



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques

## Mémoire de Master

**Domaine** : Mathématiques et Informatique  
**Filière** : Mathématiques  
**Option** : Analyse Mathématiques et numérique

### Thème

---

*POLYNÔMES DE LUCAS POUR RESOUDRE LES EQUATIONS INTEGRALES DE  
FREDHOLM LINEAIRES*

---

Présentée par :

M<sup>elle</sup> : BEN HAMIDA NOR ELHOUDA

Soutenu publiquement le : xx/06/2022

Devant le jury composé de :

GASMI Abdelkader  
NADIR Mostefa  
DJAIDJA Noui

Prof,  
Prof,  
M.C.B,

Université de M'sila  
Université de M'sila  
Université de M'sila

Président  
Encadreur  
Examineur

# *Remerciements*

Je tiens à remercier tout premièrement **ALLAH** le tout puissant pour la volonté, la

santé et la patience, qu'il nous sa donné durant toutes ces longues années.

Ainsi, je tiens également à exprimer ma vifs remerciements à notre encadreur **NADIR Mostefa**, ancien professeur de mathématiques pour suivi continuel tout le long de la

réalisation de ce mémoire,ses conseils,ses encouragement.

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury **Gasmi Abdelkader,DJAIDJA Noui**, pour L'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

Je remercier à tous les enseignants du département de Mathématique

ainsi tous ceux qui ont participé de loin ou de près à l'élaboration de ce mémoire .

Enfin, un grand merci à ma famille, notamment à mes parents qui nous devons en grand partie l'accomplissement de ce travail par l'espoir et la confiance qu'ils ont toujours su nous donner.

Également, un remerciement à tous mes collègues de promotion 2022 pour les bons

moments qui nous avons passé ensemble.

---

### Dédicace

C'est avec une grande gratitude et des mots sincères, que je dédie ce modeste travail de fin d'étude

A mon Père **\*Mohamed\*** pour avoir toujours cru en moi et pour ses nombreux sacrifices  
A ma Mère **\*Ymina\*** pour son soutien et ses encouragements, J'espère qu'un jour ,  
je pourrai leurs rendre un peu de ce qu'ils ont fait pour moi , que dieu leur prête bonheur et  
longue vie.

Je dédie aussi de ce travail

A mes soeurs : **Hadjre, Aya**

A mes frères : **Alaa el dine, Wahid**

A tous les professeurs d'éducation coranique au centre Al-Maher

A tous les membres de ma promotion, à tous mes enseignants de puis mes  
première année d'études.

*NorElhouda*

# Table des matières

<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Rappels et notions fondamentales</b>	<b>3</b>
1.1 Normes	3
1.2 Espaces Normés	3
1.3 Espaces de Banach	3
1.4 Espaces de Hilbert	4
1.5 Opérateurs continus	4
1.6 Opérateurs compacts	4
<b>2 Les équations intégrales et quelques polynômes</b>	<b>5</b>
2.1 Opérateurs intégraux	5
2.2 Equation intégrale linéaire	5
2.3 Equation intégrale de Fredholm	6
2.4 Equation intégrale de volterra	7
2.5 Étude de polynôme	8
2.5.1 polynômes de Lucas	8
2.5.2 polynômes de Legendre $L_n$	9
2.5.3 polynômes de Tchebychev de la première espèce $T_n(x)$	10
2.5.4 polynômes de Tchebychev de la deuxième espèce $U_n(x)$	11
2.5.5 polynômes de Fibonacci	13
2.5.6 polynômes de Pell	14
2.5.7 Polynômes de Jacobsthal	15

---

<b>3 Aspects numérique</b>	<b>16</b>
3.1 Solution avec méthode de collocation . . . . .	16
3.2 Solution avec méthode de Galerkin . . . . .	18
3.2.1 Exemples . . . . .	20
3.2.1.1 Exemple 1 . . . . .	20
3.2.1.2 Exemple 2 . . . . .	20
<b>Bibliographie</b>	<b>23</b>

# Introduction Générale

De nombreux problèmes de physique mathématique peuvent être transformés à Fredholm ou Volterra en équations intégrales [1, 2, 4] à travers de nombreuses solutions numériques des équations intégrales que nous trouver l'application des quatre polynômes de Tchebychev [6]. Une méthode hybride utilisant des fonctions triangulaires a été appliquée pour résoudre l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce [11].

