REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° :…………………………………

1985

جامعة محمد بوضياف - المسيلة

Université Mohamed Boudiaf - M'sila

DOMAINE : SCIENCES DE MATIERE

FILIERE : PHYSIQUE

OPTION : PHYSIQUE DES PARTICULES A HAUTE ENERGIE

Mémoire présenté pour l'obtention

Du diplôme de Master Académique

Par: SAIDI ASSIA

Intitulé

Solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps pour un potentiel non central avec de plus un potentiel coulombien et un potentiel quadratique inverse.

Soutenue le 04 /06 /2017 devant le jury composé de:

S.MENOUAR	**Prof**	Université de Sétif	Président
S.MEDJBER	**MCB**	Université de M'sila	Rapporteur
M.BOUSSAHEL	**Prof**	Université de M'sila	Examinateur

Année universitaire : 2016/2017

Remerciements

Je remercie le Dieu tout puissant pour m'avoir donné de la force et de la patience.

Je transmets mes sincères remerciements au professeur MR. MADJBER.S, le superviseur, pour ses encouragements continus et son soutien.

Il est un grand plaisir, je tiens à remercier le Dr Menouar Salah pour ses conseils et son assistance.

Mes remerciements vont à tous les membres de jury qui ont accepté de juger ce travail et d'y apporter leurs cautions.

Mes remerciements vont aussi à tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin à la concrétisation de ce travail pour leurs conseils, leurs encouragements et leurs soutiens.

Dédicace

Je remercie le Bon-Dieu pour m'avoir donné la force d'accomplir ce travail pour aller plus loin In Chaa Allah.

Je remercie la prunelle de mes yeux et la couronne de ma tête, mon cher papa pour son soutien et ses motives , et ses appels à la passion , En plus la chère mère pour sa soutien et ses prières.

À mes frères Haithem Et Younes et mes sœurs : Khadîdja, Hadjira , rokia et mes sœurs : Halima , Et leurs enfants :Amjed, Otheman, Jomana et Nour eldin et le bébé Raihana.

À toute ma grande Famille SAIDI .

Je dédie ce travail à tous mes amis sans exception .

À qui m'a autorisé d'être favorable pour moi, malgré son absence, je le remercie.a

Je dédie ce travail à tous qui ont contribué de ma formation et m'ont souhaité toujours le bonne travail.

Table des matières

Introduction générale

La structure atomique interne de la matière était restée un grand mystère dans le cadre de la mécanique classique; dans ce mécanique l'état d'un système physique est bien défini par la connaissance des variables dynamiques, qui sont des quantités continues d'où la continuité des grandeurs qui déterminent l'état du système et l'énergie. Jusqu'à XX siècle ; les physiciens : Niels Bohr, Dirac, Louis de Broglie, Werner Heisenberg, Jordon, Erwin Schrödinger et d'autres ; ont proposé une nouvelle mécanique ; appelée la mécanique quantique qui est une théorie mathématique et physique décrivant la structure et l'évolution dans le temps et l'espace les phénomènes physiques à l'échelle de l'atome et en dessous. Elle a été découverte lorsque les physiciens ont voulu décrire le comportement des atomes et les échanges d'énergie entre la lumière et la matière à cette échelle [1].

En mécanique quantique, les phénomènes physiques sont décrits par fonction d'onde qui contient toutes les informations sur l'état du système, et son comportement suit l'équation de Schrödinger

L'équation de Schrödinger est une équation fondamentale de la mécanique quantique non relativiste. Elle joue en mécanique quantique le même rôle que l'équation de Newton, de Lagrange ou de Hamilton en mécanique classique ou les équations de Maxwell en électromagnétisme. Elle décrit l'évolution temporelle de l'état d'un objet quantique en cherchant se qu'on appel la fonction d'onde ainsi le spectre d'énergie des différents états possibles.

L'équation de Schrödinger stationnaire a été résolue analytiquement seulement pour quelques systèmes simples, alors que la plupart des autres cas se sont restés sans solutions, ils n'ont pas pu être résolus que par des méthodes approximatives où numériques

Tandis que l'équation de Schrödinger pour les systèmes dépendants explicitement du temps est très difficile à résoudre exactement. Plusieurs méthodes ont été exploitées pour résoudre de tels problèmes, parmi lesquels la méthode des perturbations dépendante du temps, l'approximation soudaine, l'approximation adiabatique [2],… Bien que ces dernières ne donnent pas des solutions Analytiques exactes, elles sont généralement très puissantes et applicables à de nombreux systèmes physiques.

La théorie des invariants (ou de Lewis et Riesenfeld) [3] constitue une méthode puissante pour l'étude des phases géométriques ainsi que la solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps. Plusieurs études sur des invariants ont été faites pour des classes de potentiels particuliers.

Pour des potentiels non centraux dépendants du temps, la solution de l'équation de Schrödinger devienne très compliquée, par ce que la recherche d'un tel invariant s'avère toujours une tache difficile qui continue à constituer l'un des domaines de recherche actifs en Physique théorique. En effet, la théorie des invariants représente une méthode globale permettant la résolution exacte des systèmes Hamiltoniens dépendants du temps, et en particulier la solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps.

Pour cette raison, on utilise la transformation unitaire pour simplifier le problème, ceci nous permet d'obtenir des solutions quantiques dans le système transformé par l'utilisation d'une technique mathématique telles que la méthode Nikiforov-Uvarov (N-U) [4] et la méthode d'itération asymptotique (AIM) [5,6]. Les solutions quantiques dans le système transformé seront inversement transformées au système d'origine. Ensuite, il est possible d'identifier les solutions quantiques dans le système d'origine.

Ce mémoire a été structuré comme suit :

- Dans le premier chapitre, on donne une introduction sur la solution de l'équation de Schrödinger stationnaire en coordonnées sphériques en présence d'un potentiel non central.
- Le deuxième chapitre est consacré à la théorie des invariants dans son contexte historique et original de Lewis et Riesenfeld.
- Le troisième chapitre représente l'essentiel de notre travail concernant la solution exacte de l'équation de Schrödinger dépendante du temps pour un potentiel non central composé d'un potentiel coulombien avec en plus un potentiel quadratique inverse et le terme $\frac{1}{r}p_r + p_r\frac{1}{r}$ en utilisant la théorie des invariants, la transformation unitaire, la méthode de Nikoforov-Uvarov et la méthode d'itération asymptotique.

CHAPITRE I :

L'EQUATION DE SCHRÖDINGER ET LE POTENTIEL NON CENTRAL

CHAPITRE I :

L'EQUATION DE SCHRÖDINGER ET LE POTENTIEL NON CENTRAL

1.1. Introduction :

Puisque la physique classique est totalement inadéquate pour les phénomènes observés à l'échelle atomique, il est nécessaire d'élaborer un nouveau cadre conceptuel de la physique.Cette nouvelle théorie de l'univers physique est conventionnellement appelée «mécanique quantique » .Dans ses grandes lignes elle a été conçue entre 1925 et 1930 et

Elle est l'œuvre .principalement de N.Bohr ,W .Heisenberg, E. Schrödinger et P.A.M.Dirac.

En mécanique quantique les phénomènes physiques sont décrits par la fonction d'onde, qui contient toutes les informations sur l'état du système et son comportement suit l'équation de Schrödinger [1].

L'équation de Schrödinger est l'équation fondamentale de la mécanique quantique non relativiste. Elle joue en mécanique quantique le même rôle fondateur que l'équation de Newton en mécanique classique ou les équations de Maxwell en électromagnétisme. Elle décrit l'évolution temporelle de l'état d'un objet quantique représenté par une fonction d'onde.

L'équation de Schrödinger, conçue par le physicien autrichien Erwin Schrödinger en 1926, décrit l'évolution temporelle et spatiale de la fonction d'onde d'une particule. Elle constitue l'un des fondements de la théorie quantique.

La mécanique quantique est basée sur la résolution de l'équation de Schrödinger, qui est une équation différentielle de second degré par rapport à la position et de premier degré par rapport au temps. On s'intéresse ici au cas stationnaire (indépendant de temps), qui est définit par une fonction complexe des coordonnées d'espace et de temps $\psi(\vec{r},t)$, solution d'une équation aux dérivées partielles, l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi(\vec{r},t) \qquad \text{(I-1)}$$

Où H est lopérateur Hamiltonien (associé à l'énergie totale) du système considéré.

Si l'Hamiltonien du système ne dépend pas du temps, la solution de l'équation de Schrödinger s'écrit sous la forme:

$$\psi(\vec{r},t) = \exp\left((-\mathrm{iet})/\hbar\right)\psi(\vec{r}) \qquad \text{(I-2)}$$

Avec ψ (t) vérifie l'équation de Schrödinger stationnaire :

$$\mathrm{H}\,\psi(\vec{r}) = \mathrm{E}\,\psi(\vec{r}) \qquad \text{(I-3)}$$

E : La valeur propre de l'Hamiltonien.

Donc l'équation de Schrödinger indépendante du temps permet de trouver des états stationnaires parmi tous les états possibles du système qui est un cas particulier d'une équation générale dépendante du temps qui donne l'évolution de la fonction d'onde quel que soit l'état du système.

1.2. Présentation de l'équation de Schrödinger :

L'équation de Schrödinger est une équation fondamentale de la mécanique quantique. elle s'agit d'une équation aux dérivées partielles qui décrit l'évolution au cours du temps de la fonction d'onde d'un système physique. Elle prend la forme suivante :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\,\psi \qquad \text{(I-4)}$$

Ou l'Hamiltonien s'écrit :

$$H = T + V(r) \qquad \text{(I-5)}$$

- L'opérateur énergie cinétique T s'écrit aussi comme en mécanique classique sous la forme :

$$T = \frac{p^2}{2m} \qquad \text{(I-6)}$$

- P :est l'impulsion de la particule. Cependant, en mécanique quantique l'impulsion est un opérateur différentiel :

$$\hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla} \tag{I-7}$$

- $\hbar$: est la constante de Planck réduite ($\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05457\ 10^{-34}$ J.s)
- m :la masse de la particule
- $V\ (r)$: l'énergie potentielle de la particule
- $\vec{\nabla}$: nabla, le vecteur de gradient dont les trois composantes cartésiennes sont :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{I-8}$$

Dans la représentation de position, l'équation de Schrödinger prend la forme habituelle :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r)\right)\psi(X, y, z) = E\psi(X, y, z) \tag{I-9}$$

Notre objectif c'est d'extraire les informations sur les solutions d'état lié $\psi\rangle$ Avec la Valeur propre énergétique suivante :

$$(H - E)\ |\psi(t)\rangle = 0 \tag{I-10}$$

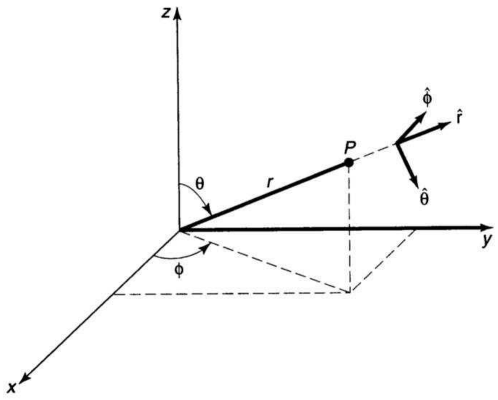
Comme ces solutions sont de carrées normalisables, c'est-à-dire :

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \int d^3 R \left|\Psi(\overrightarrow{R})\right|^2 = 1 \tag{I-11}$$

C'est mieux d'utiliser les coordonnées sphériques pour résoudre cette équation, qui sont Adaptées à la symétrie du système.

1.3. Expression de l'Hamiltonien en coordonnées sphériques :

Si l'énergie potentielle et les conditions aux limites sont de symétrie sphérique, il est utile de transformer H en coordonnes sphériques et de rechercher les solutions de l'équation de Schrödinger comme le produit d'une partie radiale et d'une partie angulaire. Les coordonnées sphériques d'un point quelconque dans l'espace sont définies comme suit :



$$\begin{cases} r \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases} \tag{I-12}$$

Figure.1 : définition des coordonnées sphérique r, θ, φ

D'un point quelconque dans l'espace.

Pour trouver l'expression du Laplacien en coordonnées sphériques, nous allons utiliser la technique classique de changement de variables entre les deux systèmes de coordonnées.

