REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse fonctionnelle

Thème

Factorisation et caractérisation de quelques opérateurs multilinéaires et polynômes m-homogènes

Présentée par :

M^{elle} *BOUREZG Ikram*

Soutenu publiquement le : xx/06/2022.

Devant le jury composé de :

SAADI Khalil	Prof,	Université de M'sila	**Président**.
BELAALA Maatougui	M.C.B,	Université de M'sila	**Encadreur**.
YAHI Rachid	M.C.B,	Université deM'sila	**Examinateur**.

Année universitaire 2021/2022

Table des matières

Dédicace

Ce travail est dédié

À mon cher père qui a toujours cru en moi et a mis à ma disposition tous les moyens nécessaires pour que je réussisse dans mes études.

À ma chère mère : que je ne cesse de remercier pour tout ce quelle m'a donné. Elle m'a supporté dans son ventre 9 mois. Allah le récompense pour tous ces bienfaits.

À mes très chers frères et sœurs Ayoub,Yaakoub,Noor, Dounia,Fatima, je ne peux pas exprimer à travers ses lignes tous mes sentiments d'amour et de tendresse envers vous. Puisse l'amour et la fraternité nous unissent jamais. Je vous souhaite la réussite dans votre vie, avec tout le bonheur qu'il faut pour vous combler. Merci .

À mes chères amis : En souvenir des moments agréables passés ensemble, veuillez trouver dans ce travail l'expression de ma tendre affection et mes sentiments les plus respectueux avec mes vœux de succès, de bonheur et de bonne santé.

A tous ceux ou celles qui me sont chers et que j'ai omis involontairement de citer.

A tous Mes enseignants tout au long de mes études.

A tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Remerciements

Je remercie Allah, Le tout puissant, Le Miséricordieux, qui nous a donne l'opportunité de mener bien ce travail. J'exprime ma gratitude, mes remerciements à mes parents qui ont fait de leur mieux pour m'aider.

C'est avec un grand plaisir que, j'adresse mes sincères remerciements à mon encadreur, Monsieur Dr **BLAALA MAATOUGUI** pour ses conseils et son suivi durant la réalisation de mon travail.

Je tiens à remercie également les membres de jury qui ont bien voulu d'examiner ce travail le Pr **SAADI KHALIL** président de jury et le Dr **YAHI RACHID** (examinateur) .

Je remercie toutes les personnes qui m'ont aidé, est surtout le Dr **SAAD ABD EL-KBIR** .

Je remercie également mes professeurs du département mathématiques .

Je ne termine pas sans avoir exprimé mes remerciements envers toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Introduction

Dans ce mémoire de Master option analyse fonctionnelle , on va étudier la **factorisations** et la **caractérisations** de quelques opérateurs multilinéaires et polynômes m-homogènes . Ce travail s'inscrit dans le cadre de la théorie d'opérateurs non-linéaires.Ils portent essentiellement sur les théorèmes de **caractérisation** des espaces de Banach.Il y a beaucoup de théorèmes qui **caractérisent** certains types d'espaces de Banach. La **caractérisation** de James des espaces réflexifs est l'un des résultats célèbres ; il utilise les formes linéaires d'un espace de Banach : X est réflexif si, et seulement si, toute forme linéaire de X atteint sa norme.Les deux cas non-linéaires considérés ici sont le cas multilinéaire et polynômial. On note qu'une **caractérisation** multilinéaire signifie qu'on utilise les opérateurs multilinéaires au lieu d'opérateurs linéaires.Le théorème de Kwapień en 1970 donne une **caractérisation** d'un espace de Hilbert.
On plus La **factorisation** des opérateurs joue un rôle indispensable dans l'étude des propriétés des opérateurs . Dans le cas linéaire, on note par exemple si un opérateur linéaire u se factorise par un espace réflexif, alors on conclut directement que cet opérateur u est faiblement compact.Un autre résultat annonce aussi qu'un espace de Banach X est réflexif si, et seulement si, l'opérateur identité

$$id_X : X \longrightarrow X$$

se **factorise** par un espace réflexif. Dans le cas multilinéaire, deux types de **factorisation** sont envisagées, dans le premier type on **factorise** les opérateurs multilinéaires autour d'un seul espace de Banach et un opérateur faiblement compact, la classe de ces opérateurs sera notée $W \circ L$. Alors, T est de type $W \circ L$ s'il existe un espace de Banach G ; un opérateur linéaire $u \in W(G;Y)$ et un opérateur multilinéaire $A \in L(X_1;...;X_m;G)$ tels que T s'écrit sous la forme $T = u \circ A$.
Dans le duexième type, on considéré les opérateurs multilinéaires qui se **factorisent** de la façons suivante : on supposera qu'il existe des espaces de Banach G_j, des opérateurs linéaires faiblement compacts $u_j : X_j \longrightarrow G_j$ un opérateur multilinéaire $A : G_1 \times ... \times G_m \longrightarrow Y$ tels que $T = A(u_1, ..., u_m)$: Cette classe d'opérateurs multilinéaires sera notée $L(W)$. Plusieurs résultats de **factorisation** correspondants à ces deux types seront établis notamment celle des espaces de Banach réflexifs.
La classe des opérateurs multilinéaires de type sommant, considéré comme un cas important qui possède plusieurs type de factorisation. Il existe donc beaucoup de classes qui généralisent la notion d'opérateur linéaire sommant, parmi ces classes il y en a qui vérifie le théorème de **factorisation** de *Pietsch*. La classe des opérateurs multilinéaires Cohen fortement sommant est parmi les classe qui généralisent le cas linéaire de Cohen, de plus cette classe possède une **factorisation** agréable.C'est à dire, T est Cohen fortement p-sommant s'il existe un espace de Banach G ; un opérateur $u \in D_p(G;Y)$ et un opérateur multilinéaire $A \in L(X_1, ..., X_m; G)$ tels que T s'écrit sous la forme $T = u \circ A$.

Ce travail est divisé en quatre chapitres :
Dans le premier chapitre , on rappelle les résultats qu'on a besoin dans la suite de ce mémoire.
Commençons par donner la définition d'un espace de Banach et espace de Hilbert . On donne la définition des opérateurs linéaires et quelques propriétés.
Ensuite, on étudie les opérateurs multilinéaires.
On termine ce chapitre par mettre l'accent sur quelques notions ; telles que :Espace réflexif , l'opérateur adjoint,la topologie faible , Représentation sur un produit tensoriel,et enfin Idéaux d'opérateurs multilinéaires .

Dans le deuxième chapitre,on fait un petit rappel sur les opérateurs Cohen fortement p-sommants introduits par Cohen en 1973 pour le cas linéaire et par *Achour* et *Mezrag* en 2007 pour le cas multilinéaire. On donnera une version polynômiale du théorème de Kwapień ; laquelle : X est isomorphe à un espace de Hilbert si,et seulement si, pour tout espace de Banach Y et tout polynôme homogène 2-dominé $P : X \longrightarrow Y; P$ est

Cohen fortement 2-sommant.
Est consacré à l'étude Une application de la théorie des opérateurs linéaires sommants est la **caractérisation** de certains espaces de Banach tels que les espaces de Hilbert et les espaces L_p. On note qu'une **caractérisation** multilinéaire signifie qu'on utilise les opérateurs multilinéaires au lieu d'opérateurs linéaires. Les deux cas non-linéaires considérés ici sont le cas multilinéaire et polynômial.

Dans le troisième chapitre, on étudiera la **factorisation** des opérateurs faiblement compacts. Commençons par le cas linéaire, puis le cas multilinéaire.
On exposera les deux types de **factorisation** citées ci-dessus, ce que nous permettent de construire deux classes $W \circ L$ et $L(W)$. On termine ce chapitre par un survol sur certaines **caractérisations** et la réflexivité de l'espace des opérateurs multilinéaires bornés $L(X_1; ...; X_m; Y)$.
Le quatrième chapitre est consacré à l'étude des opérateurs multilinéaires sommants.
Ces classes d'opérateurs sont : les opérateurs multilinéaires absolument p-sommant, les opérateurs multilinéaires absolument $(p; p_1; ...; p_m)$-sommants, les opérateurs multilinéaires p-dominés, les opérateurs multilinéaires multi p-sommants, les opérateurs multilinéaires fortement p-sommants, les opérateurs multilinéaires de Hilbert *schmidt* et on termine par les opérateurs multilinéaires Cohen fortement p-sommant.

Notations générales

- p* : le conjugué de p, i.e.,$\frac{1}{p}+\frac{1}{p^*}=1$
- B(X ;Y) =L(X ;Y) : $Espaced'opérateurslinéairesbornes(continues)de$ X $dans$ Y .
- B_X : Boule unité fermée de l'espace X.
- K : $Corpsdesscalaires$ (K = ou C) .
- X* : Le dual topologique de X.
- X** : La bidual topologie de X .
- B_{X^*} :Boule unité fermée de l'espace X^*
- C(k) : $Espacedesfonctionscontinuessuruncompact$ K $àvaleursréelles.$
- J$_X$: Plongement canonique.
- D$_p(X;Y)$:Espace des opérateurs fortement p-sommant de X dans Y .
- $\prod_p^L(X;Y)$:Espace des opérateurs p-sommant de X dans Y .
- (X$_1\hat{\otimes}_\pi...\hat{\otimes}_\pi X_m$) : le produit tensoriel projectif.
- l$_p^n(X)$: l'espace de suites finies fortement p-sommables.
- l$_p^{n,w}(X)$: l'espace de suites finies faiblement p-sommables.
- T* : l'opérateur adjoint de T.
- : $linéarisationdel'opérateurmultilinéaire$ T .
- i$_m$: plongement canonique de$X_1\otimes...\otimes X_m$ dans $X_1\hat{\otimes}_\pi...\hat{\otimes}_\pi X_m$.
- L(X ;Y) : $l'espacedesopérateurslinéairesbornés.$
- W(X ;Y) : $classedesopérateurslinéairesfaiblementcompacts.$
- L(X$_1,...,X_m;Y$) : l'espace des opérateurs multilinéaires bornés.
- L(X$_1,...,X_m$) : l'espace des formes multilinéaires bornées.
- W(X$_1,...,X_m;Y$) : classe des opérateurs multilinéaires faiblement compacts.
- $W\circ L(X_1,...,X_m;Y)$: classe des opérateurs multilinéaires qui se factorisent par un seul espace de Banach réflexif.
- L W(X$_1,...,X_m;Y$) : classe des opérateurs multilinéaires qui se factorisent par m espaces de Banach réflexifs.
- $\prod_p(X;Y)$: l'espace des opérateurs linéaires sommants.
- L$_p^m(X_1,...,X_m;Y)$: l'espace des opérateurs multilinéaires absolument p-sommants.
- $L^m_{(p,p_1,...,p_m)}(X_1,...,X_m;Y)$: l'espace des opérateurs multilinéaires absolument $(p,p_1,...,p_m)$-sommants.
- L$_p^d(X_1,...,X_m;Y)$: l'espace des opérateurs multilinéaires p-dominés.
- $\prod_p^m(X_1,...,X_m;Y)$: l'espace des opérateurs multilinéaires multi p-sommants.
- $\longrightarrow$: flêche de convergence .
- $P(^mX;Y)$: Espace des polynômes homogènes de degré m.
- μ Mesure de probabilité régulière positive sur líespace compact Ω .

Chapitre 1

Préliminaire

Dans la première partie de ce chapitre, nous allons exposer l'ensemble de toutes les notions de base utilisées dans notre travail, à savoir les définitions importantes et les théorèmes fondamentaux. Dans la deuxième partie, nous rappelons quelques propriétés des applications non linéaires (multilinéaire, produit tensoriel,Espace de Banach ,Opérateurs linéaire...) .

1.1 Espaces de Banach

Définition 1.1 ***(Espace de Banach)*** *Un espace de Banach X est un espace vectoriel normé complet, (i.e., tout suite de Cauchy de X est convergente dans X).*

Remarque 1.1 *Tout espace normé de dimension finie est un espace de Banach. De plus,tout sous espace fermé d'un espace de Banach est un espace de Banach contenu.*

Exemple 1.1 *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ et $P \in [1; +\infty]$: On définit l'ensemble l_p par*

$$l_p = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p)\frac{1}{p} < \infty\}$$

Définition 1.2 ***(Espace de Hilbert)*** *Un espace de Hilbert est un espace pré-hilbertien complet pour la distance issue du produit scalaire.*

1.2 Opérateur linéaire borné

Définition 1.3 *Soient $X; Y$ deux espaces de Banach définis sur le même corps $\mathbb{K}$ .L'application $T : X \longrightarrow Y$ est dite linéaire si :*
$1-$ $\forall x, y \in X : T(x + y) = T(x) + T(y)$.
$2-$ $\forall x, y \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K} : T(\lambda x) = \lambda T(x)$.
On note $L(X, Y)$ l'ensembel des applications linéaires de X dans$Y$.
Si $Y = \mathbb{K}, L(X, Y) = X^{'}, X^{'}$ s'appelle le dual algébrique de X .