Plusieurs méthodes sont également développées pour approximer la solution d'équations intégrales telles que la forme variationnelle avec les séries Bernoulli, les séries d'Euler, la série d'Hermite, la série de Legendre et les fonctions de base sont utilisées pour résoudre ces équations, pour les chercheurs intéressés voir la récente travaux présentés dans [7, 8, 9, 10, 12].

Dans cet article, l'auteur utilise les polynômes de Lucas croisés avec des fonctions de test afin de résoudre numériquement les équations intégrales de Fredholm et Volterra données par

$$\varphi(x) - \int_{\Omega} k(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad x \in \Omega \quad (1)$$

ou  $k(x, t)$  est donné et supposé complexe et continu sur le carré  $\Omega \times \Omega$ , Le terme libre  $f(x)$  est supposé complexe et continu sur  $\Omega$ . L'inconnue la fonction  $\varphi(x)$  doit être déterminée comme fonction continue en  $\Omega$ . Selon le domaine  $\Omega = [a, x]$  ou  $[a, b]$  l'équation (1) décrit l'équation intégrale de Volterra ou Fredholm équation intégrale, respectivement.

Pour la solution de l'équation (1) dans les espaces fonctionnels complets  $L_2(\Omega)$ . multiplier l'équation (1) par une fonction test  $\psi(x)$  et en intégrant, on obtient la formulation faible de (1)

$$\langle \varphi(x), \psi(x) \rangle - \left\langle \int_{\Omega} k(x, y)\varphi(y)dy, \psi(x) \right\rangle = \langle f(x), \psi(x) \rangle, \quad \forall \psi \in L^2(\Omega). \quad (2)$$

Du fait de l'équivalence du problème (1) et (2), on peut utiliser (2) pour définir un approximation de  $\varphi$ . Choisir une suite de sous-espaces de dimension finie  $V_n, n \geq 1$ , ayant  $n$  fonctions de base  $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$  de dimension  $V_n = n$ , la fonction approchée  $\varphi_n \in V_n$  de la fonction  $\varphi$  est donnée par

$$\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j C_j(x), \quad (3)$$

ou l'expression (3) décrit la série de Lucas tronquée de la solution de l'équation (2), avec les fonctions  $\{C_k\}_{1 \leq k \leq n}$  représentant les polynômes de Lucas et  $\{\alpha_k\}_{1 \leq k \leq n}$  les coefficients à déterminer. En d'autres termes, nous écrivons

$$\langle \varphi_n(x), \psi(x) \rangle - \left\langle \int_{\Omega} k(x, y) \varphi_n(y) dy, \psi(x) \right\rangle = \langle f(x), \psi(x) \rangle \quad (4)$$

Pour la solution de cette équation, nous construisons une forme variationnelle de l'équation (4) en utilisant la méthode de Galerkin-Petrov. C'est-à-dire qu'on cherche à déterminer une fonction  $\psi \in L^2(\Omega)$  résout l'équation (4).

# Chapitre 1

## Rappels et notions fondamentales

### 1.1 Normes

Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ; on appelle une norme sur l'espace  $E$  toute fonction notée  $\| \cdot \|$  définie sur  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ; telle que

- $\| x \| = 0 \iff x = 0$
- $\| \lambda x \| = |\lambda| \| x \|, \forall x \in E, \forall \lambda \in K$
- $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|, \forall x, y \in E$

### 1.2 Espaces Normés

**Définition 1.2.1.** Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ; on dit que  $E$  est un espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme  $\| \cdot \|$ .

**Proposition 1.2.1.** Tout espace vectoriel normé  $(E, \| \cdot \|)$  est un espace métrisable.

### 1.3 Espaces de Banach

**Définition 1.3.1.** On appelle espace de Banach  $(E, \| \cdot \|)$  tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de sa norme.