Où (Δ) est définie comme le carrée d'opérateur nabla, donc l'opérateur Laplacien en coordonnes cartésiennes est donné par :

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \tag{I-13}$$

Et l'opérateur nabla dans les coordonnées sphériques est :

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \operatorname{Sin}\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \tag{I-14}$$

A partir de la définition de (Δ) et la dernière expression, nous obtenons l'expression

Finale de l'opérateur Laplacien en coordonnées sphériques, appelé aussi Laplacien sphérique, est défini en termes de distance r de l'origine du système de coordonnées et en termes de deux angles :la latitude θ et l'angle azimutal φ comme suit :

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{Sin}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{Sin}\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \tag{I-15}$$

- Laplacien radiale

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial}{\partial r}\right) \tag{I-16}$$

❖ Laplacien angulaire

$$\Delta_{angulaire} = \frac{1}{r^2\,\mathrm{Sin}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{Sin}\,\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\,sin^2\,\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{I-17}$$

1.4. Le moment cinétique en mécanique quantique :

1. 4.1Définition :

En définit l'opérateur moment cinétique par analogie avec la mécanique quantique par [2] :

$$\vec{L} = \vec{r}\,{}^\wedge\vec{P} = \vec{r}\,{}^\wedge\left(-\vec{\nabla}i\hbar\right) = \hbar\,(-\mathrm{i}\,\vec{r}\,{}^\wedge\vec{\nabla}\,) \tag{I-18}$$

❖ ***Expression de composantes de $\vec{L}$:***

- **En coordonnées cartésiennes :**

$$\vec{L} = -\,\mathrm{i}\hbar\,\vec{r}\,{}^\wedge\vec{\nabla} = -\,\mathrm{i}\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}\,{}^\wedge\begin{vmatrix} \frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dy} \\ \frac{d}{dz} \end{vmatrix} = -\mathrm{i}\,\hbar\begin{vmatrix} y\frac{d}{dz} - z\frac{d}{dy} \\ z\frac{d}{dz} - x\frac{d}{dx} \\ x\frac{d}{dy} - y\frac{d}{dx} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{vmatrix} \tag{I-19}$$

- **En coordonnées sphériques :**

$$L_x = is\ \mathrm{Cos}\,\varphi\,\frac{\partial}{\partial\varphi} + i\ \mathrm{Sin}\,\varphi\,\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{I-20}$$

$$L_y = i\ \mathrm{Cos}\theta\ \mathrm{Sin}\,\varphi\,\frac{\partial}{\partial\varphi} + i\ \mathrm{Cos}\,\varphi\,\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{I-21}$$

$$L_z = -i\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{I-22}$$

Qui forment l'opérateur $L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$, lequel on peut considérer comme étant l'observable correspondant au carré L^2 du vecteur moment cinétique :

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \tag{I-23}$$

D'où on tire l'expression du L^2 en coordonnées sphériques :

$$L^2 = -\text{H}^2 \left[\frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \, \frac{\partial}{\partial\theta} \right) \right] = -\hbar^2 \mathcal{L}^2 \tag{I-24}$$

Par identification, on remarque alors que le carré du moment angulaire $\mathcal{L}^2$ Est écrit

Comme suivant :

$$\mathcal{L}^2 = \left[\frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \, \frac{\partial}{\partial\theta} \right) \right] \tag{I-25}$$

Notons que les opérateurs H, L^2 et L_z Commutent entre eux et ils ont formé un Ensemble commun de fonctions propres $\psi(r, \theta, \varphi)$, mais les trois composantes du moment cinétique (L_x, L_y, L_z) ne commutent pas entre eux :

$$[H, L^2] = 0 \qquad [H, L_z] = 0 \tag{I-26}$$

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \qquad [L_y, L_z] = i\hbar L_x \qquad [L_z, L_x] = i\hbar L_y \tag{I-27}$$

Donc, l'équation de Schrödinger en coordonnées sphériques s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{Sin}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{Sin}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\sin^2\theta\,\partial\varphi^2}\right)\right)\Psi(\mathrm{R}, \theta, \varphi) + \mathrm{V}(\mathrm{R})\Psi(\mathrm{R}, \theta, \varphi) = \mathrm{E}\,\psi(\mathrm{R}, \theta, \varphi) \tag{I-28}$$

Qui peut être réécrite :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{L^2}{r^2}\right)\Psi(\mathrm{R}, \theta, \varphi) + \mathrm{V}(\mathrm{r})\,\psi(\mathrm{R}, \theta, \varphi) = \mathrm{E}\,\psi(\mathrm{R}, \theta, \varphi) \tag{I-29}$$

1.5 La résolution de l'équation de Schrödinger en coordonnées sphériques :

Dans le cas où la particule se déplace dans un potentiel non central, c'est mieux d'utiliser le système de coordonnées sphériques (trois dimensions) pour résoudre l'équation de Schrödinger.

Une question pertinente a été posée d'une façon naturelle : Qu'est ce qu'un potentiel non central ? Pour répondre à cette question il faut définir le potentiel central. En bref, le potentiel central $V(r)$ est un potentiel qui ne dépend que de la distance r à l'origine des coordonnées. Par conséquent cette définition nous permet de dire que le potentiel non central est une fonction qui dépend du rayon r, de l'angle polaire θ, et de l'angle azimutal φ . La dépendance du potentiel non central $V(r,\theta,\varphi)$ en trois variables nous a conduit d'étudier l'équation de Schrödinger en coordonnes sphériques pour donner au lecteur au moins une idée sur ce qui viendra dans la suite de ce chapitre introductif.

Dans ce système nous avons établi la forme générale de l'hamiltonien pour une particule de masse m et d'impulsion p en mouvement dans un potentiel non central $V(r,\theta,\varphi)$ qui dépend de la distance r et des angles θ,φ . Le potentiel $V(r,\theta,\varphi)$ de type non central, est indépendant du temps, donc l'Hamiltonien s'écrit sous la forme :

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r,\theta,\varphi) \tag{I-30}$$

L'opérateur du moment conjugué en coordonnées sphériques est défini :

$$P^2 = P_r^2 + \frac{L^2}{r^2} \tag{I-31}$$

Avec :

$$\mathrm{P}_\mathrm{r}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\right) \tag{I-32}$$

1.6 La méthode standard pour résoudre l'équation de Schrödinger :

L'équation de Schrödinger s'écrit :

$$\left\{\frac{1}{2m}\left[-\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) - \hbar^2\frac{\mathcal{L}^2}{r^2}\right] + V\right\}\Psi(\mathrm{R},\theta,\varphi) = \mathrm{E}\,\psi(\mathrm{R},\theta,\varphi) \tag{I-33}$$

D'où :

$$-\frac{\mathrm{H}^2}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\Psi(\mathrm{R},\theta,\varphi)-\frac{\mathrm{H}^2}{2m}\frac{\mathcal{L}^2}{r^2}\ \Psi(\mathrm{R},\theta,\varphi)+(V-E)\Psi(\mathrm{R},\theta,\varphi)=0 \qquad \text{(I-34)}$$

On remarque d'abord que cette équation est une équation différentielle partielle, La Méthode standard pour résoudre une telle équation est la méthode de séparation des variables dans laquelle on cherche une solution pour $\Psi\,(r,\theta,\varphi)$ comme un produit de deux Fonctions :

$$\psi(\mathrm{r},\theta,\varphi)=\ \mathrm{R}(\mathrm{r})\,\mathrm{f}(\theta,\varphi) \qquad \text{(I-35)}$$

- $R(r)$: est la fonction radiale
- $f(\theta,\varphi)$: *est la* fonction angulaire

Nous pouvons toujours supposer que les fonctions $R(r)$ Et $f(\theta,\varphi)$ Sont normalisées

Séparément :

$$\int_0^{\infty}|\psi(r,\theta,\varphi)|^2 r^2 dr\sin\theta d\theta d\varphi=\int_0^{\infty}\ r^2|R(r)|^2dr=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\ \ |f(\theta,\varphi)|^2d\theta=1 \qquad \text{(I-36)}$$

L'équation (I-34) devient :

$$-\frac{H^2}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)R(r)\,f(\theta,\varphi)-\frac{H^2}{2m}\frac{\mathcal{L}^2}{r^2}R(r)\,f(\theta,\varphi)\ +(V-E)R(r)\,f(\theta,\varphi)\ =0 \qquad \text{(I-37)}$$

On multiplié l'équation (I-38) par : $-\frac{2m}{H^2}\ \frac{r^2}{R(r)\,f(\theta,\varphi)}$

On obtient :

$$\frac{r^2}{R(r)}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)R(r)+\frac{1}{f(\theta,\varphi)}\mathcal{L}^2\ f(\theta,\varphi)+\frac{2m}{\mathrm{H}^2}(E-V)r^2=0 \qquad \text{(I-38)}$$

Cette équation n'est pas toujours séparable, puisque elle dépend de la forme du potentiel, donc, on ne peut pas appliquer la méthode de séparation de variables pour n'importe quel potentiel, mais elle est séparable pour les potentiels de la forme suivante :

$$V(r,\theta,\varphi)=U(r)+\frac{V_1(\theta)}{r^2}+\frac{V_2(\varphi)}{r^2\sin^2\theta} \qquad \text{(I-39)}$$

- **La séparation des variables pour l'équation de Schrödinger avec un potentiel non central :**

L'insertion de l'équation (I-39) dans l'équation (I-38), conduit à :

$$\frac{r^2}{R(r)}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)R(r)+\frac{1}{f(\theta,\varphi)}\mathcal{L}^2 f(\theta,\varphi)+\frac{2m}{H^2}\big(E-U(r)\big)r^2-\frac{2m}{H^2}\left(V_1(\theta)+\frac{V_2(\varphi)}{\sin^2\theta}\right)=0$$

(I-40)

Qui peut être séparé la partie radiale de la partie angulaire comme suit :

$$\frac{r^2}{R(r)}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)R(r)+\frac{2m}{H^2}\big(E-U(r)\big)r^2=-\frac{1}{f(\theta,\varphi)}\mathcal{L}^2 f(\theta,\varphi)+\frac{2m}{H^2}\left(V_1(\theta)+\frac{V_2(\varphi)}{\sin^2\theta}\right)=\mathrm{C}$$

(I-41)

Donc, on obtient les deux équations différentielles

$$\frac{r^2}{R(r)}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)R(r)+\frac{2m}{H^2}\big(E-U(r)\big)r^2=\mathrm{C} \qquad \text{(I-42)}$$

Et :

$$-\frac{1}{f(\theta,\varphi)}L^2 f(\theta,\varphi)+\frac{2m}{H^2}\left(V_1(\theta)+\frac{V_2(\varphi)}{\sin^2\theta}\right)=\mathrm{C} \qquad \text{(I-43)}$$

C : est le constant de séparation

- L'équation différentielle radiale :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right)R(r)+\frac{2m}{H^2}\left(E-U(r)-\frac{H^2c}{r^2}\right)R(r)=0 \qquad \text{(I-44)}$$

Pour résoudre l'équation (1-43), on utilise encore la méthode de séparation de variables ; on écrit la fonction $f(\theta,\varphi)$ comme suit :

$$f(\theta,\varphi)=g(\theta).h(\varphi) \qquad \text{(I-45)}$$

Avec la condition de normalisation :

$$\int_0^{\pi}\sin\theta\,|g(\theta)|^2 d\theta=\int_0^{2\pi}|h(\varphi)|^2 d\varphi=1 \qquad \text{(I-46)}$$

On obtient l'équation différentielle suivante :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\mathrm{Cot}\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)g(\theta).h(\varphi)+\left[C-\frac{2m}{H^2}\left(V_1(\theta)+\frac{V_2(\varphi)}{\sin^2\theta}\right)\right]g(\theta).h(\varphi)=0 \quad \text{(I-47)}$$

Multipliant cette équation par $\frac{\sin^2\theta}{g(\theta).h(\varphi)}$, on obtient :

$$\frac{1}{H(\varphi)}\frac{d^2h(\varphi)}{d\varphi^2}-\frac{V_2(\varphi)}{H^2}=-\frac{\sin^2\theta}{g(\theta)}\frac{d^2g(\theta)}{d\theta^2}=-\frac{\sin^2\theta\,\mathrm{Cos}\theta}{g(\theta)}\frac{dg(\theta)}{d\theta}-C\sin^2\theta+\frac{\sin^2\theta}{H^2}V_1(\theta)=-\mu^2$$

(I-48)

Finalement, obtient les deux équations différentielles polaire et azimutale séparées comme suit :

- L'équation différentielle polaire :

$$\frac{d^2}{d\theta^2}g(\theta)+\ \mathrm{Cot}\theta\ \frac{dg^{(\theta)}}{d\theta}+\left(C-\frac{\mu^2}{\mathrm{Sin}^2\theta}-\frac{V_1(\theta)}{\mathrm{H}^2}\right)g(\theta)=0 \qquad \text{(I-49)}$$

- L'équation différentielle azimutale :

$$\frac{\partial^2h(\varphi)}{\partial\varphi^2}+\left(\mu^2-\frac{2m}{\mathrm{H}^2}V_2(\varphi)\right)h(\varphi)=0 \qquad \text{(I-50)}$$

μ : est la constante de séparation.

Avec :

$$C=l(l+1)\quad ,\quad \mu=m \qquad \text{(I-51)}$$

l et m sont des entiers.

$$(\,l=0,1,2,\ldots)\ ,et\ \ (m=-l\,,\ldots,+l\,) \qquad \text{(I-52)}$$

1.7 Exemples pour des potentiels non centraux :

Il existe différentes types des potentiels non centraux (déformés) dans la littérature qu'ils ont été étudiés en utilisant la méthode de séparation de variables. Parmi lesquels on peut citer quelques potentiels :

Le potentiel de Makarov plus le potentiel de Poschl-Teller [7] *:*

$$\mathrm{U(R)}=-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{R}}\ ,V_1(\theta)=\frac{\beta}{\mathrm{Sin}^2\theta}+\frac{\gamma\,\mathrm{Cos}\,\theta}{\mathrm{Sin}^2\theta}\ ,V_2(\varphi)=\frac{\alpha}{\mathrm{Cos}\,\gamma\varphi^2}+\frac{\beta}{\mathrm{Sin}\,\gamma\varphi^2} \qquad \text{(I.53)}$$

Le potentiel de Makarov *[8]* :

$$\mathrm{U(r)}\ =\ -\frac{\alpha}{r}\,,V_1(\theta)=\frac{\beta}{\mathrm{Sin}^2\theta}+\frac{\gamma}{\mathrm{Sin}^2\theta}\ ,V_2(\varphi)=0 \qquad \text{(I.54)}$$

Le potentiel de Kratzer modifié plus le potentiel de la forme d'anneau [9,10] :

$$\mathrm{U(r)}\ =D\left(\frac{r-\alpha}{r}\right)^2\ \ ,V_1(\theta)=\frac{\beta}{\mathrm{Sin}^2\theta}+\frac{\gamma\,\mathrm{Cos}\,\theta}{\mathrm{Sin}^2\theta}\ ,V_2(\varphi)=0 \qquad \text{(I.55)}$$

Le potentiel de Poschl-Teller plus le potentiel de forme double anneau *[11]* :

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, V_1(\theta) = \frac{b}{\mathrm{Sin}^2\theta} + \frac{c}{\mathrm{Sin}^2\theta}, V_2(\varphi) = \frac{e}{\mathrm{Cos}\,\vartheta\varphi^2} + \frac{f}{\mathrm{Sin}\,\vartheta\varphi^2} \qquad (I.56)$$

CHAPITRE II :
LES SYSTEMES DEPENDANTE DU TEMPS ET LA THEORIE DES INVARIANTS

CHAPITRE II :

LES SYSTEMES DEPENDANTE DU TEMPS ET LA THEORIE DES INVARIANTS

2.1. Introduction :

Le sujet de cette partie est de décrire les différentes méthodes pour résoudre l'équation de Schrödinger dépendante du temps.

Différentes méthodes existent pour résoudre l'équation de Schrödinger dépendante du temps .Le choix d'une méthode particulière repose généralement sur la forme du potentiel et sur celle de la fonction d'onde recherchée .En pratique, il existe plusieurs techniques de résolutions. Le but est trouver la solution $|\psi(t)\rangle$ correspondante à la condition initiale $|\psi(t_0)\rangle$ pour cela on peut citer quelques méthodes intéressantes qui ont une relation directe avec ce qui va suivre de notre travail.

