UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Par

Mihoubi Insaf

Sujet

Etude sur la décomposition d'Adomian

Devant le jury composé de :

Mr. Nadir Mostefa	Président
Mr. Gagui Bachir	Rapporteur
Mr. Guesmi Abdelkader	Examinateur

Promotion: 2012/2013

Remerciements

- *Je voudrais exprimer ma profonde gratitude à Mr. Gagui Bachir de m'avoir constamment guidé et encouragé tout au long de ce travail.*

- *Je remercie vivement Mr. Mostefa Nadir d'avoir accepté la présidence du jury de ce mémoire.*

- *Je tiens `a remercier vivement Mr. Guesmi Abdelkhader pour avoir accepté de participer au jury de ce mémoire.*

- *Mes remerciements les plus vifs vont également à tous ceux qui m'ont aidé d'une façon ou d'une autre.*

Table des matières

0.1 Introduction

Beaucoup de phénomènes physiques, biologiques et de l'environnement sont modélisés par des systèmes non linéaires spatio-temporels de dimension infinie.

Pour résoudre ces systèmes beaucoup de méthodes mathématiques ont étés introduites dans la littérature, mais la majorité de ces méthodes exigeaient soit une analyse ennuyeuse, soit une assez grande place mémoire d'ordinateurs de plus dans le cas non linéaire, il y a en quelque sorte un manque d'une théorie unifiée.

Au début des années 1980, George Adomian (1923-1996) introduit une méthode de décomposition qui est une méthode mathématique pour résoudre des équations fonctionnelles linéaires et non linéaires de différents types (algébriques, différentielles, aux dérivées partielles, intégrales, integro-differentielles,..., etc.).

Ce travail se divise en trois chapitres comme suit :

dans le chapitre 1, on donne un aperçu général sur les séries numériques, et fonctionnelles et leur convergences, puis la notion sur les opérateurs linéaires et compacts, après on définit les équations intégrales de type Volterra .

Dans le deuxième chapitre, on va exposer le principe de cette méthode sur un problème mathématique, on donne ensuite deux méthodes pratiques de calcul de polynômes d'Adomian, en fin, on parlera de la convergence de la méthode.

En dernier chapitre, on donne des exemples pratiques utilisant la méthode ADM pour résoudre le type des opérateurs intégrales, ceux sont des équations de Volterra.

0.2 Notation

- ADM : Méthode décomposition d'Adomian.
- EDP : Equations aux dérivées partielles.
- E et F sont des espaces normées.
- G : Un ensemble de E.
- $[a, b]$: Un intevalle bornée.
- I : Intervalle de $\mathbb{R}$.
- Ω : Un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- λ : Un paramètre numérique.
- $n!$: Factorielle n.
- $k := (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{N}^n$
- $|k| := k_1 + ... + k_n$
- $k! := k_1!...k_n!$
- $|nk| := k_1 + 2k_2 + ... + nk_n$
- $u^k := u_1^{k_1}...u_n^{k_n}$
- $N^{(n)}(u_0) := \frac{d^n}{du^n}\left[N(u)\right]_{\lambda=0}$
- $k(.,.)$: Une fonction à deux variables.
- $P(x)$: Un polynôme de degré n.
- (u_n) : Une suite numérique ou de fonction.
- $F(u) = g(x)$: Une équation fonctionelle.
- L : Un opérateur linéaire et inversible.
- R : Un opérateur linéaire.
- N : Un opérateur non linéaire.

Chapitre 1

Rappels

Dans ce chapitre, on cite quelques définitions générales et rappels sur les séries et leur convergence, les opérateurs différentiels et les équations intégrales de type de Volterra de deuxième espèce.

1.1 Séries numériques

Définition 1.1

Soit (U_n) *une suite numérique réelle ou complexe, on peut associer à* (U_n) *une suite*

$$S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$$

On remarque que pour tout n, $S_n - S_{n-1} = U_n$. *On appelle série attaché à* U_n :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} U_i$$

1.1.1 Convergence d'une série

Critère de Cauchy

La suite S_n converge si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall q > p > n_0, \Rightarrow |S_p - S_q| < \epsilon$$

séries à termes positifs

Pour que la série à termes positifs soit convergente, il faut et il suffit que sa somme partielle soit bornée.

Exemple 1.2
Soit (U_n) une suite à termes positifs, alors :

$$S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$$

$$S_{n+1} = U_0 + U_1 + ... + U_n + U_{n+1}$$

$$S_{n+1} - S_n = U_{n+1} \geq 0, \forall n$$

Ainsi S_n est croissante majoré, donc elle converge.

1.2 Séries de fonctions

La suite de fonctions (f_n) correspondant à celle des sommes :

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$$

On dira que la série de fonction $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge , si la suite des sommes partielle converge.

$$(S_n(x) \to S) \Longleftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \mid n > n_0 \Rightarrow |S(x) - S_n(x)| < \infty)$$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_n(x) \right|$$

1.2.1 Convergences

Convergence normale

D'une façon général, si $\forall x \in I,\ |f_n(x)| < v_n$.

Où v_n est le terme général d'une série réelle partie convergente.

On dit que la série $\sum f(x)$ converge normalement.

