-Paley

Dans cette section on va rappeler la définition de la décomposition de Littlewood-Paley d'une distribution tempérée.

Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que

(i) $supp\ \phi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 1 \leq |\xi| \leq 3\}$,

(ii) $\phi(\xi) \geq 0$ pour $1 \leq |\xi| \leq 3$,

(iii) $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \phi(2^{-j}\xi) = 1$ pour $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

On pose $\varphi(\xi) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \phi(2^{-k}\xi)$, on obtient une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$supp\ \varphi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 3\}.$$

Alors, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\varphi(\xi) + \Sigma_{k=1}^{\infty}\phi(2^{-k}\xi) = 1. \tag{1.1}$$

La relation (1.1) est appelé la partition de l'unité. A cette partition on associe une suite d'opérateurs de convolutions

$$\Delta_k : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \quad et \quad Q_j : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$$

telle que

$$\begin{cases} \widehat{(\Delta_k f)}(\xi) = \phi(2^{-k}\xi)\hat{f}(\xi) & k \geq 1 \\ \widehat{(Q_j f)}(\xi) = \varphi(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi) & j \geq 0 \end{cases}$$

avec la notation $\Delta_0 = Q_0$.

Ecrivons la relation (1.1) au point $2^{-j}\xi, alors$

$$\varphi(2^{-j}\xi) + \sum_{k=j+1}^{\infty} \phi(2^{-k}\xi) = 1.$$

En multipliant par $\widehat{f}$, donc

$$\varphi(2^{-j}\xi)\hat{f} + \sum_{k=j+1}^{\infty} \phi(2^{-k}\xi)\hat{f} = \hat{f}. \tag{1.2}$$

Pour j=0,on obtient

$$\varphi(\xi)\hat{f} + \sum_{k=1}^{\infty} \phi(2^{-k}\xi)\hat{f} = \hat{f},$$

i.e.

$$Q_0 f + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k f = f.$$

Et alors

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k f.$$

En appliquant l'application $\mathcal{F}^{-1}$ sur (1.2), on obtient

$$Q_j f + \sum_{k=j+1}^{\infty} \Delta_k f = f,$$

alors

$$Q_j f + \sum_{k=j+1}^{\infty} \Delta_k f = \sum_{k=0}^{j} \Delta_k f + \sum_{k=j+1}^{\infty} \Delta_k f,$$

donc

$$Q_j f = \sum_{k=0}^{j} \Delta_k f.$$

Définition 1.1. [13] *Soit $f \in \mathcal{S}'$ et $a > 0$. On définit les opérateurs maximaux associés aux Δ_k et Q_k par*

$$\Delta_k^{*,a} f(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|\Delta_k f(x-y)|}{(1+2^k|y|)^a} \quad et \quad Q_k^{*,a} f(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|Q_k f(x-y)|}{(1+2^k|y|)^a}.$$

Définition 1.2. [12] *Soient A_1 et A_2 deux espaces de Banach. On dit que A_1 est s'injecte dans A_2 et on écrit $A_1 \hookrightarrow A_2$, si pour toute fonction f appartenant à A_1, on a f appartenant à A_2. De plus il existe $c > 0$ telle que*

$$\|f\|_{A_2} \leq c\|f\|_{A_1}.$$

Définition 1.3. [8] *Soit $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Besov ou l'espace de Lizorkin-Triebel. On dit que $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est un algèbre si $E^s_{p,q} \cdot E^s_{p,q} \hookrightarrow E^s_{p,q}$. De plus, il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute f et g appartenant à $E^s_{p,q}$ on a*

$$\|f \cdot g\|_{E^s_{p,q}} \leq c\|f\|_{E^s_{p,q}}\|g\|_{E^s_{p,q}}.$$

Proposition 1.1. [8] *Soient $s \in \mathbb{R}$ et $0 < p, q \leq \infty$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) *$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est un algèbre.*

(ii) $\begin{cases} 0 < p \leq \infty, \ 0 < q \leq \infty \ et \ s > \frac{n}{p}, \\ ou \\ 0 < p \leq \infty, \ 0 < q \leq 1 \ et \ s = \frac{n}{p}. \end{cases}$

Proposition 1.2. [8] *Soient $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ et $0 < q \leq \infty$. Alors $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est un algèbre si et seulement si*

$$\begin{cases} 0 < p < q \leq \infty \ et \ s > \frac{n}{p}, \\ ou \\ 0 < q \leq p < \infty \ et \ s > \frac{n(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}{2}. \end{cases}$$

1.2 Espace de Besov et espace de Lizorkin-Triebel

Pour toute les définitions, les propositions et les propriétés de $B^s_{p,q}$ et $F^s_{p,q}$ de ce paragraphe, on peut consulter les livres de Triebel [13] et [14], on pourra aussi voir le livre de T. Runst et W. Sickel [12].

1.2.1 Espace de Besov $B^s_{p,q}$

Définition 1.4. [12] *Soient* $s \in \mathbb{R}$ *et* $0 < p, q \leq \infty$. *L'espace de Besov* $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *est l'ensemble de toutes* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *telles que*

$$\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} (\sum_{j\geq 0}(2^{sj}\|\Delta_j f\|_p)^q)^{\frac{1}{q}} < +\infty \quad \text{pour} \quad q \neq \infty \\ \sup_{j\geq 0}(2^{sj}\|\Delta_j f\|_p) < +\infty \quad \text{pour} \quad q = \infty \end{cases} \tag{1.3}$$

Proposition 1.3. *(i)* $B^s_{\infty,\infty} = \mathcal{C}^s$ *si* $s > 0$ *et* $s \notin \mathbb{N}$.

(ii) $B^s_{p,q}$ *est un espace quasi-Banach (espace de Banach si* $\min(p,q) \geq 1$ *).*

(iii) $B^{s+\epsilon}_{p,q_0} \hookrightarrow B^s_{p,q_1}$ *si* $\begin{cases} \epsilon > 0 \text{ et } 0 < q_0, q_1 \leq \infty \\ \text{ou} \\ \epsilon = 0 \text{ et } 0 < q_0 \leq q_1 \leq \infty \end{cases}$

(iv) Soient $s_0 - \frac{n}{p_0} = s_1 - \frac{n}{p_1}$ *et* $0 < q_0 \leq q_1 \leq \infty$, *alors*

$$B^{s_0}_{p_0,q_0} \hookrightarrow B^{s_1}_{p_1,q_1} \quad \text{avec} \quad (0 < p_0 < p_1 \leq \infty).$$

1.2.2 Espace de Lizorkin-Triebel $F^s_{p,q}$

Définition 1.5. [12] *Soient* $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ *et* $0 < q \leq \infty$. *L'espace de Lizorkin-Triebel* $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *est l'ensemble de toutes* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *telles que*

$$\|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \|(\sum_{j\geq 0}(2^{sj}|\Delta_j f|)^q)^{\frac{1}{q}}\|_p < +\infty \quad \text{pour} \quad q \neq \infty \\ \|\sup_{j\geq 0}(2^{sj}|\Delta j f|)\|_p < +\infty \quad \text{pour} \quad q = \infty \end{cases} \tag{1.4}$$

Remarque 1.1. *Dans la formule* (1.3) *(resp.* (1.4)*) on peut remplacer* Δ_j *par* $\Delta^{*,a}_j$ *avec* $a > \frac{n}{p}$ *(resp.* $a > \frac{n}{\min(p,q)}$*), et on obtient ainsi une norme équivalente dans* $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *(resp.* $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$*).*

Proposition 1.4. *(i)* $F^s_{p,q}$ *est un espace quasi-Banach (espace de Banach si* $\min(p,q) \geq 1$ *).*

(ii) $F^0_{p,2} = L^p$ *et* $F^s_{p,2} = H^s_p$ *pour* $1 < p < \infty$

(iii) $F^{s+\epsilon}_{p,q_0} \hookrightarrow F^s_{p,q_1}$ *si* $\begin{cases} \epsilon > 0 \text{ et } 0 < q_0, q_1 \leq \infty \\ \text{ou} \\ \epsilon = 0 \text{ et } 0 < q_0 \leq q_1 \leq \infty \end{cases}$

(iv) Soient $s_0 - \frac{n}{p_0} = s_1 - \frac{n}{p_1}$ *et* $0 < q_0 \leq q_1 \leq \infty$, *alors*

$$F^{s_0}_{p_0,q_0} \hookrightarrow F^{s_1}_{p_1,q_1} \quad \text{avec} \quad (0 < p_0 < p_1 < \infty).$$

1.3 La relation entre $F^s_{p,q}$ et $B^s_{p,q}$

Nous allons énoncer quelques inclusions entre $B^s_{p,q}$ et $F^s_{p,q}$, où les démonstrations se trouve dans le livre de Runst et Sickel [12].