Définition 1.4 *Soit $T \in L(X, Y)$ .L'application linéaire T est dite borné ou continue s'il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\forall x \in X : \|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X. \tag{1.1}$$

On note $\boldsymbol{B}\ (X;Y)$*l'ensembel des applications linéaires bornées muni de la norme :*

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x\leq 1}\|T\|. \tag{1.2}$$

On a aussi :

$$\forall x \in X : \|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|.$$

Cas particulier :
Si$Y = \mathbb{K}, B(X;\mathbb{K}) = X^*$*,s'appelle le dual topologique de* X*.*

Remarque 1.2 $B(X;\mathbb{K}) \subseteq L(X;\mathbb{K})$

Définition 1.5 (Espace normé) *On dit que* E *est un espace vectoriel normés s'il est muni d'une norme* $\|\cdot\|$ *.*

Définition 1.6 ***Dual topologique***
Soit X *un espace vectoriel normé. On appelle dual topologique, et on note* X^**, l'espace de Banach des formes linéaires continues sur* X *; i.e.,*

$$X^* = L(\mathbb{R};X)$$

Notons ici que l'espace X^* *est toujours complet pour la norme des opérateurs .*

Exemple 1.2 *Soit* $1 < p < \infty$*. On a*

$$(l_p)^* = l_{p^*}$$

avec p^* *est le conjugué de* p*, i.e.,* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ *.*

Définition 1.7 ***(Espace réflexif)*** *Un espace de Banach X est dit réflexif si l'application canonique :*

$$\boldsymbol{J}_X : X \longrightarrow X^{**}.$$

est bijectif. Autrement dit,X s'identifie isométriquement à X^{**} *. Ca nous permettra d'associer à chaque élément* x^{**} *de* X^{**} *un unique vecteur* x *de* X *tel que :*

$$\forall x^* \in X^* : x^{**}(x^*) = x^*(x)$$

On note que :
- Pour tout $1 < p < \infty$*, l'espace Lp est réflexif. Il en est de même pour les petit* l_p *avec* $1 < p < \infty$*. Par contre, les espaces* c_0 *(l'espace des suites convergent vers zéro* (0)*)*$; L_1; L_\infty; l^1; l^\infty$ *ne sont pas réflexifs.*
–Tout espace de dimension finie est réflexif.
–Tout espace de Hilbert est réflexif.

Proposition 1.1 1) *Si* X *est réflexif et si* Y *est isomorphe à* X*, alors* Y *est réflexif.*
2) *Si* X *est réflexif, alors* X^* *est réflexif.*
3) *Tout sous espace fermé* Y *de* X *est réflexif.*

Définition 1.8 ***(La topologie faible)***
On définit la topologie faible, notée $\sigma(X;X^*)$ *, sur un espace de Banach* X *comme étant la topologie la moins fine sur* X *rendant continues toutes les formes linéaires sur* X

Théoréme 1.1 *Les sous espaces vectoriels fermés de* X *sont les mêmes pour les deux topologies (forte et faible). Il en est de même plus généralement des parties fermées convexes.*

Théoréme 1.2 *Si X est réflexif, toute suite bornée dans X admet une sous suite faiblement convergente.*

Définition 1.9 ***(La topologie $*-$faible)*** *Soient X un espace de Banach et X^* son dual. La topologie$*-$faible e sur le dual X^* , notée $\sigma(X;X^*)$, c'est la topologie la moins fine sur X^* rendant continues toutes les applications de la forme*

$$x : X^* \longrightarrow \mathbb{R} : x^* \longmapsto x^*;\ \textit{oú}\ x \in X.$$

Noter que cette topologie est moins fine que la topologie faible de X^*.

Définition 1.10 ***(pré-dual)*** *L'espace de Banach X possède un pré-dual s'il existe un espace de Banach G tel que $X = G^*, G$ s'appelle le pré-dual de X . Remarquons que tout espace de Banach X est pré-dual de son espace dual X^* .*

Théoréme 1.3 (1) *L'espace X est réflexif si et seulement si son pré-dual est X^* .*
(2) *L'espace X est réflexif si et seulement si la topologie faible et $*$-faible dans X^* sont coïncides.*

1.3 Idéaux des applications multilinéaires

En premier lieu, on va présenter les notions et une sélection des résultats classiques concernant les opérateurs multilinéaires. Puis, on discute les classes d'idéaux d'opérateurs multilinéaires et leurs méthodes de constructions introduites par Pichet. La dernière partie sera consacrée à li étude de classes importantes d'opérateurs multilinéaires, qui sont les opérateurs absolument p-sommants, p-domines, multi p-sommants, fortement p-sommants et Hilbert $Gram - Schmidt$ et de leurs propriétés.

1.3.1 Les applications multilinéaires

Soient $m \in \mathbb{N}$ et $X_1, ..., X_m; y$ des espaces de Banach. Une application

$$T : X_1 \times ......\times_m \longrightarrow Y$$

est dite opérateur ou application multilinéaire (ou m-linéaire) si

$$T(X^1, ..., \alpha X^j + \alpha Y^j, ..., X^m) = \alpha T(X^1, ..., X^j, X^m) + \beta T(X^1, ..., X^j, X^m),$$

pour tout ,$j(1 \leq j \leq m)$et $X^j, y^j \in X_j, \alpha, \beta \in \mathbb{K}(\mathbb{K} = \mathbb{R}ou\mathbb{C})$.si $Y = \mathbb{K}$, T est dit forme multilinéaire . L'ensemble S des éléments de Y de la forme $T(x^1, ..., x^m), x^j \in X_j$ n'est pas un espace vectoriel. On note $L(X_1; ...; X_m; Y)$ l'ensemble des opérateurs multilinéaires de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y : Définissons les opérations linéaires suivantes

$$(T_1 + T_2)(x^1; ...; x^m) = T_1(x^1; ...; x^m) + T_2(x^1; ...; x^m),$$

$$(\alpha T)(x^1; ...; x^m) = \alpha(T)(x^1; ...; x^m),$$

ce qui donne à $L(X_1; ...; X_m; Y)$ une structure d'espace vectoriel. Gràce à la formule

$$T(x^1, ..., x^m) - T(y^1, ..., y^m) = T(x^1 - y^1, x^2, ..., x^m) + T(y^1, x^2 - y^2, x^3, ..., x^m) + ... + T(y^1, ..., y^{m-1}, x^m - y^m).$$

on peut montrer le résultat suivant.

Proposition 1.2 ***(Multilinéaire borné)***.
Pour $T_2L(X_1; ...; X_m; Y)$, *les affirmations suivantes sont équivalentes.*
1) *L'opèrateur* T *est continu.*
2) *L'opérateur* T *est continu en* $(0; ...; 0)$
3) *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que* $\|T(X^1, ..., X^m)\| \leq C \|X^1\| \dots \|X^m\|$ *pour tout*$(x^1, ..., x^m) \in (X_1; ...; X_m)$
Dans ce cas, on dit que T *est borné et on pose*

$$\|T\| = \sup_{\|x^j\| \leq 1, 1 \leq j \leq m} \|T(x^1, ..., x^m)\| = \inf C \ vérifantque \ \ C$$

Il est facile de voir qu'il définit une norme sur$L(X_1; ...; X_m; Y)$. *L'espace des applications m-linéaires continues (ou bornées) de* $(X_1; ...; X_m)$ *dans* Y *est un espace de Banach.On le note* $L(X_1; ...; X_m; Y)$. *si* $Y = \mathbb{K}$*„ on écrit* $L(X_1; ...; X_m)$ *.si* $X_1 = ... = X_m = X$, *on note simplement* $L(x^m; Y)$. *On désignera aussi par*$B(X; Y)$ *l'espace des opérateurs linéaires bornés de*X *dans* Y. *Rappelons qu'un opérateur multilinéaire* T *induit des opérateurs linéaires*

$$T_j : X_j \longrightarrow L(X_1; ..^{[j]}.; X_m; Y).$$

Oú

$$T_j(x^j)(X^1; ..^{[j]}.; X^m) = T(X^1; ...; X^m)$$

ce qui permet d'identifier l'espace $L(X_1; ...; X_m; Y)$ *avec* $l((x_j)(X_1; ..^{[j]}.; X_m; Y)$ *pour tout* $j = 1, ..., m$. *Un cas particulier est souvent utilise dans la théorie linéaire, lorsqu'on prend*$m = 2$ *et*$Y = \mathbb{K}$

$$L(X_1, X_2) = B(X_1; X_2^*) \tag{1.3}$$

Définition 1.11 ***(Multilinéaire symétrique)*** .
Soient$X; Y$ *deux espaces de Banach. Soit* $T : X \times ... \times Y \longrightarrow Y$ *un opérateur multilinéaire borné ; l'opérateur* T *est dit symétrique s'il est invariant par rapport à toute permutation des variables, i.e.,*

$$T \circ \sigma(X^1, ..., X^m) = (X^{\sigma(1)}, ..., X^{\sigma(m)}) = T(X^1, ..., X^m)$$

pour toute permutation σ *: On note* $L_s(X^m; Y)$ *l'espace des opérateurs multilinéaires continus symétriques. Si on fait toutes les permutations possibles on peut associer*$T \in L(X^m; Y)$ *un opérateur symétrique* $T_s \in L_s(X^m; Y)$ *soit* $T : X \times ... \times X \longrightarrow Y$ Y *un opérateur m-linéaire, on pose*

$$T_s = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma} T \circ \sigma$$

L'opérateur T_S *s'appelle opérateur symétrise de*T. *On a*
1) *Si* $T \in L(X^m; Y)$, *alors* $T_s \in L_s(X^m; Y)$
2)$T_S = T$ *si, et seulement si,* T*est symétrique.*
3) *L'opérateur linéaire*$S : L(X^m; Y) \longrightarrow L_s(X^m; Y) : T \longrightarrow S(T) = T_S$ *est une projection*

1.3.2 Représentation sur un produit tensoriel

Soient $(X_1; ...; X_m)$ des espaces de Banach. On note$(X_1 \otimes ... \otimes X_m)$ le produit tensoriel algébrique de$(X_1; ...; X_m)$ On définit la norme projective par

$$\|\vartheta_\pi\| = \inf\{\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \|x_i^j\},\tag{1.4}$$

oũ l'infimum porte sur toutes les représentations possibles de v de la forme

$$\vartheta = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m.$$

On note $(X_1 \hat{\otimes}_\pi ... \hat{\otimes}_\pi X_m)$ le produit tensoriel projectif des espaces $(X_1; ...; X_m)$ i.e. ; le complété de$(X_1 \otimes ... \otimes X_m)$pour cette norme. Si $(X_1 = ... = X_m = X)$ on écrit simplement $\hat{\otimes}_\pi^m X$. : A chaque opérateur multilinéaire$T : (X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y)$on peut lui associer un opérateur linéaire, appelé linéarisation de$T, \tilde{T} : (X_1 \hat{\otimes}_\pi ... \hat{\otimes}_\pi X_m) \longrightarrow Y$ définie par

$$\tilde{T}(\sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m) = \sum_{i=1}^{n} T(x_i^1, ..., x_i^m) \tag{1.5}$$

Il est bien définie, car il ne dépend pas de représentation choisie). De plus,$\tilde{T}$ est unique et $\|(\tilde{T})\| = \|T\|$. En effet, soit $\vartheta = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m$,, on a

$$\|\tilde{T}\ (\vartheta)\| = \|\sum_{i=1}^{n} T(x_i^1, ..., x_i^m)\| = \|T\| \sum_{i=1}^{n} \|x_i^1\|, ..., \|x_i^m\|$$

comme v est arbitraire$\|\tilde{T}\| \leq \|T\| \|T\|_\pi$ Donc, $\tilde{T}$est borné et $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$.D'autre part $\|T\| \leq \|\tilde{T}\|$ parce que

$$\|T(X^1; ...; X^m)\| = \|\tilde{T}(X^1 \otimes ... \otimes X^m)\| \leq \|\tilde{T}\| \|X^1\| ... \|X^m\|.$$

Soit maintenant $\tilde{B}$ un autre opérateur linéarisé de T ; pour tout
$(x^1; ...; x^m) \in (X_1 \times ... \times X_m)$ on a

$$\tilde{B}(X^1 \otimes ... \otimes X^m) = T(X^1 ... X^m) = \tilde{B}(X^1 \otimes ... \otimes X^m)$$