2.2. Les méthodes de résolution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps :

Il y a deux méthodes de résolution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps : les méthodes approximatives et les méthodes exactes [12].

2.1. Méthodes approximatives :

Parfois lorsqu'on peut pas trouver des résolution exactes, on utilise les méthodes d'approximation ; ces méthodes sont généralement très puissantes et applicables à des nombreuse systèmes physiques, elles sont beaucoup plus utilisées dans les domaines de la physique appliqué [2] :

- La théorie de perturbation.
- Méthode variation elle.
- L'approximation soudaine.
- L'approximation adiabatique.

2.2. Méthodes exactes :

- Transformation unitaire.
- L'opérateur d'évolution.
- Changement de représentation.
- La théorie des invariants.

2.3. La théorie des invariants et les systèmes dépendante du temps :

2.3.1. Introduction :

Parmi les méthodes les plus puissantes et qui donnent des solutions exactes de l'équation de Schrödinger dépendante du temps, nous avons la méthode des invariants.

A cause de son importance dans ce travail, nous allons l'étudier avec plus de détails.

L'idée de base de la théorie des invariants est la dérivation de la relation entre les états propre de l'invariante et la solution de l'équation de Schrödinger .On peut trouver une transformation de phase dépendant du temps pour chaque état propre d'un invariant telle que la fonction propre devient une solution de l'équation de Schrödinger, et la phase est déterminée en résolvant une simple équation différentielle du premier ordre.

2.3.2. Représentation de la théorie des invariants :

La théorie des invariants pour des Hamiltoniens Hermitiens a été introduite par Lewis et Riesenfeld(1969)[3], ou il ont dérivé une simple relation entre les vecteurs propre de l'invariant et la solution de l'équation de Schrödinger.

La théorie des invariants représente l'un des piliers fondamentaux dans l'étude des systèmes dépendants du temps, cette importance de la théorie des invariants relie au langage mathématique puissant qui la caractérisé, et sur sa souplesse dans la solution de l'équation de Schrödinger du temps, dans cette partie de notre travail, on donne quelques notions essentielles concernant la théorie des invariants.

2.4. Les invariants :

On considère l'équation de Schrödinger suivante :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle \qquad \text{(II-1)}$$

Où H est l'Hamiltonien de système.

La méthode des invariants est basé sur ce principe, elle consiste à introduire un opérateur Hermitien I , I est dit invariant s'il vérifie les deux relation suivantes :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[I,H] = 0 \qquad \text{(II-2)}$$

$$I(t) = I^{+}(t) \quad \text{(II-3)}$$

En appliquant l'équation (II-2) sur $|\psi(t)\rangle$ et en utilisant l'équation (II-1), nous obtenons :

$$\frac{\partial I}{\partial t}|\psi(t)\rangle + \frac{1}{i\hbar}[I,H]|\psi(t)\rangle = 0 \quad \text{(II-4)}$$

$$i\hbar\,\frac{\partial I}{\partial t}|\psi(t)\rangle + IH(t)|\psi(t)\rangle - H(t)I|\psi(t)\rangle = 0 \quad \text{(II-5)}$$

$$i\hbar\,\frac{\partial I}{\partial t}|\psi(t)\rangle + Ii\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle - H(t)I|\psi(t)\rangle = 0 \quad \text{(II-6)}$$

$$i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}(I|\psi(t)\rangle) = H(t)(I|\psi(t)\rangle) \quad \text{(II-7)}$$

Cela veut dire que l'opérateur d'invariant vérifie une solution de l'équation de Schrödinger, sur une autre solution de cette même équation .Ce résultat est valide pour tout invariant .

2.5. Propriétés de l'invariant :

2.5 .1Valeurs propre de l'invariant :

On suppose que l'invariant a un ensemble complet de fonction propres, on note les valeurs propres de part, et les états propres orthonormés associés d'autre part, où on représente tous les autres nombres quantiques nécessaires pour spécifier les états propres de ce système .L'équation aux valeurs propres s'écrit comme suit :

$$I(t)|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle = \lambda|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle \quad \text{(II-8)}$$

Avec le produit Hermitien sur l'espace des états :

$$\langle\varphi_{\lambda\kappa}|\varphi_{\lambda'\kappa'}\rangle = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\kappa\kappa'} \quad \text{(II-9)}$$

Cet invariant, a un spectre constant au cour du temps, c'est-à-dire que les valeurs propres de cet opérateur, sont indépendantes du temps.

En dérivant l'équation (II- 8) par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(I(t)|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle) = \frac{\partial}{\partial t}(\lambda|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle\,) \quad \text{(II-10)}$$

$$\frac{\partial I}{\partial t}|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle + I\frac{\partial}{\partial t}|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle = \frac{\partial\lambda}{\partial t}|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle + \lambda\frac{\partial}{\partial t}|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle \quad \text{(II-11)}$$

On applique l'équation (II-2) sur les états propres : $|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle$

$$\frac{\partial I}{\partial t}|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle + \frac{1}{i\hbar}[I,H]|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle = 0 \quad \text{(II-12)}$$

$$i\hbar\,\frac{\partial I}{\partial t}|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle + IH|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle - \lambda H|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle = 0 \quad \text{(II-13)}$$

Le produit scalaire de l'équation (II-13) par $\langle\varphi_{\lambda'\kappa'}|$ donne :

$$\left\langle \varphi_{\lambda'\kappa'} \middle| i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} \middle| \varphi_{\lambda\kappa} \right\rangle + \langle \varphi_{\lambda'\kappa'} | IH | \varphi_{\lambda\kappa} \rangle - \langle \varphi_{\lambda'\kappa'} | H\lambda | \varphi_{\lambda\kappa} \rangle = 0 \qquad \text{(II-14)}$$

$$i\hbar \left\langle \varphi_{\lambda'\kappa'} \middle| \frac{\partial I}{\partial t} \middle| \varphi_{\lambda\kappa} \right\rangle + \lambda' \langle \varphi_{\lambda'\kappa'} | H | \varphi_{\lambda\kappa} \rangle - \lambda \langle \varphi_{\lambda'\kappa'} | H | \varphi_{\lambda\kappa} \rangle = 0 \qquad \text{(II-15)}$$

$$i\hbar \left\langle \varphi_{\lambda'\kappa'} \middle| \frac{\partial I}{\partial t} \middle| \varphi_{\lambda\kappa} \right\rangle + (\lambda' - \lambda) \langle \varphi_{\lambda'\kappa'} | H | \varphi_{\lambda\kappa} \rangle = 0 \qquad \text{(II-16)}$$

Pour : $\lambda' = \lambda$

$$\left\langle \varphi_{\lambda'\kappa'} \middle| \frac{\partial I}{\partial t} \middle| \varphi_{\lambda\kappa} \right\rangle = 0 \qquad \text{(II-17)}$$

En prenant le produit scalaire de l'équation (II-11) avec l'état propre e$\langle \varphi_{\lambda\kappa} |$, on obtient :

$$\left\langle \varphi_{\lambda\kappa} \middle| \frac{\partial I}{\partial t} \middle| \varphi_{\lambda\kappa} \right\rangle + \left\langle \varphi_{\lambda\kappa} \middle| I \frac{\partial}{\partial t} \middle| \varphi_{\lambda\kappa} \right\rangle = \left\langle \varphi_{\lambda\kappa} \middle| \frac{\partial \lambda}{\partial t} \middle| \varphi_{\lambda\kappa} \right\rangle + \lambda \left\langle \varphi_{\lambda\kappa} \middle| \frac{\partial}{\partial t} \middle| \varphi_{\lambda\kappa} \right\rangle \qquad \text{(II-18)}$$

$$\left\langle \varphi_{\lambda\kappa} \middle| \frac{\partial I}{\partial t} \middle| \varphi_{\lambda\kappa} \right\rangle + \lambda \left\langle \varphi_{\lambda\kappa} \middle| \frac{\partial}{\partial t} \middle| \varphi_{\lambda\kappa} \right\rangle = \left\langle \varphi_{\lambda\kappa} \middle| \frac{\partial \lambda}{\partial t} \middle| \varphi_{\lambda\kappa} \right\rangle + \lambda \left\langle \varphi_{\lambda\kappa} \middle| \frac{\partial}{\partial t} \middle| \varphi_{\lambda\kappa} \right\rangle \qquad \text{(II-19)}$$

$$\left\langle \varphi_{\lambda\kappa} \middle| \frac{\partial I}{\partial t} \middle| \varphi_{\lambda\kappa} \right\rangle = \left\langle \varphi_{\lambda\kappa} \middle| \frac{\partial \lambda}{\partial t} \middle| \varphi_{\lambda\kappa} \right\rangle \text{(II-20)}$$

$$\left\langle \varphi_{\lambda\kappa} \middle| \frac{\partial I}{\partial t} \middle| \varphi_{\lambda\kappa} \right\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t} \langle \varphi_{\lambda\kappa} | \varphi_{\lambda\kappa} \rangle \qquad \text{(II-21)}$$

On a :

$$\langle \varphi_{\lambda\kappa} | \varphi_{\lambda\kappa} \rangle = \delta_{\lambda\lambda} \delta_{\kappa\kappa} = 1 \qquad \text{(II-22)}$$

Alors :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \left\langle \varphi_{\lambda\kappa} \middle| \frac{\partial I}{\partial t} \middle| \varphi_{\lambda\kappa} \right\rangle \qquad \text{(II-23)}$$

Ce qui implique :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \left\langle \varphi_{\lambda\kappa} \middle| \frac{\partial I}{\partial t} \middle| \varphi_{\lambda\kappa} \right\rangle = 0 \qquad \text{(II-24)}$$

2.5.2 Les vecteurs propres de l'invariant :

Pour trouver le rapport entre les vecteurs propres et la solution de l'équation de Schrödinger, on écrit d'abord l'équation du mouvement de $|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle$.

En commençant par l'équation (II-11) et en utilisant l'équation (II-24), on obtient :

$$\frac{\partial I}{\partial t} |\varphi_{\lambda\kappa}\rangle + I \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_{\lambda\kappa}\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t} |\varphi_{\lambda\kappa}\rangle + \lambda \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_{\lambda\kappa}\rangle \qquad \text{(II-25)}$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} |\varphi_{\lambda\kappa}\rangle + I \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_{\lambda\kappa}\rangle = \lambda \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_{\lambda\kappa}\rangle \qquad \text{(II-26)}$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} |\varphi_{\lambda\kappa}\rangle = (\lambda - I) \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_{\lambda\kappa}\rangle \qquad \text{(II-27)}$$

Le produit scalaire de l'équation avec le vecteur propre $\langle\varphi_{\lambda'\kappa'}|$ est :

$$\left\langle\varphi_{\lambda'\kappa'}\left|\frac{\partial I}{\partial t}\right|\varphi_{\lambda\kappa}\right\rangle = \left\langle\varphi_{\lambda'\kappa'}\left|(\lambda - I)\frac{\partial}{\partial t}\right|\varphi_{\lambda\kappa}\right\rangle \tag{II-28}$$

$$\left\langle\varphi_{\lambda'\kappa'}\left|\frac{\partial I}{\partial t}\right|\varphi_{\lambda\kappa}\right\rangle = (\lambda - \lambda')\left\langle\varphi_{\lambda'\kappa'}\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|\varphi_{\lambda\kappa}\right\rangle \tag{II-29}$$

On déduit que :

$$i\hbar\left\langle\varphi_{\lambda'\kappa'}\left|\frac{\partial I}{\partial t}\right|\varphi_{\lambda\kappa}\right\rangle + (\lambda - \lambda')\langle\varphi_{\lambda'\kappa'}|H|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle = 0 \tag{II-30}$$

Donc :

$$i\hbar(\lambda - \lambda')\left\langle\varphi_{\lambda'\kappa'}\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|\varphi_{\lambda\kappa}\right\rangle = (\lambda - \lambda')\langle\varphi_{\lambda'\kappa'}|H|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle \tag{II-31}$$

Pour $\lambda \neq \lambda'$ on déduit :

$$i\hbar\left\langle\varphi_{\lambda'\kappa'}\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|\varphi_{\lambda\kappa}\right\rangle = \langle\varphi_{\lambda'\kappa'}|H|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle \tag{II-32}$$

Si l'équation (II-31) est valable pour $\lambda' = \lambda$ aussi bien que $\lambda \neq \lambda'$, alors on déduit immédiatement que $|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle$ satisfait l'équation de Schrödinger, c'est-à-dire , $|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle$ est une solution particulière de l'équation de Schrödinger.

Lorsque les phases des états stationnaires ne sont pas fixées, on choisi un autre ensemble de vecteurs propres de I multiplié par un facteur de phase dépendant du temps.

Alors :

$$|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle_\alpha = e^{i\alpha(t)_{\lambda\kappa}}|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle \tag{II-33}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle_\alpha = H|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle_\alpha \tag{II-34}$$

Ou $\alpha(t)_{\lambda\kappa}$ est une fonction réelle du temps arbitrairement choisie. Ces $|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle_\alpha$ sont des états propres orthonormées de $I(t)$ associés à $\boldsymbol{\lambda}$**,** aussi bien que les $|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle$. S'ils vérifient l'équation de Schrödinger, on obtient :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{i\alpha(t)_{\lambda\kappa}}|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle\right) = He^{i\alpha(t)_{\lambda\kappa}}|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle \tag{II-35}$$

$$i\hbar\frac{\partial e^{i\alpha(t)_{\lambda\kappa}}}{\partial t}|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle + i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle e^{i\alpha(t)_{\lambda\kappa}} = He^{i\alpha(t)_{\lambda\kappa}}|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle \tag{II-36}$$

$$-\hbar\frac{\partial\alpha(t)_{\lambda\kappa}}{\partial t}|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle + i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle = H|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle \tag{II-37}$$

Le produit scalaire par le vecteur d'état $\langle\varphi_{\lambda'\kappa'}|$ conduit à :

$$-\hbar\frac{\partial\alpha_{\lambda\kappa}}{\partial t}\langle\varphi_{\lambda'\kappa'}|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle + \left\langle\varphi_{\lambda'\kappa'}\left|i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right|\varphi_{\lambda\kappa}\right\rangle = \langle\varphi_{\lambda'\kappa'}|H|\varphi_{\lambda\kappa}\rangle \tag{II-38}$$

$$\hbar \frac{\partial \alpha_{\lambda\kappa}}{\partial t} \langle \varphi_{\lambda'\kappa'} | \varphi_{\lambda\kappa} \rangle = \left\langle \varphi_{\lambda'\kappa'} \middle| \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right] \middle| \varphi_{\lambda\kappa} \right\rangle \qquad \text{(II-39)}$$

$$\hbar \frac{\partial \alpha_{\lambda\kappa}}{\partial t} \delta_{\lambda'\lambda} \delta_{\kappa'\kappa} = \left\langle \varphi_{\lambda'\kappa'} \middle| \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right] \middle| \varphi_{\lambda\kappa} \right\rangle \qquad \text{(II-40)}$$

Donc on obtient :

$$\hbar \frac{\partial \alpha_{\lambda\kappa}}{\partial t} = \left\langle \varphi_{\lambda\kappa} \middle| \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right] \middle| \varphi_{\lambda\kappa} \right\rangle \qquad \text{(II-41)}$$

Mise à part ces changement de phase, on peut introduire la deuxième propriété importante de cet invariant : tous les états propres de ces invariants sont aussi les solutions particulières de l'équation de Schrödinger.

