UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF- M'SILA
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de MASTER

Spécialité:

Mathématiques

Option:

Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Par:

DILMI Salim

Inverses généralisés d'opérateurs

Soutenu publiquement le :03/06/ 2017,
devant le jury :

NADIR.Mostefa	Prof	Président	Univ de M′sila
BENSALOUA.Cheniti	MCB	Encadreur	Univ de M′sila
GAGUI.Bachir	MCB	Examinateur	Univ de M′sila
LAKEHALI.Belkacem	MCB	Examinateur	Univ de M′sila

Promotion 2016/2017.

Remerciements

Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à :

Dieu tout puissant, pour la volonté, et la santé et la patience qu'il
nous donnait durant toutes ces années d'études afin que nous
puissions en arriver là.
Comme nous tenons à remercier notre
Encadreur :**M**^{r}.**B**.**CHENITI**
Merci à tous les enseignants et les étudiants
Du département **mathématique**
Pour leurs aides judicieuses, les moyens qu'ils ont
mis à notre disposition pour réaliser ce travail.
Enfin à toute personne qui a collaboré à la réalisation
Du présent mémoire.

Mérci .

Table des matières

Résumé

Il est bien connu que l'équation $Au - \lambda u = f$ Possède une solution unique lorsque l'opérateur A est inversible. En générale, on ne se trouve pas dans ce cas l'opérateur A Peut-être non injective ou non surjective ou à inverse non bornée.

On essaiera alors de trouver un opérateur qui possède le maximum de propriété que possède un vrai inverse s'il existait cet opérateur est appelé inverse généralisé ou pseudo-inverse de A

On s'intéressa en particulière à l'inverse de Moore-Penrose.

Mots clefs : Inverse généralisé d'un opérateur, noyau et image d'un opérateur. Inverse généralisé de Moore-Penrose.

Introduction

La notion d'inversibilité est une notion très importante dans tous les domaines de Mathématique. L'équation $Ax = y$ possède une solution unique lorsque l'opérateur linéaire A est inversible, on ne se trouve pas dans ce cas, En pratique, on obtient souvent des données sous forme d'une matrice rectangulaire qui est un opérateur non inversible, ou bien dans le cas général on se trouve avec un opérateur non surjectif ou non injectif, ou d'inverse non borné.

Dans ce cas on essaie de trouver un opérateur qui possède le maximum de propriétés que possède l'inverse s'il existait, un tel opérateur sera appelé un inverse généralisé ou pseudo inverse de A.

Pour un opérateur A on peut définir différents types d'inverses généralisé, qui malgré leur différences tous des propriétés communes, notamment leur relations avec les projections.

Dans ce travail, on se contentera de définir l'inverse de Moore-Penrose et ses propriétés

Ce travail est constitué de Trois chapitres :

Dans le premier chapitre on trouvera une simple introduction à la théorie des opérateurs classique.

Le deuxième chapitre, on définira les inverses généralisé d'un opérateur, avec des propriétés élémentaires.

Le Troisième chapitre expose les caractéristique de l'inverse de Moore-Penrose.

La théorie spectrale est un domienne des Mathématiques dont les premiers résultats appartiennent à l'algèbre linéaire Duns ce cadre, la théorie spectrale établit notamment l'existence d'un base orthonormée de vecteurs propres pour tout endomorphisme symétrique sur un espace réel ou complexe de dimension infinie.

Donc la théorie spectrale a pour onfive d'un part la généralisation aux espaces de dimension infinie, d'sube part des sifines liées aux équations aux dérivées partielles et aux équations intégrales.

D'un point de une abstrait ,si on désifie par E un espace fonctionnel et A un application linéaire sur E, différents problèmes wnstien à chercher la solution $u \in E$ du problème $\lambda u - Au = f$ au $\lambda \in \mathbb{C}$ au $\mathbb{R}$ et $f \in E$.

Celui-ci est équivalent à déterminer si l'operateur $\lambda I - A$ est inversible, au I densifie l'operateur identité sur E.

L'étude de l'inversibilité de l'operateur $\lambda I - A$ Est ce qu'on appelle la théorie spectrale.

NOTATIONS GENERALES

H Espace de Hilbert .

$(,)$ Produit scalaire dans H.

$L(H)$ Ensemble des opérateurs linéaires bornés de H dans H .

$C(H)$ Ensemble des opérateurs linéaires fermés à domaines denses de H dans H .

A^* Adjoint de l'opérateur A .

$D(A)$ Domaine de l'opérateur A .

$G(A)$ Graphe de l'opérateur A c'est-à-dire l'ensemble $\underset{u \in D(A)}{\cup} (u, Au) \subseteq H \times H$.

$N(A)$ Noyau de l'opérateur A c'est-à-dire l'ensemble $\{u \in D(A) : Au = 0\} \subseteq H$.

$R(A)$ L'image de l'opérateur A c'est-à-dire l'ensemble $\underset{u \in D(A)}{\cup} Au \subseteq H$.

P_M La projection sur le sous espace fermé M .

$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I)^{-1} \text{ existe et est borné}\right\}$.

Chapitre 1

Théorie des opérateurs

1.1 Rappels et définitions

1.1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1.1 (Produit scalaire) *Soit E un espace vecoriel sur le corps $\mathbb{k}$($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{C}$). Un produit scalaire sur E est une fonction $\langle x, y\rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{k}$ vérifie les propriétes suivantes :*

- $\langle u, u\rangle \geq 0, \forall u \in E.$
- $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$
- $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda \langle u, v\rangle$
- $\langle u, v + h\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, h\rangle$
- $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}\ \forall u, v \in E$

Définition 1.1.2 (Espace euclidien) *Un espace vectoriel E sur $\mathbb{k}$ est dit un espace euclidien ou préhilbertien s'il est muni d'un produit scalaire .*

Remarque 1.1.1 *Le produit scalaire d'un espace euclidien nous donne une norme définie par :*

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}.$$

Définition 1.1.3 (Espace de Hilbert) *Un espace de Hilbert est un espace euclidien*$(E, \langle ., . \rangle)$ *complet pour la distance déduite de sa norme* $d(u,v) = \|u - v\|$.

1.2 Les opérateurs bornés

1.2.1 Définitions et propriétés

Définition 1.2.1 (Linéairité des opérateurs) *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels normés. On dit qu'un opérateur* A *défini sur* E *dans* F *est linéaire si :*

$$\forall u, v \in E, \forall \alpha, \beta \in \Bbbk : A(\alpha u + \beta v) = \alpha A(u) + \beta A(v).$$

Définition 1.2.2 (Continuité des opérateurs en un point) *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels normés, On dit qu'un opérateur* A *défini sur un ensemble* $G \subset E$ *dans* F *est continu (ou borné) en un point* x_0 *si : pour toute suite* x_n *de* G *converge vers* x_0*, la suite* $A(x_n)$ *converge vers* $A(x_0)$.

Proposition 1.2.1 *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels normés sur* $\Bbbk$ *et* A *un opérateur linéaire défini de* E *dans* F *. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) A *est continu sur* E.

(2) A *est continu en un point* x_0.