Par linéarité,$\tilde{B}, \tilde{T}$ sont identiques sur $(X_1 \otimes ... \otimes X_m)$ et enfin, par densité, ils sont identiques sur$(X_1 \hat{\otimes}_\pi ... \hat{\otimes}_\pi X_m)$ on a

$$L(X_1; ...; X_m; Y) = B(X_1 \hat{\otimes}_\pi ... \hat{\otimes}_\pi X_m; Y) \tag{1.6}$$

car l'application

$$\phi : L(X_1; ...; X_m; Y) \longrightarrow B(X_1 \hat{\otimes}_\pi ... \hat{\otimes}_\pi X_m; Y) T \longrightarrow \Phi(T) = \tilde{T} \tag{1.7}$$

est une isomorphisme isométrique.
On étudiera plus précisément les relations entre les propriétés de$T$ et de $\tilde{T}$ **Cas particulier.** Le dual de $(X_1 \hat{\otimes}_\pi ... \hat{\otimes}_\pi X_m)$ s'identifie l'espace des formes multilinéaires bornées

$$(X_1 \hat{\otimes}_\pi ... \hat{\otimes}_\pi X_m)^* = L(X_1; ...; X_m) \tag{1.8}$$

Remarque

$$(X_1 \hat{\otimes}_\pi ... \hat{\otimes}_\pi X_m \hat{\otimes}_\pi Y)^* = L(X_1; ...; X_m, Y^*) \tag{1.9}$$

1.3.2.1 Opérateur adjoint

Pour tout opérateur multilinéaire $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$, on associe l'opérateur adjoint suivant

$$T^* : Y^* \longrightarrow L(X_1, ..., X_m),$$

qui est définie par

$$y^* \longmapsto T^*(y^*) : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow \mathbb{R},$$

où

$$T^*(y^*)(x^1, ..., x^m) = y^*(T(x^1, ..., x^m)).$$

1.4 Idéaux d'opérateurs multilinéaires

Depuis l'article célébré de A. Pichet intitulé dealais of multilinéaire fonctionnais [4], le succès de la théorie des idéaux linéaires a une influence considérable sur le développe piment des idéaux d'opérateurs multilinéaires et polynômes homogènes entres espaces de Banach. Pour plus d'information sur le sujet, voir par exemple e[20], [22] et [21]

Définition 1.12 *(Opérateurs de rang fini).*
Un opérateur multilinéaire $T \in L(X_1; ...; X_m; Y)$ est de rang fini s'il est somme finie d'opérateurs de la forme

$$T_{y\otimes_{j=1}^{m} x_j^*} = x_1^* \otimes ... \otimes x_m^* \otimes y : (x^1, ..., x^m) \longrightarrow x_1^* ... x_m^*(x^m)y.$$

où $x_j^* \in X_j^* (1 \leq j \leq m)$ et $y \in Y$. L'espace des opérateurs m-linéaires de rang fini sera noté $L_f(X_1; ...; X_m; Y)$.

Définition 1.13 *(Idéal des opérateurs m-linéaires).*
Un idéal des opérateurs multilinéaires (ou multi-idéal) M est une classe d'opérateurs multilinéaires bornés tels que pour tout$(X_1; ...; X_m)$et Ydes espaces de Banach on a :et Y des espaces de Banach on a :
(1) L'ensemble $M(X_1, ..., X_m; Y)$ est un sous espace de $L(X_1; ...; X_m; Y)$ qui contient les opérateurs m-linéaires de rang finis.
(2) Propriété d'idéal : si $T \in M(X_1, ..., X_m; Y)$; $u_j \in B(E_j, X_j)$ et $V \in B(Y, F)$ .Alors $V \circ T \circ (u_1, ..., u_m)$ et dans $M(E_1, ..., E_m; F)$.
De plus, si $\|.\|_M : M \longrightarrow \mathbb{R}^+$ satisfait :
(1′) $M(X_1, ..., X_m; Y), \|.\|_M$ est un espace normé (Banach)
(2′) $\|A^n; \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$; $A^n(x_1, ..., x_m) = x_1, ..., x_m\|_M = 1$
(3′) Si $T \in M(X_1, ..., X_m; Y)$; $u_j \in B(E_j, X_j)$ et $V \in B(Y, F)$

$$\|V \circ T \circ (u_1, ..., u_j)\|_M \leq \|V\| \|T\|_M \|u_1\|, ..., \|u_m\|.$$

Alors ,$(M; \|.\|_M)$ s'appelle idéal normé (de Banach) des opérateurs multilinéaires. L'idéal des opérateurs multilinéaires M est dit symétrique si $T_s \in M$ dés que $T \in M$.

Exemple 1.3 *(a) Les opérateurs multilinéaires faiblement compacts $W(X_1, ..., X_m; Y)$,i.e.,es m-linéaires qui envoient tout ensemble borné sur un ensemble relativement faiblement compact.*
(b) Les opérateurs multilinéaires compacts $K(X_1, ..., X_m; Y)$; i.e., les m-linéaires qui envoient tout ensemble borné sur un ensemble relativement compact.
(c) Les opérateurs multilinéaires de rang finis $L_f(X_1, ..., X_m; Y)$. Ces idéaux constituent des exemples importants. Les deux premiers sont des idéaux de Banach.

Chapitre 2

Caractérisation non linéaire des espaces de Banach

Une application de la théorie des opérateurs linéaires sommants est **la caractérisation** de certains espaces de Banach tels que les espaces de Hilbert et les espaces L_p. Cohen [12] a montré que $\prod_2(H;Y) \subseteq D_2(H;Y)$ pour tout espace de Banach Y et tout espace de Hilbert H. Cette propriété caractérise-t-elle les espaces de Hilbert ? Kwapie ń [**?**] a donné une réponse affirmative à cette question de Cohen. On trouve dans [**?**] une **caractérisation** des espaces L_∞ : X est un espace L_∞ si et seulement si pour tout espace de Banach Y ; tout opérateur linéaire 1-sommant$u : X \longrightarrow Y$ est intégral. Dans ce chapitre, et en premier lieu on va donner quelques résultats de caractérisation en termes d'opérateurs multilinéaires. En second lieu, nous généralisons le théorème de Kwapień dans le cas des polynômes homogènes de degré m en replantant l'espace $\prod_2$ parP_d^2 l'espace de polynômes 2-dominés et D_p par P_{coh}^p l'espace de polynômes Cohen fortement 2-sommant.

2.1 Caractérisation multilinéaire des espaces de Hilbert.

Définition 2.1 *Un opérateur u entre espaces de Banach X, Y est Cohen fortement p-sommant $(1 \leq p \leq \infty)$ s'il existe une constante positive C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_1, ..., x_n \in X; y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$ On a :*

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle u(x_i), y_i^* \rangle| \leq C(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_y} \|y_i^*(y)\| l_{p^*}^n. \tag{2.1}$$

La plus petite constante C, notée $d_p(u)$), telle que l'inégalité (2.1) a lieu, définit la norme fortement p-sommant $D_p(X,Y)$ des opérateurs Cohen fortement p-sommant X dans Y . Pour $p = 1$, l'espace $D_1(X,Y)$ coïncide avec $B(X,Y)$; l'espace des opérateurs bornés de X dans Y .

Définition 2.2 *Soit $1 \leq p \leq \infty$ et $T \in L(X_1, ..., X_m; Y)$ .L'opérateur T est fortement p-sommant s'il existe une constante positive C telle que pour tous $X_j^1, ..., x_n^j \in X_j, (j = 1, ..., m)$*

$$\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i^1, ..., x_i^m\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\phi \in l(X_1, ..., X_m)} (\sum_{i=1}^{n} |T(x_i^1, ..., x_i^m|^p)^{\frac{1}{p}}) \tag{2.2}$$

La classe des opérateurs m-linéaire fortement p-sommant de$X_1 \times ... \times X_m$ dans Y , notée $L_s^p(X_1, ..., X_m, Y)$ est un espace de Banach pour la norme $\|T\|_{L_s^p}$ qui est la plus petite constante C telle que l'inégalité (2.2) soit vérifiée.

Définition 2.3 *Soient $m \in \mathbb{N}$ et X_j, Y des espaces de Banach $(j = 1, ..., m)$. Un opérateur m-linéaire $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ est Cohen fortement p-sommant $1 \leq p \leq \infty$; s'il existe une constante positive C telle que pour tout $X_j^1, ..., x_n^j \in X_j$ et tout $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$*

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle u(x_i), y_i^* \rangle| \leq C(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \|x_i^j\|_{X_j}^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_y} \|y_i^*(y)\|_{l_{p^*}^n}. \tag{2.3}$$

La classe des opérateurs m-linéaires Cohen fortement p-sommant de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y , notée $D_p^m(X, Y)$, est un espace de Banach pour la norme

$$D_p^m(T) = \inf C \text{ vérifiant l'inégalité } (2.3)$$

pour $p = 1$, on a $D_p^m(X_1, ..., X_m; Y) = L(X_1, ..., X_m; Y)$

On commence par rappeler le théorème de Kwapień.

Théoréme 2.1 *[17]. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(1) *X est isomorphe à un espace de Hilbert.*
(2) *Pour tout espace de Banach Y ; $\prod_2(X; Y) \subseteq D_2(X; Y)$.*
(3) *Pour tout espace de Banach Y ;$D_2(X; Y) \subseteq \prod_2(X; Y)$.*

Preuve :
(1) $\Longrightarrow$ (2) Par le théorème de Cohen.
(1) $\Longrightarrow$ (2) Préliminaire : Soit $K = B_{X^*}$ muni de la topologie *-faible. Soit $(x_i^*)_{i\in\mathbb{N}} \subset C(K)^*$ telle que $\|(x_i^*)_{i\in\mathbb{N}}\|_{l_2^w}((C(K)^*)) \leq 1$: On lui associe l'application linéaire

$$u : c(K) \longrightarrow l_2$$

définie par $u(x) = (< x, x_i >)_{i\in\mathbb{N}}$: L'application u est bornée car

$$\|u\| = \sup_{\|x\|\leq 1} (\sum_{i\in\mathbb{N}} |\langle x, x_i^* \rangle|^2)^{\frac{1}{2}} = \|(x_i)\|_{l_2^w}((C(K)^*)) \leq 1$$

D'aprés le petit théorème de *Grothendieck*, elle est 2-sommant, ce qui implique que

$$u \circ i_X : X \longrightarrow C(K) \longrightarrow l_2$$

est 2-sommant, donc Cohen fortement 2-sommant, i.e, $i_X^* \circ u^*$ est 2-sommant.
Montrons à l'aide du Préliminaire que $i_X^* \in \prod_2(C(K)^*; X^*)$.
soit $(x_i^*) \in l_2^w((C(K)^*))$ et soit u associée à (x_i^*) comme ci-dessus.
Alors $x_i^* = u^*(e_i)$; donc

$$(\sum_{i\in\mathbb{N}} \|i_X^*(x_i^*)\|^2)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{i\in\mathbb{N}} \|i_X^* \circ u^*(e_i)\|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \pi_2(i_X^* \circ u^*) < \infty$$

et par conséquent i_X^* est 2-sommant. Il existe donc un espace de Hilbert H tel que

$$i_X^* = v_1 \circ v_2 : C(K)^* \underrightarrow{v_2} H \underrightarrow{v_1} X^*$$

Comme i_X^* est surjectif, v_1 est aussi surjective. D'aprés le théorème de l'application ouverte ,X^* est isomorphe à l'espace quotient $\dfrac{H}{\ker(v_1)}$, donc à un Hilbert.
(2) $\Longleftrightarrow$ (3) Facile à voire.
Le théorème suivant est une généralisation naturelle du théorème de Kwapień au cas multilinéaire.

Théoréme 2.2 *Fixons $m \geq 2$. Soient $x_j (1 \leq j \leq m)$ des espaces de Banach. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(1) *Les espaces $X_1, ..., X_m$ sont isomorphes aux espaces de Hilbert.*
(2) *Pour tous $1 \leq p, q \leq \infty$; et tout espace de Banach Y*

$$\boldsymbol{L}_d^p(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \boldsymbol{D}_q^m(X_1, ..., X_m; Y)$$

(3) *Pour tout espace de Banach Y ,$\boldsymbol{L}_d^2(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \boldsymbol{D}_2^m(X_1, ..., X_m; Y)$*

Preuve
(1) $\Longrightarrow$ (2) est immédiate par le Théorème de Bu multilinéaire.
(2) $\Longrightarrow$ (3) est évidente.
(3) $\Longrightarrow$ (1) Soit $(1 \leq j \leq m)$. Soit $u \in \prod_2(X_j, Y)$, on va montrer que $u \in D_2(X_j, Y)$ Pour $(1 \leq k \leq m)(k \neq j)$ on fixe $x_k \in B_{X_k}$ et $x_k^* \in B_{X_k}^*$ tels que $x_k^*(x^k) = 1$. Vérifions que l'opérateur multilinéaire

$$T = x_1^* \otimes ... \otimes u \otimes ... \otimes x_m^* : (X_1 \times ... \times X_m \to Y)$$

appartient à $\mathbf{L}_d^2(X_1, ..., X_m; Y)$. En effet,

$$(\sum_{i=1}^n \|T(g_i^1, ..., g_i^m)\|^{\frac{2}{m}})^{\frac{m}{2}} = (\sum_{i=1}^n \|x_1^*(g_i^1)\|^{\frac{2}{m}} ... \|u(g_i^j)\|^{\frac{2}{m}} ... \|x_m^*(g_i^m)\|^{\frac{2}{m}}) \leq (\sum_{i=1}^n \|x_1^*(g_i^1)\|^2)^{\frac{1}{2}} ... (\sum_{i=1}^n \|u(g_i^j)\|^2)^{\frac{1}{2}} ... (\sum_{i=1}^n \|x_m^*(g_i^m)\|$$

Alors, par hypothèse,$T \in \mathbf{D}_2^m(X_1, ..., X_m; Y)$: Sa linéarisation $\tilde{T}$ est donc Cohen fortement 2-sommant. Posons $V : X_j \longrightarrow X_1 \hat{\otimes}_\pi ... \hat{\otimes}_\pi X_m$, définie par

$$v = x^1 \otimes ... \otimes id_{X_j} \otimes ... \otimes x^m$$

Alors $u = \tilde{T} \circ v$ est Cohen fortement 2-sommant. Par le théorème de Kwapień, X_j est isomorphe à un Hilbert.