2.6. Solution générale :

Du fait que chacun de ces nouveaux états propres satisfait l'équation de Schrödinger. La solution générale est donnée par :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{\lambda\kappa} c_{\lambda\kappa} \, e^{i\alpha(t)_{\lambda\kappa}} |\varphi_{\lambda\kappa}\rangle \qquad \text{(II-42)}$$

Où $c_{\lambda\kappa}$ sont des coefficients indépendants du temps et correspondent à $|\psi(0)\rangle$.

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{\lambda\kappa} c_{\lambda\kappa} \, e^{i\alpha(0)_{\lambda\kappa}} |\varphi(0)_{\lambda\kappa}\rangle \qquad \text{(II-43)}$$

Donc, $|\psi(t)\rangle$ est la solution générale de l'équation de Schrödinger et sont les états propres de l'invariant.

Dans certains cas, pour résoudre l'équation d'invariant dépendante du temps on utilise une transformation unitaire pour obtenir un invariant plus simple comme suit:

$$\phi_\lambda(\vec{r}) = \mathrm{U}(\mathrm{t})\varphi_\lambda(\vec{r}, t) \qquad \text{(II-44)}$$

avec

$$I_0 \phi_\lambda(\vec{r}) = \lambda \phi_\lambda(\vec{r}) \qquad \text{(II-45)}$$

où :

$$I_0 = UIU^{-1} \qquad \text{(II-46)}$$

Donc l'équation différentielle obtenue par la transformation est une équation différentielle plus simple qu'on peut résoudre par les méthodes bien connues.

Mais la question qui se pose maintenant c'est comment trouver un invariant pour un système quantique donné ?

Pour certains systèmes on construit l'opérateur invariant $\hat{I}$ à partir des opérateurs de position $\hat{x}$ et d'impulsion $\hat{p}$ et ses multiplications selon la forme de l'hamiltonien H de tel sorte que l'opérateur invariant soit hermitien et vérifiait l'équation de Louiville-Von Neumann (II-2).

Pour les autres cas d'un système de dimension finie, il y a un résultat dû à [13] qui stipule qu'on peut avoir un invariant pour le système (II-1) si est seulement si, on peut construire une algèbre de Lie. Dans le cas de dimension infinie, pour qu'un système de la forme (II-1) ait un invariant, il faut que l'algèbre de Lie soit de dimension infinie.

Paradoxalement, plusieurs exemples d'intérêt physique (comme, l'oscillateur harmonique), ont une algèbre de Lie de dimension finie (elle est même de dimension réduite).

Donc on se met là, dans le cas d'un système de dimension infinie, sous l'hypothèse d'avoir une algèbre de Lie de dimension finie. On va voir comment cette hypothèse peut nous aider à trouver l'ensemble des invariants de notre système de Schrödinger.

Supposons par exemple que l'algèbre de Lie engendrée par $H(t)$ est donnée par l'ensemble des opérateurs hermitiens:

$$\Lambda = \{T_1, T_2, \dots, T_n\} \qquad \text{(II-47)}$$

On essaiera donc de trouver des invariants I qui se décomposent complètement sur cette algèbre de Lie. On prend alors I sous la forme :

$$I(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i(t) T_i \qquad \text{(II-48)}$$

En injectant cette forme dans la formule (II-2) ; on voit bien que les paramètres $B_i(t)$ dépendants du temps doivent vérifier un système d'équations différentielles.

Pour retrouver ces équations différentielles, nous avons besoin de connaitre la décomposition des commutateurs $[H, T_i]$ dans la base Λ. En faisant cela, on trouvera les coefficients C_i^j :

$$[H, T_i] = \sum_{j=1}^{n} C_i^j T_j \qquad \text{(II-49)}$$

Connaissant ces coefficients, on peut donner les équations différentielles, que les $B_i(t)$ doivent vérifier :

$$i\hbar \sum_{i=1}^{n} \dot{B}_i T_i = \sum_{j=1}^{n} C_i^j T_j, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \qquad \text{(II-50)}$$

Aussi, à chaque opérateur T_i qui vérifie l'équation (II-50), est associé une équation différentielle pour l'ensemble des paramètres $B_i(t)$.

Plusieurs auteurs ont étudiés les systèmes quantiques dépendants du temps en résolvant l'équation de Schrödinger par la théorie d'invariant pour différents systèmes, parmi lesquels: l'oscillateur harmonique généralisé et l'oscillateur singulier [14-31], la particule libre dans un potentiel linéaire[32-35] ,le système à deux niveaux [36], la particule chargée dans un champ magnétique[3,37,38] ,l'oscillateur singulier plus le terme $(1/x)p + p(1/x)$ [39] et les oscillateurs couplés en présence d'un champ magnétique dépendant du temps [40].

CHAPITRE III : RESOLUTION DE L'EQUATION DE SCHRÖDINGER POUR UN POTENTIEL NON CENTRAL DEPENDANT DU TEMPS

CHAPITRE III :
RESOLUTION DE L'EQUATION DE SCHRÖDINGER POUR UN POTENTIEL NON CENTRAL DEPENDANT DU TEMPS

3.1Introduction :

L'un des problèmes intéressants de la mécanique quantique non relativiste est de trouver les solutions exactes de l'équation de Schrödinger pour certains potentiels non centraux dépendants du temps. Ces dernières années, des efforts considérables ont été faits par les physiciens pour obtenir les solutions analytiques de ces potentiels. La solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps pour les potentiels non centraux a fait l'objet de travail. Donc notre but dans ce chapitre est de résoudre analytiquement l'équation de Schrödinger en présence d'un potentiel non central dépendant du temps composé d'un potentiel non central plus un potentiel coulombien plus un potentiel quadratique inverse plus le terme $\left(\frac{1}{r}p_r + p_r\frac{1}{r}\right)$

3.2. Opérateur Hamiltonien et construction de l'invariant:

L'Hamiltonien de notre système est donné par la formule suivante :

$$H(r,\theta,\varphi,t) = A(t)\left(p^2 + \frac{f(\theta,\varphi)}{r^2}\right) + C(t)\left(\frac{1}{r}p_r + p_r\frac{1}{r}\right) + \frac{E(t)}{r^2} - \frac{Z(t)}{r} \qquad \text{(III-1)}$$

Où $A(t)$, $C(t)$, $E(t)$ et $Z(t)$ sont des coefficients dépendantes du temps et $f(\theta,\varphi)$ est une fonction dépendante de θ et φ qui garantie la non centralité du potentiel. L'opérateur du moment conjugué dans les coordonnées sphériques est $p^2 = p_r^2 + \frac{L^2}{r^2}$ avec : $p_r = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)$ et le moment angulaire total $L^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]$.

3.3 Construction de l'invariant :

On cherche la forme de l'invariant $I(r,\theta,\varphi,t)$ sous la forme :

$$I(r,\theta,\varphi,t)=\alpha(t)r^2+\gamma(t)\left(P^2+\frac{f(\theta,\varphi)}{r^2}\right)+\beta(t)(rP_r+P_r r)+\delta(t)\left(\frac{1}{r}P_r+P_r\frac{1}{r}\right)+\frac{\lambda(t)}{r^2}-\frac{\eta(t)}{r}$$

(III-2)

Où $\alpha(t)-\varepsilon(t)$ sont des fonctions arbitraires dépendantes du temps à déterminer.

En général, les propriétés quantiques d'un système Hamiltonien dépendant du temps sont étudiées en introduisant un opérateur invariant associé au système. Un invariant $I(t)$ est construit à partir de l'équation de Liouville -Van Neumann.

$$\frac{dI(t)}{dt}=\frac{\partial I(t)}{\partial t}+\frac{1}{i\hbar}[I(t),H(t)]=0 \tag{III-3}$$

En substituant les deux équations (III-1) et (III-2) dans l'équation de Liouville-Von Neumann (III-3), on obtient :

$$\dot{\alpha}=0\,,\dot{\beta}=-2\alpha A\,,\dot{\gamma}=-4\beta A,\dot{\delta}=-4\beta C,\dot{\lambda}=-4\beta E,\dot{\varepsilon}=-4\alpha C,\dot{\eta}=-2\beta Z,$$

$$\gamma Z=\eta A,\quad \delta Z=\eta C,\quad \gamma C=\delta A\,,\lambda C=\delta E\quad,\lambda A=\gamma E \tag{III-.4}$$

Les rapports $\frac{C(t)}{A(t)}$ et $\frac{E(t)}{A(t)}$ sont des constantes d'après les équations (III-4). Alors, la résolution du système d'équation (III-4) nous donne explicitement des coefficients de l'invariant sous la forme intégrable suivante :

$$\alpha(t)=\alpha_0 \tag{III-5}$$

$$\beta(t)=\beta_0-2\alpha_0\int_0^t A(t')dt' \tag{III-6}$$

$$\gamma(t)=\gamma_0-4\,\beta_0\int_0^t A(t')dt'+4\,\alpha_0\left[\int_0^t A(t')dt'\right]^2 \tag{III-7}$$

$$\delta(t)=\frac{\delta_0}{\gamma_0}\left(\gamma_0-4\beta_0\int_0^t A(t')dt'+4\,\alpha_0\left[\int_0^t A(t')dt'\right]^2\right) \tag{III-8}$$

$$\lambda(t)=\frac{\lambda_0}{\gamma_0}\left(\gamma_0-4\beta_0\int_0^t A(t')dt'+4\,\alpha_0\left[\int_0^t A(t')dt'\right]^2\right) \tag{III-9}$$

$$\eta(t)=\frac{\eta_0}{\gamma_0^{\frac{1}{2}}}\left(\gamma_0-4\beta_0\int_0^t A(t')dt'+4\,\alpha_0\left[\int_0^t A(t')dt'\right]^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{III-10}$$

$$\varepsilon(t)=\frac{2\delta_0}{\gamma_0}\left(\beta_0-2\alpha_0\int_0^t A(t')dt'\right) \tag{III-11}$$

Où

$$\alpha_0=\alpha(0)\,,\beta_0=\beta(0),\gamma_0=\gamma(0)\,,\delta_0=\delta(0),\lambda_0=\lambda(0)\,,\eta_0=\eta(0)\,,\varepsilon_0=\varepsilon(0)$$

Insérons les équations (III-5)-(III-11) dans l'équation (III-3), nous obtenons l'expression de l'opérateur invariant :

$$I(r,\theta,\varphi)=\alpha_0 r^2+\left(p^2+\frac{f(\theta,\varphi)}{r^2}\right)\left(\gamma_0-4\,\beta_0\int_0^t A(t')dt'+4\,\alpha_0\left[\int_0^t A(t')dt'\right]^2\right)+$$
$$(rP_r+P_r r)\left(\beta_0-2\alpha_0\int_0^t A(t')dt'\right)+$$
$$\left(\frac{1}{r}P_r+P_r\frac{1}{r}\right)\left(\frac{\delta_0}{\gamma_0}\left(\gamma_0-4\beta_0\int_0^t A(t')dt'+4\,\alpha_0\left[\int_0^t A(t')dt'\right]^2\right)\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\lambda_0}{\gamma_0}\left(\gamma_0-\right.\right.$$
$$\left.\left.4\beta_0\int_0^t A(t')dt'+4\,\alpha_0\left[\int_0^t A(t')dt'\right]^2\right)\right)+$$
$$\frac{1}{r}\left(-\frac{\eta_0}{\gamma_0^{\frac{1}{2}}}\left(\gamma_0-4\beta_0\int_0^t A(t')dt'+4\,\alpha_0\left[\int_0^t A(t')dt'\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{2\delta_0}{\gamma_0}\left(\beta_0-2\alpha_0\int_0^t A(t')dt'\right)$$

(III-12)

3.3.1 Valeurs et états propres de l'invariant :

Il reste à obtenir les états et les valeurs propres de l'invariant $I(t)$ c'est-à-dire la solution de l'équation

$$I\phi_n(\vec{r},t)=E_n\phi_n(\vec{r},t) \qquad \text{(III-13)}$$

Le point clé pour répondre à cette question est d'effectuer la transformation unitaire dépendante du temps suivante :

$$\phi'_n(\vec{r})=U(t)\phi_n(\vec{r},t) \qquad \text{(III-14)}$$

L'opérateur unitaire dépendant du temps $U(t)$ est donné par l'expression :

$$U(t)=\exp\left(\frac{i\beta(t)}{2\hbar\gamma_0}r^2\right)\times\exp\left(\frac{i}{2\hbar}\,ln\left(\frac{\gamma(t)}{\gamma_0}\right)^{\frac{1}{2}}(rp_r+p_r r)\right) \qquad \text{(III-15)}$$

Il est important de noter que à travers cette transformation unitaire, les opérateurs coordonnées et moments conjugués se transforment selon :

$$r\to r=U(t)rU(t)^{-1}=\left(\frac{\gamma(t)}{\gamma_0}\right)^{1/2}r \qquad \text{(III-16)}$$

$$p\to p=U(t)pU(t)^{-1}=\left(\frac{\gamma(t)}{\gamma_0}\right)^{-1/2}\left(p-\frac{\beta(t)}{\gamma_0}r\right) \qquad \text{(III-17)}$$