(3) A *est borné sur la boule unité fermée* $\overline{B}(0,1)$ *de* E.

(4) A *est borné sur la sphére unité fermée* $S(0,1)$ *de* E.

(5) Il existe une constante $c > 0$ *telle que* $\|Ax\|_F \leq c\|x\|_E$, *pour tout* $x \in E$.

(6) A *est lipschitzien.*

(7) A *est uniformément continu sur* E.

On norme $\mathcal{L}(E,F)$ *en posant :*

$$\forall A \in \mathcal{L}(E,F), \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\|_F$$

Remarque 1.2.1 *Dans la pratique, on utilise souvent les assertions* 4) *et* 5) *surtout* 5).

Remarque 1.2.2 *Le réel* $\|A\|$ *est le plus petit réel positif* c *tel que* $\|Ax\| \leq c\|x\|$ *pour tout* $x \in E$

1.2.2 Orthogonalité

Notation 1.2.1 *L'ensemble des applications linéaire de* E *dans* F *est noté* $L(E,F)$. *Lorsque* $E = F$ *l'espace* $L(E,F)$ *devient par notation* $L(E)$. *L'ensemble des application linéaire continues de* E *dans* F *est noté* $\mathcal{L}(E,F)$. *Lorsque* $E = F$ *l'espace* $\mathcal{L}(E,F)$ *devient par notation* $\mathcal{L}(E)$.

Définition 1.2.3 *On note par* $R(A)$ *l'**image** de l'opérateur* $A : E \longrightarrow F$. $R(A)$ *est le sous-espace vectoriel de* F

$$R(A) = \{Au : u \in E\}$$

Définition 1.2.4 *On note par* $N(A)$ *le **Noyan** de l'opérateur* $A : E \longrightarrow F$. $N(A)$ *est le sous-espace vectoriel de* E

$$N(A) = \{u \in E : Au = 0\}.$$

Définition 1.2.5 *Deux éléments* u, v *de* E *sont dit orthogonaus et on note* $u \perp v$ *si:*

$$\langle u, v\rangle = 0$$

On note l'orthogonale d'un sous-espace vectoriel G *par :*

$$G^{\perp} = \{u \in E, \langle u, v\rangle = 0, \forall v \in F\}$$

Lemme 1.2.1 *Soit* $G \subseteq E$, *alors* $G^{\perp}$ *est un sous espace vectorial fermé de* E

Proposition 1.2.2 *Soit* $A \in \mathcal{L}(H)$, *Alors :*

(1) $N(A) = (R(A^*))^{\perp}$.

(2) $\overline{R(A)} = (N(A^*))^{\perp}$.

(3) $N(AA^*) = N(A^*)$.

1.2.3 Exemples d'opérateurs bornés

Exemple 1.2.1 *L'opérateur défini de* $L_2([0,1])$ *dans* $L_2([0,1])$ *par*

$$Au(x) = xu(x)dx$$

est continu pour la norme

$$\|u\|_2 = \left(\int_0^1 |u\,(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

et de plus

$$\|Au(x)\|_2 \leq \|u\|_2\,, \|A\|_2 = 1$$

1.2.4 L'adjoint d'un opérateur borné

Définitions et propriétes de l'adjoint

Théorème 1.2.1 (Représentation de Riesz) *Soit H un espace de Hilbert . Alors*

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}\,(H, \Bbbk)\,, \exists v \in H : \varphi(u) = \langle u, v\rangle\,, \forall u \in H.$$

Démonstration. Voir[1] .

Théorème 1.2.2 (Opérateur adjoint) *Soient H_1et H_2 deux espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}\,(H_1, H_2)$. Alors il existe un opérateur unique noté $A^* \in \mathcal{L}\,(H_1, H_2)$ s'appelle l'adjoint de A vérifie la relation suivante :*

$$\langle Au, v\rangle_{H_2} = \langle u, A^*v\rangle_{H_1}\,, \forall u \in H_1, \forall v \in H_2.$$

Démonstration. Soit $v \in H_2$. L'application $\varphi_v :\longrightarrow \langle Au, v\rangle_{H_2}$ est linéaire et, pour tout $u \in H_1$ ona

$$|\varphi_v(u)| = \left|\langle Au, v\rangle_{H_2}\right| \leq \|A\|\,\|u\|\,\|v\|\,.$$

Donc $\varphi_v \in H_2$. On en déduit d'aprés le théoréme de représentation de Riesz qu'il existe un unique $h \in H_1$ tel que $\varphi_v :\longrightarrow \langle u, h\rangle_{H_1}$, pour tout $u \in H_1$. Ce qui montre le Théoréme. ■

Proposition 1.2.3 *Soient A_1 et A_2 deux opérateurs linéaires définis sur un espace de Hilbert H_1 dans un espace de Hilbert H_2 ,alors ona les relations suivantes :*

(1) $(A_1 + A_2)^* = A_1^* + A_2^*$.

(2) $(\lambda A_1)^* = \overline{\lambda} A_1^*$, *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$.

(3) $(A_1^*)^* = A_1$.

Propriété

(1) $(I_H)^* = I_H$.

(2) $\|A\| = \|A^*\| = \|AA^*\|^{\frac{1}{2}}$.

(3) $(A^*)^* = A$.

(4) $(AB)^* = B^* A^*$.

(5) $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$.

1.2.5 Opérateur auto-adjoint

Définition 1.2.6 (Opérateur auto-adjoint) *Soient H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$. On dit que A est un opérateur auto-adjoint (ou hérmitien) s'il égale à son adjoint i.e : $A = A^*$ Autrement dit :*

$$\langle Au, v\rangle_H = \langle u, Av\rangle_H, \forall u, v \in H.$$

Exemple 1.2.2 *Soinet H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors les deux opérateur suivants sont auto-adjoints :*

$$\begin{cases} T_1 = AA^*. \\ T_2 = A + A^*. \end{cases}$$

En effet

$$T_1^* = (AA^*)^* = (A^*)^* A^* = AA^* = T_1.$$

$$T_1^* = (A + A^*)^* = A^* + (A^*)^* = A^* + A = T_2.$$

1.2.6 Opérateur positif

Définition 1.2.7 (Opérateur positif) *Soient H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$ avec A un opérateur auto-adjoint. On dit que A est positif si et seulement si :*

$$\langle Au, u\rangle > 0, \forall u \in H$$

1.2.7 Opérateur normal

Définition 1.2.8 (Opérateur normal) *Soient H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$. On dit que A est opérateur normal si :*

$$A^*A = AA^*.$$

Définition 1.2.9 (Opérateur unitaire) *Soient H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$. On dit que A est opérateur unitaire si :*

$$A^*A = AA^* = I_H$$

1.2.8 Théorie spectrale d'opérateurs bornés

Définition 1.2.10 *Soit E un espace normé , et $A \in \mathcal{L}(H)$. Un nombre complexe λ est dans l'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A si $\lambda I - A$ est bijectif, d'inverse continu. Dans ce cas cet inverse $(\lambda I - A)^{-1}$ est noté par $R_\lambda(A)$ et appelé résolvante de A.*

Le complémenetaire de $\rho(A)$ dans $\mathbb{C}$ est appelé spectre de A, et noté $\sigma(A)$. λ est une valeur propre de A si $\lambda I - A$ n'est pas injectif, Tout vecteur $\varphi \neq 0$ tel que $A\varphi = \lambda\varphi$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. Toute valeur propre appartient donc au spectre. Si $\lambda I - A$ n'est pas d'image dense, et que λ n'est pas valeur propre, on dit que λ appartient au spectre résiduel de A.