Théoréme 2.3 *Fixons $m \geq 2$. Soit Y un espace de Banach. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(1) *Y est isomorphe à un espace de Hilbert.*
(2) *Pour tous espaces de Banach $X_1, ..., X_m$ et tous $1 \leq p, q \leq \infty$,*

$$\boldsymbol{D}_p^m(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \boldsymbol{L}_s^q(X_1, ..., X_m; Y)$$

(3) *Pour tous espaces de Banach $X_1, ..., X_m$, $\boldsymbol{D}_2^m(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq \boldsymbol{L}_s^2(X_1, ..., X_m; Y)$*

Preuve : (1) $\Longrightarrow$ (2) Soit $Y = H$ un espace de Hilbert. Soit $T \in \mathbf{D}_p^m(X_1, ..., X_m; H); T^*$ est p^*-sommant par le (2.3). Le Théorème linéaire de Bu [24], entraine que

$$T^* \in \mathbf{D}_{q^*}(H, (X_1 \hat{\otimes}_\pi ... \hat{\otimes}_\pi X_m)^*)$$

Par le Théorème (2.3), $T \in \mathbf{L}_s^q(X_1, ..., X_m; Y)$. Ce résultat reste vrai si Y est isomorphe à un Hilbert.
(2) $\Longrightarrow$ (3) est évidente.
(1) $\Longrightarrow$ (3) Soit X un espace de Banach et $u : X \longrightarrow Y$ un opérateur Cohen 2-sommant.
Pour $2 \leq j \leq m$ on considéré $x^j \in B_{X_j}$ et $x_j^* \in B_{X_j^*}$ tels que $x_j^*(x^j) = 1$. Il est facile de voir que l'opérateur multilinéaire

$$T = u \otimes x_2^* \otimes ... \otimes x_m^* : \underbrace{X \times ... \times X} \longrightarrow Y$$

est Cohen fortement 2-sommant. Alors, par hypothèse, $T \in \mathbf{L}_s^2(X_1, ..., X_m; Y)$ .Donc, pour $g^1, ..., g^n \in X$

$$(\sum_{i=1}^n \|u(g^i)\|^2)\frac{1}{2} = (\sum_{i=1}^n \|T(g^i, x^2, ..., x^m)\|^2)\frac{1}{2}$$

$$\leq C \sup_{\Phi \in B_{\mathbf{L}(X,\ldots,X)}} (\sum_{i=1}^{n} |\Phi(g^i, x^2, ..., x^m)|^2)\frac{1}{2}$$

$$\leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} |x^*(g^i)|^2)\frac{1}{2}$$

puisque $x \longrightarrow \Phi(x, x^2, ..., x^m)$ est une forme linéaire sur X de norme ≤ 1 ; donc $u \in \prod_2(X, Y)$. Par la forme dual du théorème de Kwapień, Y est isomorphe à un Hilbert.
Notons que l'implication (3) $\Longrightarrow$ (1) de ce théorème est un cas particulier du Théorème 3.3 qui va suivre.

2.2 Caractérisation m-linéaire des sous espaces de L_p

Dans cette section, on donne une version multilinéaire du théorème de **caractérisation** linéaire de sous espaces fermés de L_p , voir [8] , qui est : Y est isomorphe à un sous espace fermé de $L_p(1 \leq p \leq \infty)$ si et seulement si, pour tout espace de Banach X

$$\mathbf{D}_{p^*}(X, Y) \subseteq \prod_p (X, Y) \tag{2.4}$$

Théoréme 2.4 *Fixons $m \geq 2$. Soit $(1 \leq p \leq \infty)$ et Y un espace de Banach. Les propriétés suivantes sont équivalentes. (a) L'espace Y est isomorphe à un sous espace fermé de L_p*
(b) Pour tous espaces de Banach $X_1, ..., X_m$

$$\boldsymbol{D}^m_{p^*}(X_1, ..., X_m; Y) \subseteq L^p_s(X_1, ..., X_m; Y)$$

Preuve :
Soit Y un sous espace fermé de L_p . Soit $T \in \mathbf{D}^m_{p^*}(X_1, ..., X_m; Y)$. Alors

$$\tilde{T} \in \mathbf{D}_{P^*}(X_1 \hat{\otimes}_\pi ... \hat{\otimes}_\pi X_m; Y)$$

et d'aprés l'inclusion (3.1), on a $\tilde{T} \in \prod_p (X_1 \hat{\otimes}_\pi ... \hat{\otimes}_\pi X_m; Y)$. Nous concluons par la Proposition1.29 et donc $T \in L^p_s(X_1, ..., X_m; Y)$.
Inversement, soit X un espace de Banach et $u \in \mathbf{D}_{P^*}(X, Y)$. On va montrer que $u \in \prod_p(X, Y)$. Pour $2 \leq j \leq m$ on considéré $x^j \in B_{X^j}$ et $x^*_j \in B_{X^*_j}$ tels que $x^*_j(x^j) = 1$.
L'opérateur multilinéaire

$$T = u \otimes x^*_2 \otimes ... \otimes x^*_m : \underbrace{X \times ... \times X} \longrightarrow Y$$

est Cohen fortement p^*-sommant. Donc, par hypothèse,T est dans $L^p_s(X_1, ..., X_m; Y)$. Par un argument analogue à celui de la preuve du Théorème (2.4),on peut facilement montre que u est p-sommant.

Remarque 2.1 *Ce Corollaire est une version multilinéaire du cas linéaire $(RL)(k)$.*

2.2.1 Caractérisation polynômiale d'un espace de Hilbert

2.2.1.1 Polynômes m-homogènes Cohen fortement p-sommants

Définition 2.4 *[23] Fixons $m \in \mathbb{N}$, soient $1 < p \leq \infty$ et $X; Y$ deux espaces de Banach, un polynôme m-homogène $P : X \longrightarrow Y$ est Cohen fortement p-sommant s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $x_1, ..., x_n \in X; y^*_1, ..., y^*_n \in Y^*$,*

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle P(x_i), y^*_i \rangle| \leq C (\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^{mp})^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_y} \|y^*_i(y)\|_{l^n_{p^*}}. \tag{2.5}$$

La classe de ces polynômes est notée par $P^p_{coh}(^mX;Y)$, elle est muni de la norme $d_p(P)$, i.e. la plus petite constante $C > 0$ vérifiant (2.5) *, pour $p = 1$ on a $P^1_{coh}(^mX;Y) = P(^mX;Y)$*

Définition 2.5 *[24] Étant donné $1 \leq p < \infty$; un polynôme $P \in P(^mX;Y)$ est p-dominé s'il existe un constant $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x_1, ..., x_n \in X$,*

$$(\sum_{i=1}^{n} |P(x_i)|^{\frac{p}{m}})^{\frac{m}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\|x^*(x_i)\|^p)^{\frac{m}{p}}. \tag{2.6}$$

On note par $P^p_d(^mX;Y)$ l'espace des polynômes p-dominés $P : X \longrightarrow Y$ et par $\delta_p(P)$ l'infimum de tout C vérifiant l'inégalité ci-d issus. pour $p < m, \delta_p(P)$ est une norme sur $P^p_d(^mX;Y)$ mais pour $p < m$,il est seulement un quasi-norme. ces polynômes sont parfois appelés polynômes $(p/m, p)$-sommant absolues .

Proposition 2.1 *Soient$1 < p \leq \infty; P : X \longrightarrow Y$; un polynôme m-homogène $\tilde{P}$ sa linéarisation.Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
a) Le polynôme $P \in P^p_{coh}(^mX;Y)$.
b) Le polynôme $\tilde{P} \in D(\hat{\otimes}^m_{\pi,s}X;Y)$.

Exemple 2.1 *Soit $m \in \mathbb{N}$et$u : X \to Y$ un opérateur linéaire fortement p-sommant et $\varphi \in X^*$ .Le polynôme*

$$P : X \to Y : P(x) = \varphi^{m-1}(x)u(x)$$

est Cohen fortement p-sommant. En effet, pour $x_1, ...x_n \in X$; $y^*_1, ..., y^*_n \in Y$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |\langle P(x_i), y^*_i \rangle| &= \sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle \varphi^{m-1}(x_i)u(x_i), y^*_i \right\rangle\right| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle u\left(\varphi^{m-1}(x_i)x_i\right), y^*_i \right\rangle\right| \\
&\leq d_p(u) \|\varphi\|^{m-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^{mp}\right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \left(\sum_{i=1}^{n} |y^*_i(y)|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}.
\end{aligned}$$

Ainsi,P est Cohen fortement p-sommant et $d_p(P) \leq d_p(u) \|\varphi\|^{m-1}$

Théoréme 2.5 *Soit $m \in \mathbb{N}$ un polynôme m-homogène $P \in P(^mX;Y)$ est Cohen fortement p-sommant $(1 < p \leq \infty)$ si et seulement si il existe une mésure de probabilité de Radon μ sur $B_{Y^{**}}$ et $C > 0$ telles que, pour tout $x \in X; y^* \in Y^*$*

$$|\langle P(x), y^* \rangle| \leq C(\|x\|^m)(\int_{B_{y^{**}}} \|y^*(y^{**})\|^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}. \tag{2.7}$$

En plus, dans ce cas $d_p(P) = \min C \;\; : C \; vérifiant$ (2.7) *.*

corollaire 2.1 *Soit $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$:Si $P \in P^{p_2}_{coh}(^mX;Y)$; alors $P \in P^{p_1}_{coh}(^mX;Y)$ et $d_{p_1}(P) \leq d_{p_2}(P)$. Étant donné $m \in \mathbb{N}$ et X un espace de Banach . Dans cette section,on montre que : X est isomorphe à un espace de Hilbert, si et seulement si pour tout espace de Banach Y et tout polynôme m-homogène 2-dominé de X dans Y , u est cohen fortement 2-sommant .*

Théoréme 2.6 *Soient $m \in \mathbb{N}$,1<p,q<∞et X,Y des espaces de Banach tels que $\mathcal{P}^p_q(^mX;Y) \subseteq \mathcal{P}^p_{Coh}(^mX;Y)$.Alors $\Pi_p(X;Y)\mathcal{D}_q(X;Y)$. soit $u \in \Pi_p(X;Y)$,on montrera que $u \in \mathcal{D}_q(X;Y)$. Fixons $x_0 \in B_X$ et $x^*_0 \in B_{X^*}$ tel que $x^*_0(x_0) = 1$. On définit l'opérateur $\pi_j : \hat{\otimes}^{j+1}_{\pi,s}X \to \hat{\otimes}^{j}_{\pi,s}X$,$(1 \leq j \leq m-1)$par*

$$\pi_j\left(\sum_{i=1}^{N} x_i \otimes^{j+1} .... \otimes x_i\right) = \sum_{i=1}^{N} x_0^*(x_i) x_i \otimes^{(j)} ... \otimes x_i.$$

Soit $\delta_m : X \to \hat{\otimes}_{\pi,s}^m X$ le polynôme canonique. On montre que le polynôme $P = u \circ \pi_1 \circ .... \circ \pi_{m-1} \circ \delta_m : X \to Y$ est p-dominé. On raisonne par récurrence sur m. Pour $m = 1$,le cas est trivial.On suppose maintenant que

$$u \circ \pi_1 \circ .... \circ \pi_{m-2} \circ \delta_{m-1} : X \to Y$$

est p-dominé.Soit $x_i \in X (1 \leq i \leq n \leq)$ Alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \|P(x_i)\|^{\frac{p}{m}} &= \sum_{i=1}^{n} \|u \circ \pi_1 \circ .... \circ \pi_{m-1} \circ \delta_m(x_i)\|^{\frac{p}{m}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\| u \circ \pi_1 \circ .... \circ \pi_{m-1}(x_i \otimes^{(m)} ... \otimes x_i)\right\|^{\frac{p}{m}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} |x_0^*(x_i)|^{\frac{p}{m}} \left\| u \circ \pi_1 \circ .... \circ \pi_{m-2}(x_i \otimes^{(m-1)} ... \otimes x_i)\right\|^{\frac{p}{m}} \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder

$$\sum_{i=1}^{n} \|P(x_i)\|^{\frac{p}{m}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_0^*(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{m}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|u \circ \pi_1 \circ .... \circ \pi_{m-2} \circ \delta_{m-1}(x_i)\|^{\frac{p}{m-1}}\right)^{\frac{m-1}{m}}$$