## 1.4 Espaces de Hilbert

**Définition 1.4.1.** *On appelle espace de Hilbert tout espace euclidien  $H$  complet au sens de la métrique associée à sa norme*

$$\rho(f, g) = \|f - g\|$$

**Remarque 1.4.1.** *Généralement l'espace  $H$  est séparable est de dimension infinie, en d'autres termes, il existe un ensemble dénombrable partout dense dans  $H$  et pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $n$  vecteurs dans  $H$  linéairement indépendants.*

## 1.5 Opérateurs continus

**Définition 1.5.1.** *Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés, un opérateur  $A$  défini sur un sous ensemble  $G \in E$  dans  $F$  est dit continu au point  $x_0$  de  $G$  si on a, la propriété suivante Pour toute suite  $x_n$  de  $G$  converge vers  $x_0$  ; la suite  $A(x_n)$  converge vers  $A(x_0)$ , c'est à dire*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n) = A(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = A(x_0)$$

**Remarque 1.5.1.** *L'opérateur  $A$  est dit continu sur  $G$ , s'il est continu en chaque point de l'ensemble  $G$ .*

## 1.6 Opérateurs compacts

**Définition 1.6.1.** *soit  $A : X \rightarrow Y$  un opérateur linéaire entre deux espaces normés est dit compact s'il envoie tout ensemble borné dans  $X$  à un ensemble relativement compact dans  $Y$  .*

**Remarque 1.6.1.** *un ensemble  $G \subset Y$  est relativement compact si pour tout suite  $\{\varphi_n\}$  de  $G$ , il existe une sous suite  $\{\varphi_{n(k)}\}$  qui converge dans  $Y$  .*

# Chapitre 2

## Les équations intégrales et quelques polynomes

### 2.1 Opérateurs intégraux

**Définition 2.1.1.** Soit  $G \subset \mathbb{R}^m$  un ensemble compact et soit  $K : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue. Alors l'opérateur  $A : C(G) \rightarrow C(G)$  défini par

**Remarque 2.1.1.**

$$(A\varphi)(x) = \int_G k(x, y)\varphi(y)dy; x \in G$$

est appelé opérateur intégral à noyau continu  $K$

**Remarque 2.1.2.** Une classe particulièrement simple d'opérateurs intégraux est constituée des opérateurs à noyau dits dégénérés, c'est-à-dire de la forme :

$$K(x, y) = \sum_{j=1}^n a_j(x)b_j(y)$$

### 2.2 Equation intégrale linéaire

la forme ordinaire d'une équation intégrale linéaire est donnée par

$$\alpha(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.1)$$

ou  $\alpha(x)$ ,  $f(x)$ ,  $K(x, t)$  sont des fonctions données, la fonction  $\varphi(x)$  qui figure à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégrale à déterminer, est un paramètre numérique réel ou complexe différent de zéro. La fonction  $K(x, t)$  est appelée le noyau de l'équation intégrale.

Sous une autre forme simple en terme d'opérateurs

$$(I - \lambda A)\varphi(x) = f(x)$$

Si l'exposant de la fonction inconnue  $\varphi(x)$  dans le signe de l'intégrale est l'un, l'équation intégrale est appelé linéaire. Si la fonction inconnue  $\varphi(x)$  est d'exposant autre qu'un, ou si l'équation contient des fonctions non linéaires de  $\varphi(x)$ , comme  $e^\varphi$ , l'équation intégrale est appelé non linéaire.

## 2.3 Equation intégrale de Fredholm

Une équation de la forme (1.1) dont les bornes d'intégration sont fixées est dite équation intégrale linéaire de Fredholm on écrit.

$$\alpha(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt$$

i) si  $\alpha(x) = 0$ , l'équation s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt = 0$$

est dite de première espèce.

ii) si  $\alpha(x) = 1$ , l'équation s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt = \varphi(x)$$

est dite de seconde espèce.

iii) si  $\alpha(x)$  est continue et s'annule en certains points, mais pas en tout point de  $[a, b]$ , elle est dite équation intégrale de Fredholm de troisième espèce.

**Remarque 2.3.1.** Si  $f(x) = 0$ , l'équation s'écrit

$$\lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt = \varphi(x)$$

elle est dite équation intégrale de Fredholm de seconde espèce homogène si dans le cas contraire  $f(x) \neq 0$  elle est dite équation intégrale de Fredholm linéaire de seconde espèce non homogène.