Convergence uniforme

Soit une suite de fonction $(f_n(x))$, on dit que cette suite converge vers $f(x)$ sur $I \subset \mathbb{R}$ si :

$$\forall n \in I,\ \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \mid n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Dans ce cas, on écrit : $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$.

Critère de Cauchy de la convergence uniforme

Dire que (f_n) converge uniformement sur $[a, b]$ équivalent à dire :

$$\forall \epsilon > 0,\ \forall x \in [a, b],\ \exists n_0 \mid p,\ q > n_0 \Rightarrow |f_p(x) - f_q(x)| < \epsilon$$

1.3 Les opérateurs

1.3.1 Opérateurs linéaires

Définition 1.3

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur E dans F est dit linéaire *s'il vérifie les conditions suivantes :*

• *condition additive*

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E, \text{ on a : } A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2)$$

• *condition homogène*

$$\forall \varphi \in E, \ \lambda \in \Bbbk = (\mathbb{R} ou \ \mathbb{C}), \text{ on a : } A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi)$$

1.3.2 Les opérateurs compacts

Définition 1.4

Soit E un espace normé et A un opérateur défini de E vers un espace normé F, on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné dans E vers un ensemble relativement compact dans F .

D'Après la définition d'un ensemble relativement compact, un ensemble $G \subset E$ est relativement compact si pour toute suite $\{u_n\}$ de G, il existe une sous suite $\left\{u_{n_{(k)}}\right\}$qui converge dans F, dans ce cas on a :

Théorème 1.5

Un opérateur linéaire $A : E \to F$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée $\{\varphi_n\}$ de E, la suite $\{A\varphi_n\}$ contient une sous suite convergente dans F.

1.3.3 Opérateurs différentiels

Définition 1.6

On appelle équation différentielle une relation entre une variable indépendante et la fonction cherchée $y = y(x)$ et ses dérivées $y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n)}$, c'est à dire une équation de la forme

$$F(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

Théorème d'existence et d'unicité

Problème de Cauchy :

Etant donné un point $(x_0, y_0) \in \Omega$, le problème de Cauchy consiste à trouver une solution $y : I \to \mathbb{R}$ de (1.1) sur I qui contient x_0 dans son intérieur telle que $y(x_0) = y_0$.

Théorème 1.7

Etant donnée une équation différentielle $y' = f(x, y)$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in \Omega$,

(p.c) : $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

a) f est une fonction continue de deux variable x, y dans Ω.

b) Si $\frac{\partial f}{\partial y}$ continue dans le domaine Ω, alors il existe un intervalle

$I = [x_0 - h, x_0 + h]$ sur lequel cette équation (p.c) admet une solution et une seule $y(x) = u(x)$ satisfaisant à la condition $y(x_0) = y_0$,(admet une unique solution).

1.3.4 Les opérateurs intégrals

Classification et définitions des équations intégrales

On appelle équation intégrale une équation où la fonction inconnue figure sous le signe $\int$, c'est en générale l'équation par rapport à $u(y)$.

$$u(x) - \lambda \int_{\Omega} k(x, y)u(y)dy = f(x)$$

avec $f(x)$, $K(x, y)$ des fonctions connues, λ un paramètre numérique et $u(y)$ la fonction inconnue, Ω un ensemble borné fermé d'un espace euclidien de n dimension.

Une importante classification des équations intégrales existe, elles peuvent se mettre en première espèce, comme en seconde espèce, homogène ou non homogène, aussi elles peuvent être de Fredholm ou de Volterra.

Equation intégrale de Volterra

Une équation à une inconnue u de la forme :

$$u(x) + f(x) = \lambda \int_0^x k(x,y)u(y)dy \tag{1.2}$$

est appelée équation intégrale de Volterra de second espèce.

-Si $f(x) = 0$ l'équation s'écrit :

$$u(x) = \lambda \int_0^x k(x,y)u(y)dy$$

appelée équation homogène de Volterra de Seconde espèce, admet une unique solution qui converge vers la limite de la suite itérative suivante :

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,y)u_{n-1}(x)dy$$

-Si $u(x) = 0$ l'équation s'écrit :

$$f(x) = \lambda \int_0^x k(x,y)u(y)dy$$

appelée équation intégrale de Volterra de première espèce.

1.4 Théorème d'approximation

Théorème 1.8 (Weierstrass)

On suppose que f est définie et continue dans $[a,b]$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme $P(x)$ avec la propriété que :

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon, \text{ pour tout } x \text{ dans } [a,b]$$

Chapitre 2

La méthode décompositionnelle d'Adomian

De nombreux modèles en biomathématiques se présentent sous la forme d'équations différentielles, différentielles avec retard, intégro-différentielles et aux dérivées partielles. De plus, ces équations sont la plupart du temps fortement non linéaires avec des conditions initiales et aux limites.

La résolution de telles équations par les méthodes dites classiques, entre autres, les méthodes des éléments finis, des différences finies, des volumes finis et la méthode spectrale, donnent des approximations de la solution en des points discrets. En outre, ces méthodes font appel à des techniques de discrétisation de l'espace et du temps et elles linéarisent souvent les équations.