Et par conséquent, l'invariant $I(t)$ est transformé en un opérateur indépendant du temps :

$$I(t)\to I_0=U(t)\,I\,U(t)^{-1}=\gamma_0\left(P^2+\frac{f(\theta,\varphi)}{r^2}\right)+(\alpha_0\gamma_0-\beta_0^2)r^2+\delta_0\left(\frac{1}{r}P_r+P_r\frac{1}{r}\right)+\frac{\lambda_0}{r^2}-\frac{\eta_0}{r}$$

(III-18)

Avec :

$$UIU^{-1}\phi'_n(\vec{r})=I_0\phi'_n(\vec{r})=E\phi'_n(\vec{r}) \qquad \text{(III-19)}$$

Ainsi, l'équation aux valeurs propres de l'invariant transformé est :

$$\left(\gamma_0\left(P^2+\frac{f(\theta,\varphi)}{r^2}\right)+(\alpha_0\gamma_0-\beta_0^2)r^2+\delta_0\left(\frac{1}{r}P_r+P_r\frac{1}{r}\right)+\frac{\lambda_0}{r^2}-\frac{\eta_0}{r}\right)\phi'_n(r,\theta,\varphi)=\quad E\phi'_n(r,\theta,\varphi)$$

(III-20)

Notons que cette équation est indépendante du temps et elle est plus simple que l'équation originale (III-13). Si on pose $w_0=(\alpha_0\gamma_0-\beta_0^2)$. Les solutions de cette équation varient en fonction de la valeur de w_0 . Pour trouver les solutions exactes de l'équation de Schrödinger (III-20), on se concentre sur le cas résoluble $w_0=0$. Dans ce cas, l'équation aux valeurs propres dans le système transformé est réécrite sous la forme :

$$-\hbar^2\gamma_0\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]\phi'_{nml}(r,\theta,\varphi)+\left(\gamma_0\frac{f(\theta,\varphi)}{r^2}+\delta_0\left(\frac{1}{r}P_r+P_r\frac{1}{r}\right)+\frac{\lambda_0}{r^2}-\frac{\eta_0}{r}\right)\phi'_{nml}(r,\theta,\varphi)=E_{nlm}\phi'_{nml}(r,\theta,\varphi)$$

(III-21)

Où $\phi'_{nml}(r,\theta,\varphi)$ étant les fonctions d'ondes totales. la méthode de séparation des variables pour résoudre cette équation est applicable. Par conséquent, on pose :

$$\phi'_{nlm}(r,\theta,\varphi)=R_{nl}(r)\,f_{nlm}(\theta,\varphi) \qquad \text{(III-22)}$$

Nous obtenons deux équations différentielles séparées, l'une représente l'équation radiale :

$$\frac{d^2}{dr^2}R(r)+\frac{a_1}{r}\frac{d}{dr}R(r)+\frac{1}{r^2}[-a_2r^2+\mathrm{a}_3\mathrm{r}-a_4]R(r)=0 \qquad \text{(III-23)}$$

Avec :

$$a_1=2\left(1+\frac{i\delta_0}{\hbar\gamma_0}\right),\quad a_2=-\frac{E_{nlm}}{\hbar^2\gamma_0}\ ,\ \mathrm{a}_3=\frac{\eta_0}{\hbar^2\gamma_0}\ ,a_4=-\frac{2i\delta_0}{\hbar\gamma_0}+\frac{\lambda_0}{\hbar^2\gamma_0}+c$$

Et l'autre représente l'équation angulaire:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+c-\frac{f(\theta,\varphi)}{\hbar^2}\right)f_{nlm}(\theta,\varphi)=0 \qquad \text{(III-24)}$$

Avec c est une constante de séparation qui est donné par :

$$c=l(l+1) \qquad \text{(III-25)}$$

3.4. Solution de la partie radiale de l'équation de Schrödinger:

L'équation radiale a la forme de cette équation :

$$\left[\frac{d^2}{ds^2}+\frac{\alpha_1-\alpha_2 s}{s(1-\alpha_3 s)}\frac{d}{ds}+\frac{-\xi_1 s^2+\xi_2 s-\xi_3}{s^2(1-\alpha_3 s)^2}\right]\psi(s)=0 \qquad \text{(III-26)}$$

Avec :

$$\alpha_1 = a_1 \ ,\alpha_2 = 0 \ ,\alpha_3 = 0 \ ,\xi_1 = a_2 \ ,\xi_2 = a_3 \ ,\xi_3 = a_4$$

Pour résoudre l'équation (III-23), on utilise la méthode de Nikiforov-Uvarov [4].

3.5. La méthode de Nikiforov-Uvarov (N-U):

La méthode de Nikiforov – Uvarov [4] , représente un très fort outil mathématique pour la résolution d'équation différentielle du second ordre à coefficients variables sous forme de polynômes, elle a été employée avec succès dans le traitement analytique d'un grand nombre de problème de la physique théorique dans le cas stationnaire et relativiste.

En effet cette méthode nous permet de donner les fonctions d'ondes et le spectre d'énergie de l'équation de Schrödinger, de Klein –Gordon, de Dirac en présence de quelques potentiels centraux et non centraux bien connus.

$$\psi''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\psi'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}\psi(s) = 0 \qquad \text{(III-27)}$$

Ou $\sigma(s)$ *and* $\tilde{\sigma}(s)$ sont des polynômes de degré non supérieur à 2, et $\tilde{\tau}(s)$ est un polynôme d'ordre non supérieur à 1. Si nous prenons la factorisation :

$$\psi(s) = \emptyset(s) y(s) \qquad \text{(III-28)}$$

L'Eq. (III-27) devienne :

$$\sigma(s)y''(s) + \tau(s)y'(s) + \nu y(s) = 0 \qquad \text{(III-29)}$$

Et la fonction $\emptyset(s)$ est définie comme dérivé logarithmique :

$$\frac{\emptyset(s)'}{\emptyset(s)} = \frac{\pi(s)}{\sigma(s)} \qquad \text{(III-30)}$$

L'autre partie $y(s)$ est le type de la fonction hypergéométrique dont les solutions polynomiales sont données par la formule de Rodrigues :

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho(s)}\frac{d^n}{ds^n}[\sigma^n(s)\rho(s)] \qquad \text{(III-31)}$$

Où B_n est la constante de normalisation, et la fonction de poids doit satisfaire la condition :

$$(\sigma\rho)' = \tau\rho \qquad \text{(III-32)}$$

La fonction π et le paramètre ν requis pour cette méthode sont définis comme suit:

$$\pi(s) = \frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma} - k\sigma} \qquad \text{(III-33)}$$

$$\nu = k + \pi' \qquad \text{(III-34)}$$

Alternativement, dont le but de trouver la valeur de K, l'expression sous la racine carrée doit être le carré d'un polynôme. Ainsi, une nouvelle équation aux valeurs propres pour l'équation hypergéométrique devient :

$$\nu = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' \quad \text{(III-35)}$$

Où

$$\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s) \quad \text{(III-36)}$$

Et son dérivé est négatif.

L'équation suivante est une forme générale de l'équation de Schrödinger, qui peut être obtenu avec différents potentiels.

$$\left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 s}{s(1-\alpha_3 s)}\frac{d}{ds} + \frac{-\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3}{s^2(1-\alpha_3 s)^2}\right]\psi(s) = 0 \quad \text{(III-37)}$$

Nous pouvons résoudre ceci comme suit. Lorsque l'Eq. (III.37) est comparée avec l'Eq. (III.27), nous obtenons

$$\tilde{\tau} = \alpha_1 - \alpha_2 s \quad \text{(III-38)}$$

Et

$$\sigma = s(1 - \alpha_3 s) \quad \text{(III-39)}$$

Et aussi

$$\tilde{\sigma} = -\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3 \quad \text{(III-40)}$$

En substituent ceux-ci dans l'Eq. (III-33) :

$$\pi(s) = \alpha_4 + \alpha_5 s \pm \sqrt{(\alpha_6 - k\alpha_3)s^2 + (\alpha_7 + k)s + \alpha_8} \quad \text{(III-41)}$$

Où

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}(1 - \alpha_1), \quad \text{(III-42)}$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2}(\alpha_2 - 2\alpha_3), \quad \text{(III-43)}$$

$$\alpha_6 = \alpha_5^2 + \xi_1, \quad \text{(III-44)}$$

$$\alpha_7 = 2\alpha_4\alpha_5 - \xi_2, \quad \text{(III-45)}$$

$$\alpha_7 = 2\alpha_4\alpha_5 - \xi_2, \quad \text{(III-46)}$$

$$\alpha_8 = \alpha_4^2 + \xi_3, \quad \text{(III-47)}$$

Dans l'équation (III-41), la fonction sous la racine carrée doit être le carrée d'un polynôme conformément à la méthode de (NU), de telle sorte que

$$k_{1,2} = -(\alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8) \mp 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9} \quad \text{(III-48)}$$

Ou, nous définissons

$$\alpha_9 = \alpha_3\alpha_7 + \alpha_3^2\alpha_8 + \alpha_6 \tag{III-49}$$

Pour chaque K les fonctions π sont obtenues. Pour

$$k = -(\alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8) - 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9} \tag{III-50}$$

π Devienne

$$\pi(s) = \alpha_4 + \alpha_5 s - \left[\left(\sqrt{\alpha_9 + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}}\right)s - \sqrt{\alpha_8}\right] \tag{III-51}$$

Pour le même K, pour l'équation (III-36), (III-38) et (III-41)

$$\tau = \alpha_1 + 2\alpha_4 - (\alpha_2 - 2\alpha_5)s - 2\left[\left(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}\right)s - \sqrt{\alpha_8}\right] \tag{III-52}$$

Et

$$\tau' = -(\alpha_2 - 2\alpha_5) - 2\left(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}\right) = -2\alpha_3 - 2\left(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}\right) < 0 \tag{III-53}$$

Sont obtenues. Quant l'équation (III-34) est utilisée avec l'équation (III-52) et l'équation (III-53) l'équation suivante est dérivée:

$$\alpha_2 n - (2n+1)\alpha_5 + (2n+1)\left(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}\right) + n(n-1)\alpha_3 + \alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8 + 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9} = 0 \tag{III-54}$$

Cette équation donne le spectre de l'énergie pour le problème donné.

Pour l'équation (III-32).

$$\rho(s) = s^{\alpha_{10}-1}(1-\alpha_3 s)^{\frac{\alpha_{11}}{\alpha_3}-\alpha_{10}-1} \tag{III-55}$$

Est trouvé et lorsque cette équation et utilisée dans l'équation (III-31)

$$y_n = P_n^{\left(\alpha_{10}-1,\frac{\alpha_{11}}{\alpha_3}-\alpha_{10}-1\right)}(1-2\alpha_3 s) \tag{III-56}$$

Est obtenue, ou,

$$\alpha_{10} = \alpha_1 + 2\alpha_4 + 2\sqrt{\alpha_8} \tag{III-57}$$

Et

$$\alpha_{11} = \alpha_2 - 2\alpha_5 + 2\left(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}\right) \tag{III-58}$$

Et $P_n^{(\alpha,\beta)}$ sont les polynômes de Jacobi. Utilisant l'équation (III-30).

$$\emptyset(s) = s^{\alpha_{12}}(1-\alpha_3 s)^{-\alpha_{12}-\frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} \tag{III-59}$$

Et obtenue la solution générale devienne :

$$\psi = \phi(s)y(s) \tag{III-60}$$

$$\psi = s^{\alpha_{12}}(1-\alpha_3 s)^{-\alpha_{12}-\frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} P_n^{\left(\alpha_{10}-1,\frac{\alpha_{11}}{\alpha_3}-\alpha_{10}-1\right)}(1-2\alpha_3 s) \tag{III-61}$$

Ici, les fonctions alpha sont données par :

$$\alpha_{12} = \alpha_4 + \sqrt{\alpha_8} \tag{III-62}$$

Et

$$\alpha_{13} = \alpha_5 - (\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) \tag{III-63}$$

Pour quelques problèmes $\alpha_3 = 0$. Pour ces types de problèmes quant

$$lim_{\alpha_3 \to 0} P_n^{\left(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3}-\alpha_{10}-1\right)}(1-2\alpha_3 s) = L_n^{\alpha_{10}-1}(\alpha_{11}s) \tag{III-64}$$

Et

$$lim_{\alpha_3 \to 0}(1-\alpha_3 s)^{-\alpha_{12}-\frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} = e^{\alpha_{13}s} \tag{III-65}$$

La solution donnée dans l'équation (III.61) devienne :

$$\psi = s^{\alpha_{12}} e^{\alpha_{13}s} L_n^{\alpha_{10}-1}(\alpha_{11}s) \tag{III-66}$$

Dans certains cas, on est besoin d'une deuxième solution de l'équation (III-61). Dans ce cas, si la même procédure est suivie on utilisant

$$k = -(\alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8) + 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9} \tag{III-67}$$

Cette solution devienne

$$\psi = s^{\alpha_{12}^*}(1-\alpha_3 s)^{-\alpha_{12}^*-\frac{\alpha_{13}^*}{\alpha_3}} P_n^{\left(\alpha_{10}^*-1, \frac{\alpha_{11}^*}{\alpha_3}-\alpha_{10}-1\right)}(1-2\alpha_3 s) \tag{III-68}$$

Et le spectre d'énergie est

$$\alpha_2 n - 2n\alpha_5 + (2n+1)(\sqrt{\alpha_9} - \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) + n(n-1)\alpha_3 + \alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8 + 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9} + \alpha_5 = 0 \tag{III-69}$$

Les paramètres prédéfinis alpha sont les suivants :

$$\alpha_{10}^* = \alpha_1 + 2\alpha_4 - 2\sqrt{\alpha_8} \tag{III-70}$$

$$\alpha_{11}^* = \alpha_2 - 2\alpha_5 + 2(\sqrt{\alpha_9} - \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) \tag{III-71}$$

$$\alpha_{12}^* = \alpha_4 - \sqrt{\alpha_8} \tag{III-72}$$

$$\alpha_{13}^* = \alpha_5 - (\sqrt{\alpha_9} - \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) \tag{III-73}$$

D'après la méthode (N-U), les fonctions α_i de notre système sont :

$$\alpha_4 = \frac{1-a_1}{2}, \alpha_5 = 0, \alpha_6 = a_2, \alpha_7 = -a_3, \alpha_8 = \frac{(1-a_1)^2}{4}, \ \alpha_9 = a_2,$$

$$\alpha_{10} = 1 + 2\sqrt{\frac{(1-a_1)^2}{4} + a_4}, \alpha_{11} = 2\sqrt{a_2}, \alpha_{12} = \frac{1-a_1}{2} + \sqrt{\frac{(1-a_1)^2}{4} + a_4}, \alpha_{13} = -\sqrt{a_2} \tag{III-74}$$

On utilise l'équation (III-54), on obtient les valeurs propres de l'invariant I_0 :

$$E_{nlm} = -\frac{{\eta_0}^2}{4\hbar^2\gamma_0} \frac{1}{(n+l'+1)^2} \tag{III-75}$$

Avec:

$$l' = \frac{1}{2}\sqrt{\left(1-\frac{2i\delta_0}{\hbar\gamma_0}\right)^2 + 4l(l+1) + \frac{4\lambda_0}{\hbar^2\gamma_0}} - \frac{1}{2} \tag{III-76}$$

On utilise l'équation (III-66), on trouve la solution de l'équation radiale (III-23) comme suit :

$$R(r) = A_n r^{l'-\frac{i\delta_0}{\hbar\gamma_0}} e^{-\sqrt{a_2}\, r} L_n^{2l'+1}(2\sqrt{a_2}\, r) \tag{III-77}$$

Où A_n : la constante de normalisation.