## 2.4 Equation intégrale de volterra

**Définition 2.4.1.** On appelle équation intégrale linéaire de Volterra une équation de la forme

$$\alpha(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt$$

ou  $\varphi(x)$  est une fonction inconnue et  $K(x, t)$  et  $f(x)$  sont des fonctions connues et un paramètre réel.

1. si  $\alpha(x) = 0$  l'équation s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt = 0$$

est appelée équation intégrale de volterra de première espèce.

2. si  $\alpha(x) = 1$  l'équation s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt = \varphi(x)$$

est appelée équation intégrale linéaire de volterra de seconde espèce.

3. Si  $\alpha(x) \neq 1 \neq 0$ ; donc l'équation intégrale linéaire de Volterra est appelée équation intégrale de Volterra de troisième espèce.

**Remarque 2.4.1.** Si  $f(x) = 0$ , l'équation s'écrit

$$\lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt = \varphi(x)$$

est dite équation intégrale de Volterra de seconde espèce homogène. si dans le cas contraire  $f(x) \neq 0$  elle est dite équation intégrale de Volterra linéaire de seconde espèce non homogène.

**Remarque 2.4.2.** *L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm il suffit de prendre le noyau  $K$  vérifiant*

$$k(x, t) = 0 \quad \text{pour} \quad x < t$$

## 2.5 Étude de polynôme

### 2.5.1 polynômes de Lucas

**Définition 2.5.1.** *La suite des polynômes de Lucas  $(L_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x), & n \geq 2 \\ L_0(x) = 2, L_1(x) = x \end{cases}$$

Les premiers termes des polynômes de Lucas sont donnés par:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 2 \\ L_1(x) &= x \\ L_2(x) &= x^2 + 2 \\ L_3(x) &= x^3 + 3x \\ L_4(x) &= x^4 + 4x^2 + 2 \\ L_5(x) &= x^5 + 5x^3 + 5x \\ L_6(x) &= x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 2 \end{aligned}$$

**Proposition 2.5.1.** *La fonction génératrice des polynômes de Lucas est :*

$$L(z) = \frac{2 - xz}{1 - xz - z^2}$$

**Démonstration.** Posons

$$L(z) = \sum_{n \geq 0} L_n(x) z^n$$

■

alors la fonction génératrice associée à  $L_n(x)$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
&= 2 + xz + \sum_{n \geq 2} (xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x))z^n \\
&= 2 + xz + \sum_{n \geq 2} L_{n-1}(x)z^n + \sum_{n \geq 2} L_{n-2}(x)z^n \\
&= 2 + xz + xz \sum_{n \geq 2} L_{n-1}(x)z^{n-1} + z^2 \sum_{n \geq 2} L_{n-2}(x)z^{n-2} \\
&= 2 + xz + xz \sum_{n \geq 1} L_n(x)z^n + z^2 \sum_{n \geq 0} L_n(x)z^n \\
&= 2 + xz + xz \sum_{n \geq 0} L_n(x)z^n - 2xz + z^2 \sum_{n \geq 0} L_n(x)z^n \\
&= 2 + xz + xzL(z) + z^2L(z)
\end{aligned}$$

D'où

$$L(z) = \frac{2 - xz}{1 - xz - z^2}$$

### 2.5.2 polynômes de Legendre $L_n$

Les polynômes de Legendre  $L_n(x)$  sont définissent sur l'intervalle  $[-1, 1]$  par:

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n x}{dx^n} [(x^2 - 1)]^n, \quad n \geq 0$$

Les premiers de ces polynômes sont :

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= 1 \\
L_1(x) &= x \\
L_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
L_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
L_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\
L_5(x) &= \frac{1}{16}(231x^5 - 315x^3 + 105x - 5)
\end{aligned}$$