Lemme 1.1. *(i) soient* $s \in \mathbb{R},\ 0 < p < \infty$ *et* $0 < q \leq \infty$*,alors*

$$B^s_{p,\min(p,q)} \hookrightarrow F^s_{p,q} \hookrightarrow B^s_{p,\max(p,q)}.$$

(ii) soient $0 < p < p_1 \leq \infty$ *et* $s - \frac{n}{p} = s_1 - \frac{n}{p_1}$*, alors*

$$F^s_{p,q} \hookrightarrow B^{s_1}_{p_1,p}.$$

En plus si $0 < u \leq p \leq v \leq \infty$ *et* $s_0 - \frac{n}{p_0} = s - \frac{n}{p} = s_1 - \frac{n}{p_1}$*, alors*

$$B^{s_0}_{p_0,u} \hookrightarrow F^s_{p,q} \hookrightarrow B^{s_1}_{p_1,v}.$$

Définition 1.6. *soient* $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ *et* $0 < q \leq \infty$*, alors l'espace* $L^p(\ell^{s,q})$ *est*

$$L^p(\ell^{s,q}) = \left\{ \{f_k\} \subset \mathcal{S}' / supp \hat{f}_k \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| < c2^k\} \right\},$$

où

$$\|\{f_k\}\,|L^p(\ell^{s,q})\| = \|\left\{2^{ks} f_k\right\}|L^p(\ell^q)\| = \|(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq}|f_k|^q)^{\frac{1}{q}}\|_p < \infty.$$

soient $s \in \mathbb{R}$, $0 < p, q \leq \infty$*, alors l'espace* $\ell^{s,q}(L^p)$ *est*

$$\ell^{s,q}(L^p) = \left\{ \{f_k\} \subset \mathcal{S}' : supp \hat{f}_k \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| < c2^k\} \right\},$$

où

$$\|\{f_k\}\,|\ell^{s,q}(L^p)\| = \|\left\{2^{ks} f_k\right\}|\ell^q(L^p)\| = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq} \|f_k\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

1.4 Quelques inégalités classiques

Dans ce paragraphe , on va donner quelques estimations (Young, Hölder, Berstein) comme outils de la suite de notre travail.

Théorème 1.1. ***(Inégalité de Hölder)*** *Soient* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ *avec* $1 \leq p, q \leq +\infty$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Alors*

$$f \cdot g \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Théorème 1.2. ***(Inégalité de Young)*** *Soient p, q et $r \in [1, +\infty]$ tels que $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Alors, $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\forall g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ on a*

$$f \star g \in L^r(\mathbb{R}^n) \qquad et \qquad \|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Démonstration. Fixons $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et considérons l'opérateur $T_f = f \star g$, on a

$$T_f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy$$

i.e.,

$$|T_f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{\frac{1}{q}} |g(x-y)| \, |f(y)|^{\frac{1}{q'}} \, dy.$$

Donc

$$\| T_f \|_q \leqslant \| g \|_q \| f \|_1,$$

de plus, par Hölder on obtient

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy \right| \leq \|g\|_q \|f\|_{q'} .$$

Finalement, $T : L^1 \to L^q$ et $T : L^{q'} \to L^\infty$, par interpolation on obtient alors

$$T : L^p \longrightarrow L^r \quad avec \quad \frac{1}{p} = \theta + \frac{1-\theta}{q'}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{\theta}{q}, \quad \theta \in]0, 1[,$$

et

$$\|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

$\square$

Théorème 1.3. ***(Inégalité de Bernstein)*** *Soient $1 \leq p \leq q \leq \infty$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe une constante $c = c(\alpha, p, q, n) > 0$ telle que pour $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec supp $\widehat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq R\}$, on a*

$$\|f^{(\alpha)}\|_q \leq c R^{|\alpha| + n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|f\|_p.$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq 1$.
On pose $\varphi_R(\xi) = \varphi(\frac{\xi}{R})$ telle que $\varphi_R(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq R$, alors on a

$$\widehat{f}(\xi) = \varphi_R(\xi) \widehat{f}(\xi), \qquad et \qquad f^{(\alpha)} = (\mathcal{F}^{-1} \varphi_R)^{(\alpha)} \star f.$$

D'après l'inégalité de Young, on obtient

$$\|f^{(\alpha)}\|_q \leq \|(\mathcal{F}^{-1} \varphi_R)^{(\alpha)}\|_r \|f\|_p, \ avec \ 1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}.$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(\mathcal{F}^{-1}\varphi_R)^{(\alpha)}(x) = R^n(\mathcal{F}^{-1}\varphi)^{(\alpha)}(Rx),$$

donc

$$\|(\mathcal{F}^{-1}\varphi_R)^{(\alpha)}\|_r = R^{n+|\alpha|-\frac{n}{r}}\|(\mathcal{F}^{-1}\varphi)^{(\alpha)}\|_r,$$

i.e.,

$$\|f^{(\alpha)}\|_q \leq cR^{|\alpha|+n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|f\|_p, \text{ avec } c = \|(\mathcal{F}^{-1}\varphi)^{(\alpha)}\|_r.$$

$\square$

Lemme 1.2. *soit $0 < a < 1$ et $0 < q \leq \infty$, alors pour toute suite réelle positive $\{\epsilon_k\} \in \ell^q$, on a*

$$\left\|a^k \sum_{j=0}^{k} a^{-j}\epsilon_j\right\|_{\ell^q} + \left\|a^{-k} \sum_{j=k}^{\infty} a^{j}\epsilon_j\right\|_{\ell^q} \leq c\left\|\epsilon_k\right\|_{\ell^q},$$

avec

$$\left(c = 2\left(1 - a^{\min(1,q)}\right)^{\frac{-1}{\min(1,q)}}\right)$$

Démonstration. Le cas $1 \leq q \leq \infty$, on pose

$$\eta_k = a^k \sum_{j=0}^{k} a^{-j}\epsilon_j \quad , \quad \eta'_k = a^{-k} \sum_{j=k}^{\infty} a^{j}\epsilon_j,$$

donc

$$\begin{aligned} \eta_k &= a^k \sum_{j=0}^{k} a^{-j}\epsilon_j \\ &= \sum_{j=0}^{k} a^{(k-j)\frac{1}{q}}\epsilon_j a^{(k-j)\frac{1}{q'}}, \qquad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hölder

$$\eta_k^q \leq (\sum_{j=0}^{k} a^{(k-j)}\epsilon_j^q)(\sum_{j=0}^{k} a^{(k-j)})^{\frac{q}{q'}},$$

donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N} \eta_k^q &\leq (\sum_{i=0}^{N} a^i)^{\frac{q}{q'}}(\sum_{j=0}^{j=N} \epsilon_j^q \sum_{k=j}^{k=N} a^{(k-j)}) \\ &\leq (\sum_{i\geq 0} a^i)^q(\sum_{j\geq 0} \epsilon_j^q), \end{aligned}$$

donc

$$\|\eta_k\|_{\ell^q} \leq \frac{1}{1-a} \|\epsilon_j\|_{\ell^q} .$$

De même pour η'.