En 1980, le professeur **George Adomian** lance les bases d'une méthode évitant la linéarisation et la discrétisation de l'espace et du temps. Cette méthode est basée sur la décomposition de l'opérateur non linéaire en série : c'est la méthode décompositionnelle d'Adomian.

2.1 Principes de la méthode d'Adomian

La méthode décompositionnelle d'Adomian permet de résoudre des problèmes fonctionnels de différents types : équations algébriques, différentielles, intégrales, intégro-différentielles, aux dérivées partielles (EDP). La méthode s'adapte aussi bien aux problèmes linéaires qu'aux problèmes non linéaires. Il suffit qu'on puisse écrire l'équation sous la forme ([2]) :

$$F(u) = g(x)$$

F : représente un opérateur non linéaire incluant des termes linéaires et des termes non linéaires, la partie linéaire est composée $L + R$ où :

L : l'opérateur différentiel d'ordre le plus élevé.

R : la partie restante.

Donc le problème non linéaire s'écrit sous la forme :

$$F(u) = L(u) + R(u) + N(u) \tag{2.1}$$

$$L(u(x)) + R(u(x)) + N(u(x)) = g(x) \tag{2.2}$$

où : L : est inversible.

R : un opérateur différentiel linéaire .

N : représente les termes non linéaires.

g : le terme source (fonction donnée).

L'équation (2.2) peut s'écrire :

$$L(u(x)) = g(x) - R(u(x)) - N(u(x))$$

Comme L est inversible alors :

$$L^{-1}Lu(x) = L^{-1}g(x) - L^{-1}Ru(x) - L^{-1}Nu(x) \tag{2.3}$$

Par exemple, si L est un opérateur différentiel d'ordre 1 alors :

$$L^{-1}Lu(x) = u(x) - a$$

L'équation (2.3) s'écrit alors :

$$u(x) = a + L^{-1}g(x) - L^{-1}Ru(x) - L^{-1}Nu(x) \tag{2.4}$$

on cherche u sous la forme de séries :

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \tag{2.5}$$

où : $u_0 = a + L^{-1}g$ et $(u_n, n > 0)$ est à déterminer, on décompose N sous la forme de série de polynômes spéciaux appelés polynômes d'Adomian :

$$N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \tag{2.6}$$

ces polynômes A_n sont obtenus en introduisant un paramètre λ et en écrivant :

$$u(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k u_k \tag{2.7}$$

$$N(u(\lambda)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k A_k \tag{2.8}$$

de (2.7) et (2.8) en déduit :

$$A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N(\sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_i) \right]_{\lambda=0}$$

on substitue les équations (2.5) et (2.6) dans (2.4) on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0 - L^{-1}R \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} A_n$$

Pour déterminer les u_n, on peut utiliser le procédé itératif suivant :

$$\begin{cases} u_0 = a + L^{-1}g \\ u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\ \qquad\qquad . \\ \qquad\qquad . \\ \qquad\qquad . \\ u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n \end{cases} \tag{2.9}$$

Il faut remarquer qu'en pratique la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge .

2.2 Les polynômes d'Adomian

Définition 2.1

Les polynômes d'Adomian sont définis par la formule :

$$\begin{cases} A_0(u_0) = N(u_0) \\ A_n(u_0, u_1, ..., u_n) = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N(\sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_i) \right] \right]_{\lambda=0} \end{cases}$$

La formule proposée par G. Adomian pour calculer les polynômes d'Adomian $(A_n)_{n \geq 0}$ est la suivante ([5]) :

$$\begin{aligned} & A_0(u_0) = N(u_0) \\ & A_1(u_0, u_1) = u_1 \frac{\partial}{\partial u} N(u_0) \\ & A_2(u_0, u_1, u_2) = u_2 \frac{\partial}{\partial u} N(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} N(u_0) \\ & A_3(u_0, u_1, u_2, u_3) = u_3 \frac{\partial}{\partial u} N(u_0) + u_1 u_2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} N(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 \frac{\partial^3}{\partial u^3} N(u_0) \\ & ... \end{aligned}$$

cette formule s'écrit sous la forme :

$$A_n = \sum_{v=0}^{n} c(v,n) N^v(u_0), n \geq 1 \tag{2.10}$$

où $c(v,n)$ représente la somme de tous les produits (divisées par $m!$) des v termes u_i dont la somme des indices i est égales à n, m étant le nombre de répétitions des mêmes termes dans le produit.

la relation (2.10) permet de trouver les polynômes A_n, mais en pratique, il est difficile de les déterminer quand n devient grand $(n > 5)$.mais, on donne deux méthodes pour calculer les polynômes d'Adomian.

2.2.1 Quelques méthodes de calcul des polynômes d'Adomian

Une étape importante dans la méthode de décomposition est le calcul des polynômes d'Adomian, on donne ci- dessous quelques méthodes pratiques pour la détermination de ces polynômes avec des exemples.

<u>Méthode 1 :</u>

On a :

$$N(u(\lambda)) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_k$$

D'autre part :

$$\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} N(u(\lambda)) \Big]_{\lambda=0} = \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} N(\sum_{k=0}^{n} \lambda^k u_k) \Big]_{\lambda=0}$$

Pour obtenir les A_n on dérive à l'ordre n les deux membres de la première égalité.