### 2.5.3 polynômes de Tchebychev de la première espèce $T_n(x)$

**Définition 2.5.2.** Les polynômes de Tchebychev de la première espèce  $T_n(x)$  sont des polynômes en  $x$  de degré  $n$  définis à l'aide de la relation suivante :

$$\cos(n\theta) = T_n(x), \text{ avec, } x = \cos(\theta)$$

Pour tout  $x$  dans  $[-1, 1]$ , alors  $\theta$  appartient à  $[0, \pi]$

Les premiers termes des polynômes de Tchebychev de la première espèce  $T_n(x)$  sont donnés par:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 + 8x^2 + 1 \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\ T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 \\ T_7(x) &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x \end{aligned}$$

**Proposition 2.5.2.** Les polynômes de Tchebychev de la première espèce  $T_n(x)$  vérifient la relation de récurrence d'ordre deux

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \forall n \geq 1 \\ T_0(x) = 1, T_1(x) = x \end{cases}$$

**Démonstration.** Soit  $x \in [-1, 1]$ , posons  $\theta = \arccos x$ , ainsi  $\theta \in [0, \pi]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on :

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\left[\frac{(n+1)\theta + (n-1)\theta}{2}\right]\cos\left[\frac{(n+1)\theta - (n-1)\theta}{2}\right]$$

$$= 2\cos n\theta \cos \theta \quad \blacksquare$$

donc

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta \cos \theta$$

D'ou le résultat i.e

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x), \forall n \geq 1$$

avec

$$T_0(x) = 1; T_1(x) = x$$

#### 2.5.4 polynômes de Tchebychev de la deuxième espèce $U_n(x)$

**Définition 2.5.3.** Les polynômes de Tchebychev de la deuxième espèce  $U_n(x)$  sont des polynômes en  $x$  de degré  $n$  définis à l'aide de la relation suivante :

$$\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = U_n(x), \text{ avec } x = \cos\theta$$

Pour tout  $x$  dans  $[-1, 1]$ , alors  $\theta$  appartient à  $[0, \pi]$

Les premiers termes des polynômes de la deuxième espèce sont donnés par:

**Proposition 2.5.3.**

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1 \\ U_1(x) &= 2x \\ U_2(x) &= 4x^2 - 1 \\ U_3(x) &= 8x^3 - 4x \\ U_4(x) &= 16x^4 - 12x^2 + 1 \\ U_5(x) &= 32x^5 - 32x^3 + 6x \\ U_6(x) &= 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1 \\ U_7(x) &= 128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x \end{aligned}$$

**Proposition 2.5.4.** Les polynômes de Tchebychev de la deuxième espèce  $U_n(x)$  vérifiant la relation de récurrence d'ordre deux suivante :

**Démonstration.**

$$\begin{cases} U_n(x) = 2xU_{n-1} + U_{n-2}, \forall n \geq 2 \\ U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x \end{cases}$$

■

**Démonstration.** Soit  $x \in [-1, 1]$ , posons  $\theta = \arccos x$ , ainsi  $\theta \in [0, \pi]$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$\sin(n+1)\theta = \sin n\theta \cos \theta + \cos n\theta \sin \theta$$

$$\sin(n-1)\theta = \sin n\theta \cos \theta - \cos n\theta \sin \theta$$

■

Les deux relations donnent:

$$\sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta = 2\sin n\theta \cos \theta$$

on divise par  $\sin \theta$  on obtient :

$$\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} + \frac{\sin(n-1)\theta}{\sin \theta} = 2\cos \theta \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}$$

D'où le résultat i.e

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \forall n \geq 2$$

Avec

$$U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x$$

### 2.5.5 polynômes de Fibonacci

**Définition 2.5.4.** La suite des polynômes de Fibonacci  $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} F_n(x) = 2F_{n-1}(x) + F_{n-2}(x), \forall n \geq 2 \\ F_0(x) = 0, F_1(x) = 1 \end{cases}$$

Les premiers termes des polynômes de Fibonacci sont donnés par:

$$\begin{aligned} F_0(x) &= 0 \\ F_1(x) &= 1 \\ F_2(x) &= x \\ F_3(x) &= x^2 + 1 \\ F_4(x) &= x^3 + 2x \\ F_5(x) &= x^4 + 3x^2 + 1 \\ F_6(x) &= x^5 + 4x^3 + 3x \\ F_7(x) &= x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1 \end{aligned}$$