Pour le cas $0 < q < 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{N} \eta_k^q \leq (\sum_{j=0}^{j=N} \epsilon_j^q \sum_{k=j}^{k=N} a^{(k-j)q}).$$

Donc

$$\|\eta_k\|_{\ell^q} \leq (\frac{1}{1-a^q})^{\frac{1}{q}} \|\epsilon_j\|_{\ell^q} .$$

□

1.5 Exemple de fonction dans l'espace de Besov

Dans cette section, on va donner un exemple de fonction dans l'espace de Besov

Exemple 1.1. *Soit $f = \delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (la masse de Dirac), on a*

$$\begin{aligned} \Delta_j f(x) &= 2^j \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}\varphi(2^j(x-y))f(y)dy \\ &= < f, 2^j\mathcal{F}^{-1}\varphi(2^j(x-\cdot)) >, \end{aligned}$$

donc, on a

$$\begin{aligned} \Delta_j \delta(x) &= < \delta, 2^j\mathcal{F}^{-1}\varphi(2^j(x-\cdot)) > \\ &= 2^j\mathcal{F}^{-1}\varphi(2^j x), \end{aligned}$$

alors

$$\|\Delta_j \delta\|_p = c2^{nj\left(1-\frac{1}{p}\right)}.$$

Ce qui implique que

$$2^{js}\|\Delta_j \delta\|_p = c2^{nj(1-\frac{1}{p})+js},$$

pour $1 \leq q \leq \infty$, on a

$$(\sum_{j\geq 0} 2^{sjq}\|\Delta_j \delta\|_p^q)^{\frac{1}{q}} = c(\sum_{j\geq 0} 2^{j(n-\frac{n}{p}+s)q})^{\frac{1}{q}}.$$

Alors la série $(\sum_{j\geq 0} 2^{j(n-\frac{n}{p}+s)q})^{\frac{1}{q}}$ converge si

- $n - \frac{n}{p} + s < 0$ *implique* $s < \frac{n}{p} - n$, *alors* $\delta \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

- $n - \frac{n}{p} + s = 0$ *implique* $s = \frac{n}{p} - n$, *alors*

$$\begin{aligned} 2^{sj}\|\Delta_j \delta\|_p &= c \quad pour \quad j \in \mathbb{N} \\ \Longrightarrow \sup_{j\in\mathbb{N}}(2^{sj}\|\Delta_j \delta\|_p) &= c \\ &= \|\delta\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} \delta \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \quad si \quad s < \frac{n}{p} - n, 1 \leqslant p, q \leqslant \infty. \\ \delta \in B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \quad si \quad s = \frac{n}{p} - n, 1 \leqslant p \leqslant \infty, q = \infty. \end{cases}$$

Chapitre 2

Une propriété de composition dans certains espaces de Besov pour $s \in [0, 1]$

Dans ce chapitre, on va étudier les fonctions qui opèrent par composition à gauche sur certains espaces fonctionnels $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ avec $s > 0$, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p, q \in [1, +\infty]$, où $E^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ désigne les espaces de Besov ou les espaces de Lizorkin-Triebel.

2.1 Définitions et Notations concernant les espaces de Besov et Lizorkin-Triebel

Dans cette section on va rappeler quelques définitions et Notations sur les espaces de Besov et Lizorkin-Triebel qu'on va utiliser dans la suite.

Définition 2.1. [6] *Si f est une fonction de la variable réelle à valeurs réelle, et si E est un espace fonctionnel, nous dirons que f opère par composition sur E, si pour toute fonction g de E, $f \circ g$ appartient à E.*

Définition 2.2. [6] *Pour $0 < s < 1$, $1 \leq p, q \leq +\infty$, on définit l'espace de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ comme l'ensemble des distributions tempérées f qui vérifient*

$$\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_p + \left[\int_{\mathbb{R}^n} |h|^{-sq} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p dx\right)^{q/p} \frac{dh}{|h|^n}\right]^{1/q} < \infty.$$

Définition 2.3. [6] *Pour* $0 < s < 1$, $1 \leq p, \ q < \infty$, *on définit l'espace de Triebel-Lizorkin* $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *comme l'ensemble des distributions tempérées* f *vérifiant*

$$\|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_p + \| \left(\int_0^{+\infty} r^{-sq} \left(\int_{\mathbf{B}} |f(x+rh) - f(x)| dh \right)^q \frac{dr}{r} \right)^{1/q} \|_p < \infty,$$

où $\mathbf{B}$ *désignant la boule unité de* $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.4. [13] *Pour* $0 < s < 1$ *et* $1 \leq p, q \leq +\infty$, *on a les équivalences de la norme Besov avec* N_1 *et* N_2 *où*

$$N_1 = \|f\|_p + \left[\int_V |h|^{-sq} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{q/p} \frac{dh}{|h|^n} \right]^{1/q},$$

où V *désignant n'importe quel voisinage borné de l'origine dans* $\mathbb{R}^n$, *et*

$$N_2(f) = \|f\|_p + N_3(f)$$

où

$$N_3(f) = \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}} |h|^{-sq} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+he_j) - f(x)|^p dx \right)^{q/p} \frac{dh}{|h|} \right)^{1/q},$$

où $(e_1, \cdots, e_n)$ *désignant la base canonique de* $\mathbb{R}^n$.

Lemme 2.1. [13] *Pour* $\lambda \geq 1$, *on a l'estimation suivante*

$$\|f(\lambda(.))\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq \lambda^{s-n/p} \|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

Désignons par Q le cube unité $[-1/2, 1/2]^n$, par Q^+ le cube $[0, 1/2]^n$ et donnons nous une fois pour toutes, une fonction ϕ qui est à la fois un élément et un multiplicateur de $B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ et telle que $\phi(x) = 1$ sur $\frac{1}{3}Q$ et $\phi(x) = 0$ hors de $\frac{2}{3}Q$. Pour $u \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, nous noterons $\phi_{u,r}$ la fonction définie par $\phi_{u,r}(x) = \phi((x-u)/r)$. c désignera une constante positive pouvant dépendre de n, s, p, q et de la fonction ϕ, sa valeur pourra changer d'une occurrence à l'autre.

2.2 Etude de la propriété de composition dans l'espace de Besov pour $0 < s < 1$

Dans cette section on va étudier la caractérisation des fonctions qui opèrent par composition à gauche sur l'espace de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ pour $0 < s < 1$.

2.2.1 Le cas $0 < s < \frac{n}{p},\ 1 \le p < +\infty,\ 1 \le q \le +\infty$

Lemme 2.2. [6] *Pour tout entier $N \ge 1$, la fonction $f(x) = \sum_{|k_j|\le N} \phi(x-k)$ appartient à $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et on a $\|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \le CN^{n/p}$ (la somme étant étendue à l'ensemble des k de $\mathbb{Z}^n$ tels que $|k_j| \le N$ pour tout $j = 1, \cdots, n$).*

Démonstration. Nous utiliserons l'équivalence de la norme Besov avec N_1 en prenant $V = \{h \in \mathbb{R}^n : |h_j| \le 1/6, j = 1, \cdots, n\}$. Les fonctions $\phi(. - k)$ ayant des supports disjoints, on a $\|f\|_p^p = \sum_{|k_j|\le N} \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x-k)|^p dx = (2N+1)^n \|\phi\|_p^p$. Pour h dans V, la fonction $\phi(.+h-k)-\phi(.-k)$ est portée par $Q+k$, de sorte que les différentes fonctions $\phi(.+h-k)-\phi(.-k)$ ont leurs supports disjoints, cela nous donne

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h)-f(x)|^p dx &= \sum_{|k_j|\le N} \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x+h-k)-\phi(x-k)|^p dx \\ &= (2N+1)^n \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x+h)-\phi(x)|^p dx\end{aligned}$$

et ceci termine la preuve du Lemme 2.2. □

Théorème 2.1. [6] *Soient $1 \le p < +\infty$, $1 \le q \le +\infty$ et $0 < s < \frac{n}{p}$. Alors pour toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) f opère sur $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$,

(ii) $f \circ g \in B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $g \in B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)$,

(iii) f est globalement lipschitzienne et $f(0) = 0$.