On obtient :

$$\frac{\partial^n N}{\partial \lambda^n} (\sum_{0}^{n} \lambda^k u_k) = \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} (\sum_{0}^{n} \lambda^k A_k)_{\lambda=0}$$

Si $n = 0$, on détermine A_0.

Si $n = 1$, on détermine A_1, ..., etc.

Exemple 2.2

$$N(u) = uu_x$$

$$u(\lambda) = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_{2x} + ...$$

$$\sum \lambda^k A_k = (u_0 + \lambda u_1 + ...)(u_{0x} + \lambda u_{1x} + \lambda^2 u_{2x} + ...)$$

Si $\lambda = 0,\ A_0 = u_0 u_{0x}$

dérivée première :

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(A_0 + \lambda A_1)\Big]_{\lambda=0} = \frac{\partial}{\partial\lambda}(u_0 + \lambda u_1)(u_{0x} + \lambda u_{1x})\Big]_{\lambda=0}$$

$A_1 = u_1 u_{0x} + u_0 u_{1x}$

dérivée seconde :

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}(A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2)\Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2)(u_{0x} + \lambda u_{1x} + \lambda^2 u_{2x})\Big|_{\lambda=0}$$

$2A_2 = 2(u_0 u_{2x} + u_1 u_{1x} + u_2 u_{0x})$

....................etc.

Méthode 2 :

Pour calculer les polynômes d'Adomian, on utilise les formules :

$$u_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \lambda^n\ ,\quad N_\lambda(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \lambda^n$$

On développe $N_\lambda(u)$ sous forme de puissance de λ, par comparaison, A_n est donné par la coefficient de λ^n.

Exemple 2.3

$N(u) = uu_x$

On pose :

$$u_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \lambda^n \ , \quad u_{\lambda x} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{nx} \lambda^n$$

Après substitution dans $N(u)$, on a :

$$N_\lambda(u) = (u_0 + \lambda u_1 + ...)(u_{0x} + \lambda u_{1x} + ...)$$

On rassemble tous les termes du même degré de λ on obtient :

$$N_\lambda(u) = u_0 u_{0x} + (u_1 u_{0x} + u_0 u_{1x})\lambda + (u_2 u_{0x} + u_1 u_{1x} + u_0 u_{2x})\lambda^2 + ...$$

Les polynômes d'Adomian sont donnés par :

$$\begin{aligned} A_0 &= u_0 u_{0x} \\ A_1 &= u_1 u_{0x} + u_0 u_{1x} \\ A_2 &= u_2 u_{0x} + u_1 u_{1x} + u_0 u_{2x} \end{aligned}$$

Les autres A_n se calculent de la même façon.

C'est dans les années 1994 que Mr **K. Abbaoui** propose et démontre une formule récurrente pratique de calcul des A_n ([1]).La formule d'**Abbaoui** est déduite de la relation donnée dans la définition des polynômes d'Adomian :

Théorème 2.4

Les polynômes d'Adomian sont déterminés à partir des formules suivantes :

$$A_0(u_0) = N(u_0)$$

$$A_n(u_0, u_1, ..., u_n) = \sum_{|nk|=n} N^{(|k|)}(u_0) \frac{u^k}{k!}, \qquad n = 1, 2, ... \tag{2.11}$$

où

$$\begin{aligned} u^k &= u_1^{k_1} u_2^{k_2} ... u_n^{k_n} \\ k! &= k_1! k_2! ... k_n! \\ |nk| &= k_1 + 2k_2 + ... + nk_n \end{aligned}$$

Preuve.

Soit la fonction :

$$G(\lambda) = g(u_n(\lambda))$$

En faisant un développement de **Taylor** autour de $\lambda = \lambda_0$ et en utilisant la formule de **Newton**, on obtient :

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= g(u_n(\lambda)) \\ &\simeq \sum_{l=0}^{n} \sum_{|k|=l} (\lambda - \lambda_0)^{|nk|} \frac{(u_n^{(1)}(\lambda))^{k_1} ... (u_n^{(n)}(\lambda))^{k_n}}{|k| \, (1!)^{k_1} ... (n!)^{k_n}} g^{(l)}(u_n(\lambda_0)) \end{aligned}$$

Par identification, nous tirons :

$\frac{d^n}{d\lambda^n} g(u_n(\lambda)) = n!$ multiplié par le coefficient de $(\lambda - \lambda_0)^n$

En posant $\lambda_0 = 0$, on déduit la formule (2.11) $\blacksquare$

L'utilisation de la formule ci dessus est délicate du fait de la difficulté de trouver les k_i pour $i \geq 3$ solution de l'équation :

$$|nk| = n$$

D'où le corollaire suivant [1, 9, 10] :

Corollaire 2.5

La formule suivante permet également de déterminer les polynômes d'Adomian :

$$\begin{aligned}
&A_0(u_0) = N(u_0)\\
&A_n(u_0,...,u_n) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=n} N^{(\alpha_1)}(u_0)\frac{u_1^{(\alpha_1-\alpha_2)}}{(\alpha_1-\alpha_2)!}..\frac{u_{n-1}^{(\alpha_{n-1}-\alpha_n)}}{(\alpha_{n-1}-\alpha_n)!}\frac{u_n^{\alpha_n}}{\alpha_n!},\ n = 1, 2, ...
\end{aligned}$$

Preuve.