Définition 1.2.11 *Soient E un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(H)$.*

*1) **L'ensemble résolvante** de A est L'ensemble*

$$\begin{aligned} \rho(A) &= \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \text{ est borné}\right\} \\ &= \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \text{ est bijectif}\right\} \end{aligned}$$

2) Soit $\lambda \in \rho(A)$, on définit ***la résolvante*** *$R_\lambda(A)$ de A par*

$$R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$$

3) ***Le spectre*** *de A est l'ensemble*

$$\begin{aligned} \sigma(A) &= \mathbb{C} \backslash \rho(A) \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ n'est pas inversible}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ n'est pas bijectif}\} \end{aligned}$$

i.e, $\sigma(A)$ est le complémentaire du $\rho(A)$ dans $\mathbb{C}$.

4) ***Le spectre ponctuel*** *de A (l'ensemble des valeurs propres) est l'ensemble*

$$\begin{aligned} \sigma_p(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ n'est pas injectif}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : N(\lambda I - A) \neq \{0\}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists v \in E \backslash 0 \text{ tel que } Au = \lambda v\}. \end{aligned}$$

5) ***Le spectre résiduel*** *de A est l'ensemble*

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ est injectif et } R(\lambda I - A) \text{ n'est pas dense dans } E\}.$$

6) ***Le spectre continu*** *de$A$ est l'ensemble*

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ est injectif et } R(\lambda I - A) \text{ est dense dans } E\}.$$

Remarque 1.2.3 *Les définitions ci-dessus restent valables méme si E n'est pas un Banach. et par suite, Ona toujours $\sigma_p(A) \subset \sigma(A)$.*

Proposition 1.2.4 *Soit E un espace de Banach, et $A \in \mathcal{L}(H)$. $\lambda \in \rho(A) \Longleftrightarrow \lambda I - A$ est bijectif.*

Remarque 1.2.4 *Si E est de dimension finie, alors $\lambda I - A$ est inversible si et seulement si $N(\lambda I - A) = \{0\}$. En particulier, en on déduit $\sigma_p(A) = \sigma(A)$. La situation est plus délicate en dimension infinie.*

Proposition 1.2.5 *Le spectre $\sigma(A)$ de A est inclu dans le disque fermé dont le centre est zéro et le rayon est $\|A\|$, i, e*

$$\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|A\|\}.$$

Soit $A \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\begin{aligned}&1)\rho(A) \text{ est ouvert non vide de } \mathbb{C}.\\&2)\ \sigma(A) \text{ est un compact de } \mathbb{C}.\\&3)\ \overline{\sigma_p(A)} \subset \sigma(A).\end{aligned}$$

Théorème 1.2.3 (Identité de la résolvante) *Soient $A \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \rho(A)$. Alors ona*

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu) R_\lambda(A) R_\mu(A) = (\lambda - \mu) R_\mu(A) R_\lambda(A)$$

Définition 1.2.12 (Rayon spectral) *Le rayon spectral de A est noté par $r(A)$ est le plus petit disque centré par zéro et contient $\sigma(A)$, $i.e$,*

$$r(A) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Si $\sigma(A) = \emptyset$, par convention on pose $r(A) := 0$.

Proposition 1.2.6 *On puet écrire le spectre d'un opérateur bornée sous forme d'une union des trois sous ensembles dijoints dans le plan complexe, $i.e$,*

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A) \cup \sigma_c(A).$$

Propriétés spectrales de l'adjoint

Proposition 1.2.7 *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$. Alors*

1) $\rho(A^*) =: \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\lambda} \in \rho(A)\right\}$.

2) $\sigma(A^*) =: \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\lambda} \in \sigma(A)\right\}$.

3) *pour tout* $\lambda \in \rho(A^*)$, *ona* $R_\lambda(A^*) = (R_{\overline{\lambda}}(A))^*$.

4) $\sigma_r(A) = \sigma_p(A^*)$.

5) $\sigma(A) = \sigma(A^*)$.

Propriétés spectres des opérateurs auto-adjoints

1.3 Les Opérateurs fermés

1.3.1 Rappels sur les espaces fermés

Proposition 1.3.1 *Tout sous espace vectoriel fermé d'un espace complet est complet.*

Corollaire 1.3.1 *Toute sous espace vectoreil fermé d'un espace de Banach est un espace de Banach.*

Corollaire 1.3.2 *Tout sous espace vectoreil fermé d'un espace de Hilbert est un espace de Hilbert.*

Définition 1.3.1 (Opérateur densément défini) *Soient E un espace vectoreil normé et A un opérateur linéaire défini de sous-espace vectoriel $D(A) \subset E$ dans E. On dit que A est densément défini si son domaine est sous ensemble dense de E, i.e*

$$\overline{D(A)} = E.$$

Définition 1.3.2 (Graphe d'un opérateur) *Soient E et F deux espaces vectoreils normés et $A : D(A) \subset E \longrightarrow R(A) \subset F$ un opérateur . Le graphe de A est le sous ensemble $\Gamma(A) \subset E \times F$ défini par :*

$$\Gamma(A) = \{(u, Au) : u \in D(A)\}.$$

1.3.2 Opérateurs fermés

Définition 1.3.3 (Opérateurs fermés) *Soient E et F deux espaces normés. $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ est dit fermé si pour toute suite (u_n) de $D(A)$ telle que $u_n \longrightarrow u$ dans E et $Au_n \longrightarrow v$ dans F, ona alors : $u \in D(A)$ et $Au = v$.*

Proposition 1.3.2 *Soient E et F deux espaces normés et un opérateur $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$. Alors A est fermé si et seulement si son graphe $\Gamma(A)$ est un sous-espace fermé de $E \times F$.*

Définition 1.3.4 (Extension des opérateurs) *Soient E un espace vectoriel et $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ et $B : D(B) \subset E \longrightarrow E$ deux opérateurs linéaires . Alors on dit que A une extension de B (ou bien B est une restriction de B) si :*

$$D(B) \subset D(A)$$

et $Au = Bu$ pour tout $u \in D(B)$ .Et on le note par $B \subset A$.