Démonstration. On a trivialement, (i) implique (ii) et (iii) implique (i). Nous allons donc montrer que (ii) implique (iii).

Si f vérifie (ii), il existe un $\delta > 0$ et un $M > 0$ tels que, pour toute g, portée par Q, vérifiant $\|g\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \le \delta$, on ait $\|f \circ g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \le M$, (il suffit d'utiliser la Proposition 2 de [?], en l'adaptant de façon évidente, au cas où f opère d'un espace fonctionnel dans un autre).

Soient a et b deux nombres réels. On pose

$$f(x) = (b-a) \sum_{|k_j|\le N} \phi(x/r - k) + a\phi(r/R).$$

Les nombres $r, R \in]0,1]$ et l'entier N seront fixés ultérieurement.

Posons $\alpha = n/p - s$. Nous souhaitons obtenir $\|f\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \le \delta$. La norme de $a\phi(./R)$ est majorée par $C|a|R^\alpha\|\phi\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)}$. On choisit donc le nombre $R \in]0,1]$ tel que $C|a|R^\alpha\|\phi\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \leq \delta/2$. D'après le Lemme 2.2, on a $\|\sum_{|k_j|\leq N}\phi(./r-k)\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \leq Cr^\alpha N^{n/p}$. On réalisera la deuxième condition :

$$Cr^\alpha N^{n/p}|b-a| = \delta/2 \tag{2.1}$$

(le choix ultérieur de N garantira $r \leq 1$). Nous souhaitons que toutes les fonctions $\phi(./r-k)$ aient leurs supports dans le grand cube $(R/3)Q$. La réunion des cubes $r(Q+k)$ est le cube défini par $|X_j| \leq r(1/2+N)$, $j = 1, \cdots, n$. Pour que ce cube soit contenu dans $(R/3)Q$, il suffit qu'on ait $r(1/2+N) \leq R/6$, soit plus simplement

$$9rN \leq R. \tag{2.2}$$

(La condition (2.2) entraînera $r \leq 1/9!$.) Pour réaliser (2.2), on observe que la condition (2.1) entraine $rN = (\delta/2C)^{1/\alpha}|b-a|^{-1/\alpha}N^{1-n/(p\alpha)}$, et que la condition $s > 0$ entraine $1-n/(p\alpha) < 0$, le choix d'un grand entier N permet donc d'obtenir un rN aussi petit que l'on veut. On va maintenant minorer la norme $\|f\circ g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)}$. Pour cela, faisons $h = (1/3, 0, \cdots, 0)$, alors pour $x \in (1/3)Q^+$, on a $x+h \in Q \setminus (2/3)Q$. Autrement dit, pour tout x dans $r((1/3)Q^+ + k)$ on a $f(x+rh) = a$ et $f(x) = b$. Cela donne

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(g(x+rh)) - f(g(x))|^p dx &\geq \sum_{|k_j|\leq N}\int_{r(1/3Q^+ + k)} |f(b)-f(a)|^p dx\\ &= (2N+1)^n|f(b)-f(a)|^p 6^{-n}r^n\\ &\geq C(rN)^n|f(b)-f(a)|^p.\end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{aligned}M \geq \|f\circ g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} &\geq |rh|^{-s}(\int_{\mathbb{R}^n}|f(g(x+rh)-f(g(x))|^p dx)^{1/p}\\ &\geq Cr^\alpha N^{n/p}|f(b)-f(a)|\\ &= C'(\delta|f(b)-f(a)|)/(2|b-a|).\end{aligned}$$

Alors on a

$$|f(b)-f(a)| \leq (2M)/(C'\delta)|b-a|$$

. i.e., f est globalement lipschitzienne.

$\square$

2.2.2 Le cas $\frac{n}{p} < s < 1,\ 1 \leq p < +\infty,\ 1 \leq q \leq +\infty$

Lemme 2.3. [6] *Soient $p \in [1, +\infty[$, $q \in [1, +\infty]$, $n/p \leq s < 1$ et soient α et β deux réels positifs tels que $0 < \alpha < \beta$. Si une fonction g de $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est à support dans le cube $[-\beta, \beta]^n$ et vaut 1 sur $[-\alpha, \alpha]^n$, alors*

$$\|g\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \geq C\alpha^{n/p+1/q}\beta^{-s-1/q}.$$

Démonstration. En utilisant la norme N_2, on a pour $1 \leq q < \infty$

$$\begin{aligned}\|g\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} &\geq \left(\int_{\beta-\alpha}^{\beta} h^{-sq-1}(h+\alpha-\beta)^{q/p}(2\alpha)^{(n-1)q/p}dh\right)^{1/q} \\ &\geq C\beta^{-s-1/q}\alpha^{n/p+1/q},\end{aligned}$$

où $C = 2^{(n-1)/p}(1 + q/p)^{-1/q}$.

Si $q = \infty$ on a

$$\|g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \geq \beta^{-s}\left(\int_{-\alpha-\beta}^{-\beta} dx_1 \int_{-\alpha<x_j<\alpha} dx_2 \cdots dx_n\right)^{1/p} = C\beta^{-s}\alpha^{n/p},$$

où $C = 2^{(n-1)/p}$.

A tout réel a et à toute application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, nous associerons l'opérateur f_a défini par $f_a(g) = \phi(f(g(.) + a) - f(a))$, si f opère sur $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, alors f_a envoie $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dans lui même. □

Théorème 2.2. [6] *Soient $p \in [1, +\infty[$, $q \in [1, +\infty]$ et $n/p < s < 1$. Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) f opère sur $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$,

(ii) $f \circ g \in B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ si $g \in B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)$,

(iii) f est localement lipschitzienne et $f(0) = 0$.

Démonstration. Voir [6] □

2.3 Etude de la propriété de composition dans l'espace de Lizorkin-Triebel pour $0 < s < 1$

Dans cette section on va étudier la caractérisation des fonctions qui opèrent par composition à gauche sur l'espace de Lizorkin-Triebel $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ pour $0 < s < 1$.

Nous avons comme les Théorèmes 2.1 et 2.2 et les inclusions suivantes

$$B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n),$$

pour plus de détails voir [13].

permettent d'enoncer le Corollaire suivant

Corollaire 2.1. *Soient* $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ *et* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

(i) Pour $0 < s < \frac{n}{p}$, f *opère sur* $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, *si et seulement si elle est globalement lipschitzienne et* $f(0) = 0$.

(ii) Pour $\frac{n}{p} < s < 1$, f *opère sur* $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, *si et seulement si elle est localement lipschitzienne et* $f(0) = 0$.

2.4 Etude de la composition sur l'espace de Besov ou Lizorkin-Triebel au cas critique $s = \frac{n}{p}$

Dans cette section on va étudier la composition à gauche sur l'espace de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ ou sur l'espace de Lizorkin-Triebel $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, où $0 < s < 1$, $s = \frac{n}{p}$, $1 \leq q \leq \infty$, ($q > 1$ dans le cas de l'espace de Besov).

Théorème 2.3. [4] *Soient* $n < p < +\infty$ *et* $1 < q \leq +\infty$. *Pour une fonction* f *de* $\mathbb{R}$, *dans* $\mathbb{R}$, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) f *opère par composition à gauche sur* $B^{n/p}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$,

(ii) il existe un $r \in]1, q]$ *tel que, pour tout* $g \in B^{n/p}_{p,r}(\mathbb{R}^n)$ *on ait* $f \circ g \in B^{n/p}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$,

(iii) f *est globalement lipschitzienne et* $f(0) = 0$.