**Théorème 2.5.1.** La fonction génératrice des polynômes de Fibonacci est donné par :

$$F(z) = \frac{z}{1 - xz - z^2}$$

#### Démonstration.

Posons

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} F_n(x) z^n$$

alors:

$$\begin{aligned}
F(z) &= F_0(x) + F_1(x)z + \sum_{n \geq 2} F_n(x)z^n \\
&= 0 + z + \sum_{n \geq 2} (xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x))z^n \\
&= z + \sum_{n \geq 2} xF_{n-1}(x)z^n + \sum_{n \geq 2} F_{n-2}(x)z^n \\
&= z + xz \sum_{n \geq 2} F_{n-1}(x)z^{n-1} + \sum_{n \geq 2} z^2 F_{n-2}(x)z^{n-2} \\
&= z + xz \sum_{n \geq 1} F_n(x)z^n + \sum_{n \geq 0} z^2 F_n(x)z^n \\
&= z + xz \sum_{n \geq 0} F_n(x)z^n + \sum_{n \geq 0} z^2 F_n(x)z^n \\
&= z + xzF(z) + z^2F(z)
\end{aligned}$$

■

D'ou

$$F(z) = \frac{z}{1 - xz - z^2}$$

### 2.5.6 polynômes de Pell

**Définition 2.5.5.** La suite des polynômes de Pell  $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  sont définis par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x), \forall n \geq 2 \\ P_0(x) = 0, P_1(x) = 1 \end{cases}$$

Les premiers termes de polynômes de Pell sont donnés par:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 0 \\
P_1(x) &= 1 \\
P_2(x) &= 2x \\
P_3(x) &= 4x^2 + 1 \\
P_4(x) &= 8x^3 + 4x \\
P_5(x) &= 16x^4 + 12x^2 + 1 \\
P_6(x) &= 32x^5 + 32x^3 + 6x \\
P_7(x) &= 64x^6 + 80x^4 + 24x^2 + 1
\end{aligned}$$

**Proposition 2.5.5.** *La fonction génératrice des polynômes de Pell est :*

$$P(z) = \frac{z}{1 - 2xz - z^2}$$

### 2.5.7 Polynômes de Jacobsthal

**Définition 2.5.6.** *La suite des polynômes de Jacobsthal  $(J_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est définie par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} J_n(x) = J_{n-1}(x) + 2xJ_{n-2}(x), \forall n \geq 2 \\ J_0(x) = 0, J_1(x) = 1 \end{cases}$$

**Proposition 2.5.6.** *La fonction génératrice des polynômes de Jacobsthal est :*

$$J(z) = \frac{z}{1 - z - 2xz^2}$$

# Chapitre 3

## Aspects numérique

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k L_k(x)$$

$$\varphi(x) \simeq \sum_{k=1}^N \alpha_k L_k(x)$$

$$\varphi(x) - \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$$

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k L_k(x) - \int_a^b k(x, t) \sum_{k=0}^N \alpha_k L_k(t) dt = f(x)$$

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k L_k(x) - \sum_{k=0}^N \alpha_k \int_a^b k(x, t) L_k(t) dt = f(x)$$

### 3.1 Solution avec méthode de collocation

$$R_n(x) = \varphi_n(x) - \int_{\Omega} k(x, t) \varphi_n(t) dt - f(x)$$

$$\implies R_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k L_k(x) - \sum_{k=0}^n \alpha_k \int_a^b k(x, t) L_k(t) dt - f(x)$$

$$R_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k (L_k(x) - \int_a^b k(x, t) L_k(t) dt) - f(x)$$

Choisissez une sélection de points distincts  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \Omega$  et exigeons que

$$R_n(x_j) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n$$

La condition nous conduit à déterminer les coefficients  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  solution du système linéaire

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k (L_k(x_j) - \int_a^b k(x_j, t) L_k(t) dt) = f(x_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, n$$

Définir les matrices

$$L = (L_{kj}) = L_k(x_j)$$

et

$$K = (K_{kj}) = \int_a^b k(x_j, t) L_k(t) dt$$

Si le  $\det(E - K) \neq 0$ , nous pouvons assurer qu'il existe une solution du système linéaire et par conséquent la solution approximative  $\alpha_n(x)$  en tant que combinaison linéaire