Théorème 1.3.1 (Théoremé du graphe fermé) *Soient E et F deux espaces de Banach et $A : E \longrightarrow F$. Si le graphe $\Gamma(A)$ est fermé dans $E \times F$, alors A est borné.*

Démonstration. Voir [6] . ■

Proposition 1.3.3 *Soient E et F deux espaces de Banach et $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur fermé. Alors A est borné si et seulement si $D(A) = E$.*

Démonstration. En appliquant le théoréme du graphe fermé. ■

Proposition 1.3.4 *Tout opérateur linéaire borné $A : E \longrightarrow F$ est fermé .*

Démonstration. Supposons que $(u_n) \in D(A)$ telle que $u_n \longrightarrow u$ dans E avec $Au_n \longrightarrow v$ dans F. Comme A est borné, donc $D(A) = E$. Alors d'aprés la continuité de A il est clair que $u \in D(A)$ et $Au = v$. ■

1.4 Les Opérateurs non bornés

1.4.1 Définitions et propriétés

Définition 1.4.1 (Domaine d'un opérateur) *Soient E et F deux espaces vectoriels normés et A un opérateur linéaire défini de sous-espace vectoriel $D(A) \subset E$ dans F. $D(A)$ est appelé le domaine de l'opérateur A .*

Définition 1.4.2 (Opérateur non borné) *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On dit qu'un opérateur linéaire A défini sur $D(A) \subset E$ dans F est un opérateur non borné si :*

$$D(A) \neq E$$

Remarque 1.4.1 *Les opérateurs non bornés peuvent étre seuleument dans les espaces de dimension infinie parce que dans les espaces de dimension finie tous les opérateurs linéaires sont bornés.*

1.4.2 L'adjoint d'un opérateur non borné

Définition 1.4.3 (Adjoint d'un opérateur non borné) *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $A : D(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur linéaire densément défini. On définit*

$$D(A^*) = \left\{ v \in H_2 : \exists! h \in H_1 \ tq \ \langle Au, v \rangle_{H_2} = \langle u, h \rangle_{H_1}, \forall u \in D(A) \right\}.$$

Comme $D(A)$ est dense dans H_1, l'élément h, s'il existe, est unique et ona $A^* v = h$L'opérateur A^* avec domaine$D(A^*)$ est appellé l'adjoint de A .

Par définition ona :

$$\langle Au, v \rangle_{H_2} = \langle u, A^* v \rangle_{H_1}, \forall u \in D(A), \forall v \in D(A^*).$$

Remarque 1.4.2 *Il est possible que $D(A^*)$ n'est pas dense dans H_2.*

Remarque 1.4.3 *En général,il est trés difficile de déterminer explicitiment les éléments de $D(A^*)$.*

Proposition 1.4.1 *On peut oussi définit $D(A^*)$ comme suit :*

$$D(A^*) = \left\{ v \in H_2 : \exists c \geq 0 \ tq \ \left| \langle Au, v \rangle_{H_2} \right| \leq c \|u\|, \forall u \in D(A) \right\}.$$

Ou oncore $D(A^*)$ est l'ensemble de tous les éléments $u \in H_1$ tel que la fonctiennelle $u \longrightarrow \langle Au, v \rangle_{H_2}$ admet une extension d'une fonctionnelle continue (i,e admet un prolongement continu).

1.4.3 Opérateur auto-adjoint,opérateur symétrique

Définition 1.4.4 (Opérateur auto-adjoint) *Soient H un espace de Hilbert et $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur densément défini. On dit que A est auto-adjoint si $A = A^*$ i.e*

$$\begin{cases} D(A) = D(A^*) \text{ et} \\ Au(x) = A^* u(x), \forall u \in D(A) = D(A^*). \end{cases}$$

Remarque 1.4.4 *Si A est un opérateur borné (alors est densément défini) dans H ,alors son domaine en plus du domaine de son adjoint est tout l'espace H , i,e. $D(A) = H = D(A^*)$. Dans le cas des opérateurs non bornés la situation est beaucuop plus compliquée.Il est possible que un opérateur densément défini A admet un adjoint A^* tel que $Au(x) = A^*u(x), \forall u \in D(A) \cap D(A^*)$, mois $D(A) \neq D(A^*)$, et ainsi A n'est pas auto-adjoint.*

1.4.4 Opérateur normal

Définition 1.4.5 (Opérateur normal) *Soit H un espace de Hilbert et $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur densément défini . On dit que A est normal si*

$$D(A) = D(A^*) \text{ et } \|Au\| = \|A^*u\|$$

pour tout $u \in D(A) = D(A^*)$.

Corollaire 1.4.1 *Tout opérateur auto-adjoint est normal.*

Chapitre 2

Inversibilité d'opérateurs

D'un point de vue abstrait, si E désigne un espace fonctionnel et A une application linéaire sur E , différents problémes consiste à recherche la solution $u \in E$ du probléme : $\lambda u - Au = f$

Ce qui est équivalent à étudier l'inversibilité de l'opérateur $\lambda I - A$, en d'autres termes c'est la théorie spectrale. Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la caractérisation de la classe des opérateurs linéaires à image fermée dans espace Hilbert H.

Définition 2.0.6 *Soit H un espace de Hilbert et A un opérateur fermé de domaine dense dans H et à valeurs dans H.Notons $N(A)$, $\sigma(A)$ et $\rho(A)$ et $R(A)$ respectivement le* ***noyau,*** *le* ***spectre*** *et* ***l'ensemble résolvant*** *et* ***l'image*** *de A. Par $C(H)$ l'ensemble des opérateurs fermés à domaine dense dans H et à valeurs dans H,et $L(H)$ nous notons l'ensemble de tous les opérateurs bornés dans H. $c(A)$ désigne la* ***conorme*** *de A, définie par*

$$c(A) = \inf \left\{ \|Au\| ; u \in D(A) \cap N(A)^{\perp} \ \text{ et } \ \|u\| = 1 \right\}.$$

$$(c(A) = \infty \Leftrightarrow A = 0).$$

2.1 Théorie d'opérateurs fermée

Proposition 2.1.1 (**cf**. [11] ; [13]) . *Soit $A \in C(H)$,Alors :*

(1) $R(A)$ *fermé* $\Leftrightarrow c(A) > 0$.

(2) On a $c(A) = c(A^*)$.

Définition 2.1.1 *Soit A un opérateur fermé , alors A est dit régulier si $R(A)$ fermé et $\forall n \geq 0$, $N(A^n) \subseteq R(A)$.*

Définition 2.1.2 *Un opérateur linéaire $P \in C(H)$, est appellée une projection si $P^2 = P$. Si $M = R(P)$, P est projection de H sur M.*

Si en outre $P = P^*$, P est appelée projection orthogonale. $H = R(P) \oplus N(P)$ et pour tout $u \in H$, $u = Pu + (I - P)u$.

Proposition 2.1.2 *Soit $A \in L(H)$ régulier, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(**a**) *$\exists B \in L(H)$ résolvant généralisé de A en zéro commutant avec A .*

(**b**) *A est inversible.*

Démonstration. (**a**) $\Rightarrow$ (**b**) : Soit $u \in H$ alors $u = (I - BA)u + BAu = (I - BA)u + ABu$ or $(I - BA)u \in N(A) \subseteq R(A)$ et $ABu \in R(A)$ donc $H \subseteq R(A) \Rightarrow A$ est surjectif .Par symétrie avec l'adjoint, on en déduit que $R(A^*) = H \Rightarrow N(A) = \{0\}$ donc A est inversible.

(**b**) $\Rightarrow$ (**a**) : on prend $B = A^{-1}$. ■

Si M est un sous-espace fermé de H , notons P_M la projection orthogonale sur M.