Théorème 2.4. [4] *Soient* $n < p < +\infty$ *et* $1 < q < +\infty$. *Pour une fonction* f *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) f *opère, par composition à gauche sur* $F^{n/p}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$,

(ii) pour tout $g \in F^{n/p}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$, *on a* $f \circ g \in B^{n/p}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$,

(iii) f *est globalement lipschitzienne et* $f(0) = 0$.

Notons que les implications $(i) \Rightarrow (ii)$ résultent aussitôt des plongements

$$B^{n/p}_{p,r}(\mathbb{R}^n) \subset B^{n/p}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \subset B^{n/p}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \qquad (r \leq q),$$
$$F^{n/p}_{p,1}(\mathbb{R}^n) \subset F^{n/p}_{p,q}(\mathbb{R}^n) \subset B^{n/p}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Pour plus de détail voir [13].

Pour les implications $(iii) \Rightarrow (i)$, ce sont des conséquences immédiates des caractérisations des espaces de Besov et de Triebel-Lizorkin à l'aide de divers "modules de continuité".

Pour plus de détail voir aussi [13].

Lemme 2.4. *Il existe une suite $(\theta_\nu)_{\nu \geq 1}$ de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$, portées par le cube unité $Q = [-1/2, +1/2]^n$, telles que*

(i) $\theta_\nu(x) = 1$ *sur le cube* $2^{-\nu}Q$.

(ii) pour tout $p \in [1, +\infty[$ et tout $q \in]1, +\infty]$, la suite $(\theta_\nu)_{\nu \geq 1}$ converge vers 0 en norme $B^{n/p}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

(iii) pour tout $p \in]1, +\infty[$ et tout $q \in [1, +\infty]$, la suite $(\theta_\nu)_{\nu \geq 1}$ converge vers 0 en norme $F^{n/p}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Nous utiliserons la décomposition atomique des espaces de Besov et de Triebel-Lizorkin, telle qu'elle est développée par Frazier et Jawerth.

Donnons-nous une fonction $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi(x) = 1$ sur Q et $\varphi(x) = 0$ hors de $2Q$ et posons

$$\theta_\nu(x) = \nu^{-1} \sum_{1 \leq j \leq \nu} \varphi(2^j x),$$

on a aussitôt $\theta_\nu(x) = 0$ hors de Q et $\theta_\nu(x) = 1$ sur $2^{-\nu}Q$.

Pour estimer les normes des θ_ν, on observe que, pour une certaine constante $\varepsilon = \varepsilon(\varphi, n, p, q) > 0$, les fonctions $x \to \varepsilon\varphi(2^j x)$ sont des atomes, normalisés dans $B^{n/p}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ et dans $F^{n/p}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, portés respectivement par les cubes dyadiques $2^{-j+1}Q$; on applique alors le Théorème 3.1 de [9] et le Théorème 5.3 de [10], on obtient

$$\|\theta_\nu\|_{B^{n/p}_{p,q}} \leq C(n, p, q, \varepsilon)\nu^{(1/p)-1},$$

de même

$$\|\theta_\nu\|_{F^{n/p}_{p,1}} \leq C(n, p, \varepsilon)\nu^{-1}\| \sum_{1 \leq j \leq \nu} 2^{jn/p}\chi_j\|_p,$$

où χ_j désigne la fonction caractéristique du cube $2^{-j}Q$. Pour estimer la norme L^p qui apparaît au second membre, on pose

$$S_m = 2^{-m}Q \setminus 2^{-m-1}Q \qquad (m = 1, \cdots, \nu - 1),$$
$$S_\nu = 2^{-\nu}Q.$$

La fonction $\sum_{1\leq j\leq \nu} 2^{jn/p}\chi_j$ valant constamment $\sum_{1\leq j\leq m} 2^{jn/p}$ sur S_m, on obtient

$$\|\theta_\nu\|_{F^{n/p}_{p,1}} \leq C'\nu^{-1}\left(\sum_{1\leq m\leq \nu} |S_m| 2^{mn}\right)^{1/p} \leq C''\nu^{(1/p)-1}.$$

2.4.1 Preuve des Théorèmes 2.3 et 2.4

Soit f une fonction telle que, pour tout $g \in B^{n/p}_{p,r}$(resp. $g \in F^{n/p}_{p,1}$), on ait $f \circ g \in B^{n/p}_{p,\infty}$, on sait que voir [5] qu'il existe alors des constantes $\delta > 0$ et $M > 0$ telles que, pour toute fonction g portée par Q, l'inégalité $\|g\| \leq \delta$ entraîne $\|f \circ g\|_{B^{n/p}_{p,\infty}} \leq M$ (ici et dans la suite $\| - \|$ désigne la norme dans $B^{n/p}_{p,r}$ ou dans $F^{n/p}_{p,1}$).
Il s'agit de trouver des constantes $K > 0$ et $\delta > 0$ telles que

$$|f(b) - f(a)| \leq K|b - a|,$$

pour tous nombres réels a et b tels que $0 < |a - b| \leq \delta$, pour cela on introduit la fonction

$$g(x) = (b - a)\sum_{|k_j|\leq N} \varphi(3((x/\lambda) - k)) + a\theta_\nu(x)$$

(la somme $\sum_{|k_j|\leq N} \ldots$ est étendue aux $k \in \mathbb{Z}^n$ tels que $|k_j| \leq N$, pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, le nombre $\lambda \in]0, 1]$ et les entiers positifs N et ν seront fixés dans un instant). Le lemme nous autorise à choisir ν tel que

$$|a|\|\theta_\nu\| \leq \delta/2.$$

On a par ailleurs (voir le Lemme 1 de [6])

$$\|\sum_{|k_j|\leq N} \varphi(3((./\lambda) - k))\| \leq AN^{n/p},$$

où la constante A dépend de n, r, p, et φ, on est donc conduit à choisir l'entier $N \geq 1$ tel que

$$\delta(3A|b - a|)^{-1} \leq N^{n/p} \leq \delta(2A|b - a|)^{-1},$$

encadrement réalisable si $\delta/|b-a|$ est assez grand, autrement dit dès que $|b-a| \leq \sigma(n, r, p, \varphi, \delta)$. Enfin, il convient que les cubes $\lambda(Q+k)$ soient tous inclus dans le cube $2^{-\nu}Q$, pour cela il suffit de choisir λ de telle façon que λN soit petit devant $2^{-\nu}$.

Ainsi la fonction f est portée par le cube unité et l'on a $\|f\| \leq \delta$.

Désignons par Q^+ le cube $[0, 1/2]^n$ et posons $h = (1/3, 0, \cdots, 0)$, pour tout $x \in (1/3)Q^+$, on a $x + h \in Q$ alors que $x + h$ n'appartient pas à l'intérieur de $(2/3)Q$, cela entraine

$$f(g(x + \lambda h)) - f(g(x)) = f(a) - f(b)$$

sur le cube $\lambda((1/3)Q^+ + k)$, on a donc

$$\begin{aligned}
M^p &\geq (\|f \circ g\|_{B^{n/p}_{p,\infty}})^p \\
&\geq 3^n \lambda^{-n} \sum_{|k_j| \leq N} \int_{\lambda((1/3)Q^+ + k)} |f(g(x + \lambda h) - f(g(x))|^p dx \\
&\geq 3^n \lambda^{-n} (2N+1)^n |F(b) - F(a)|^p vol\{\lambda((1/3)Q^+ + k)\} \\
&\geq CN^n |f(b) - f(a)|^p,
\end{aligned}$$

avec $C = C(n) > 0$, d'où enfin

$$\begin{aligned}
|f(b) - f(a)| &\leq MC^{-1/p} N^{-n/p} \\
&\leq 3AMC^{-1/p} \delta^{-1} |b - a|.
\end{aligned}$$

i.e., f est globalement lipschitzienne.