On obtient par la déduction supposée et le fait que $x_0^* \in B_{X^*}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \|P(x_i)\|^{\frac{p}{m}} &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_0^*(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{m}} \left(C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|^p\right)^{\frac{m-1}{p}}\right)^{\frac{p}{m}} \\ &\leq C^{\frac{p}{m}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_0^*(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{m}} \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|^p\right)^{\frac{m-1}{p}} \\ &\leq C^{\frac{p}{m}} \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|^p . \end{aligned}$$

Par conséquent, P est p-dominé d'où ,il est Cohen fortement q-sommant. Par la décomposition $P = \tilde{P} \circ \delta_m$ on a, $\tilde{P} = u \circ \pi_1 \circ ... \circ \pi_{m-1}$ lequel est Cohen fortement q-sommant par la proposition 4.10. Maintenant comme, il a été montré dans la preuve du ([7], Théorème 3), ils existent des opérateurs k_j : $\hat{\otimes}_{\pi,s}^j X \to \hat{\otimes}_{\pi,s}^{j+1} X$,$(1 \leq j \leq m-1)$ définis en fonction de x_0^* *et* x_0 tel que $\pi_j \circ k_j$ est l'opérateur identité sur $\hat{\otimes}_{\pi,s}^j X$.on a

$$u \circ \pi_1 \circ .... \circ \pi_{m-1} \circ k_{j-1} \circ .... \circ k_1 : X \to Y$$

lequel est Cohen fortement q-sommant,selon la propriété idéale.

Théoréme 2.7 *Soit X un espace de Banach.Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *L'espace X est isomorphe à un espace de Hilbert .*
2. *Pour tous $m \in \mathbb{N}, 1<p, q<1$,et chaque espace de Banach Y*

$$\mathcal{P}_q^p(^m X; Y) \subseteq \mathcal{P}_{Coh}^p(^m X; Y)$$

3. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et chaque espace de Banach Y*

$$\mathcal{P}_q^2(^m X; Y) \subseteq \mathcal{P}_{Coh}^2(^m X; Y)$$

Chapitre 3

Factorisation des opérateurs multilinéaires faiblement compact

L'objet de ce chapitre est d'Ètudier les opérateurs faiblement compact. Commençons par les opérateurs linéaires faiblement compact. Ensuite, on prendra la catégorie des opérateurs multilinéaires en donnant les propriétés essentiels de ces opérateurs puis on discutera la notion de faiblement compact pour cette catégorie d'opérateurs. On termine ce chapitre par étudier les résultats de **factorisation** les plus célèbres des opérateurs linéaires et multilinéaires. Pour le cas multilinéaires, deux types de **factorisation** sont exposés. Les résultats de ce chapitre sont tous trouvés dans les travaux de [8] et [7] :

3.1 Opérateur linéaire faiblement compact

Le cas linéaire considéré comme une source d'inspération pour les différents cas notamment le cas multilinéaire. On donne la définition des opérateurs linéaires faiblement compact puis quelques résultats de **factorisation**. Commençons la définition suivante :

Définition 3.1 ***(Opérateur faiblement continu)*** *On dit qu'un opérateur linéaire entre espaces de Banach $u : X \longrightarrow Y$ est faiblement continu si pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X , on a*

$$x_n \xrightarrow{w} x \ \ implique \ \ T(x_n) \xrightarrow{w} T(x)$$

Proposition 3.1 *Nous avons :*

(1) *Une forme linéaire est continue si est seulement si elle est faiblement continue.*

(2) *Tout opérateur linéaire continu est faiblement continu, la réciproque n'est pas vraie.*

Définition 3.2 ***(Opérateur faiblement compact)***
Soient X et Y deux espaces de Banach. Un opérateur $u \in B(X;Y)$ est dit faiblement compact si le sous ensemble $u(B_X)$ est relativement faiblement compact (i.e.,$\overline{u(B_X)}$ est faiblement compact) dans Y . La collection de tous les opérateurs linéaires faiblement compacts de X dans Y sera notée $W(X,Y)$, qui est un Banach pour la norme des opérateurs. Si $X = Y$ on écrit simplement $W(X)$.

Proposition 3.2 *Soit $u : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire faiblement compact entre espaces de Banach. Alors u est continu.*

preuve :
Comme u est faiblement compact, alors $(\overline{u(B_X)}) = \overline{u(x) : x \in B_X}$ est faiblement compact. D'autre part,

$$\|u\| = \sup_{x \in B_X} \|u(x)\| \leq \sup_{y \in \overline{u(B_X)}} \|y\|$$

comme l'application $y \longrightarrow y$ est faiblement continu sur Y , alors elle atteint son maximum sur $\overline{u(B_X)}$ (faiblement compact). Donc u est borné .

Proposition 3.3 ***(Propriété d'idéal)***
Soient X, Y deux espaces de Banach et $u \in W(X, Y)$ Soient G, Z deux autres espaces de Banach et $v \in B(Y, G); w \in B(z, X)$. Alors

$$v \circ u \circ w \quad est faiblement compact.$$

Théoréme 3.1 *1 La famille des opérateurs linéaires faiblement compact forme un idéal des opérateurs linéaires, i.e., pour tout X et Y des espaces de Banach on a :*
(1) *L'ensemble $W(X, Y)$ est un sous espace de $B(X, Y)$ qui contient les opérateurs linéaires de rang finis.*
(2) *La classe $W(X, Y)$ vérifie la propriété d'idéal.*
De plus, si $\|.\|_W : W \longrightarrow \mathbb{R}^+$ satisfait :
(a) *$(W(X, Y), \|.\|_W)$ est un espace normé (Banach)*
(b) $\|A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; A(x) = x\|_W = 1$
(c) *Si $u \in W(X, Y); v \in B(E, X); w \in B(Y, F)$*

$$\|v \circ u \circ w\|_W \leq \|v\|\|u\|_M\|w\|$$

Alors $(W, \|.\|_W)$ s'appelle idéal normé (de Banach) des opérateurs linéaires.
On peut caractériser les opérateurs linéaires faiblement compacts dans le résultat suivant.

Proposition 3.4 *(Grantmacher **cas linéaire**)*
Soit $u : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire borné. Les propriétés suivantes sont équivalentes.
(a) *L'opérateur u est faiblement compact .*
(b) *L'opérateur $u^* : Y^* \longrightarrow X^*$ est faiblement compact.*
(c) *Pour toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X, la suite $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite faiblement convergente dans Y .*
(d) *L'opérateur u^{**} est de valeurs dans Y , i.e., $u^{**}(X^{**}) \subseteq Y$*

Proposition 3.5 *L'espace $W(X, Y)$ est injective et fermé dans $B(X, Y)$, i.e.,*
(1) *Injectif : pour tout $u \in B(X, Y)$ et $i \in B(Y, Y_0)$ un isométrie, alors,*

$$i \circ u \in W(X, Y_0) \Longleftrightarrow u \in W(X, Y)$$

(2) *Fermé : pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $W(X, Y)$ convergente en norme vers u, alors $u \in W(X, Y)$*

3.2 Opérateur multilinéaire faiblement compact

Nous sommes maintenant sur le point de donner la définition d'un opérateur multilinéaire faiblement compact.

Définition 3.3 *Soient $X_1, ..., X_m; Y$ des espaces de Banach et $T \in L(X_1, ..., X_m; Y)$. L'opérateur T est faiblement compact s'il envoie tout ensemble borné sur un ensemble relativement faiblement compact. Autrement dit si $T(B_{X_1} \times ... \times B_{X_m})$ est relativement faiblement compact dans Y .*

Notation : On notera $W(X_1, ..., X_m; Y)$ l'espace de tous les opérateurs multilinéaires faiblement compacts, c'est un espace de Banach avec la norme des opérateurs.

Lemme 3.1 *Soit $T \in L(X_1, ..., X_m; Y)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*
(1) *L'opérateur T est faiblement compact.*
(2) *Pour toute suite bornée $(x_{ij}^j) \in X_j$,où $1 \leq j \leq m$; la suite $(T((x_{i1}^1)_{i1}, ..., (x_{im}^m)_{im}))$ admet une sous suite faiblement convergente dans Y .*

Proposition 3.6 ***(Propriété idéal)***
Soit $T \in W(X_1, ..., X_m; Y)$. Soient $u \in \boldsymbol{B}(Y, Z)$ et $u_j \in \boldsymbol{B}(G_j, X_j)$ $(1 \leq j \leq m)$, alors
(1) *L'opérateur $u \circ T \in W(X_1, ..., X_m; Z)$*
(2) *L'opérateur $T(v_1, ..., v_m)$ est un élément de $G(G_1, ..., G_m; Z)$*

corollaire 3.1 *L'espace des opérateurs multilinéaires faiblement compact est un idéal de Banach des opérateurs multilinéaires.*

Théoréme 3.2 *(Grantmacher **m-linéaire**) Soit $T \in L(X_1, ..., X_m; Y)$ et*

$$T^* \in B(Y^*; L(X_1, ..., X_m))$$

son opérateur adjoint. Alors, $(a) \Longleftrightarrow (b)$ où
(a) *T est faiblement compact.*
(b) *T^* est faiblement compact.*

3.3 Résultats de factorisation (cas linéaire)

Théoréme 3.3 *Soient X, Y deux espaces de Banach. Soit $u : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire borné. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*
(a) *u est faiblement compact.*
(b) *u se **factorise** autour un espace de Banach réflexif, i.e., $\exists G$ un espace de Banach réflexif et deux opérateurs linéaires bornés $v; w$ tels que le diagramme suivant commute*

$$X \underrightarrow{u} Y$$

$$\searrow V \uparrow W$$

$$G$$

Soit X un espace de Banach réflexif. Soient Y un espace de Banach et$u : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire borné, alors u est faiblement compact. Dans le Corollaire précédent, si on suppose l'espace arrivé Y réflexif, on obtient un résultat pareil.

Proposition 3.7 *Soit X un espace de Banach. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*
(a) *X est réflexif.*
(b) *L'identitÈ $id_X : X \longrightarrow X$est faiblement compact.*

preuve :
$(a) \Longrightarrow (b)$: Clair d'aprés le Corollaire
$(b) \Longrightarrow (a)$: Supposons que id_X est faiblement compact. D'aprés le Théorème (3.3) il existe un espace réflexif G et deux opérateurs linéaires bornés v, wtels que

$$id_X = w \circ v.$$

le Corollaire (3.3) assure que v et w sont faiblement compact. Alors, $V(B_X)$ est relativement faiblement compact car V est faiblement compact. Comme W est aussi faiblement compact, $W \circ V(B_X)$ est relativement faiblement compact. Nous avons donc

$$id_X(B_X) = w \circ v(B_X) = B_X$$

c'est à dire B_X est relativement compact donc $\overline{B_X}$ est faiblement compact. Par conséquent (**Théorème de Kakutani**) X est réflexif Soit X un espace de Banach. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
(a) X est réflexif.
(b) Pour tout espace de Banach Y et tout opérateur linéaire borné $u : X \longrightarrow Y, u$ est faiblement compact.
preuve :
$(a) \Longrightarrow (b)$: Immédiate d'aprés le Corollaire (3.3)
$(b) \Longrightarrow (a)$: On prend $Y = X$ et $u = id_X$, on trouve ce qu'on veut.
Notons ici qu'on peut remplacer dans l'énoncé du Corollaire précédent l'espace X par Y, on trouve même résultat.

3.4 Théorèmes et résultats de factorisation (cas multilinéaire)

Le Lemme suivant relie entre un opérateur multilinéaire et son opérateur linéarisé pour le concept de faiblement compact.

Lemme 3.2 *Soit $T \in L(X_1, ..., X_m; Y)$ et $\tilde{T} \in B(X_1\hat{\otimes}_\pi...\hat{\otimes}_\pi X_m; Y)$ sa linéarisation. Alors, les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*
(a) L'opérateur T est dans $W(X_1, ..., X_m; Y)$.
(b) L'opérateur $\tilde{T} \in W(X_1\hat{\otimes}_\pi...\hat{\otimes}_\pi X_m; Y)$

preuve :
$(a) \Longrightarrow (b)$: Soit $T \in W(X_1, ..., X_m; Y)$. On peut voir facilement que

$$(\tilde{T})^* = T^*$$

alors , $(\tilde{T})^*$ est faiblement compact et T^* est faiblement compact.
$(b) \Longrightarrow (a)$: Même argument.