Définition 2.1.3 *Soit A un opérateur fermé, notons $reg(A)$ l'ensemble résolvante généralisé (ou l'ensemble régulier) de A définit par :*

$$reg(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; A \text{ admette un résolvant généralisé analytique dans un voisinage } v \text{ de } \lambda\}.$$

Lemme 2.1.1 *Soit $A \in L(H)$ alors ona :*

(**a**) *$R(A)$ fermé dans $H \Longleftrightarrow R(AA^*)$ fermé dans H .*

(**b**) *$N(A) = N(A^*A)$ et $N(A^*) = N(AA^*)$.*

Définition 2.1.4 *Soit $A \in L(H)$ est régulier,on dit que $T \in L(H)$ est A-régulier s'il existe M sous-espace fermé de H vérifiant :*

(**a**) $N(A) \subseteq M$.

(**b**) $A(M) = M$.

(**c**) $T(M) \subseteq M$.

2.2 Inversibilités d'opérateurs bornés

Théorème 2.2.1 *Soit H un espace de Hilbert et $A \in L(H)$ un opérateur. Si* $\dim H < +\infty$, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *A est inversible.*

(2) *A est injectif.*

(3) *A est surjectif.*

(4) *A admet un inverse à droite (i.e . il existe $U \in L(H)$ tel que $A \circ U = I_H$).*

(5) *A admet un inverse à gauche (i.e. il existe $V \in L(H)$ tel que $V \circ A = I_H$).*

2.3 Inversibilté d'opérateurs non bornés

Définition 2.3.1 (Inverse d'opérateur non borné) *Soient H un espace de Hilbert et $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire bijectif. On définit l'opérateur A^{-1} défini de H dans H tel que :*

$$AA^{-1}v = v, \forall v \in H_1 et A^{-1}Au = u, \forall u \in D(A).$$

L'opérateur A^{-1} est dit l'inverse de A.

Remarque 2.3.1 *L'image de A^{-1} est égal au domaine de A, i.e*

$$R\left(A^{-1}\right) = D(A).$$

Remarque 2.3.2 *L'inverse A^{-1} s'il existe, il est unique.*

Théorème 2.3.1 *L'inverse d'opérateur fermé est fermé .*

Démonstration. Soit $A : D(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur fermé , alors

$$\Gamma(A) = \{(u, Au) : u \in D(A)\}.$$

est fermé , d'où

$$\Gamma\left(A^{-1}\right) = \{(Au, u) : u \in D(A)\}.$$

est fermé. Ceci montre que A^{-1} est fermé. ■

Remarque 2.3.3 *Si A est fermé , alors A^{-1} est borné.*

2.4 Ascente et descente

Rappelons que les noyaux et les images des itérés d'un opérateur linéaires A sur H, forment respectivement deux suites croissante de sous espaces vectoriels de H :

$$\begin{aligned} N\left(A^0\right) &= \{0\} \subseteq N(A) \subseteq N\left(A^2\right) \subseteq \ldots\ldots\ldots \subseteq N(A^n). \\ R\left(A^0\right) &= H \supseteq R(A) \supseteq R\left(A^2\right) \supseteq \ldots\ldots\ldots \supseteq R(A^n). \end{aligned}$$

Généralement ses inclusions sont strictes. Mais s'il existe un certain rang à partir duquel ces suites deviennent constantes, alors on appelle :

- L'ascente de A ,le plus petit entier naturel $p = p(A)$ tel que

$$N(A^p) = N\left(A^{p+1}\right)$$

- La descente de A ,le plus petit entier naturel $q = q(A)$ tel que

$$R(A^q) = R\left(A^{q+1}\right)$$

Remarque 2.4.1 *Si la suite $(N(A^n))_n$ (respectivement $(R(A^n))_n$) est strictement croissante (respectivement strictement décroissante), on écrit $p(A) = +\infty$ (respectivement $q(A) = +\infty$).*

Il est clair que

$$p(A) = 0 \Longleftrightarrow A \text{ est injectif}$$

$$q(A) = 0 \Longleftrightarrow A \text{ est surjectif}$$

Définition 2.4.1 (Nullité et la déficience) *Soit A un opérateur linéaire sur H. Alors :*

- *La nullité de A est l'entier naturel $\alpha(A) = \dim N(A)$.*
- *La déficience de A est l'entier naturel $\beta(A) = co\dim R(A)$.*

Exemple 2.4.1 (Conorme) *Soit $A : l^2 \to l^2$, $Ax_1 = 0$, $Ax_2 = x_1$, $Ax_3 = x_2, ...$, où (x_j) est la base canonique.*

On a :$N(A) = \{x_1\}, R(A) = l^2$.

pour tout $u = \xi$, on a :

$$\|u\| = dist(u, N(A)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{+\infty} |\xi_i|^2} = \|Au\| \Longrightarrow \frac{\|Au\|}{\|u\|} = 1 \forall u \in l^2.$$

$c(A) = 1 > 0, \alpha(A) = 1, \beta(A) = 0.$

Théorème 2.4.1 *Soit $A \in L(H)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$R(A)$ est fermée dans H*
2. *$R(A^*)$ est fermée dans H*
3. *$R(A) = N(A^*)^{\perp}$*
4. *$R(A^*) = N(A)^{\perp}$*
5. *$c(A) > 0$*
6. *$\beta(A) < +\infty$*

Théorème 2.4.2 *$A \in C(H)$ est à image fermée si et seulement si $\|Au\| \geq c\|u\|$ pour tout $u \in N(A)^{\perp} \cap D(A)$.*

Démonstration. En effet supposons que $\|Au\| \geq c\|u\|$ pour tout $u \in N(A)^{\perp} \cap D(A)$ est vérifiée.

Soit $f^n \longrightarrow f$, $f^n \in R(A)$ .Soit u^n définie par $f^n = Au^n, u^n \in N(A)^{\perp} \cap D(A)$.

$u^n - u^m \in N(A)^{\perp} \cap D(A) : \|u^n - u^m\| \leq \frac{1}{c}\|f^n - f^m\| \rightarrow 0; n, m \rightarrow \infty \Longrightarrow u^n \rightarrow u$, $Au^n \rightarrow f \Longrightarrow u \in D(A), Au = f$

Car f est fermé et par conséquent $f \in R(A)$.

Réciproquement supposions que $R(A)$ est fermée.

L'application $N(A)^{\perp} \cap D(A) \longrightarrow R(A)$; $u \longrightarrow Au$ est bijective.

$A^{-1} : R(A) \longrightarrow N(A)^{\perp}$ est borné et $D(A^{-1}) = R(A)$. ■

Chapitre 3

Inverses généralisés

F.V.Atkinson a développé la notion d'inverse relatif ou pseudo inverse (ou inverse généralisé); ce qui nous améne à poser la question suivante : Peut-on élaborer une théorie spectrale généralisée où la notion d'inverse est remplacée par la notion d' généralisé ?

L'idée est donc de considérer un opérateur résolvant généralisé qui soit analytique dans un voisinage U de λ.