$\square$

Chapitre 3

Une propriété de composition dans certains espaces de Besov pour $s > 0$

Dans ce chapitre, on va étudier les fonctions qui opèrent par composition à gauche sur certains espaces de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, où $s > 0$, $p, q \in [1, +\infty]$. On cherche à caractériser les fonctions qui opèrent par composition à gauche sur l'espace $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, i.e., nous étudions les conditions nécessaires de Lipschitz pour $s > 0$.

• Nous avons alors les résultats suivants :

Théorème 3.1. [1] *Soient $s > 0$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Si T_f envoie $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, alors f est localement lipschitzienne.*

Théorème 3.2. [1] *Soient $s > 0$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \nsubseteq L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (autrement dit : $s < \frac{n}{p}$ ou $s = \frac{n}{p}$ et $q > 1$). Si T_f envoie $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, alors f est globalement lipschitzienne.*

3.1 Quelques fonctions de test

Lemme 3.1. [2] *Soient $s > 0$. Si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, il existe une constante $c = c(u, s, p, q, n) > 0$ telle que*

$$\|\sum_{j\geq 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\alpha_{jk}2^{j((\frac{n}{p})-s)}u(2^j(.)-k)\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\left(\sum_{j\geq 0}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|\alpha_{jk}|^p\right)^{q/p}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\|\sum_{j\geq 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\alpha_{jk}2^{j((\frac{n}{p})-s)}u(2^j(.)-k)\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|(\sum_{j\geq 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(|\alpha_{jk}|2^{j\frac{n}{p}}\mathcal{X}(2^j(\cdot)-k))^q)^{\frac{1}{q}}\|_p,$$

où $\mathcal{X}$ désigne la fonction caractéristique de Q.

Démonstration. Les estimations résultent des Théorèmes 3.1 de [10] et 5.3 de [9], appliqués à chaque fonction coordonnée de u. □

Lemme 3.2. [2] *Pour toute fonction $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, il existe une constante $c = c(u, s, p, q, n) > 0$ telle que*

$$\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\alpha_k u(\cdot - k)\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|\alpha_k|^p\right)^{1/p}.$$

Démonstration. En faisant $j = 0$ dans le Lemme 3.1, on a le résultat. □

Lemme 3.3. [2] *On suppose que $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \nsubseteq L_\infty(\mathbb{R}^n)$ (autrement dit : $0 < s < \frac{n}{p}$ ou $s = \frac{n}{p}$ et $q > 1$), alors il existe une suite $(\phi_\nu)_{\nu\geq 1}$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, portées par Q, telles que $\phi_\nu(x) = 1$ sur le cube $2^{-\nu}Q$ et*

$$\lim_{\nu\to+\infty}\|\phi_\nu\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Démonstration. Dans le cas $s < \frac{n}{p}$, on pose $\phi_\nu(x) = \varphi(2^\nu x)$, l'estimation

$$\|\phi_\nu\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq 2^{-\nu(\frac{n}{p}-s)}\|\varphi\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)},$$

permet de conclure.

Supposons maintenant $s = \frac{n}{p}$ et posons

$$\phi_\nu(x) = \nu^{-1}\sum_{1\leq j\leq\nu}\varphi(2^j x).$$

On a donc $\phi_\nu(x) = 1$ sur $2^{-\nu}Q$ et $\phi_\nu(x) = 0$ hors de Q.

Le Lemme 3.1 donne les inégalités

$$\begin{aligned}\|\phi_\nu\|_{B^{\frac{n}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} &= \|\nu^{-1} \sum_{1\leq j\leq v} \varphi(2^j x)\|_{B^{\frac{n}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq c\nu^{(\frac{1}{q})-1}.\end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{\nu\to+\infty} \|\phi_\nu\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} = 0$$

□

3.2 Résultats préliminaires

Lemme 3.4. [1] *Soient $s > 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$.*

T_f envoie $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Alors il existe des nombres $M > 0$ et $\delta > 0$ tels que l'implication

$$\|g\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \delta \Rightarrow \|f\circ g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq M.$$

Soit vérifiée par toute fonction g portée par Q.

Démonstration. Supposons au contraire, que pour tout cube R et tous nombres M et δ, on puisse trouver une fonction g, portée par R, telle que

$$\|g\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \delta \text{ et } \|f\circ g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)_{lu}} > M.$$

Donnons-nous une suite $(R_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de cubes disjoints et des fonctions $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), (j \geq 0)$ telles que $\varphi_j(x) = 1$ sur $\frac{1}{2}R_j$, et $\varphi_j(x) = 0$ hors de R_j. On note M_j la norme de l'opérateur $g \to \varphi_j g$, agissant sur $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, et on choisit des fonctions

$$g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ j = 0, 1, \cdots,$$

telles que

$$supp\ g_j \subset \frac{1}{2}R_j,\ \|g_j\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq 2^{-j},\ \|f\circ g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} > jM_j.$$

Alors la fonction $g = \sum_{j\geq 0} g_j$ appartient à $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et on a $\varphi_j(f\circ g) = f\circ g_j$. Donc

$$jM_j \leq \|(f\circ g)\varphi_j\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq M_j\|f\circ g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)},\text{ pour tout } j,$$

ce qui est absurde. □

Lemme 3.5. [1] *Soient* $s > 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(0) = 0$.

T_f *envoie* $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *dans* $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$. *Alors il existe des nombres* $M > 0$ *et* $\delta > 0$ *tels que l'implication*

$$\|g\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq \delta \Rightarrow \|f \circ g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq M.$$

soit vérifiée par toute fonction g *portée par* Q.

Démonstration. En utilisant la même démonstration comme le Lemme 3.4. □

Lemme 3.6. [1] *Soient* $s > 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Supposons que* T_f *envoie* $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *dans* $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, *alors quel que soit* $a' \in \mathbb{R}$, *il existe un opérateur non linéaire*

$$U_{a'} : B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \to B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n),$$

et des nombres $\delta, M > 0$ *tels que*

$$U_{a'}g(x) = f(a' + g(x)) - f(a'), \ \forall x \in Q,$$

et

$$\|U_{a'}g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq M,$$

pour toute fonction $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, *à support dans* Q, *satisfaisant*

$$\|g\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \delta.$$

Démonstration. Considérons l'opérateur non linéaire

$$V_{a'}g(x) = \varphi(x)(f(a' + g(x)) - f(a'), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

On a alors

$$V_{a'}g(x) = \varphi(x)(f(\varphi(x/2))(a' + g(x))) - f(\varphi(x/2)a')), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

$V_{a'}$ envoie donc $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ et, en raisonnant comme dans la preuve du Lemme 3.4, on voit qu'il existe un cube $Q' \subset Q$ et des nombres $\delta, M > 0$ tels que

$$\|g\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \delta \Rightarrow \|V_{a'}g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq M,$$

pour toute fonction $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que *supp* $g \subset Q'$. Posons $Q' = rQ + b$, avec $r > 0$ et $b \in \mathbb{R}^n$, et

$$U_{a'}g(x) = V_{a'}\left(g(r^{-1}(\cdot - b))\right)(rx + b),\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Alors

$$U_{a'}g(x) = \varphi(rx + b)(f(a' + g(x)) - f(a')),\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Par l'inclusion $Q' \subset Q$, nous avons $\varphi(rx + b) = 1$ sur Q. $\square$

Proposition 3.1. *Soit $0 < s < \ell$ avec ℓ entier. Une distribution f appartient à $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et*

$$N_{p,\ell}(f,t) = \sup_{0<t\leq 1} t^{-s}\omega_{p,\ell}(f,t) < +\infty,$$

où $\omega_{p,\ell}(f,t) = \sup_{|h|\leq t}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\Delta_h^\ell f(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$. De plus $\|f\|_p + N_{p,\ell}(f)$ est une norme équivalente dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Voir [14] $\square$