Pa le choix de : $\frac{\delta_0}{\gamma_0} = \frac{-i\hbar}{2}$ et l'utilisation de la propriété suivante :

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} |L_n^\alpha(x)|^2 dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)} \tag{III-78}$$

On obtient :

$$A_n = \left[\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2l'+2)}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\eta_0}{\hbar^2\gamma_0}\frac{1}{(n+l'+1)}\right]^{l'+\frac{1}{2}} \tag{III-79}$$

$$R(r) = \left[\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2l'+2)}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\eta_0}{\hbar^2\gamma_0}\frac{1}{(n+l'+1)}\right] \left[\frac{\eta_0}{\hbar^2\gamma_0}.\frac{1}{(n+l'+1)} r\right]^{l'-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\eta_0}{2\hbar^2\gamma_0}.\frac{1}{(n+l'+1)}r} L_n^{2l'+1}\left(\frac{\eta_0}{\hbar^2\gamma_0}.\frac{1}{(n+l'+1)} r\right) \tag{III-80}$$

3.6. Solution de la partie angulaire de l'équation de Schrödinger :

Dans cette section, nous considérons le potentiel non central donné par les deux références [41,42] :

$$f(\theta,\varphi) = \frac{a}{sin^2\theta} + \frac{b\cos\theta}{sin^2\theta} + \frac{V(\varphi)}{sin^2\theta} ,$$

$$V(\varphi) = d cosec^2 \nu\varphi + e sec^2 \nu\varphi , \quad \nu = 1,2,\ldots \tag{III-81}$$

Où a et b sont des constantes positives réelles, d et e sont des paramètres réelles.

Nous décomposons la fonction $f_{nlm}(\theta,\varphi)$ sous la forme:

$$f_{nlm}(\theta,\varphi) = g_{nlm}(\theta)\mathrm{h_{nlm}}(\varphi) , \tag{III-82}$$

et nous substituons l'équation (III-82) dans l'équation (III-24), nous obtenons deux équations différentielles séparées :

$$\frac{d^2g(\theta)}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{dg(\theta)}{d\theta}+\left(c-\frac{m^2}{\sin^2\theta}-\frac{a}{\hbar^2\sin^2\theta}-b\frac{\cos\theta}{\hbar^2\sin^2\theta}\right)g(\theta)=0 \quad \text{(III-83)}$$

$$\frac{d^2\mathrm{h}(\varphi)}{d\varphi^2}+\left(m^2-\frac{V(\varphi)}{\hbar^2}\right)\mathrm{h}(\varphi)=0 \quad \text{(III-84)}$$

L'une représente l'équation de la partie angulaire qui varie en fonction du paramètre θ et l'autre varie en fonction de .

En introduisant un nouveau changement de variable $\cos\theta = z$, on peut maintenant réécrire l'équation (III-83) sous la forme :

$$\frac{d^2g(z)}{dz^2}-\frac{2z}{1-z^2}\frac{dg(z)}{dz}+\frac{1}{(1-z^2)^2}\left(-cz^2-\frac{b}{\hbar^2}z+c-m^2-\frac{a}{\hbar^2}\right)g(z)=0 \quad \text{(III-85)}$$

Pour évaluer les solutions de cette équation différentielle, on utilise la méthode NU [4].

En comparant l'équation (III-27) avec cette équation, on en déduit les polynômes associés suivants :

$$\tilde{\tau}(z)=-2z\,,\quad \sigma(z)=1-z^2,\quad \tilde{\sigma}(s)=-cz^2-\frac{b}{\hbar^2}z+c-m^2-\frac{a}{\hbar^2} \quad \text{(III-86)}$$

où $\tilde{\tau}(z)$, $\sigma(z)$, et $\tilde{\sigma}(z)$ sont des fonctions d'une variable z.

La fonction π figurée dans l'équation (III-33) s'écrit sous la forme :

$$\pi(z)=\pm\left[(\mathrm{c}-\mathrm{k})z^2+\frac{b}{\hbar^2}z-\left(c+m^2-\frac{b}{\hbar^2}-k\right)\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{(III-87)}$$

Selon la méthode NU, nous pouvons écrire π comme

$$\pi(z)=\pm\begin{cases}\left(\frac{m^2+(a/\hbar^2)^2+\mu}{2}\right)^{\frac{1}{2}}z+\left(\frac{m^2+(a/\hbar^2)^2-\mu}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, & k=\frac{2c-m^2-(a/\hbar^2)-\mu}{2}\\ \left(\frac{m^2+(a/\hbar^2)^2-\mu}{2}\right)^{\frac{1}{2}}z+\left(\frac{m^2+(a/\hbar^2)^2+\mu}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, & k=\frac{2c-m^2-(a/\hbar^2)+\mu}{2}\end{cases} \quad \text{(III-88)}$$

Avec $\mu=[(m^2+a/\hbar^2)^2-(b/\hbar^2)^2]^{1/2}$. Pour le polynôme $\tau=\tilde{\tau}+2\pi$,

Ou son dérivé est négative, on a :

$$\tau(z)=-2z\left[1+\left(\frac{m^2+(a/\hbar^2)+u}{2}\right)^{1/2}\right]-2\left(\frac{m^2+(a/\hbar^2)-u}{2}\right)^{1/2}. \quad \text{(III-89)}$$

Puis, nous obtenons λ et $\lambda_{n'}$,

$$\lambda=\frac{2c-(m^2+a/\hbar^2\;)}{2}-\frac{\mu}{2}-\left(\frac{m^2+a/\hbar^2+\mu}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(III-90)}$$

$$\lambda_{n'}=2n'\left[1+\left(\frac{m^2+a/\hbar^2+\mu}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]+n'(n'-1) \quad \text{(III-91)}$$

En assimilant l'équation (III.-90) avec l'équation (III-91), on a :

$$(2n'+1)\left(\frac{m^2+a/\hbar^2+\mu}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+n'(n'+1)+\frac{\mu-(m^2+a/\hbar^2)}{2}=c-(m^2+a/\hbar^2) \quad \text{(III-92)}$$

En utilisant la définition de $c=l(l+1)$ on obtient la valeur de l sous la forme :

$$l=n'+\left(\frac{m^2+b/\hbar^2+\left(m^2+b/\hbar^2-(b/\hbar^2)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(III-93)}$$

En insérant le résultat de l'équation (III-93) dans l'expression des valeurs propres de la partie radiale (III-75). Nous obtenons les valeurs propres de l'opérateur invariant I_0 pour notre système :

$$E_{n\,n'\,m}=-\frac{\eta_0{}^2}{4\hbar^2\gamma_0}\frac{1}{\left[n+\left(\left(\left(n'+\left(\frac{m^2+a/\hbar^2+\left(m^2+b/\hbar^2-(b/\hbar^2)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\lambda_0}{\hbar^2\gamma_0}-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\right]^2} \quad \text{(III-94)}$$

On peut également obtenir la fonction d'onde de la partie angulaire de l'équation angulaire (III-85), en utilisant $\sigma(z)$ et $\pi(z)$ sur la base de la méthode (N-U). Pour cela, les fonctions nécessaires au développement de la théorie (N-U) correspondant sont :

$$W(z)=(1-z)^{(m_1+m_2)/2}\,(1-z)^{(m_1-m_2)/2} \quad \text{(III-95)}$$

$$\rho(z)=(1+z^2)^{m_1}\,\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{-m_2} \quad \text{(III-96)}$$

$$y_{n'}(z)=y_{0,n'}(1-z)^{-(m_1+m_2)}(1+z)^{-(m_1-m_2)}\times\frac{d^{n'}}{dz^{n'}}\left[(1-z)^{n'+(m_1+m_2)}(1+z)^{n'+(m_1-m_2)}\right]$$

(III-97)

Où $m_1=[(m^2+a/\hbar^2+\mu)/2]^{\frac{1}{2}}, m_2=[(m^2+a/\hbar^2-\mu)/2]^{\frac{1}{2}}$.

La solution $y_{n'}(z)$ est exprimée en termes de polynômes de Jacobi $P_{n'}^{(m_1+m_2,\ m_1-m_2)}(z)$. En substituant les équations (III-95), (III-96) et (III-97) dans l'équation (III-28), les fonctions d'onde correspondantes sont :

$$g_{n'}(\theta)=g_{0,n'}(1-\cos\theta)^{\frac{(m_1+m_2)}{2}}(1+\cos\theta)^{\frac{(m_1-m_2)}{2}}P_{n'}^{(m_1+m_2,\ m_1-m_2)}(\cos\theta) \quad \text{(III-98)}$$

tel que $g_{0,n'}$ est la constante de normalisation déterminé par :

$$\int_{-1}^{1}g_{n'}(z)^*\,g_{n'}(z)\,dz=1.$$

En utilisant la relation d'orthogonalité des polynômes de Jacobi, la constante de normalisation devient :

$$g_{0,n'} = \left(\frac{(2n'+2m_1+1)\Gamma(n'+1)\Gamma(n'+2m_1+1)}{2^{2m_1+1}\Gamma(n'+m_1+m_2+1)\Gamma(n'+m_1-m_2+1)}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(III-99)}$$

Pour compléter la solution de la partie angulaire de l'équation de Schrödinger, nous résolvons l'équation (III-84) qui varie en fonction de φ.

$$\frac{d^2h(\varphi)}{d\varphi^2} + \left(m^2 - \frac{d\csc^2\nu\varphi + e\csc^2\nu\varphi}{\hbar^2}\right)h(\varphi) = 0\,, \quad \nu = 1,2,\ldots \qquad \text{(III-100)}$$

La définition d'une nouvelle variable $z = \cos(\nu\varphi)$, nous permet d'écrire l'équation différentielle (III.100) sous la forme :

$$\frac{d^2h(z)}{dz^2} + \frac{z}{1-z^2}\frac{dh(z)}{dz} + \left(\frac{-E^2z^4+\Omega z^2-\Lambda}{\left(z(1-z^2)\right)^2}\right)h(z) = 0 \qquad \text{(III-101)}$$

Tel que :

$$E^2 = \frac{m^2}{\nu^2} \quad , \ \Omega = \frac{m^2}{\nu^2} - \frac{d}{\hbar^2\nu^2} + \frac{e}{\hbar^2\nu^2} \quad , \ \Lambda = \frac{e}{\hbar^2\nu^2} \qquad \text{(III-102)}$$

Il existe de nombreuses techniques disponibles dans la littérature qui peuvent être utilisées pour résoudre cette équation différentielle avec des conditions aux limites. Dans notre cas, nous introduisons une nouvelle technique qui s'appelle la méthode d'itération asymptotique (AIM) [5,6]. L'avantage de cette méthode réside dans sa capacité à améliorer la précision du calcul numérique des observables physiques, en particulier le spectre d'énergie.

3.7 Les concepts de base de la méthode d'itération asymptotique :

Dans cette section, nous présentons des notions de base sur la méthode d'itération asymptotique (AIM). Cette méthode a été proposée pour résoudre l'équation différentielle linéaire et homogène de second ordre suivante :

$$\frac{d^2f_{n(x)}}{dx^2} = \lambda_0(x)\frac{df_n(x)}{dx} + S_0(x)f_n(x), \quad \lambda_0(x) \neq 0 \qquad \text{(III-103)}$$

Essentiellement, les fonctions $S_0(x) et\, \lambda_0(x)$ sont suffisamment différentiables. L'équation (III.103) peut être itérée jusqu'à $(k+1)$ ème et le $(k+2)$ ème dérivées, $k = 1,2,3,\ldots$ par conséquent, nous avons

$$\frac{d^{k+1}f_n(x)}{dx^{k+1}} = \lambda_{k-1}(x)\frac{df_n(x)}{dx} + S_{k-1}(x)f_n(x) \qquad \text{(III-104)}$$

$$\frac{d^{k+2}f_n(x)}{dx^{k+2}} = \lambda_k(x)\frac{df_n(x)}{dx} + S_k(x)f_n(x) \tag{III-105}$$

Où $\lambda_n(x) et\, S_k(x)$ sont exprimées par les relations de récurrence suivantes :

$$\lambda_k(x) = \frac{df_{k-1}(x)}{dx} + S_{k-1}(x) + \lambda_0(x)\lambda_{k-1}(x), \tag{III-106}$$

$$S_k(x) = \frac{ds_{k-1}}{dx} + S_0(x)\lambda_{k-1}(x) \tag{III-107}$$

A partir du rapport de la $(k+2)$ème et $(k+1)$ ème dérivés, nous avons

$$\frac{d}{dx}\ln\left[\frac{d^{k+1}f_n(x)}{dx^{k+1}}\right] = \frac{\frac{d^{k+2}f_n(x)}{dx^{k+2}}}{\frac{d^{k+1}f_n(x)}{dx^{k+1}}} = \frac{\lambda_k(x)\left[\frac{df_n(x)}{dx}+\frac{s_k(x)}{\lambda_k(x)}f_n(x)\right]}{\lambda_{k-1}(x)\left[\frac{df_n(x)}{dx}+\frac{S_{k-1}(x)}{\lambda_{k-1}(x)}f_n(x)\right]} \tag{III-108}$$

Maintenant, nous introduisons l'aspect asymptotique de la méthode. Si nous avons, pou k grand $k > 0$, on obtient $\varpi(x)$ sous forme :

$$\frac{S_k(x)}{\lambda_k(x)} = \frac{S_{k-1}(x)}{\lambda_{k-1}(x)} = \varpi(x) \tag{III-109}$$

Avec la condition :

$$\Delta_k(x) = \begin{bmatrix} \lambda_k(x) & S_k(x) \\ \lambda_{k-1}(x) & S_{k-1}(x) \end{bmatrix} = 0, \qquad k = 1,2,3,\dots \tag{III-110}$$

Ensuite, la solution de l'équation $(III.103)$ peut être écrite comme :

$$f_n(x) = exp\left(-\int_0^x \varpi(x)dz\right)\left[h_1 + h_2\int_0^x exp\left(\int_0^z[\lambda_0(x) + 2\varpi(x)]\right)dt\right]dz \tag{III-111}$$

Où $h_1\ et\ h_2$ sont deux constantes.