3.1 NOTION D'INVERSE GENERALISE

La notion d'inversibilité est une notion trés importantes dans tous les domaines de mathématiques . L'équation $Ax = y$ posséde une solution unique lorsque l'opérateur linéaire A est inversible, malheuresement, on ne se trouve pas toujours dans ce cas, en pratique, on obtient souvent des données sous forme d'une matrice rectangulaire qui est un opérateur non inversible, ou bien dans le cas général on se trouve avec un opérateur non surjectif ou non injectif, ou d'inverse non borné.

Dans ce cas on essaie de trouver un opérateur qui posséde le maximum de propriétés que posséde l'inverse s'il existait, un tel opérateur sera appelé un inverse généralisé (ou pseudo inverse) de A.

Pour un opérateur A on peut définir différents types d'inverse généralisés, qui, malgré leur différences, possédent tous des propriétés communes, notamment leurs relations avec les projections.

Définition 3.1.1 *Soit $A \in C(H)$ On dit que $B \in C(H)$ est un inverse généralisé de A et on note $B\,(inv)\,A$ si $R(B) \subseteq D(A), R(A) \subseteq D(B)$*

Pour tout $u \in D(A)$, $ABAu = Au$

Pour tout $v \in D(B)$, $BABv = Bv$

Exemple 3.1.1 *Soit A l'opérateur linéaire de $C([0,1])$ dans lui-méme, défini par: $A(x(t)) = x(t^2)$.*

On définit B de $C([0,1])$ dans lui-méme par: $B(x(t)) = x\left(\sqrt{t}\right)$.

Nous avons, $ABA(x(t)) = AB(x(t^2)) = A(x(t))$ $\quad BAB(x(t)) = BA\left(x\left(\sqrt{t}\right)\right) = B(x(t))$

Alors B est un invrse généralisé de A

Remarque 3.1.1 *La relation (inv) est symétrique c'est-à-dire que $A\,(inv)\,B \Leftrightarrow B\,(inv)\,A$.*

Lemme 3.1.1 *Soit $A, B \in C(H)$; $A\,(inv)\,B$. Alors:*

1) AB est une projection de $D(B)$ sur $R(A)$ de noyau $N(B)$.
2) $I - AB$ est une projection de $D(B)$ sur $N(B)$.
3) BA est une projection de $D(A)$ sur $R(B)$ de noyau $N(A)$.
4) $I - BA$ est une projection de $D(A)$ sur $N(A)$.
5) $D(B) = N(B) \oplus R(A)$
6) $D(A) = N(A) \oplus R(B)$

Lemme 3.1.2 *Soit $A, B \in C(H)$, avec $A\,(inv)\,B$. Alors AB considéré comme un opérateur de H dans lui méme, est fermable si et seulement si $\overline{R(A)} \cap N(B) = \{0\}$.*

Alors: $D\left(\overline{AB}\right) = \overline{R(A)} \oplus N(B); R\left(\overline{AB}\right) = \overline{R(A)}; N\left(\overline{AB}\right) = N(B)$ et $\overline{AB}$ est une projection de $D\left(\overline{AB}\right)$ sur $R\left(\overline{AB}\right)$, de noyau $N(B)$.

Corollaire 3.1.1 *Soit $A, B \in C(H)$; avec $A\,(inv)\,B$.Alors AB considéré comme un opérateur de H dans lui méme, est fermé si et seulement si $R(A)$ est fermé.*

Corollaire 3.1.2 *Soit $A, B \in C(H)$; avec $A\,(inv)\,B$.Alors $AB \in L(H)$ si et seulement si $R(A) \oplus N(B) = H$.*

Définition 3.1.2 *Soit* $A, B \in C(H)$; *tel que* $A(inv)B$.*On dira que* B *est un inverse généralisé strict de* A *et on note* $B(inv.s)A$ *si* $\overline{R(A)} \oplus N(B) = \overline{R(B)} \oplus N(A) = H$.

Remarque 3.1.2 *La relation* $(inv.s)$ *est symétrique c'est-à-dire que:* $A(inv.s)B \Leftrightarrow B(inv.s)A$.

Définition 3.1.3 *Soit* $A \in C(H)$, P *la projection orthogonale de* H *sur* $\overline{R(A)}$ *et* Q *la projection orthogonale de* H *sur* $\overline{R(A^*)}$. *Alors l'inverse généralisé strict* B *de* A *déterminé à partir de* P *et de* Q *selon les modalités du lemme précédent est appellé l'inverse généralisé de Moore-Penrose de* B *et on écrit* :$A(inv.MP)B$.

Remarque 3.1.3 *Pour tout* $A \in C(H)$, *il existe* $B \in C(H)$ *tel que* $A(inv.MP)B$.

Par contre dans les espaces de Banach, il n'est méme pas vrai, en général, que pour tout $A \in C(H)$, *il existe* $B \in C(H)$ *tel que* $A(inv)B$.

Lemme 3.1.3 *Soit* A,$B \in C(H)$ *avec* $A(inv.s)B$. *Alors* B *est borné si et seulement si* $R(A)$ *est fermé dans* H.

Démonstration. Si $R(A)$ est fermé, alors $D(B) = R(A) + N(B) = H$, d'ou B est borné.

Réciproquement si B est borné, alors $H = R(A) + N(B)$;d'ou $R(A)$ est fermé en utilisant d'aprés le corollaire de Neubauer. ■

Lemme 3.1.4 *Soit* A,$B \in C(H)$ *avec* $A(inv.s)B$. *Alors* :$A^*(inv.s)B^*$. *En outre*

$\overline{R(A^*)} = R(A^*) \cap D(B^*)$. $\overline{R(B^*)} = R(B^*) \cap D(A^*)$.

Remarque 3.1.4 *Si* A,$B \in C(H)$ *tel que* $A(inv.MP)B$, *alors* $A^*(inv.MP)B^*$ *et on trouve à partir de (1).*

$R(B^*) = \overline{R(A)} \cap D(A^*)$; $R(A^*) = \overline{R(B)} \cap D(B^*)$.

Lemme 3.1.5 *Soit* A,$B \in C(H)$ *avec* $A(inv.MP)B$. *Alors:*

1) $AR_A = B^*R_{B^*}$

2) $I - R_A = R_{B^*} - P_{N(B^*)}$

Corollaire 3.1.3 *Sous les mémes conditions et par symétrie entre* A *et* B, *ona:*

1) $A^*R_{A^*} = BR_B$

2) $I - R_{A^*} = R_B - P_{N(B)}$

Corollaire 3.1.4 $P_{G(A)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} P_{G(B)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{N(A)} & 0 \\ 0 & -P_{N(A^*)} \end{bmatrix}$

Corollaire 3.1.5 *Si A est inversible et si $B = A^{-1}$ Alors:*

$P_{G(A)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} P_{G(B)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Lemme 3.1.6 *Soient $A \in C(H)$, $B \in K(H)$ et $B' \in C(H)$ tels que: $B\,(inv.s)\,A$. et $B'\,(inv.s)\,A$. Alors B' est compact.*

Démonstration. Posons $B' = B'(ABA)\,B' = \overline{B'A}.B.\overline{AB'}$.