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k L_k$$

Pour qui

$$\varphi_n(x_j) - \int_a^b k(x_j, t) \varphi_n(t) dt = f(x_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, n$$

En fait, le système linéaire peut être écrit en matrice

$$(L - K)\alpha = F$$

Ou  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$  et  $F = (f(x_0); f(x_1), \dots, f(x_n))^T$  Pour le le déterminant du système  $(L - K)\alpha = F$  est différent de zéro, alors il est admet une solution unique

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)^T = (L - K)^{-1} F$$

La solution approximative correspondante

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k L_k$$

a la propriété que  $R_n(x)$  soit nul aux noeuds choisis  $x_j$

## 3.2 Solution avec méthode de Galerkin

d'après la linéarité du produit scalaire

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \langle L_k(x), \psi_j(x) \rangle - \sum_{k=0}^n \alpha_k \langle \int_a^b k(x, t) L_k(t) d(t), \psi_j \rangle = \langle f(s), \psi_j(x) \rangle \quad , j = 0, 1, \dots, n$$

ou encore pour  $k, j = 1, 2, \dots, n$  on a :

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k (\langle L_k(x), \psi_j(x) \rangle - \langle \int_a^b k(x, y) L_k(y) d(y), \psi_j \rangle) = \langle f(x), \psi_j(x) \rangle$$

l'équation nous conduit à déterminer les coefficients  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  solutions du système linéaire

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \int_a^b L_k(x) \psi_j(x) dx - \int_a^b \left( \int_a^b k(x,y) L_k(y) dy \right) \psi_j(x) dx = \int_a^b f(x) \psi_j(x) dx$$

définir les matrices

$$L = (L_{jk}) = \int_a^b \psi_j(x) L_k(x) dx$$

et

$$k = (k_{jk}) = \int_a^b \psi_j(x) \left( \int_a^b k(x,y) L_k(y) dy \right) dx$$

si le  $\det(L - K) \neq 0$ , nous pouvons assurer que il existe une solution du système linéaire et par conséquent la solution approchée  $\varphi_n(x)$  sous forme de combinaison linéaire

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k L_K(x)$$

En fait, le système linéaire peut être écrit en matrice

$$(L - K)\alpha = B$$

Ou  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$  et  $B = (\int_a^b f(x_0) \psi_0, \int_a^b f(x_1) \psi_1, \dots, \int_a^b f(x_n) \psi_n)^T$  Pour le le déterminant du système  $(L - K) \neq 0$  est différent de zéro, alors il est admet une solution unique

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)^T = (L - K)^{-1} B$$

La solution approximative correspondante

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k L_K(x)$$

### 3.2.1 Exemples

#### 3.2.1.1 Exemple 1

considérons l'équation intégrale linéaire de Fredholm

$$\varphi(x) - \int_0^1 y\varphi(y)dy = \exp(x) - 1 \quad , \quad 0 \leq x, y \leq 1$$

ou la fonction  $f(x)$  est choisie de manière à ce que la solution exacte soit donnée par:

$$\varphi(x) = \exp(x)$$

la solution approximative  $\varphi_n(x)$  de  $\varphi(x)$  est obtenue par la méthode tronquée de la série lucas

tableau 1 nous présentons l'exacte et la solution approximative de l'équation dans l'exemple 1 de certains points arbitraires, l'erreur pour  $N = 0$  est calculée et comparée à celles traitées dans [\[10\]](#)

valeurs de x	solution exacte $\varphi$	solution approximative $\varphi_n$	erreur	erreur [10]
0.000000	1.000000e + 000	1.000009e + 000	8.73e - 006	1.5E - 03
0.200000	1.221403e + 000	1.221411e + 000	8.73e - 006	3.5E - 04
0.400000	1.491825e + 000	1.491833e + 000	8.73e - 006	2.5E - 03
0.600000	1.822119e + 000	1.822128e + 000	8.73e - 006	2.3E - 03
0.800000	2.225541e + 000	2.225550e + 000	8.73e - 006	3.0E - 03
1.000000	2.718282e + 000	2.718291e + 000	8.73e - 006	4.3E - 04