Pour un potentiel donné, la procédure consiste d'abord de convertir l'équation de Schrödinger dans la forme de l'équation (III-103). Ensuite, les fonctions $S_0(x) et\ \lambda_0(x)$ sont déterminées, tandis que $S_n(x) et \lambda_n(x)$ sont calculées par les relations de récurrence (III-106) et (III-107).

Si le problème est exactement résoluble, les valeurs propres de l'énergie sont obtenues en imposant la condition représentée par l'équation (III-110). Dans le cas Contraire, pour un nombre quantique principal spécifique n, nous choisissons un point x_0 approprie, généralement déterminé comme la valeur maximale de la fonction d'onde asymptotique ou bien la valeur minimal du potentiel et par conséquent les valeurs propres de l'énergie approximatives sont déterminées à partir des racines de la condition (III-110).

La solution générale de l'équation (III-103) est donnée par l'équation (III-111). La première partie de l'équation (III-111) donne les solutions polynomiales qui sont convergentes et physiques, tandis que la seconde partie de l'équation (III-111) donne des solutions divergentes.

Bien que l'équation (III-111) soit la solution générale de l'équation (III-103), nous prenons le coefficient de la seconde partie $h_2 = 0$, afin de trouver les solutions intégrables. Par conséquent, les fonctions propres correspondantes peuvent être obtenues à partir du générateur de la fonction d'onde suivante pour les potentiels exactement résolubles :

$$f_n(x) = h_1 exp\left(-\int_0^x \frac{S_k(t)}{\lambda_k(t)}dt\right), \qquad k = 1,2,\dots,n \qquad \text{(III-112)}$$

Où n représente le nombre quantique principal.

On choisit :

$$h(z) = z^{\zeta}(1-z^2)^{\delta}\chi(z) \qquad \text{(III-113)}$$

Avec :

$$\delta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 + 4\frac{e}{\hbar^2 v^2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(III-114)}$$

$$\zeta = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(1 + 4\frac{d}{\hbar^2 v^2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(III-115)}$$

Lorsque l'on insère l'équation. (III-115) dans l'équation (III-101), nous obtenons :

$$\frac{d^2\chi(z)}{dz^2} = \lambda_0(z)\frac{d\chi(z)}{dz} + S_0(z)\chi(z) \qquad \text{(III-116)}$$

Avec :

$$\lambda_0(z) = \frac{(2\zeta+4\delta+1)z^2 - 2\zeta}{z(1-z^2)}, \qquad S_0(z) = \frac{(2\delta+\zeta)^2 - E^2}{(1-z^2)} \qquad \text{(III-117)}$$

Maintenant, nous calculons, $\Delta_1(z), \Delta_2(z), \Delta_3(z), \dots, \Delta_{n^*}(z)$, la condition de quantification donne : $\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{n^*}$. En utilisant le même mode opératoire que dans le cas précédent et après quelques itérations, nous obtenons :

$$\frac{S_0(z)}{\lambda_0(z)} = \frac{S_1(z)}{\lambda_1(z)} \Rightarrow \Delta_1(z) = \lambda_1(z)S_0(z) - S_1(z)\lambda_0(z) = 0 \Rightarrow E_0 = \pm(2\delta+\zeta) \qquad \text{(III-118)}$$

$$\frac{S_1(z)}{\lambda_1(z)} = \frac{S_2(z)}{\lambda_2(z)} \Rightarrow \Delta_2(z) = \lambda_2(z)S_1(z) - S_2(z)\lambda_1(z) = 0 \Rightarrow E_1 = \pm(2\delta+\zeta+2) \qquad \text{(III-119)}$$

$$\frac{S_2(z)}{\lambda_2(z)} = \frac{S_3(z)}{\lambda_3(z)} \Rightarrow \Delta_3(z) = \lambda_3(z)S_2(z) - S_3(z)\lambda_2(z) = 0 \Rightarrow E_2 = \pm(2\delta+\zeta+4) \qquad \text{(III-120)}$$

Selon les formes des énergies $E_0, E_1, et\ E_2$, nous pouvons écrire les valeurs propres sous la forme générale :

$$\boldsymbol{E_{n''} = \pm(2\delta + \zeta + 2n''), n'' = 0, 1, 2, \ldots.} \qquad \text{(III.-121)}$$

En utilise le premier terme de l'équation (III.102), nous obtenons la relation :

$$\boldsymbol{m^2 = v^2 E_{n''}^2 = v^2(2\delta + \zeta + 2n'')^2} \qquad \text{(III-122)}$$

Cette dernière équation nous permet de remplacer la constante de séparation m^2 dans l'équation (III.94), de sorte que les valeurs propres de l'operateur I_0 pour la deuxième partie angulaire de l'équation de Schrödinger est s'écrit sous la forme :

$$E_{n\,n'm} = -\frac{\eta_0^2}{4\hbar^2\gamma_0}\frac{1}{\left[n+\left(\left(n'+\left(\frac{v^2(2\delta+\zeta+2n'')^2+a/\hbar^2+\left(v^2(2\delta+\zeta+2n'')^2+b/\hbar^2-(b/\hbar^2)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\lambda_0}{\hbar^2\gamma_0}-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\right]^2}$$

(III-123)

Si l'on pose $x = z^2$, l'équation différentielle (II-116) se transforme à une équation différentielle hypergéométrique [43]. Et sa solution est donnée par

$$\chi(z) = {}_2F_1\left(-n'', 2\delta + \zeta + 2n''; \zeta + \frac{1}{2}; z^2\right) \qquad \text{(III-124)}$$

${}_2F_1$: Fonction hypergéométrique.

Donc, on obtient la solution de l'équation (III-100) sous la forme :

$$h(\varphi) = N_{n''}(\cos(v\varphi))^{\zeta}(\sin(v\varphi))^{2\delta}\,{}_2F_1\left(-n'', 2\delta + \zeta + n''; \zeta + \frac{1}{2}; \cos(v\varphi)^2\right) \qquad \text{(III-125)}$$

Où $N_{n''}$ est la constante de normalisation de la fonction d'onde angulaire $h(\varphi)$. cette constante est calculée à partir de la normalisation :

$$\int_0^{2\pi} |h(\varphi)|^2\, d\varphi = 1 \qquad \text{(III-126)}$$

En utilisant la relation d'orthogonalité des polynômes de Jacobi [43,44] suivante :

$$\int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{s-\gamma}\left[\,{}_2F_1(-n, n+s; \gamma; z)\right]^2 dz = \frac{n!}{(s+2n)}\frac{\Gamma(\gamma)^2\Gamma(n+s-\gamma+1)}{\Gamma(n+s)\Gamma(s+\gamma)} \qquad \text{(III-127)}$$

La constante de normalisation devient :

$$N_{n''} = \left(\frac{(2\delta+\zeta+2n'')\Gamma(2\delta+\zeta+2n'')\Gamma\left(\delta+n''+\frac{1}{2}\right)}{2n''!\,\Gamma\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)^2\Gamma\left(\delta+n''+\frac{1}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(III-128)}$$

Par conséquent, les états propres de l'invariante I_0 sont représentés sous la forme :

$$\phi'_{n\,n'\,n''}(r,\theta,\varphi)=\left(\frac{(2n'+2m_1+1)\Gamma(n'+1)\Gamma(n'+2m_1+1)}{2^{2m_1+1}\Gamma(n'+m_1+m_2+1)\Gamma(n'+m_1-m_2+1)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(2\delta+\zeta+2n'')\Gamma(2\delta+\zeta+2n'')\Gamma\left(\delta+n''+\frac{1}{2}\right)}{2n''!\Gamma\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)^{2}\Gamma\left(\delta+n''+\frac{1}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\times\left[\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2l'+2)}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\eta_0}{\hbar^2\gamma_0}\frac{1}{(n+l'+1)}\right]\left[\frac{\eta_0}{\hbar^2\gamma_0}.\frac{1}{(n+l'+1)}r\right]^{l'-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\eta_0}{2\hbar^2\gamma_0}\frac{1}{(n+l'+1)}r}L_n^{2l'+1}\left(\frac{\eta_0}{\hbar^2\gamma_0}.\frac{1}{(n+l'+1)}r\right)(1-\cos\theta)^{(m_1+m_2)/2}(1+\cos\theta)^{(m_1-m_2)/2}p_{n'}^{(m_1+m_2,\,m_1-m_2)}(\cos\theta)(\cos v\varphi)^{\zeta}(\sin v\varphi)^{2\delta}\,{}_2F_1\left(-n'',2\delta+\zeta+n'';\zeta+\frac{1}{2};\cos^2 v\varphi\right)$$

(III-129)

Les états propres normalisés complètes pour $I(t)$ sont donc évalués comme suit :

$$\phi_{n\,n'n''}(r,\theta,\varphi)=U^{-1}\phi'_{n\,n'\,n''}(r,\theta,\varphi)\qquad\text{(III-130)}$$

$$\phi_{n\,n'n''}(r,\theta,\varphi)=\left(\frac{(2n'+2m_1+1)\Gamma(n'+1)\Gamma(n'+2m_1+1)}{2^{2m_1+1}\Gamma(n'+m_1+m_2+1)\Gamma(n'+m_1-m_2+1)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(2\delta+\zeta+2n'')\Gamma(2\delta+\zeta+2n'')\Gamma\left(\delta+n''+\frac{1}{2}\right)}{2n''!\Gamma\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)^{2}\Gamma\left(\delta+n''+\frac{1}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\times\left[\frac{\eta_0\Gamma(n+1)}{\hbar^2\gamma_0(n+l'+1)\Gamma(n+2l'+2)}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\eta(t)}{\hbar^2\gamma(t)}\frac{1}{(n+l'+1)}\right]^{l'}e^{\frac{i\beta(t)}{2\hbar\gamma_0}r^2}r^{l'-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\eta(t)}{2\hbar^2\gamma(t)}\frac{1}{(n+l'+1)}r}L_n^{2l'+1}\left(\frac{\eta(t)}{\hbar^2\gamma(t)}\frac{1}{(n+l'+1)}r\right)(1-\cos\theta)^{(m_1+m_2)/2}(1+\cos\theta)^{(m_1-m_2)/2}p_{n'}^{(m_1+m_2,\,m_1-m_2)}(\cos\theta)(\cos v\varphi)^{\zeta}(\sin v\varphi)^{2\delta}\,{}_2F_1\left(-n'',2\delta+\zeta+n'';\zeta+\frac{1}{2};\cos^2 v\varphi\right)$$

(III-131)

3.8La phase totale et la solution de l'équation de Schrödinger :

Il nous reste à déterminer la phase $\xi_{n\,n'\,n''}(t)$ qui satisfait la relation suivante :

$$\hbar\frac{\partial}{\partial t}\xi_{n\,n'\,n''}(t)=\left\langle\phi_{nn'n''}(t)\right|\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H\right)\left|\,\phi_{nn'n''}(t)\right\rangle\qquad\text{(III-132)}$$

Appliquons la transformation unitaire U(t) à gauche et à droite de cette équation devient :

$$\hbar\frac{\partial}{\partial t}\xi_{n\,n'\,n''}(t)=\left\langle\phi_{nn'n''}(r,\theta,\varphi)\right|-\frac{A(t)}{\gamma(t)}I_0-\frac{\delta_0}{2\gamma_0}\frac{\dot\gamma(t)}{\gamma(t)}\left|\,\phi_{nn'n''}(r,\theta,\varphi)\right\rangle\qquad\text{(III-133)}$$

Ensuit, une évaluation mineure conduit à obtenir les phases sou la forme :

$$\xi_{n\,n'\,n''}(t)=-E_{nn'n''}\int_0^t\frac{A(t')}{\hbar\gamma(t')}\mathrm{d}t'-i\ln\left(\frac{\gamma(t)}{\gamma_0}\right)^{-\frac{1}{4}}\qquad\text{(III-134)}$$

Puis, à l'aide de l'équation (III-123), cette équation est évaluée et finalement, on obtient la phase sous la forme :

(III-135)