Elle est déduite de la relation (2.11) en posant :

$$\begin{aligned}
&k_1 = \alpha_1 - \alpha_2\\
&.\\
&.\\
&.\\
&k_{n-1} = \alpha_{n-1} - \alpha_n\\
&k_n = \alpha_n\\
&|nk| = |\alpha| = n\\
&|k| = \alpha_1
\end{aligned}$$

Le corollaire est ainsi démontré. ■

Une autre formule donnant les $(A_n)_{n\geq 0}$, bien adaptée pour les cas de non linéarités de type polynomial ou homographique est donnée par le théorème suivant ([1]) :

Théorème 2.6

Les polynômes d'Adomian sont donnés par la formule :

$$\begin{aligned}
&A_0(u_0) = N(u_0)\\
&A_{n+1} = \tfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(k+1)u_{k+1}\tfrac{\partial A_k}{\partial u_k}, n \geq 1
\end{aligned}$$

Preuve.

De la définition des polynômes d'Adomian, on déduit :

$$\frac{\partial A_{n-k}}{\partial u_0} = \frac{\partial A_n}{\partial u_k}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!}\frac{d^{n+1}}{d\lambda^{n+1}}[N(\sum_{i=0}^{n+1}\lambda^i u_i)]_{\lambda=0} \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k+1)! u_{k+1}(n-k)!\frac{\partial A_{n-k}}{\partial u_0} \\ &= \frac{1}{(n+1)}\sum_{k=0}^{n}(k+1)u_{k+1}\frac{\partial A_k}{\partial u_k} \end{aligned}$$

et le théorème est démontré. ■

2.3 Convergence de la méthode décompositionnelle d'Adomian

On sait que la solution est sous la forme $\sum\limits_{i=0}^{\infty} u_i$, mais sous cette forme la méthode pose des problème difficilement solubles .

En particulier :

- à quelles conditions $\sum\limits_{i=0}^{\infty} u_i$ et $\sum\limits_{i=0}^{\infty} A_i$ convergent-elles ?

-$\sum\limits_{i=0}^{\infty} u_i$ est-elle solutions de l'équation (2.1) du départ ?

Pour palier à ces difficultés, on donne une forme structurelle de la méthode qui sera mieux adaptée à une étude de la convergence.

En effet, de la relation (2.9) on déduit :

Théorème 2.7

Si $\sum\limits_{n\geq 0} A_n < +\infty$ *alors* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n < +\infty$*, et réciproquement .*

Les premières preuves de convergence ont été précisées par le professeur **Yves Cherruault** [9, 10]. Elles sont basées sur la méthode du point fixe. Donnons les grandes lignes de la démonstration (voir [9, 10] pour plus de détails).

Notons d'abord que la méthode décompositionnelle appliquée à (2.2) se ramène à la recherche d'une suite :

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$$

avec $S_0 = 0$ et vérifiant la relation récurrente suivante :

$$S_{n+1} = N(u_0 + S_n) \ , \quad S_0 = 0, u_0 = g, \ n = 0, 1, 2, ... \tag{2.12}$$

On en déduit le résultat de convergence suivant :

Théorème 2.8
Si l'opérateur N est une contraction (c'est-à-dire vérifie $\|N\| < \delta < 1$) alors la suite $(S_n)_n$ satisfaisant la relation de récurrence :

$$S_{n+1} = N(u_0 + S_n)$$

avec $S_0 = 0, n \geq 0$ converge vers S solution de $S = N(u_0 + S)$.

Preuve.
De la relation (2.10), on a :

$$\begin{aligned} \|S_{n+1} - S\| &= \|N(u_0 + S_n) - N(u_0 + S)\| \\ &\leq \|N\| \|S_n - S\| < \delta \|S_n - S\| \\ &\leq \delta^n \|S_1 - S\| \end{aligned}$$

D'où la convergence de la suite $(S_n)_n$ vers S.
Par ailleurs, on a :

$$\sum_{n \geq 0} A_n = \sum_{n \geq 1} u_n$$

et comme $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est convergente d'après le théorème (2.7), on a alors le résultat suivant.
■

Corollaire 2.9

Si N est une contraction alors les séries des u_n et des A_n sont convergentes.

De plus, $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est solution de l'équation :

$$L(u) + R(u) + N(u) = g(x)$$

Un autre résultat important pour la convergence de la méthode décompositionnelle est le suivant ([1]) :

Théorème 2.10

Si $\left\| N^{(n)}(u_0) \right\| \leq M\alpha^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$ et si $M\alpha \leq \frac{1}{e}$, alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$ est absolument convergente.

Preuve.