3.3 Preuve des Théorèmes 3.1 et 3.2

Soient b, b' dans $\mathbb{R}$, $N \geq 1$ et r, ν qui seront choisis en fonction de b et b'. Nous considérons l'ensemble.

$$A_N = \{(k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n : |k_j| \leq N,\ \forall j = 1, ..., n\},$$

et nous définissons

$$\alpha = \frac{1}{2\ell + 1},$$

où ℓ est un entier fixé tel que $\ell > s$, et la fonction

$$g(x) = \sum_{k\in A_N} \varphi\left(\frac{1}{\alpha}\left(\frac{x}{r} - k\right)\right)(b' - b) + \phi_\nu(x)b. \tag{3.1}$$

Le Lemme 3.2 donne l'inégalité

$$\|\sum_{k\in A_N} \varphi(\frac{1}{\alpha}(\frac{\cdot}{r} - k))\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \leq cr^{(\frac{n}{p})-s}N^{\frac{n}{p}}. \tag{3.2}$$

3.3.1 Preuve du Théorème 3.1

Supposons que l'opérateur de composition T_f envoie l'espace de Besov $B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ dans $B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ (c'est suffisant puisque l'espace $B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ se plonge dans tous les $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$). Soit un nombre réel a' qui reste fixé dans la suite de la preuve.

Alors nous obtenons un opérateur $U_{a'}$ et des constantes δ, M selon le Lemme 3.6. On prend $\nu = 1$ et

$$r = \frac{1}{6N}.$$

Puisque $\alpha < \frac{1}{2}$, les cubes $r(2\alpha Q + k), k \in \mathbb{Z}^n$, sont deux à deux disjoints. Par définition de r, nous avons $r(Q + k) \subset Q/2$, pour tout $k \in A_N$. Alors

$$U_{a'}g(x) = f(a' + b') - f(a'), \ \ si\ x \in r(\alpha Q + k)\ pour\ k \in A_N, \tag{3.3}$$

$$U_{a'}g(x) = f(a' + b) - f(a'), \ \ si\ x \in (Q/2) \setminus \cup_{k\in A_N} r(2\alpha Q + k). \tag{3.4}$$

Grâce au choix de r, on a

$$c^{-1} r^{s-\frac{n}{p}} N^{-\frac{n}{p}} \| \sum_{k\in A_N} \varphi\left(\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\cdot}{r} - k\right)\right) \|_\infty = c^{-1} 6^{\frac{n}{p}-s} N^{-s} \|\varphi\|_\infty \le c'.$$

On obtient

$$\| \sum_{k\in A_N} \varphi\left(\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\cdot}{r} - k\right)\right) \|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \le c_1 r^{\frac{n}{p}-s} N^{\frac{n}{p}}.$$

En utilisant la relation entre r et N, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|g\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} &= \| \sum_{k\in A_N} \varphi\left(\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\cdot}{r} - k\right)\right) (b' - b) + \phi_\nu(x) b \|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \\
&\le |b' - b| \| \sum_{k\in A_N} \varphi\left(\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\cdot}{r} - k\right)\right) \|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} + |b| \|\phi_1\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \\
&\le |b' - b| \left(c_1 N^s\right) + c|b| \\
&\le c_2 N^s |b' - b| + c_2 |b| \\
&\le c_2 \left(N^s |b' - b| + |b|\right).
\end{aligned}$$

Maintenant on suppose

$$\max\left(|b|, |b - b'|\right) \le \frac{\delta}{2c_2}, \tag{3.5}$$

et on définit N par la propriété :

$$N^s \le \frac{\delta}{2c_2|b - b'|} < (N+1)^s.$$

Remarquons que la définition de N implique

$$N^s \geq \frac{\delta}{2^{s+1} c_2 |b - b'|}. \tag{3.6}$$

Par la condition (3.5) et par définition de N, nous avons

$$\begin{aligned}
\|g\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} &\leq c_2 \left(N^s |b' - b| + |b| \right) \\
&\leq c_2 N^s |b' - b| + c_2 |b| \\
&\leq \frac{\delta}{2|b' - b|} |b' - b| + c_2 \frac{\delta}{2c_2} \\
&\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \\
&\leq \delta
\end{aligned}$$

Puisque le support de g est inclus dans Q, on en déduit

$$\|U_{a'} g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq M. \tag{3.7}$$

Pour tout $x \in r(\alpha Q^+ + k)$, nous avons

$$\begin{aligned}
&x + jr\alpha e_1 \in r(Q + k), \quad \forall j = 0, \cdots, \ell, \\
&x + jr\alpha e_1 \notin r(2\alpha Q + k), \quad \forall j = 1, \cdots, \ell.
\end{aligned}$$

Les relations (3.3) et (3.4) donne aussitôt

$$|\Delta^\ell_{r\alpha e_1}(U_{a'} g)(x)| = |f(a' + b') - f(a' + b)|$$

Par la Proposition 3.1, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|U_{a'} g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} &\geq (r\alpha)^{-s} \left(\sum_{k \in A_N} \int_{r(\alpha Q^+ + k)} |\Delta^\ell_{r\alpha e_1}(U_{a'} g)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq (r\alpha)^{-s} \left(\sum_{k \in A_N} \int_{r(\alpha Q^+ + k)} |f(a' + b') - f(a' + b)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq c_3 |f(a' + b') - f(a' + b)| r^{-s} N^{\frac{n}{p}} r^{\frac{n}{p}} \\
&= c_4 N^s |f(a' + b') - f(a' + b)|.
\end{aligned}$$

En prenant en compte les inégalités (3.6) et (3.7), nous voyons que la condition (3.5) implique

$$|f(a' + b') - f(a' + b)| \leq \frac{2^{s+1} M c_2}{c_4 \delta} |b - b'|,$$

qui signifie que f est lipschitzienne dans un voisinage de a'.

3.3.2 Preuve du Théorème 3.2

Soit f une fonction satisfaisant l'hypothèse du Théorème 3.2, on se propose de mettre en évidence des constantes $\sigma > 0$ et $K > 0$ telles que $|b' - b| \leq \delta$ entraine

$$|f(b') - f(b)| \leq K|b' - b|,$$

quels que soient b et b' dans $\mathbb{R}$.

Soit la fonction g telle que

$$g(x) = \sum_{k \in A_N} \varphi\left(\frac{1}{\alpha}\left(\frac{x}{r} - k\right)\right)(b' - b) + \phi_\nu(x)b.$$

Les entiers positifs ν et N, ainsi que le nombre $r \in]0, 1]$, seront précisés dans un instant.

Le Lemme 3.3 nous autorise à choisir ν tel que

$$|b| \|\phi_\nu\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\delta}{2},$$

de sorte que N et r devront satisfaire les relations :

$$\delta\left(3|b' - b|\right)^{-1} < c_1 r^{\frac{n}{p} - s} N^{\frac{n}{p}} \leq \delta\left(2|b' - b|\right)^{-1}, \tag{3.8}$$

$$rN < 2^{-\nu - 2}. \tag{3.9}$$

L'estimation (3.2) et la relation (3.8) entraineront

$$\begin{aligned}
\|g\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq \|g\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq |b' - b| \|\sum_{k \in A_N} \varphi\left(\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\cdot}{r} - k\right)\right)\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} + |b| \|\phi_\nu\|_{B^s_{p,1}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq |b' - b| c N^{\frac{n}{p}} + \frac{\delta}{2} \\
&\leq \delta(2|b' - b|)^{-1}|b' - b| + \frac{\delta}{2} \\
&\leq \frac{\delta|b' - b|}{2|b' - b|} + \frac{\delta}{2} \\
&\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.
\end{aligned}$$

L'inégalité (3.9) nous garantit l'inclusion

$$r(Q + k) \subset 2^{-\nu} Q, \quad pour \quad k \in A_N \tag{3.10}$$

et par conséquent

$$g(x) = b', \ si \ x \in r(\alpha Q + k), \quad k \in A_N, \tag{3.11}$$

$$g(x) = b, \ si \ x \in 2^{-\nu}Q \setminus \cup_{k\in A_N} r(2\alpha Q + k). \tag{3.12}$$

Pour $s < \frac{n}{p}$, il suffit de poser

$$r = (\delta(2c_1|b'-b|)^{-1}N^{-\frac{n}{p}})^{\frac{1}{\frac{n}{p}-s}},$$

alors $rN = c|b'-b|^{\frac{1}{s-\frac{n}{p}}} N^{\frac{s}{s-\frac{n}{p}}}$ est de l'ordre de grandeur de $N^{\frac{s}{s-\frac{n}{p}}}$, l'hypothèse $0 < s < \frac{n}{p}$, un choix convenable $N = N(\delta, |b'-b|)$ permet d'avoir (3.9).