$Q' = \overline{B'A}$ $\left(\text{resp.}P' = \overline{AB'}\right)$ est une projection sur $\overline{R(B')}$ $\left(\text{resp.sur } \overline{R(A)}\right)$, donc bornée.

Comme B est compact, alors B' l'est aussi. ■

3.2 Généralité

Notation 3.2.1 *Soit H un espace de Hilbert complexe et notons $C(H)$ l'ensemble des opérateurs fermés à domaine dense dans H et à valeurs dans H. Si $A \in C(H)$ on notera $D(A)$ son domaine, $N(A)$ son noyau et $R(A)$ son image. $L(H)$ dénotera le sous-ensemble des éléments bornés de $C(H)$.*

Définition 3.2.1 *Un opérateur $A \in C(H)$ est dit monojectif si et seulement si il est inversible à droite ou inversible à gauche.*

on note $Me(A)$ est monojectif de A.

Remarque 3.2.1 (1) *A est inversible à gauche $\Longleftrightarrow N(A) = \{0\}$ et $R(A)$ fermé .*

(2) *A est inversible à droite $\Longleftrightarrow R(A) = H$*

Lemme 3.2.1 *Si A est monojectif et $S \in C(H)$ alors :*

$$\|A - S\| < c(A) \Longrightarrow S \text{ est monojectif.}$$

Corollaire 3.2.1 *L'ensemble des opérateurs monojectifs est ouvert dans $C(H)$.*

Corollaire 3.2.2 *Soit* $A, B \in C(H)$. *Alors si* $R(A)+N(B)$ *est fermé et si* $R(A) \cap N(B) = \{0\}$, $R(A)$ *est fermé*

Définition 3.2.2 *On dit que* $A \in C(H)$ *est inversible à gauche s'il existe un opérateur* $U \in L(H)$ *tel que* $U \circ A = I$.

Il est alors nécessairement injectif.

On dit qu'il est inversible à droite s'il existe un opérateur $V \in L(H)$ *tel que :*$A \circ V = I$.

Il est alors nécessairement surjectif.

3.3 Cas espaces de Hilbert

Soit maitenant **H**, un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et si $A \in C(\mathbf{H})$ notons A^* son adjoint.

Lemme 3.3.1 $A, B \in C(\mathbf{H})$ *avec* $A(INV)B$. *Alors* $A^*(INV)B^*$ *et*

$$(1)\quad D(B^*) \cap \overline{R(A^*)} = R(A^*)\,; D(A^*) \cap \overline{R(B^*)} = R(B^*)\,.$$

Définition 3.3.1 $A \in C(H)$, P *la projection orthogonale de* $\mathbf{H}$ *sur* $\overline{R(A)}$ *et* Q *la projection orthogonale de* $\mathbf{H}$ *sur* $\overline{R(A)^*}$. *Alors l'inverse généralisé strict* B *de* A *déterminé à partir de* P *et de* Q *selon les modalités du lemme précédent est appéllé l'inverse de Moore-Penrose de A, ce qui notera* $A(IMP)B$. *Il est facile de voir que l'inverse de Moore-Penrose d'un opérateur est unique ce qui permet d'écrire également* $A = IMP(B)$. *On a alors* $B = IMP(A)$.

Remarque 3.3.1 $\forall\ A, B \in C(\mathbf{H})$ *tels que* $A(INV)B$ *on trouve à partir de* (1) *:*

$$(2)\, R(B^*) = \overline{R(A)} \cap D(A^*)\,; R(A^*) = \overline{R(B)} \cap D(B^*)\,.$$

Définition 3.3.2 *Si* $A \in C(\mathbf{H})$, *posons* $R_A = (I + A^*A)^{-1}$. *Alors* $(AR_A)^* = A^*R_{A^*}$ $(\mathbf{cf}.\,[1, \textit{lemma } 3.13])$.

Lemme 3.3.2 *Soit* $A, B \in C(\mathbf{H})$ *avec* $A(IMP)B$. *Alors* (**a**) $AR_A = B^*R_{B^*}$; (**b**) $I - R_A = R_{B^*} - P_{N(B^*)}$.

Corollaire 3.3.1 *Sous les mèmes conditions, par symétrie entre* A *et* B *on a :* (**c**) $A^*R_{A^*} = BR_B$; (**d**) $I - R_{A^*} = R_B - P_{N(B)} \Longleftrightarrow I - R_B = R_{A^*} - P_{N(A^*)}$.

Définition 3.3.3 *Soit $G(A) = \{(u, Au) : u \in D(A)\}$ le graphe de A . La projection orthogonale sur $G(A)$ dans $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ est donnée par* (**cf**. [5; *Lemma* 3.14])

$$P_{G(A)} = \begin{pmatrix} R_A & A^* R_{A^*} \\ AR_A & I - R_{A^*} \end{pmatrix}.$$

Corollaire 3.3.2 *$A, B \in C(\mathbf{H})$ avec $A(IMP)B$. Alors*

$$P_{G(A)} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} P_{G(B)} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{N(B^*)} & 0 \\ 0 & -P_{N(B)} \end{pmatrix}.$$

3.4 L'inverse généralisé de Moore-Penrose

Définition 3.4.1 *Soit $A \in L(H)$. On appelle :*

1. *inverse généralisé de A, l'opérateur $B \in L(H)$ vérifiant :*

$$\begin{cases} ABA = A \\ BAB = B \end{cases}$$

2. *inverse de Moore-Penrose de A (MP inverse dde A), l'inverse généralisé B de A , noté $B = A^+$, verifiant :*

$$\begin{cases} (AB)^* = AB \\ (BA)^* = BA \end{cases}$$

Théorème 3.4.1 *Soit $A \in L(H)$. alors les assertions suivantes sont équivalents :*

1) A posséde un inverse généralisé.

2) $R(A)$ est fermé.

3) A^+ existe et il est unique.

D'aprés la théoréme précédent, on conclut que si l'inverse de Moore-Penrose de $A \in L(H)$ existe alors :

- $R(A^+) = R(A^+A) = R(A^*)$.
- $N(A^+) = N(AA^+) = N(A^*)$.

3.5 Relation entre l'adjoint et l'inverse de Moore-Penrose d'un opérateur

Théorème 3.5.1 *Soit $A \in L(H)$ .Alors les essertions suivantes sont équivalentes :*

1) A^+ *existe .*

2) $(AA^*)^+$ *existe .*

3) $(A^*)^+$ *existe .*

4) $(A^*A)^+$ *existe .*

Proposition 3.5.1 *Soit $A \in L(H)$. Si $R(A)$ est fermé, alors on a :*

1) $(A^*)^+ = (A^+)^*$.

2) $(A^*A)^+ = A^+ (A^+)^*$.

3) $(AA^*)^+ = (A^+)^* A^+$.

4) $A^* = A^+AA^* = A^*AA^+$.

5) $A^+ = (A^*A)^+ A^* = A^* (AA^*)^+$.

6) $(A^*)^+ = A (A^*A)^+ = (AA^*)^+ A$.