3.4.1 Factorisation de type $W \circ L$

Le résultat qui suit donne le premier type de **factorisation** dans le cas multilinéaire, sa preuve est basé sur lemme précédent. L'opérateur multilinéaire T appartient à la classe $W \circ L(X_1, ..., X_m; Y)$ s'il existe un espace de Banach G et $u \in W(G, Y)$ et opérateur multilinéaire $A \in L(X_1, ..., X_m; G)$ tels que

$$T = u \circ A.$$

En d'autre termes, on va montrer que la classe des opérateurs multilinéaires faiblement compact coïncide avec la classe $W \circ L$.

Théoréme 3.4 *Soit $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ un opérateur multilinéaire. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*
(a) *T est faiblement compact.*
(2) *T appartient à la classe $W \circ L$.*
T se factorise par un espace réflexif, i.e. il existe un espace de Banach G réflexif et $u \in B(G, Y)$ et opérateur multilinéaire $A \in L(X_1, ..., X_m; G)$ tels que $T = u \circ A$ En d'autres termes

$$W(X_1, ..., X_m; Y) = W \circ L(X_1, ..., X_m; Y)$$

preuve :
$(a) \Longrightarrow (b)$ Soit $T \in W(X_1, ..., X_m; Y)$: Alors nous avons

$$T = \tilde{T} \circ i_m$$

d'aprés le Lemme précédent $\tilde{T}$ est faiblement compact, c'est à dire T appartient à la classe $W \circ L$ $(b) \Longrightarrow (c)$: Supposons que T est dans la classe $W \circ L$, alors T s'écrit sous la forme $T = u \circ A$ avec u est linéaire faiblement compact. D'autre part, u se factorise par un espace réflexif, soit G. Alors nous avons

$$T = u \circ A = V \circ W \circ A$$

ce qu'il conforme que T est vérifie (c).
$(c) \Longrightarrow (a)$: Supposons que T vérifie la propriété (c) ; alors T se **factorise** par un espace réflexif G

$$T = u \circ A$$

nous avons dans ce cas

$$\tilde{T} = u \circ \tilde{A}$$

c'est à dire $\tilde{T}$ se **factorise** par un espace réflexif, par conséquent $\tilde{T}$ est faiblement compact, donc T est faiblement compact par le Lemme précèdent.

3.4.2 Factorisation de type *L(W)*

Soit Tun opérateur multilinéaire. Alors, T appartient à la classe $L(W)(X_1, ..., X_m; Y)$ s'ils existent des espaces de Banach G_j et $u_j \in W(X_j, G_j)(1 \leq j \leq m)$ et un opérateur multilinéaire $A \in L(G_1, ..., G_m; Y)$ tels que

$$T = A(u_1, ..., u_m).$$

Proposition 3.8 *Soit W l'idéal linéaire des opérateurs faiblement compact. Alors :*
(a) *L'espace $L(W)$ est un multi-idéal*
(b) *Si W est un idéal de Banach, alors $((L(W)); \|.\|_{(L(W))})$ est un multi-idéal de Banach.*

Théoréme 3.5 *Soient $X_1, ..., X_m$ des espaces de Banach réflexifs et Y un espace de Banach. Pour tout opérateur multilinéaire borné $T : X_1 \times ... \times X_m$ ils existent des espaces de Banach G_j et $u_j \in W(X_j, G_j)(1 \leq j \leq m)$ et un opérateur multilinéaire $A \in L(G_1, ..., G_m; Y)$ tels que*

$$T = A(u_1, ..., u_m).$$

preuve :
Pour tout $1 \leq j \leq m$; l'espace X_j est réflexif, alors l'opérateur T_j est faiblement compact (définie sur un réflexif). Par la Proposition, on trouve ce qu'on veut.

Proposition 3.9 *Soit $T : X_1 \times ... \times X_m$ un opérateur multilinéaire borné. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(1) *L'opérateur T est dans $L(W)(X_1, ..., X_m; Y)$*
(2) *Les opérateurs linéaires $T_j : X_j \longrightarrow L(X_1, ..^{[j]}., X_m; Y)$ définie par*

$$x_j \longmapsto T_j(x_j) : X_1, ..^{[j]}., X_m \longrightarrow Y$$

$$(X_1, ..^{[j]}., X_m) \longmapsto T_j(x_j)(X_1, ..^{[j]}., X_m) = T(X_1, ..., X_m)$$

sont faiblement compact .

preuve :
(1) $\Longrightarrow$ (2) : Soit $T \in L(W)(X_1, ..^{[j]}., X_m; Y)$ Alors, T s'écrit sous la forme

$$T = A(u_1, ..., u_m).$$

où $u_j \in W(X_j, Y_j)$ et $A \in L(G_1, ..., G_m; Y)$. On définit l'opérateur

$$\varphi : G_j \longrightarrow L(X_1, ..^{[j]}., X_m; Y)$$

$$\begin{aligned}\varphi(g^j)(x_1, ..x^{[j]}., x_m) &= A(u_1(x^1), ..., u_j(x^j), ..., u_m(x^m))\\ &= T(x_1, ..., x_m)\\ &= T_j(x_j)(x_1, ..^{[j]}., x_m)\end{aligned}$$

Comme $u_j \in W(X_j, G_j)$ par la propriété d'idéal, on a

$$T_j \in W(X_j, L(X_1, ..^{[j]}., X_m; Y))$$

(2) $\Longrightarrow$ (1) : Voir l'article [15].

Théoréme 3.6 *Soit Y un espace de Banach. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(a) *Les espaces $X_1, ..., X_m$ sont réflexifs.*
(b) *Pour tout espace de Banach Y on a*

$$L(X_1, ..., X_m; Y) = L(W)(X_1, ..., X_m; Y).$$

preuve :
(a) $\Longrightarrow$ (b) Immédiate d'aprés le Théorème (3.5) (b) $\Longrightarrow$ (a)Supposons que T est dans $L(W)(X_1, ..., X_m; Y)$. D'aprés la Proposition
on a pour tout $1 \leq j \leq m$

$$T_j \in W(X_j, L(X_1, ..^{[j]}., X_m; Y))$$

Soient maintenant $1 \leq j \leq m$ et $id_{X_j} : X_j \longrightarrow X_j$ l'identité de X_j . On va montrer que id_{X_j} est faiblement compact. Pour $1 \leq k \leq m (k \neq j)$ on fixe $x^k \in B_{X_k}$ et $x_k^* \in B_{X_k^*}$ tels que $x_k^*(x^k) = 1$. Posons

$$T = x_1^* \otimes ... \otimes id_{X_j} \otimes ... \otimes x_j^*$$

Soit l'opérateur multilinéaire

$$v = x^1 \otimes ..^{[j]}. \otimes x^m L(X_1, ..^{[j]}., X_m; Y)) \longrightarrow X_j,$$

définit par

$$v(\varphi) = x^1 \otimes ..^{[j]}. \otimes x^m(\varphi) = \varphi(x^1, ..., x^m)$$

Il est facile de voir que

$$id_{X_j} = v \circ T_j$$

En effet, pour tout x_j de X_j on a

$$id_{X_j}(x^j) = v \circ T_j(x^j) = v(T_j(x^j))$$

$$= T_j(x^j)(x^1, ..^{[j]}., x^m) = T(x^1, ..., x^m)$$

$$T = x_1^*(x^1) \otimes ... \otimes id_{X_j}(x^j) \otimes ... \otimes x_m^*(^m)$$

$$= x^j$$

Par la propriété d'idéal, id_{X_j} est réflexif, ce qui termine la démonstration.

Chapitre 4

Factorisation des opérateurs multilinéaires sommants

Ce chapitre est consacré à étudier les différentes classes d'opérateurs multilinéaires sommants. Notre objective est d'examiner chaque classe pour savoir si elle vérifie le théorème de **factorisation**. Dans le cas linéaire, la définition d'un opérateur linéaire p-sommant a été introduite par *Grothendieck* [2] pour p = 1 ; et généralisée pour tout p par *Pietsch* en 1967 [3]. Ce dernier a démontré que cette classe d'opérateurs possédé une factorisation intéressante connue par son nom. Dans le cas multilinéaire, toutes les résultats de factorisation sont basés sur ce théorème de **factorisation** de *Pietsch*.

4.1 Généralité sur les opérateurs linéaires sommants

Soit X un espace de Banach. Soit $1 \leq p \leq \infty$. On note $l_p^n(X)$ l'espace de Banach des suites $(x_i)1 \leq i \leq n$ dans X muni de la norme

$$\|(x_i)1 \leq i \leq n\|_{l_p^n(X)} = (\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}}$$

et $l_p^{n\omega}(X)$ l'espace de Banach des suites $(x_i)1 \leq i \leq n$ dans X muni de la norme

$$\|(x_i)1 \leq i \leq n\|_{l_p^{n\omega}(X)} = \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, x^* \rangle|_p)^{\frac{1}{p}}$$

où X^* est le dual (topologique) de X. La boule unité fermée de X est notée B_X (si p est infini on prend le sup).

Définition 4.1 ***(Cas linéaire)*** *Soient X, Y deux espaces de Banach et $u \in B\ (X, Y)$. On dira que u est p-sommant pour $p \in [1, \infty]$, s'il existe une constante $C > 0$; telle que pour tout $x_1, ..., x_n \in X$*

$$(\sum_{i=1}^{n} \|u(x_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{i=1}^{n} |\langle x^*(x_i) \rangle|_p)^{\frac{1}{p}} \tag{4.1}$$

On note $\prod_p(X; Y)$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires p-sommants de X dans Y muni de la norme

$$\pi_p = \inf C \ \textit{vérifiant l'inégalité}\ (4.1)$$

Remarque 4.1 *L'opérateur u est p-sommant s'il transforme toute suite faiblement p-sommable en une suite fortement p-sommable, si $p = \infty$, c'est simplement la continuité.*

Exemple 4.1 *Soient K un espace compact, μ une mesure positive sur K et $1 \leq p \leq \infty$.*
(1) *L'opérateur de multiplication défini par*

$$u_\varphi : C(K) \longrightarrow L_p(\mu)$$

$$f \longrightarrow f.\varphi$$

avec $\varphi \in L_p(\mu)$, est p-sommant et $\pi_p(\mu) = \|\varphi\|_p$ (2) *L'injection canonique*

$$J_p : C(K) \longrightarrow L_p(\mu)$$

$$f \longrightarrow f$$

est p-sommant et $\pi_p(J_p) = \mu(K)\frac{1}{p}$

Théoréme 4.1 ***(Factorisation de** Pietsch [9])* *Soient $p \in [1; 1[$ et $u : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire p-sommant. Alors, il existe une probabilité de radon λ sur $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$, telle que*

$$\forall x \in X : \|u(x)\| \leq \pi_p(u)(\int_{B_{X^*}} |x^*(x)|^p d\lambda(x^*)\frac{1}{p}) \tag{4.2}$$

Inversement, s'il existe une probabilité de radon λ sur $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ et $C \gneqq 0$ telle que cette formule est vérifiée, alors u est p-sommant et $\pi_p(u) \leq C$.

Remarque 4.2 ***(Cas particulier)***
*si $p = 2$, l'opérateur $\tilde{u}$ peut s'étendre à $L_2(\mu)$ tout entier, c'est à dire u se **factorise** par un espace de Hilbert. En effet, soit P la projection de $L_2(\mu)$ sur S, donc*

$$\bar{u} := \tilde{u} \circ Pet u = \bar{u} J_2 i_X : X \xrightarrow{J_2 i_X} L_2(\mu) \underset{\rightarrow}{\bar{u}} Y,$$

avec la remarque que $J_2 i_X$ est 2-sommant.

4.2 Opérateurs multilinéaires sommants, généralisation et factorisation

La généralisation des opérateurs linéaires p-sommants au cas multilinéaire a été initiée par *Pietsch* en 1983. Il a introduit deux définitions : opérateurs multilinéaires absolument p-sommants et p-dominés. Les autres classes sont introduit par d'autre chercheurs

4.2.1 Opérateurs multilinéaires absolument p-sommants

Définition 4.2 *([4])*
Un opérateur m-linéaire $T : X_1, ..., X_m \longrightarrow Y$ est absolument p-sommant $(1 \leq p \leq \infty)$ s'il existe $C > 0$ telle que pour tous $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j (j = 1, .., m)$,

$$(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i^1, ..., x_i^m)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{j=1}^{m} \|(x_i^j)_{i=1}^n\|_{l_p^n} \omega(X_j) \tag{4.3}$$

On note $L_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$ l'espace de Banach des opérateurs m-linéaires absolument p-sommants muni de la norme .