La méthode d'Adomian permet d'écrire :

$$u_{n+1} = A_n, \quad n = 0, 1, ...$$

K. Abbaoui montre dans ([1]) que :

$$A_n = \sum_{|nk|=n} \frac{1}{k!} N^{(|k|)}(u_0)(A_{0[k_1]}, ..., A_{n-1[k_n]})$$

Montrons par récurrence que :

$$\|A_n\| \leq \frac{(n+1)^n}{(n+1)!} M^{n+1} \alpha^n, \quad n \geq 0 \tag{2.13}$$

Pour $n = 0$, il est clair que (2.13) est vraie.

Supposons (2.13) vraie jusqu'à n et montrons qu'elle est vérifiée pour $n + 1$.

On a :

$$A_{n+1} = \sum_{|(n+1)k|=n+1} \frac{1}{k!} N^{(k)}(u_0)(A_{0[k_1]}, ..., A_{n[k_{n+1}]})$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\|A_{n+1}\| &\leq \sum_{|(n+1)k|=n+1} \frac{1}{k!} \left\|N^{(k)}(u_0)\right\| \|A_0\|^{k_1} ... \|A_n\|^{k_{n+1}} \\
&\leq \sum_{|(n+1)k|=n+1} \frac{1}{k!} (M\alpha^{|k|})(M^{k_1})...(\frac{(n+1)^n}{(n+1)!} M^{(n+1)}\alpha^n)^{k_{n+1}}
\end{aligned}$$

Nous remarquons que le terme :

$$\frac{(n+1)^n}{(n+1)!} M^{(n+1)}\alpha^n$$

n'est autre que le polynôme d'Adomian d'ordre n pour l'opérateur :

$$Nu = M\exp(\alpha u)$$

Le polynôme d'Adomian d'ordre $n+1$ s'écrira alors :

$$B_{n+1} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+2)!} M^{n+2}\alpha^{n+1}$$

ce qui implique :

$$\|A_{n+1}\| \leq \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+2)!} M^{n+2}\alpha^{n+1}$$

Ainsi la démonstration par récurrence est terminée.

D'autre part, en appliquant la formule de Stirling nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\frac{(n+1)^n}{(n+1)!} \leq e^{(n+1)}$$

d'où :

$$\|A_n\| \leq \exp(n+1)M^{n+1}\alpha^n = M\exp(1)(\exp(1)M\alpha)^n$$

Finalement, on déduit la convergence de la série $\sum\limits_{0}^{+\infty} A_n$ si la condition $M\alpha \leq \frac{1}{e}$ est vérifiée. ■

En outre, il est possible d'estimer l'erreur commise à n'importe qu'elle étape de l'itération comme le montre le théorème qui suit [8] :

Théorème 2.11

Si $M\alpha \leq \frac{1}{e}$, nous avons la majoration suivante :

$$\|\epsilon_n\| = \|u - \varphi_n\| \leqslant \frac{(\exp(1)M\alpha)^n}{1 - M\alpha\exp(1)}$$

où M est un majorant de $N^{(n)}(u_0)$ et $\varphi_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} u_i$.

Preuve.

On a :

$$\|\epsilon_n\| = \|u - \varphi_n\| \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} \|u_i\|$$

les inégalités suivantes résultent de ce qui précède :

$$\begin{aligned}
\|\epsilon_n\| &\leqslant \sum_{i=n}^{\infty} \|A_{i-1}\| \\
&\leqslant \sum_{i=n}^{\infty} \exp(i)M^i\alpha^i \\
&\leqslant (\exp(1)M\alpha)^n \sum_{i=0}^{\infty} \exp(i)M^i\alpha^i
\end{aligned}$$

d'où :

$$\|\epsilon_n\| \leqslant \frac{(\exp(1)M\alpha)^n}{1 - M\alpha\exp(1)}$$

car $M\alpha \leq \frac{1}{e}$. ■

2.4 Résolution des équations intégrales de Volterra de 2-ème espèce

La méthode décomposition d'Adomian se composé d'une fonction inconnue $u(x)$ et la solution s'écrit comme suit :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \tag{2.14}$$

Où :

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + ...$$

On remplaçant (2.14) dans l'équation intégral (1.2), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t))dt$$

le terme $u_0(x)$ identifie touts les termes qui restent comme suit :

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f(x) \\ u_{n+1}(x) &= \lambda \int_0^x k(x,y)u_n(t)dt, n \geq 0 \end{aligned}$$

donc équivalent à :

$$\begin{aligned} &u_0(x) = f(x) \\ &u_1(x) = \lambda \int_0^x k(x,t)u_0(t)dt \\ &u_2(x) = \lambda \int_0^x k(x,t)u_1(t)dt \\ &u_3(x) = \lambda \int_0^x k(x,t)u_2(t)dt \end{aligned}$$

et les autre termes se calculent de la même façon.

Chapitre 3

Applications

Dans ce dernier chapitre, on donne des exemples sur les équations différentielles intégrales de type de Volterra qui se résolvent par la méthode décompositionnelle d'Adomian.