Démonstration. 1) D'aprés la définition de A^+,on obtient :
$(A^+)^* A^* (A^+)^* = (A^+AA^+)^* = (A^+)^*$,
$A^* (A^+)^* A^* = (AA^+A)^* = A^*$,
$\left(A^* (A^+)^*\right)^* = A^+A = (A^+A)^* = A^* (A^+)^*$ et
$\left((A^+)^* A^*\right)^* = AA^+ = (AA^+)^* = (A^+)^* A^*$.
Donc $(A^+)^*$ est le Moore-Penrose inverse de A^*.
2) Puisque on a :
$A^*AA^+ (A^+)^* A^*A = A^*AA^+ (AA^+)^* A = A^*AA^+AA^+A = A^*A$,
$A^+ (A^+)^* A^*AA^+ (A^+)^* = A^+ (AA^+)^* AA^+ (A^+)^* = A^+AA^+ (A^+)^* = A^+ (A^+)^*$,

$\left(A^*AA^+\left(A^+\right)^*\right)^* = A^+AA^+A = A^+A = \left(A^+A\right)^* = \left(AA^+A\right)^*\left(A^+\right)^* = A^*AA^+\left(A^+\right)^*$
et $\left(A^+\left(A^+\right)^*A^*A\right)^* = \left(A^+\left(A\right)A^+A\right)^* = A^+A = A^+\left(A^+\right)^*A^*A.$
donc $A^+\left(A^+\right)^*$ est le Moore-Penrose inverse de A^*A.

3) Se déduit de 2) en remplaçant A par A^+.

4) Comme A^+A est une projection sur $R\left(A^*\right)$,alors on obtient $A^* = A^+AA^* = \left(A^+A\right)^*A^* = A^*\left(AA^+\right)^* = A^*AA^+$.

5) Il est bien claire que $A^+ = A^+\left(A^+\right)^*A^*$. Par l'utilisation de 2) ,on obtient la premiére égalité de 5). De la même méthode, on peut trouve la deuxiéme égalité de 5).

6) Sedéduit de 5). ■

3.6 Liaison avec Moore-Penrose pseudo inverse :

Rappelons que si $A \in C\left(H\right)$, A à image fermée , alors il existe un opérateur unique $A^+ \in L\left(H\right)$ dit inverse généralisé de Moore Penrose de A vérifaint :

$$AA^+A = A,\ A^+AA^+ = A^+,\ \left(AA^+\right)^* = AA^+,\ \left(A^+A\right)^* = A^+A.$$

Remarque 3.6.1 *Si A est à image fermée ,A^+ est aussi à image fermée, $\left(A^+\right)^+ = A^+$ et $c\left(A\right) = \left\|A^+\right\|^{-1}$.*

Maintenant supposons que S, T sont images fermées tel que $D\left(TS\right) = S^{-1}\left(D\left(T\right)\right)$. Le produit TS est à image fermée si et seulement si TT^+SS^+ est à image fermée, en outre on a :

Théorème 3.6.1 *Soit T, S, TS à images fermées, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T^+T commute avec S^+S et S^+S commute avec T^+T.*
2. *$\left(TS\right)^+\left(TS\right) = S^+T^+TS$ et $\left(TS\right)\left(TS\right)^+ = TSS^+T^+$.*
3. *$\left(TS\right)^+ = S^+T^+$.*

En outre si T et S sont inversibles, alors $T^+ = T^{-1}, S^+ = S^{-1}$.
$\left(TS\right)^+ = \left(TS\right)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$.

Exemple 3.6.1 (inverse généralisé) *Soit*

$$A : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1]) \,;\, A(x(t)) = x\left(t^2\right).$$

$$B : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1]) \,;\, B(x(t)) = x\left(\sqrt{t}\right).$$

$$\begin{aligned} ABA(x(t)) &= AB\left(x\left(t^2\right)\right) = A(x(t)) \\ BAB(x(t)) &= BA\left(x\left(\sqrt{t}\right)\right) = B(x(t)) \end{aligned}$$

Remarque 3.6.2 *Toute application linéair associe un matrice.*

Exemple 3.6.2 *Calcul de* A^+

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ *est une base de* $R(A^*)$

$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Donc

$A^+ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $A^+ \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Nous devons maitenant calculer la base $R(A)^{\perp}$

On remarque que $R(A)^{\perp} = N(A^*)$

On résoude le systéme $A^*x = 0$

Nous obtenons

$$x = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \ donc\ ,\ A^{+} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0 \ et\ A^{+} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$$

$$Donc \quad A^{+} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons, $\mathbb{C}^4 = R(A) \oplus R(A)^{\perp}$

$$Donc\ ,\ A^{+} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} .$$

Conclusion et Perspectives

Dans le travail précédent, on a donné des caractéristiques de l'inverse généralisé de Moore-Pentose qui possède des propriétés très proches du vrai inverse.

On utilisera ces résultats importants dans la théorie de perturbation, En pratique, ces résultats peuvent-être utilisés dans la résolution des systèmes linéaire, En particulier en dimension finie, la méthode des moins des carrés

Merci

Bibliographie

[1] APOSTOL,C.:The correction by compact perturbation of the singular behavior of operators,Rev.Roum.Math.Pures et appli.(1976).

[2] BENSALLOUA,C.etNADIR,M.:Genral note on the theorem of Stampfli,Journal of inequalites and applications.(2016).

[3] BUCHWALTER,H.etD.TARRALC:Théorie spectral,Publication du départ de Maths Univ.(1982).

[4] COLOJOARA,I.andC.FOIAS:Theory of generalized spectral operators,Gordon and breach,NEW YORK.(1988).

[5] CORDES,H.OetJ-P.LABROUSSE:The invariance of the index in the metric space of closede operators.(Sept 1963).

[6] DUNFORD,NandJ.T.SCHWARTZ:Linearoperators,Part1.2,Interscience publishers,NEW-YORK.

[7] SCHWARTZ,L:Analyse Hilbertienne,Collection Hermann.(1979).

[8] STAMPFLI,J.G:Compact perturbation,normal eigenvalues and a problem of Salines,Journ.Lond.Math(1974).

[9] RIESZ,FandB.SZ.NAGY:Leçons d'analyse fonctionnelle.AKAD.KIADO.BUDAPEST.(1952).

[10] FELDMAN.J: Spectral Theory Examples, Université de la Clombie-Britannique, Canada.(15 octobre 2012).

[11] NEUBAUER,G:Espaces paracomplets.Conférence à Nice.(Juin 1974).

[12] MBEKHTA,M:Sur la Théorie spectrale généralisée, C.R. Acod.Sci, Paris , Sér.I Math 306 (1988), 593-596.

[13] KATO,T:Perturrbation theory for nullity, deficiency, and other quantities of linear operator, J.Anal.Math, 6 (1958), 261-322.

[14] MBEKHTA,M: Décomposition de Kato généralisée, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér, I Math 303 (1986), 979-982.

[15] STONE,M.N:Onunbounededoperatorsi Hilbert space.Journ.Indian.Math.Soc.(1951).

[16] TAYLOR,A.E:Introduction to functionnal analysis.J.WILLEY ET SONS.NEW YORK.(1958).

[17] VASILESCU,F.H:Analytic functional calculus and spectral decomposition.D.Reidel publ.Comp.(1962).