Remarque 4.3 *Les opérateurs absolument p-sommants ne vérifient pas le théorème de **factorisation.***

4.2.2 Opérateurs multilinéaires absolument $(p, p_1, ..., p_m)$-sommants

Définition 4.3 *Soient $p_1, ..., p_m \in [1, \infty]$ avec $\frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m}$. Un opérateur m-linéaire $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ est absolument $(p, p_1, ..., p_m)$ -sommant s'il existe une constante positiveC telle que pour tous $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j, (j = 1, ..., m)$,*

$$(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i^1, ..., x_i^m)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{j=1}^{m} \|(x_i^j)_{i=1}^n\|_{l_{pj}^{n,\omega}}(X_j) \tag{4.4}$$

La classe des opérateurs m-linéaires absolument $(p, p_1, ..., p_m)$-sommants de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y , notée $L^m_{(p,p_1,...,p_m)}(X_1, ..., X_m; Y)$, est un espace de Banach pour la norme

$$\|T\|_{(p,p_1,...,p_m)} = \inf c \text{ vérifiant l'inégalité } (4.4)$$

Théoréme 4.2 ***(Théorème de factorisation)*** *Soient $p_1, ..., p_m \in [1, \infty]$ avec $\frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m}$. Un opérateur m-linéaire $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ est absolument $(p, p_1, ..., p_m)$-sommant s'ils existent des espaces de Banach G_j et $u_j \in \prod_{p_j}(X_j, G_j)(1 \leq j \leq m)$ et un opérateur multilinéaire $A \in L(G_1, ..., G_m, Y)$ tels que*

$$T = A(u_1, ..., u_m)$$

4.2.3 Opérateurs multilinéaires p-dominés

Définition 4.4 *[4] Soit $T \in \boldsymbol{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ un opérateur m-linéaire borné. On dira que T est p-dominé $(1 \leq p \leq \infty)$ s'il existe une constante positive C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(x_i^j)_{(1 \leq i \leq n)} \subset X_j (1 \leq j \leq m)$, on a*

$$(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i^1, ..., x_i^m)\|^{\frac{p}{m}})^{\frac{m}{p}} \leq C \prod_{j=1}^{m} \|(x_i^j)_{(1 \leq i \leq n)}\|_{l_p^{n,\omega}}(X_j) \tag{4.5}$$

On note $L_p^d(X_1, ..., X_m; Y)$ l'espace de Banach des opérateurs m-linéaires p-dominés de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y . C'est un quasi-Banach pour la quasi-norme $\sigma_p(T)$, définie par

$$\sigma_p(T) = \inf C \text{ vérifiant l'inégalité } (4.5)$$

Remarque 4.4 (1) *Si T est p-dominé, alors il existe des opérateurs linéaires p-sommants $u_j (1 \leq j \leq m)$ et A un opérateur multilinéaire tels que $T = A \circ (u_1, ..., u_m)$.*
(2) *Si $u_j \in \prod_p(X_j, G_j)$,$(1 \leq j \leq m)$, l'opérateur multilinéaire $T \circ (u_1, ..., u_m)$ p-dominé .*

4.2.4 Opérateurs multilinéaires multi p-sommants

Une autre définition a été introduite indépendamment par Mario C . Matos [14] (sous la terminologie : opérateur multilinéaire full sommant) et par Bombal, PerËz-Garcia and Villanueva [23] , suite à la question de *Pietsch* sur les cas des opérateurs absolument $(p, p_1, ..., p_m)$-sommants qui coïncident avec les opérateurs multilinéaires de Hilbert*Schmidt* (qui seront introduits plus loin).

Définition 4.5 *([14]) Un opérateur m-linéaire $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ est dit multi p-sommant $(1 \leq p \leq \infty)$, s'il existe $C \geq 0$ telle que pour tous $x_{i_1}^j, ..., x_{i_n}^j \in X_j; j(j = 1, ..., m)$,*

$$(\sum_{i_1,...i_m=1}^{n_1,...,n_m} \|T(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m)\|^{\frac{p}{m}})^{\frac{m}{p}} \leq C \prod_{j=1}^{m} \|(x_{i_j}^j)_{(i_j=1)}^{n_j}\|_{l_p^{n,\omega}}(X_j) \tag{4.6}$$

On note $\prod_p^m(X_1,...,X_m;Y)$ l'espace de Banach des opérateurs m-linéaires multi p-sommants, muni de la norme

$$\pi_p^m = \inf C \text{ vérifiant l'inégalité } (4.6)$$

Remarque 4.5 *Cette classe d'opérateurs ne vérifie pas l'analogue du théorème de* ***factorisation*** *de Pietsch.*

4.2.5 Opérateurs multilinéaires fortement p-sommants

Définition 4.6 *[18] Soit $(1 \leq p \leq \infty)$ et $T \in L(X_1,...,X_m;Y)$: L'opérateur T est fortement p-sommant s'il existe une constante positive C telle que pour tous $x_{i_1}^j,...,x_{i_n}^j \in X_j; j(j=1,...,m)$,*

$$(\sum_{i=1}^n \|T(x_i^1,...,x_i^m)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\Phi \in B_{L(X_1,...,X_m)}} \sum_{i=1}^n \|\Phi(x_i^1,...,x_i^m)\|^p)^{\frac{1}{p}} \tag{4.7}$$

La classe des opérateurs m-linéaires fortement p-sommants de $X_1 \times ... \times X_m$ dans$Y$, notée $L_{ss}^p(X_1,...,X_m;Y)$; est un espace de Banach pour la norme $\|T\|_{L_{ss}^p}$ qui est la plus petite constante C

Théoréme 4.3 *[18] Soit$T \in L(X_1,...,X_m;Y)$. Les affirmations suivantes sont équivalents .*
(1) L'opérateur T est fortement p-sommant.
(2) Il existe une mesure de probabilité de Radon μ sur $B_{L(X_1,...,X_m)}$ (muni de sa topologie*-faible) et une constante positive $C \geq 0$ telle que pour tout $(x^1,...,x^m)$ dans $X1 \times ... \times Xm$, on a

$$\|T(x^1,...,x^m)\| \leq C(\int_{B_{L(X_1,...,X_m)}} |\Phi(x^1,...,x^m)|^p d\mu(\Phi))^{\frac{1}{p}} \tag{4.8}$$

On note que l'espace $L_{ss}^p(X_1,...,X_m;Y)$ forme un multi-idéal de Banach. On a aussi

$$\prod_p \circ L(X_1,...,X_m;Y) \subseteq L_{ss}^p(X_1,...,X_m;Y)$$

Proposition 4.1 *Soit$T \in L(X_1,...,X_m;Y)$. Alors,*
(1) Si $\tilde{T}$ est p-sommant, alors T est fortement p-sommant.
(2) Théorème de Grothendieck multilinéaire : si les X_j sont des espaces L_1 et Y est un espace de Hilbert, on a pour tout $(1 \leq p \leq \infty)$

$$L(X_1,...,X_m;Y) = L_{ss}^p(X_1,...,X_m;Y)$$

4.2.6 Opérateurs multilinéaires de Hilbert-*Schmidt*

La définition des opérateurs de Hilbert *Schmidt* a été introduite par *Dwyer*[11] ; et étudiée par plusieurs auteurs notamment *Pietsch* dans [4]. L'idée a Été inspirée de la norme de Hilbert *Schmidt* d'un opérateur linéaire$T$ sur un Hilbert H, qui est la somme des $\|T(e_j)\|^2$ oú (e_j) est une base orthonormale de H.

Définition 4.7 *Soient $H_1,...,H_m;H$ des espaces de Hilbert. L'opérateur multilinéaire $T : H_1 \times ... \times H_m \longrightarrow H$ est de Hilbert-Schmidt si*

$$\sum_{e_{i_1} \in I_1,...,e_{i_m} \in I_m} \|T(e_{i_1},...,e_{i_m})\|^2 < \infty$$

oú$(e_{i_j})_{i_j \in I_j}$ est une base orthonormale de l'espace H_j $(1 \leq j \leq m)$. Noter que cette quantité ne dépend pas du choix de la base orthonormale. La norme de Hilbert-Schmidt de T est

$$\|T\|_{HS} = (\sum_{e_{i_1} \in I_1,...,e_{i_m} \in I_m} \|T(e_{i_1},...,e_{i_m})\|^2)\frac{1}{2}$$

Comme dans le cas linéaire, l'espace des opérateurs multilinéaires de Hilbert-Schmidt

$$L_{HS}(H_1, ..., H_m; H)$$

est un espace de Hilbert dont la norme $\|.\|_{HS}$ *est induite du produit scalaire suivant*

$$\langle T, S\rangle = \sum_{e_{i_1}\in I_1,...,e_{i_m}\in I_m} \langle T(e_{i_1}, ..., e_{i_m}), \overline{S(e_{i_1}, ..., e_{i_m})}\rangle$$

Définition 4.8 ***Produit tensoriel de Hilbert*** *On peut munir le produit tensoriel algébrique* $H_1 \otimes ... \otimes H_m$ *du produit scalaire défini par*

$$\forall h = (h_1 \otimes ... \otimes h_m), k = (k_1 \otimes ... \otimes k_m) \in H_1, ..., H_m : \langle h, k\rangle = \prod_{j=1}^{m} \langle h_j, k_j\rangle.$$

On note $\|.\|_2$ *la norme correspondante et* $H_1\hat{\otimes}_2...\hat{\otimes}_2 H_m$ *l'espace de Hilbert complété. Rappelons que cette norme est raisonnable et vérifie*

$$\varepsilon(\upsilon) \leq \|\upsilon\|_2 \leq \pi(\upsilon)$$

pour tout $\upsilon \in H_1 \otimes ... \otimes H_m$ *oú* ε *est la norme tensoriel injectif sur* $H_1 \otimes ... \otimes H_m$ *. Soit* $(e_{k_j})_{k_j\in I_j}$ *une base orthonormale de* $H_j(1 \leq j \leq m)$ *,on peut voir sans difficulté que le système*

$$e_{k_1} \otimes ... \otimes e_{k_m(k_j\in I_j)_{1\leq j\leq m}}$$

forme une base orthonormale de $H_1\hat{\otimes}_2...\hat{\otimes}_2 H_m$ *. La proposition suivante devient donc immédiate.*

Proposition 4.2 *Soient* $H_1, ..., H_m; H$ *des espaces de Hilbert. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*
(1) *L'opérateur* T *est dans* $L_{HS}(H_1, ..., H_m; H)$ *.*
(2) *L'opérateur* $\tilde{T}_2$ *est dans* $L_{HS}(H_1\hat{\otimes}_2...\hat{\otimes}_2 H_m; H)$ *, (*$\tilde{T}_2$ *est l'extension de* $\tilde{T}$ *sur l'espace* $H_1\hat{\otimes}_2...\hat{\otimes}_2 H_m$ *)*
.

Remarque 4.6 *Dans le cas* $m = 1$*, toutes les définitions précédentes coïncident avec la définition des opérateurs linéaires p-sommants.*

4.3 Les opérateurs Cohen fortement p-sommants

4.3.1 Cas linéaire

Soit $u : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire entre espaces de Banach, u est fortement p-sommant $(1 < p \leq \infty)$ s'il existe une constante positive C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}; x_1, ..., x_n \in X$ et $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$ on a ,

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle u(x_i), y_i^*\rangle| \leq C(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{y\in B_y} \|y_i^*(y)\|l_{p^*}^n. \tag{4.9}$$

La plus petite constante C ; notée $d_p(u)$, telle que l'inégalité (4.9) a lieu, définit la norme fortement p-sommant sur l'espace de Banach $D_p(X; Y)$ des opérateurs Cohen fortement p-sommants de X dans$Y$.
Pour $p = 1$; l'espace $D_1(X; Y)$ coïncide avec $B(X; Y)$; l'espace des opérateurs bornés de X dans Y :
Le théorème de domination de *Pietsch* pour les opérateurs linéaires fortement p-sommants est donné comme suit. Pour la démonstration, on applique directement le théorème de *Pietsch* sur les opérateurs adjoints car ils sont p^*-sommants. Voir [13] ; pour plus de détails.

Théoréme 4.4 ***(Factorisation de** Pietsch)* *soient $p \in [1, \infty]$ et p^* son conjugué, i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. soit $u : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire fortement p-sommant. Alors, il existe une probabilité de radon μ sur $(B_{Y^{**}}, \sigma(Y^{**}, Y^*))$ telle que pour tout $x \in X$ et tout $y^* \in Y^*$ on a*

$$|\langle u(x), y^* \rangle| \leq d_p(u)\|x\|(\int_{B_{Y^{**}}} |y^*(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}))\frac{1}{p^*} \tag{4.10}$$

Inversement, s'il existe une probabilité de radon μ sur $(B_{Y^{**}}, \sigma(Y^{**}, Y^*))$ et$C > 0$ telle que la formule (4.10) *est vérifiée, alors u est fortement p-sommant et $d_p(u) \leq C$.*

4.3.2 Cas multilinéaire

La version multilinéaire a Été introduite par *Achour* et *Mezrag* dans [6]. Elle conserve la plupart des propriétés des opérateurs linéaires notamment le théorème de factorisation de *Pietsch*.