Supposons maintenant $s = \frac{n}{p}$.

Si $|b'-b| \leq \dfrac{\delta}{3}$, il est possible de trouver un entier $N \geq 1$ tel qu'on ait (3.8), on choisit alors r assez petit pour avoir (3.9). Il vient alors

$$\|f\circ g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq M.$$

Pour tout $x \in r(\alpha Q^+ + k)$, nous avons

$$x + jr\alpha e_1 \in r(Q+k) \setminus \cup_{k'\in A_N} r(2\alpha Q + k'), \quad \forall j = 1, \cdots, \ell.$$

Alors (3.10), (3.11) et (3.12) nous donnent

$$|\Delta^\ell_{r\alpha e_1}(f\circ g)(x)| = |f(b') - f(b)|.$$

Par la Proposition 3.1, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|f\circ g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} &\geq (r\alpha)^{-s}\left(\sum_{k\in A_N}\int_{r(\alpha Q^+ + k)} |\Delta^\ell_{r\alpha e_1}(f\circ g)(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= (r\alpha)^{-s}\left(\sum_{k\in A_N}\int_{r(\alpha Q^+ + k)} |f(b') - f(b)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= (r\alpha)^{-s}|f(b') - f(b)|\left(\sum_{k\in A_N}\int_{r(\alpha Q^+ + k)} dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= (r\alpha)^{-s}|f(b') - f(b)||r\alpha Q^+|^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k\in A_N}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |f(b') - f(b)|(2N+1)^{\frac{n}{p}}(r\alpha)^{-s}|r\alpha Q^+|^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

L'encadrement (3.8) implique

$$
\begin{aligned}
|f(b') - f(b)| &\leq \frac{\|f \circ g\|_{B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)}}{(2N+1)^{\frac{n}{p}}(r\alpha)^{-s}|r\alpha Q^+|^{\frac{1}{p}}} \\
&\leq c_1 M r^{s-\frac{n}{p}} N^{-\frac{n}{p}} \\
&\leq c_2 M \delta^{-1} |b' - b|,
\end{aligned}
$$

qui signifie que f est globalement lipschitzienne.

Conclusions générales et perspectives

Dans ce mémoire, on a étudié la composition sur certains espaces fonctionnels, plus précisément sur les espaces de Besov et les espaces de Lizorkin-Triebel, où on a étudié la condition nécessaire et suffisante pour $0 < s < 1$ et aussi pour le cas $0 < s = \frac{n}{p} < 1$. Finalement, on a étudié les conditions nécessaires de Lipschitz pour $s > 0$.

Dans les travaux futurs, nous étudierons la propriété de composition sur d'autres espaces fonctionnels.

Bibliographie

[1] S.E. Allaoui, *Remarques sur le calcul symbolique dans certains espaces de Besov à valeurs vectorielles*. Annales Mathématiques Blaise Pascal. **16** (2009), 399–429.

[2] S.E. Allaoui, INTÉGRALES SINGULIÈRES. Thèse de Doctorat Université de Batna, 2011.

[3] G. Bourdaud, *Sur les opérateurs pseudo-différentiels à coefficients peu réguliers*, Thèse, Univ. Paris-Sud, Orsay, 1983.

[4] G. Bourdaud, *Le calcul fonctionnel dans l'espace de Besov critique*, Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992), 983–986.

[5] G. Bourdaud, D. Kateb, *Calcul fonctionnel dans certains espaces de Besov*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **40** (1990), 153–162.

[6] G. Bourdaud, D. Kateb, *Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov*, Proc. Amer. Math. Soc. **112** (1991), 1067–1076.

[7] B. E. J. Dahlberg, *A note on Sobolev spaces*, Proc. Sympos. Pure Math. **35** (1979), 183–185.

[8] N. Ferahtia, Localisations sur les espaces de Lizorkin-Triebel et composition dans certains espaces de Besov localisés uniformes. Thèse de Doctorat Université de M'sila, 2021.

[9] M. Frazier, B. Jawerth : *Decomposition of Besov Spaces*. Indiana Univ. Math. J. **84** (1985), 777–799.

[10] M. Frazier, B. Jawerth : *A Discrete Transform and Applications to Distribution Spaces*. J. Funct. Anal. **93** (1990), 34–170.

[11] S. Igari, *Sur les fonctions qui opèrent sur l'éspace* $\widehat{A}^2$, Ann. Inst. Fourier (Gronoble) **15** (1965), 525–536.

[12] T. Runst, W. Sickel : Sobolev spaces of fractional order, Nemytzkij operators and nonlinear partial differential equations. De Gruyter, Berlin, 1996.

[13] H. Triebel : Theory of Function Spaces. Birkhäuser, Basel, 1983.

[14] H. Triebel : Theory of Function Spaces II. Birkhäuser, Basel, 1992.

ملخص :

في هذه المذكرة، قمنا بدراسة خصائص الدوال التي تؤثر بالتركيب على فضاءات بيزوف $B^{s}_{p,q}(R^n)$ وفضاءات ليزركين-ترييال $F^{s}_{p,q}(R^n)$، من أجل $0 < s < 1$ ، $p \epsilon[1,+\infty[$ و $q \epsilon [1,+\infty]$، أيضا قمنا بدراسة الحالة $s=\frac{n}{p}$ مع $0 < s < 1$. أخيرا، قمنا بدراسة الشروط الضرورية الخاصة بالدوال الليبشتيزية من أجل $s > 0$.

الكلمات المفتاحية : فضاءات بيزوف، فضاءات ليزركين-ترييال، مؤثرات التركيب، الدوال الليبشتيزية.

Abstract:

In this memory, we have characterized the functions which operate by left composition on Besov spaces $B^{s}_{p,q}(R^n)$ and Lizorkin-Triebel spaces $F^{s}_{p,q}(R^n)$, for $0 < s < 1$, $p \epsilon[1,+\infty[$ *and* $q\epsilon[1,+\infty]$, also we studied the case $s=\frac{n}{p}$ with $0 < s < 1$. Finally, we have studied the necessary Lipschitz conditions for $s > 0$.

Key words: Besov spaces, Lizorkin-Triebel spaces, Composition operators, Lipschitz functions.

Résumé:

Dans ce mémoire, on a caractérisé les fonctions qui opèrent par composition à gauche sur les espaces de Besov $B^{s}_{p,q}(R^n)$ et les *espaces de Lizorkin-Triebel* $F^{s}_{p,q}(R^n)$*, pour* $0 < s < 1$, $p \epsilon [1,+\infty[$ *et* $q \epsilon [1,+\infty]$*, aussi on a étudié le cas* $s=\frac{n}{p}$ *avec*

$0 < s < 1$. *Finalement, on a étudié les conditions nécessaires de Lipschitz pour* $s > 0$.

***Mots-clés**: Espaces de Besov, Espaces de Lizorkin-Triebel, Opérateurs de composition, Fonctions lipschitziennes.*