Par conséquent, en substituant les équations (III-131) et (III-135) dans la

$$\xi_{n\,n'\,n''}(t) = +\frac{\eta_0^2}{4\hbar^3\gamma_0}\frac{1}{\left[n+\left(\left(\left(n'+\left(\frac{v^2(2\delta+\zeta+2n'')^2+a/\hbar^2+\left(v^2(2\delta+\zeta+2n'')^2+b/\hbar^2-(b/\hbar^2)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\lambda_0}{\hbar^2\gamma_0}-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\right]^2}\int_0^t\frac{A(t')}{\gamma(t')}dt' - i\ln\left(\frac{\gamma(t)}{\gamma_0}\right)^{-\frac{1}{4}}$$

fonction $\psi_{nn'n''}(r,\theta,\varphi) = e^{i\xi_{nn'n''}(t)}\phi_{nn'n''}(r,\theta,\varphi)$, les solutions exactes d'ordre n l'équation de Schrödinger originale associe à l'Hamiltonien $H(r,p,\theta,\varphi,t)$ sont évaluées par :

$$\psi_{nn'n''}(r,\theta,\varphi) = \left(\frac{(2n'+2m_1+1)\Gamma(n'+1)\Gamma(n'+2m_1+1)}{2^{2m_1+1}\Gamma(n'+m_1+m_2+1)\Gamma(n'+m_1-m_2+1)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(2\delta+\zeta+2n'')\Gamma(2\delta+\zeta+2n'')\Gamma\left(\delta+n''+\frac{1}{2}\right)}{2n''!\Gamma\left(\zeta+\frac{1}{2}\right)^2\Gamma\left(\delta+n''+\frac{1}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\times \left[\frac{\eta_0\Gamma(n+1)}{\hbar^2\gamma_0(n+l'+1)\Gamma(n+2l'+2)}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\eta(t)}{\hbar^2\gamma(t)}\frac{1}{(n+l'+1)}\right]^{l'} e^{\frac{i\beta(t)}{2\hbar\gamma_0}r^2}r^{l'-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\eta(t)}{2\hbar^2\gamma(t)}\frac{1}{(n+l'+1)}r}L_n^{2l'+1}\left(\frac{\eta(t)}{\hbar^2\gamma(t)}\frac{1}{(n+l'+1)}r\right)(1-\cos\theta)^{(m_1+m_2)/2}(1+\cos\theta)^{(m_1-m_2)/2}P_{n'}^{(m_1+m_2,\,m_1-m_2)}(\cos\theta)(\cos v\varphi)^{\zeta}(\sin v\varphi)^{2\delta}\,{}_2F_1\left(-n'',2\delta+\zeta+n'';\zeta+\frac{1}{2};\cos^2 v\varphi\right)e^{i\xi_{nn'n''}(t)}$$

(III-136)

Ce sont les résultats fondamentaux de notre recherche, qui sont les fonctions d'onde du système qui satisfont l'équation de Schrödinger. Bien que la solution est très compliquée, celle-ci nous permet d'étudier les diverses caractéristiques quantiques du système, tels que l'évolution temporelle des variables canoniques et autres observables, le spectre des états propres de l'énergie, les relations d'incertitude, la densité de probabilité, etc…

CONCLUSION

CONCLUSION

L'étude d'un système décrit par un potentiel non central dépendant du temps a été réalisée. En utilisant la théorie de Lewis et Riesenfeld, nous avons obtenu un invariant de l'équation de Schrödinger dépendante du temps pour un potentiel non central décrit par l'Hamiltonien :

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\varphi},\mathbf{t}) = \mathbf{A}(\mathbf{t})\left(\mathbf{p}^{2} + \frac{\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\varphi})}{\mathbf{r}^{2}}\right) + \mathbf{C}(\mathbf{t})\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}\mathbf{p}_{\mathrm{r}} + \mathbf{p}_{\mathrm{r}}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}}\right) + \frac{\mathbf{E}(\mathbf{t})}{\mathbf{r}^{2}} - \frac{\mathbf{Z}(\mathbf{t})}{\mathbf{r}}$$

L'opérateur invariant est transformé en une forme simple par une transformation unitaire. Les solutions de l'équation aux valeurs propres de l'invariant dans le système transformé sont facilement obtenues par les méthodes de Nikiforov-Uvarov et l'itération asymptotique. Le potentiel en forme de double anneau généralisée $\mathbf{V}(\boldsymbol{\varphi})$ dépendant du temps est considéré comme un cas particulier.

A travers la transformation unitaire inverse, les solutions quantiques complètes dans le système d'origine sont identifiées. Les fonctions d'onde complètes de notre travail représentées dans l'équation (III-136), nous permettent de connaitre les informations utiles concernant les caractéristiques quantiques du système, telles que l'évolution temporelle des variables canoniques et autres variables, le spectre d'énergie , la relation d'incertitude, la densité de probabilité, etc.…Cependant le problème quantique décrit par le potentiel non central avec des paramètres dépendants du temps n'a pas encore étudié que nous le savons, peut être, cela est dû à la complicité des calculs mathématiques reliés aux systèmes dépendants du temps.

Annexe :

Relations de commutation:

Les relations de commutation utiles pour les calculs des invariants

$$[r,p] = i\hbar \qquad \text{(A-1)}$$

$$[r^2,p^2] = 2i\hbar(rp+pr) \qquad \text{(A-2)}$$

$$[rp+px,r^2] = -4i\hbar r^2 \qquad \text{(A-3)}$$

$$[rp+pr,p^2] = 4i\hbar p^2 \qquad \text{(A-4)}$$

$$[rp+pr,p] = 2i\hbar p \qquad \text{(A-5)}$$

$$[rp+pr,r] = -2i\hbar r \qquad \text{(A-6)}$$

$$\left[p^2,\frac{1}{r}\right] = 2i\hbar\frac{p}{r^2} \qquad \text{(A-7)}$$

$$\left[p^2,\frac{1}{r^2}\right] = 4i\hbar\frac{p}{r^3} \qquad \text{(A-8)}$$

$$[r,p^2] = 2i\hbar p \qquad \text{(A-9)}$$

$$[p,r^2] = -2i\hbar r \qquad \text{(A-10)}$$

$$\left[p^2,\frac{1}{r}p+p\frac{1}{r}\right] = 4i\hbar\frac{p^2}{r^3} \qquad \text{(A-11)}$$

$$\left[x,\frac{1}{r}p+p\frac{1}{r}\right] = 2i\hbar\frac{1}{r} \qquad \text{(A-12)}$$

$$\left[rp+pr,\frac{1}{r}\right] = -2i\hbar\frac{1}{r} \qquad \text{(A-13)}$$

$$\left[p,\frac{1}{r^2}\right] = 2i\hbar\frac{1}{r^3} \qquad \text{(A-14)}$$

$$\left[p,\frac{1}{r}\right] = i\hbar\frac{1}{r^2} \qquad \text{(A-15)}$$

$$\left[r^2,\frac{1}{r}p+p\frac{1}{r}\right] = 4i\hbar \qquad \text{(A-16)}$$

$$\left[\frac{1}{r},\frac{1}{r}p+p\frac{1}{r}\right] = 4i\hbar\frac{1^2}{r^3} \qquad \text{(A-17)}$$

$$\left[\frac{1}{r^2},\frac{1}{r}p+p\frac{1}{r}\right] = -4i\hbar\frac{1}{r^4} \qquad \text{(A-18)}$$

$$\left[p,\frac{1}{r}p+p\frac{1}{r}\right] = 2i\hbar\frac{p}{r^2} \qquad \text{(A-19)}$$

$$\left[rp+pr,\frac{1}{r}p+p\frac{1}{r}\right] = 4i\hbar p\left(\frac{1}{r}p+p\frac{1}{r}\right) \qquad \text{(A-20)}$$

Références bibliographiques

[1] C.C. Tannoudji, B. Diu, F. Laloe-Mecanique Quantique-T1 et T2- Hermann, Paris, novellaedition revue, corrigée et augmentée 1977.

[2] S. Menouaer, thèse de doctorat, (Université de Sétif, 2009).

[3] H.R. Lewis and W.B. Risenfeld, J. Math. Phys 10 (1969) 1458.

[4] C.Tezcan and R. Sever, Int.J.Theor.Phys 48(2009) 337.

[5] H. Ciftci, R.L. Hall and N. Saad, Phys. A: Math. Gen. 36(47), (2003) 11807.

[6] H. Ciftci, R.L. Hall and N. Saad, Phys. Lett. A 340(5), (2005) 388.

[7] O. Yesilas, Simsek, R. Sever and C. Tezan, Physica.Scripta, 67, 472(2003).

[8] A.A. Makarov and Al., Nuovo Cimento A 52, 1061(1967).

[9] A. Kratzer, Z. Phys., 3,389(1920).

[10] J.Pliva, J.Mol.Spectrosc, 193, 7(1999).

[11] M.Kibler and P.Winternitz, J.Phys. A 20, 4097(1987).

[12] Y. Saadi, mémore de Magister, Université Ferhat Abbes-Sétif (2007).

[13] L. Krache, thèse de doctorat, Université de Sétif (2010).

[14] A.M. Markov, Invariant and the Evolution of Nonstationnary Quantum Systems, (Nova Science Publishers, Commack, New York, 1989).

[15] C-In. Um, K-H. Yeon and T.F. George, Phys.Rep. 362(2002) 63.

[16] I.A. Pedrosa and I. Guedes, Int.J.Mod.Phys. B17 (2003) 2903.

[17] J.R. Choi and Bo. Ha. Kweon, Int.J. Mod. Phys. B 16(2002) 4733.

[18] M. Maamache, M. Choutri, J.Phys.A: Math.Gen.33 (2000) 6203.

[19] M. Maamache, J.P.Provost and G. Vallée, Phys.Rev. A59 (1999)1777.

[20] M. Maamache, Phys.Rev. A52 (1995) 936.

[21] I.A. Pedrosa, G.P. Sena and I. Guedes, Phys.Rev A56(1997)4300.

[22] D.A.Trifonov, J.Phys.A: Math.Gen.32 (1999) 3649.

[23] V.V. Dodonov, V.I. Man'ko, L. Rosa, Phys.Rev.A57 (1998) 2851.

[24] M. Maamache, Phys.Rev.A29 (1996) 2833.

[25] M. Maamache, Phys.Rev.A61 (2000) 026102.

[26] J.R.Choi, Int.J.Th. Phys.43 (2004)947 ; Phys.Lett.A325 (2004)1.

[27] V. V. Dodonov, I. A. Malkin, and V. I. Man'ko, Phys.Lett.A, 39 (1972)377.

[28] J.H. Gweon and J.R. Choi, J.Kor.Phys.Soc, 42(2003) 325.

[29] D-Y. Song, Phys.Rev.A 62 (2000) 14103.

[30] D-Y. Song, Phys.Rev.Lett.85 (2000) 1141.

[31] K.H. Yeon, D.H.Kim, C.I. Um, T.F. George and L.N. pandey, Phys.Rev. A 55 (1997) 023.

[32] I. Guedes, Phys.Rev.A 63 2(2001)034102.

[33] J. Bauer, Phys.Rev.A 65 (2002)036101.

[34] H. bekkar, F.Benamira and M. Maamache; Phys.Rev.A68(2003)016101.

[35] Pi-G. Luan and C.S. Tang, Phys.Rev.A 71 (2005)1.

[36] C.J. ganison and E.M.Wright, Phys.Lett.A 128 (1988) 177.

[37] M. Maamache, A. Bounames and N. ferkous, Phys.Rev.A 731, (2006) 016101.

[38] M. Sebawe Abdallah, Phys.Rev.A 37 (1988) 4026.

[39] M. Maamache, S. Menouar and L. Krache, Int.J.Theor.Phys, 45(2006)2223.

[40] S.Menouar, M. Maamache and J.R. Choi, Phys.Scr.82 (2009)065004.

[41] N .Ferkous, A. Bounemes and M.Maamache, Phys.Scr.88, 035001(2013).

[42] A. Khare and Rajat K. Bhaduri, Am.J.Phys. 62, 1008(1994).

[43] F.W.J.Olver,D.W.Lozier, R.F.Boisvert and C.W.Clark, NIST handbook of mathematical functions (Cambridge University Press, New York, 2010).

[44] I.S.Gradshteyn and I.M.Ryznik, Tables of Integrals, Series and Product, 6th ed.

Academic Press, Ney York, (2000).

Résumé :

Dans ce travail, les caractéristiques quantiques d'un système décrit par un potentiel non central dépendant du temps qui se compose d'un potentiel non central plus un potentiel coulombien plus un potentiel quadratique inverse plus le terme $\frac{1}{r}p_r + p_r\frac{1}{r}$. Pour obtenir les solutions de l'équation de Schrödinger du système, nous avons employé la méthode des invariants. L'opérateur invariant transformé en une forme simple par une transformation unitaire. Les solutions quantiques dans le système transformé sont obtenues facilement car l'opérateur invariant dans le système transformé est simple et indépendant du temps. Les méthodes de Nikiforov-Uvarov et l'itération asymptotique sont utilisées pour résoudre l'équation aux valeurs propres de l'opérateur invariant dans le système transformé. Le potentiel en forme de double anneau généralisé plus le potentiel non central $V(\varphi)$ est considéré comme un cas particulier. Par la transformation unitaire inverse des solutions quantiques obtenues dans le système transformé les solutions complètes quantiques dans le système d'origine sont identifiées.

Mots clés : équation de Schrödinger dépendante du temps, potentiel non central, potentiel quadratique inverse, théorie des invariants, transformation unitaire.

Abstract :

In this work, the quantum characteristics of time dependent non central potential system which consist of Colombian potential plus inverse quadratic potential plus $\frac{1}{r}p_r + p_r\frac{1}{r}$ term are studied. To obtain system wave functions, we have utilized the invariant method. The invariant operator is transformed to a simple form by unitary transformation. Quantum solutions in the transformed system are easily obtained because the invariant operator in transformed system is a time independent simple one. The Nikiforov-Uvarov and asymptotic methods are used for solving eigenvalue equation of the invariant operator in the transformed system. The double ring-shaped generalized plus a $V(\varphi)$ non central time-dependent potential is considered as a particular case. For inverse transformation of quantum solutions obtained in the transformed system, the complete quantum solutions in the original system are identified.

Key Words: Time dependent Schrodinger equation, non central potential, inverse quadratic potential, invariant theory, unitary transformation.

ملخص :

في هذه المذكرة قمنا بدراسة الخصائص الكمية لجملة فيزيائية موصوفة بكمون لا مركزي متعلق بالزمن مكون من كمون مركزي مضاف اليه كمون كولومب، كمون رباعي معكوس $\frac{1}{r}p_r + p_r\frac{1}{r}$.من اجل حل معادلة شرودنغر للجملة، استعملنا طريقة الامتغيرات .قمنا بتحويل مؤثر الامتغيرات متعلق بالزمن الى لا متغير غير متعلق بالزمن وذلك باستعمال التحويل الوحدوي الذي سمح لنا بايجاد الحلول الكوانتية في الجملة المحولة غير المتعلقة بالزمن بطريقة بسيطة

ولحل معادلة القيم الذاتية للامتغير المحول قمنا باستعمال طريقة التكرار المقارب وطريقة نيكوفوروف ايفاروف، بأخذ حالة خاصة من المكون الامركزي ثنائي الحلقة $V(\varphi)$ تمكنا من ايجاد الحل النهائي للجملة الاصلية

كلمات المفتاحية:معادلة شرودنغر المتعلقة بالزمن ،كمون لا مركزي، كمون رباعي معكوس ،طريقة الامتغيرات، التحويل الوحدوي