3.1 Applications sur les équations intégrales de Volterra par la méthode d'Adomian

Exemple 3.1
Soit l'équation intégrale suivante :

$$u(x) = 1 - \int_0^x u(t)dt$$

où $f(x) = 1,\ \lambda = -1$ *et* $k(x,y) = 1,$ *alors la solution s'écrit comme suit :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = 1 - \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)dt$$

le premier terme est $u_0(x) = 1$ *et la relation :*

$$u_{k+1}(x) = -\int_0^x u_k(t)dt, k \geq 0$$

donc :

$$\begin{aligned}
&u_0(x) = 1\\
&u_1(x) = -\int_0^x u_0(t)dt = -\int_0^x 1dt = -x\\
&u_2(x) = -\int_0^x u_1(t)dt = -\int_0^x (-t)dt = \tfrac{1}{2!}x^2\\
&u_3(x) = -\int_0^x u_2(t)dt = -\int_0^x \tfrac{1}{2!}t^2dt = -\tfrac{1}{3!}x^3\\
&u_4(x) = -\int_0^x u_3(t)dt = -\int_0^x -\tfrac{1}{3!}t^3dt = -\tfrac{1}{4!}x^4
\end{aligned}$$

alors :

$$u(x) = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + ...$$

donc la solution converge vers :

$$u(x) = e^x$$

Exemple 3.2

Soit l'équation de Volterra :

$$u(x) = 1 + \int_0^x (t-x)u(t)dt$$

avec $f(x) = 1, \lambda = 1, k(x, y) = t - x,$ *alors la solution s'écrit comme suit :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = 1 + \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (t-x)u_n(t)dt$$

la relation de récurrence est $u_0(x) = 1$ *et la relation :*

$$u_{k+1}(x) = \int_0^x (t-x)u_k(t)dt, k \geq 0$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= 1 \\
u_1(x) &= \int_0^x (t-x)u_0(t)dt = -\tfrac{1}{2!}x^2 \\
u_2(x) &= \int_0^x (t-x)u_1(t)dt = \tfrac{1}{4!}x^4 \\
u_3(x) &= \int_0^x (t-x)u_2(t)dt = -\tfrac{1}{6!}x^6 \\
u_4(x) &= \int_0^x (t-x)u_3(t)dt = \tfrac{1}{8!}x^8
\end{aligned}$$

alors la série est :

$$u(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 + ...$$

donc la solution est :

$$u(x) = \cos x$$

Exemple 3.3

Soit l'équation de Volterra :

$$u(x) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \int_0^x (t-x)u(t)dt$$

nous noterons $f(x) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2, \lambda = -1,$ *et* $k(x,y) = t - x,$ *alors la solution s'écrit comme suit :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (t-x)u_n(t)dt$$

et la relation de récurrence est : $u_0(x) = 1-x-\frac{1}{2}x^2,\ u_{k+1}(x) = -\int_0^x (t-x)u_k(t)dt, k \geq 0,$*on obtient :*

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= 1 - x - \tfrac{1}{2}x^2 \\
u_1(x) &= -\int_0^x (t-x)u_0(t)dt = \tfrac{1}{2!}x^2 - \tfrac{1}{3!}x^3 - \tfrac{1}{4!}x^4 \\
u_2(x) &= -\int_0^x (t-x)u_1(t)dt = \tfrac{1}{4!}x^4 - \tfrac{1}{5!}x^5 - \tfrac{1}{6!}x^6 \\
u_3(x) &= -\int_0^x (t-x)u_2(t)dt = \tfrac{1}{6!}x^6 - \tfrac{1}{7!}x^7 - \tfrac{1}{8!}x^8
\end{aligned}$$

alors la série est :

$$u(x) = 1 - (x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + ...)$$

donc la solution est :

$$u(x) = 1 - \sinh x$$

Exemple 3.4

soit l'équation de Volterra :

$$u(x) = 5x^3 - x^5 + \int_0^x tu(t)dt$$

on utilise la méthode décomposition d'Adomian, alors la relation de récurrence est :

$$u_0(x) = 5x^3 - x^5,\ u_{k+1}(x) = \int_0^x tu_k(t)dt, k \geq 0$$

on obtient alors :

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= 5x^3 - x^5 \\
u_1(x) &= \int_0^x tu_0(t)dt = x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 \\
u_2(x) &= \int_0^x tu_1(t)dt = \tfrac{1}{7}x^7 - \tfrac{1}{63}x^9 \\
u_3(x) &= \int_0^x tu_2(t)dt = \tfrac{1}{63}x^9 - \tfrac{1}{693}x^{11}
\end{aligned}$$

alors la série est :

$$u(x) = (5x^3 - x^5) + (x^5 - \frac{1}{7}x^7) + (\frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{63}x^9) + (\frac{1}{63}x^9 - \frac{1}{693}x^{11})$$

donc la solution est :

$$u(x) = 5x^3$$

Exemple 3.5

soit l'équation de Volterra :

$$u(x) = x + x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x^5 - \int_0^x u(t)dt$$

on utilise la méthode décomposition d'Adomian, alors la relation récurrence est :

$$u_0(x) = x + x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x^5,\ \ u_{k+1}(x) = -\int_0^x u_k(t)dt, k \geq 0$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= x + x^4 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{5}x^5 \\
u_1(x) &= -\int_0^x u_0(t)dt = -\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{30}x^6 \\
u_2(x) &= -\int_0^x u_1(t)dt = \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{30}x^6 + \tfrac{1}{24}x^4 + \tfrac{1}{210}x^7 \\
u_3(x) &= -\int_0^x u_2(t)dt = -\tfrac{1}{24}x^4 - \tfrac{1}{210}x^7 + ...
\end{aligned}$$

alors la série est :

$$\begin{aligned}
u(x) &= (x + x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x^5) + (-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{30}x^6) \\
&\quad + (\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{30}x^6 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{210}x^7) + (-\frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{210}x^7 + ...) + ...
\end{aligned}$$

donc la solution est :

$$u(x) = x + x^4$$

Conclusion

Dans ce travail on s'intéresse à la méthode de décomposition d'Adomian. Cette méthode permet de résoudre les équations fonctionnelles de différents types et vient s'ajouter aux autres méthodes existantes.