Définition 4.9 *soient $m \in \mathbb{N}^*$ et X_j, Y des espace de Banach $(1 \leq j \leq m)$. un opérateur m-linéaire $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ est cohen fortement p-sommant , $1 \leq p \leq \infty$, s'il existe une constant positive C telle que pour tout $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j$ et tout $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$*

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^* \rangle| \leq C(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \|x_i^j\|_{X_j}^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_y} \|y_i^*(y)\|_{l_{p^*}^n}. \tag{4.11}$$

La classe des opérateurs m-linéaires Cohen fortement p-sommant de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y , notée $D_p^m(X, Y)$, est un espace de Banach pour la norme

$$d_p^m(T) = infC \text{ vérifiant l'inégalité } (4.11)$$

pour $p = 1$, on a $D_p^m(X_1, ..., X_m; Y) = L(X_1, ..., X_m; Y)$

Théoréme 4.5 *[6] soit $1 \leq p \leq \infty$. soit $T \in L(X_1, ..., X_m; Y)$ et T^* son adjoint . Les propriété suivant sont équivalentes.* (1) *L'opérateurs multilinéaire T est cohen fortement p-sommant .*
(2) *il existe une probabilité de radon μ sur $(B_{Y^{**}}, \sigma(Y^{**}, Y^*))$ et$C > 0$ telle que , pour tout $(x^1, ..., x^m) \in X_1 \times ... \times X_m$ et tout $y^* \in Y^*$*

$$|\langle T(x^1, ..., x^m), y^* \rangle| \leq C \prod_{j=1}^{m} \|x^j\|_{X_j} \sup_{y \in B_y} \|y^*(y)\|_{l_{p^*(\mu)}}. \tag{4.12}$$

(3) *L'opérateur adjoint T^* est p^*-sommant . de plus*

$$d_p^m(T) = \pi_{p^*}(T^*) = \inf C \text{ vérifiant l'inégalité } (4.12)$$

Lemme 4.1 *[15] soit $1 < p \leq \infty$. Soit $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ une opérateur multilinéaire et $\tilde{T} : X_1 \hat{\otimes}_\pi ... \hat{\otimes}_\pi X_m \longrightarrow Y$ sa linéarisation. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*
(1) *L'opérateur T appartient à $D_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$*
(2) *L'opératuer $\tilde{T}$ appartient à $D_p(X_1 \hat{\otimes}_\pi ... \hat{\otimes}_\pi X_m, Y)$.*

Preuve
Tout d'abord, on remarque que l'opérateur adjoint de $\tilde{T}$ est T^*. D'aprés (4.5), $T \in D_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$,si et seulement si, $T^* \in \pi_{p^*}(Y^*; L(X_1, ..., X_m))$,donc, d'aprés la propriété résultats linéaires $(RL)/(c)$ de [14], si et seulement si,

$$\tilde{T} \in D_p(X_1 \hat{\otimes}_\pi ... \hat{\otimes}_\pi X_m, Y)$$

Ce qui termine la preuve. ■
Un des principaux résultats de cette partie est le théorème suivant .

Théoréme 4.6 *[15] Pour tout $(X_1, ..., X_m; Y)$ espaces de Banach on a*

$$D_p^m(X_1, ..., X_m; Y) = D_p \circ L(X_1, ..., X_m; Y) \tag{4.13}$$

Preuve
Soient $(X_1, ..., X_m; Y)$ des espaces de Banach. Si $T \in D_p \circ L(X_1, ..., X_m; Y)$,alors il existe un espace de Banach Z, un opérateur linéaire $u \in D_p(Z; Y)$ et un opérateur multilinéaire $A \in L(X_1, ..., X_m; Y)$ tels que

$$T = u \circ A$$

Alors, u^* est p^*-sommant , donc pour tout $(x^1, ..., x^m) \in X_1, ..., X_m$ et $y^* \in Y^*$, on a

$$|\langle u \circ A(x^1, ..., x^m), y^* \rangle| = |\langle A(x^1, ..., x^m), u^* y^* \rangle|$$

$$\leq \|A\| \| \prod_{j=1}^{m} \|x^j\|_{X_j} y^*(y) \|l_{p^*(\mu)}.$$

et par conséquent, $T = u \circ A$ appartient à $D_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$.
Pour l'inclusion inverse, soit $T \in D_p^m(X_1, ..., X_m; Y)$. D'aprés (4.1), $\tilde{T}$ est dans $D_p^m(X_1 \hat{\otimes}_\pi ... \hat{\otimes}_\pi X_m, Y)$. Comme $T = \tilde{T} \circ i_m$ où i_m est l'opérateur multilinéaire canonique, donc T appartient à $D_p \circ L(X_1, ..., X_m; Y)$ ce qui termine la preuve . ■

corollaire 4.1 *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(1) *L'espace Y est de dimension finie.*
(2) *Pour tous espaces de Banach $X_1, ..., X_m$,*

$$D_p^m(X_1, ..., X_m; Y) = L(X_1, ..., X_m; Y)$$

(3) *L'identité $id_Y \in D_p(Y; Y)$.*

Preuve
(1) $\Longrightarrow$ (2) facile
(2) $\Longrightarrow$ (3) comme $D_p^m(X_1, ..., X_m; Y) = D_p \circ L(X_1, ..., X_m; Y)$ pour tout $X_1, ..., X_m$ on a

$$id_Y \in D_p(Y; Y)$$

(3) $\Longrightarrow$ (1) L'opérateur id_{Y^*} est alors p^*-sommant ,ce qui entraine que $id_{Y^*} = id_{Y^*} \circ id_{Y^*}$ est compact (par composition de deux opérateurs faiblement compacts et complètement continus). Alors id_Y est aussi compact, donc Y est de dimension finie .■

corollaire 4.2 *Les opérateurs multilinéaires Cohen fortement p-sommants sont faiblement compacts.*

Preuve
Dans le cas linéaire, pour tout $p > 1$ $D_p(X; Y) \subset I_W(X; Y)$, d'où le résultat .■

corollaire 4.3 *Soient $X_1, ..., X_m$ des espaces de Banach et Y un espace de Banach réflexif. Alors, les opérateurs multilinéaires Cohen fortement p-sommants de $X_1, ..., X_m$ dans Y sont compacts.*

Preuve
D'aprés le Théorème (4.6), il existe un espace de Banach Z ; un opérateur linéaire $u \in D_p(Z;Y)$ et un opérateur multilinéaire $A \in L(X_1, ..., X_m; Y)$ tels que

$$T = u \circ A$$

Il est bien connu qu'un opérateur p-sommant défini sur un espace réflexif est compact. Par conséquent, un opérateur fortement p-sommant est compact quand son espace arrivé est réflexif, i.e., u est compact. Nous pouvons conclure que T est compact .■

Bibliographie

[1] A. Defant, K. Floret.*Tensor Norms and Operator Ideals. North-Holland (1993). 121.*

[2] A. Grothendieck.*Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques.Bol. Soc. Mat. SaoPaulo 8, 1ñ79 (1956).*

[3] A. Pietsch. *Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Ràumen. Studia Math.28, 333ñ353(1967). 45.*

[4] A. Pietsch.*Ideals of multilinear functionals (designs of a theory), Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and their Applications in Theoretical Physics, 185-199. Leipzig. Teubner-Texte, 1983.*

[5] C.P. Stegall, J.R. Retherford. *Fully nuclear and completely nuclear operators with applications to L_1- and L_∞-spaces, Trans. Amer. Math. Soc.163 (1972) 457ñ492.*

[6] D. Achour and L. Mezrag.*On the Cohen strongly p-summing multilinear operators. J.Math. Anal. Appl. 327 (1) (2007), 550-563.*

[7] D. PÈrez-GarcÌa and I. Villanueva, *A composition theorem for multiple summing operators. Monatsh. Math. 146 (2005), 257-261.*

[8] G. Botelho, D. Pellegrino and P. Rueda.*On composition ideals of multilinear mappings and homogeneous polynomials, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 43 (2007), 1139ñ1155.*

[9] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge *Absolutely summing operators. Cambridge University Press, (1995).*

[10] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri.*Classical Banach Spaces, I and II. Springer-Verlag,Berlin (1996).*

[11] J. Mujica. *Complex Analysis in Banach Spaces. Math. Studies, Vol. 120,North Holland, Amsterdam, (1986). 177-200.*

[12] J. S. Cohen .*A characterization of inner product spaces using 2-summing operators. Studia Mathematica T.1970, 271-276.*

[13] J. S. Cohen.*Absolutely p-summing, p-nuclear operators and their conjugates, Math. Ann. 201 (1973), 177-200.*

[14] M. C. Matos. *Fully absolutely summing and Hilbert-Schmidt multilinear mappings.Collect. Math. 54,111ñ136 (2003).*

[15] Saadi khalil. *Les opérateurs multi p-sommant et leurs applications. Thèse Doctorat,Batna, Algérie 2010.*

[16] S. Dineen.*Complex analysis on infinite dimensional spaces, Springer Monographs in Math.(Springer, Berlin, 1999).*

[17] S. KwapieNà . *A linear topological characterization of inner product space. Studia Mathematica T. 1970, 277-278.*

[18] VerÛnica Dimant.*Strongly p-summing multilinear operators. J. Math. Anal. Appl. 278 (2003) 182ñ193.*

[19] H. A. Braunss.*Multi-ideals with special properties, Bl‰tter Potsdamer Forschungen1/87, Potsdam, (1987).*

[20] G. Botelho. *Ideals of polynomials generated by weakly compact operators,Note Mat. 25 (2005) 69-102.*

[21] HÔm Brezis.*Analyse fonctionnelle, thÈéorie et applications. MASSON Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987*

[22] F. Bombal, D. PÈrez-GarcÌa, I. Villanueva.*Multilinear extensions of Grothendieckís theorem. Quart. J. Math. 55 (2004), 441-450.*

[23] Q. Bu.*Some mapping properties of p-summing operators with hilbertian doSome mapping properties of p-summing operators with hilbertian domain, Contemp. Math. 328 (2003) 145ñ149.*

[24] SAADI, K.*(2010). Les opÈrateurs multi p-sommants et leurs applications (Doctoral dissertation, Université de Batna 2).*

ملخص:

في هذه المذكرة المتعلقة بطور الماستر تخصص تحليل دالي . قمنا بدراسة نتائج تحليل و تمايز بعض المؤثرات متعددة الخطية و كثيرات الحدود المتجانسة-m, حيث أدرجنا المفاهيم و النتائج الأساسية , ثم تطرقنا لدراسة المؤثرات غير الخطية الخاصة بالمؤثرات متعددة الخطية وكثيرات الحدود من الدرجة m , ودورها في التمايز متعدد الخطوط ومتعدد الحدود للتشابه إلى فضاء هيلبرت ,ودرسنا نوعين من العوامل ,النوع الأول $\boldsymbol{W}°\boldsymbol{L}$, والنوع الثاني $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{w})$ ' وانهينا العمل بفحص كل فئة لمعرفة ما إذا كانت تحقق نظرية التحليل مع البراهين وبعض النتائج الأساسية.

Résumé :

Dans ce mémoire de Master option analyse fonctionnelle, on va ´étudier des résultats de factorisations et de caractérisations de quelques opérateurs multilinéaires et polynômes m-homogènes ,nous avons inclus des définitions et des résultats de base, en suite, nous avons étudié quelques opérateurs non-linéaires, qui concernent les opérateurs multilinéaires et les polynômes homogènes de degré m ,et son rôle dans caractérisation multilinéaire et polynomiale de l'isomorphie à un espace de Hilbert, nous avons étudié deux types de factorisation, le premier type factorisation de type $\boldsymbol{W} \circ \boldsymbol{L}$, et dans le deuxième type, factorisation de type $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{W})$, et à la fin de ce travail, on va examiner chaque classe pour savoir si elle vérifie le théorème de factorisation avec des preuves et quelques résultats.

Abstract :

In this Master's thesis, functional analysis option, we will study the results, factorizations and characterizations of some multilinear operators and m-homogeneous polynomials, we have included definitions and basic results, then we have studied some non- linear, which concern multilinear operators and homogeneous polynomials of degree m .and its role in the multilinear and polynomial characterization of the isomorphy to a Hilbert space. And we studied two types of factorization, the first type factorization of type $\boldsymbol{W} \circ \boldsymbol{L}$, and in the second type, factorization of type $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{W})$, and at the end of this work, is we will examine each class to know if it verifies the factorization theorem with proofs and some results