On sait que la méthode est convergente, mais d'après les travaux qui traitent beaucoup de différents types de problèmes mathématiques, on a une modification de la méthode qui s'appelle la méthode de décomposition d'Adomian modifiée qui est une méthode forte pour résoudre beaucoup d'équations fonctionnelles.

Les résultats de la comparaison entre les deux méthodes montrent que la méthode d'Adomian modifiée est plus rapide que la méthode d'Adomian standard car la méthode de décomposition d'Adomian n'est pas convergente toujours, mais la méthode d'Adomian modifiée donne la solution exacte, pour plus détails voir ([14]).

Bibliographie

[1] K. Abbaoui, *les fondements mathématiques de la méthode décompositionnelle d'Adomian et application à la résolution des problèmes issus de la biologie et de la médecine*, Thèse, université Pierre et Marie Curie-ParisVI, 1995.

[2] S. Abdelaziz, *méthode de décomposition et controlabilité d'un système non linéaire,* mémoire magister, université Mentouri constantine, Algerie.

[3] A. Abdelrazec, *Adomian decomposition method : convergence analysis and numerical approximations*, thesis MCMaster university Hamilto Ontario, 2008.

[4] G. Adomian, *Solving Frontier Problem of physics :The Decomposition Method,* Kluwer Academic Publishers, Boston, 1994.

[5] A. Amroune, *Cours de post graduation , université de M'sila,* 2009-2010.

[6] O. Belira, *Nouvelles méthodes mathématiques Alienor et Adomian pour la Biomedecine*, thèse doctorat, université de OUAGADOUGOU, 2005.

[7] F. Belmechri, *Equations intégrales sur les espaces fonctionnels*, mémoire Magister, Université de M'sila, 2007.

[8] T.Benneouala, *Résolution d'équations aux dérivées partielles par le méthode d'Adomian et applications de nouvelles méthodes pour l'optimisation globale de fonctions multivariables*, Thèse, Université Réné Descartes-Paris V, (2004)

[9] Y. Cherruault, *Optimisation : Méthodes locales et globales*, Presses Universitaires de France (P.U.F), (1999).

[10] Y. Cherruault, *Modèles et méthodes mathématiques pour les sciences du vivant*, Presses Universitaires de France (P.U.F),(1998).

[11] Y. Cherruault and S.Guellal, *Practical formula for calculation of Adomian polynomials and application to the convergence of the decomposition method*, Inter. Journal. Biomedical. Comp. vol 36, pp 223-228,1994.

[12] J.S. Duan, *Recurrence triangle for Adomian polynomials*, Appl. Math. Comput. 216 (2010) 1235–1241.

[13] Y. Kheloufi, *La théorie de l'alternative de FREDHOLM*, mémoire Magister, université de M'sila, 2006.

[14] P. Pue-on and N. Viriyapong, *Modified Adomian Decomposition Method for solving Particular Third-order ordinary Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Vol.6, 2012,no.30.

[15] R.C. Rach, *A new definition of the Adomian polynomials*, Kybernetes 37 (2008) 910–955.

[16] A.M. Wazwaz, *Linear and Nonlinear Integral Equations : Methods and Applications*, Higher Education, Beijing, Springer, Berlin, 2011.

Résumé

Dans ce travail on s'intéresse à la méthode de décomposition d'Adomian. Cette méthode permet de résoudre les équations fonctionnels de différents types. Après on va exposer le principe de la méthode, qui donne la solution sous forme de séries convergentes. Enfin, nous appliquons la méthode pour résoudre les équations intégrales de type **Volterra**.

Mots clés

Décomposition d'Adomian, Séries, Equations intégrales.

Abstract

In this work deals with a study of Adomian decomposition method. This method solve functionnals equations. we explain principal of the method, witch give the solution by series convergent. Finally, we are applied the method to solve the integrals equations of type **Volterra**.

Key words

Adomian Decomposition, Series, Integrals Equations.

<u>ملخص</u>

هذا العمل يدور حول طريقة تجزئة ادوميان، التي تستعمل في حل المعادلات التابعية المختلفة، فبعد التذكير بالمبادئ الاساسية لهذه الطريقة وجدنا الحل يكتب على شكل سلسلة متقاربة، وفي الأخير طبقنا طريقة ادوميان في حل المعادلات التكاملية من نوع **فولترا** .

<u>الكلمات المفتاحية</u>

تجزئة ادوميان، سلاسل، المعادلات التكاملية.