#### 3.2.1.2 Exemple 2

considérons l'équation intégrale linéaire de fredholm

$$\varphi(x) - \frac{1}{3} \int_0^1 \exp(2x - \frac{5}{3}y)\varphi(y)dy = \exp(2x + \frac{1}{3}) \quad , \quad 0 \leq x, y \leq 1$$

tableau 2 nous présentons l'exacte et la solution approximative de l'équation dans l'exemple 2 de certains points arbitraires, l'erreur pour  $N = 8$  est calculée et comparée à celles traitées dans [\[4\]](#)

---

<i>valeurs de x</i>	<i>solution exacte <math>\varphi</math></i>	<i>solution approximative <math>\varphi_n</math></i>	<i>erreur</i>	<i>erreur [4]</i>
0.000000	$-1.306697e + 000$	$-1.306872e + 000$	$1.7e - 004$	$5.2e - 001$
0.785398	$-4.507167e - 001$	$-4.508725e - 001$	$1.5e - 004$	$2.1e - 002$
1.570796	$2.015882e - 001$	$2.014807e - 001$	$1.0e - 004$	$3.6e - 001$
2.356194	$2.681065e - 001$	$2.680475e - 001$	$5.9e - 005$	$1.1e - 001$
3.141593	$-2.901271e - 001$	$-2.901661e - 001$	$3.9e - 005$	$7.5e - 001$

tableau 3 nous présentons l'exacte et la solution approximative de l'équation dans l'exemple 3 de certains points arbitraires, l'erreur pour  $N = 10$  est calculée et comparée à celles traitées dans [11]

<i>valeurs de x</i>	<i>solution exacte <math>\varphi</math></i>	<i>solution approximative <math>\varphi_n</math></i>	<i>erreur</i>	<i>erreur [10]</i>
0.000000	$1.000000e + 000$	$1.000000e + 000$	$1.9e - 009$	$2.6E - 05$
0.200000	$1.491825e + 000$	$1.491825e + 00$	$2.9e - 009$	$3.9E - 05$
0.400000	$2.225541e + 000$	$2.225541e + 000$	$4.3e - 009$	$5.8E - 05$
0.600000	$3.320117e + 000$	$3.320117e + 000$	$6.4e - 009$	$1.0E - 04$
0.800000	$4.953032e + 000$	$4.953032e + 000$	$9.6e - 009$	$3.5E - 04$
1.000000	$7.389056e + 000$	$7.389056e + 000$	$1.4e - 008$	$1.9E - 03$

ou la fonction  $f(x)$  et choisie de manière à ce que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi(x) = \exp(2x)$$

la solution approximative  $\varphi_n(x)$  de  $\varphi(x)$  est obtenu par la méthode tronquée de la série Lucas.

# Bibliographie

- [1] **S. Abbasbandy, E. Shivanian**, A new analytical technique to solve Fredholm's integral equations, in Numer Algor 56, (2011), 27–43
- [2] **A. Chakrabarti, S.C. Martha**, Approximate solutions of Fredholm integral equations of the second kind, in Applied Mathematics and Computation 211,(2009),459–466
- [3] **P. Filippini, A. F. Horadam**, Derivative sequences of Fibonacci and Lucas polynomials, in Applications of Fibonacci Numbers 4,(1991), 99-108.
- [4] **K. Maleknejad, N. Aghazadeh**, Numerical solution of Volterra integral equations of the second kind with convolution kernel by using Taylor-series expansion method, Appl. Math. Comput.161, (2005), 915–922.
- [5] **K. Maleknejad, M. T. Kajani, Y. Mahmoudi**, Numerical solution of linear Fredholm and Volterra integral equations of the second kind using Legendre wavelets, in Journal of Sciences, Islamic Republic of Iran 13(2), (2002), 161-166.
- [6] **M. Nadir**, Solving Fredholm integral equations with application of the four Chebyshev polynomials, in Journal of Approximation Theory and Applied Mathematics 4, ( 2014), 37-44.
- [7] **M. Nadir**, A variational form with Bernoulli series for linear integral equations, in Journal of Theoretical and Applied Computer Science. 8(3) (2014), 31–36
- [8] **M. Nadir, M. Chemcham**, Numerical solution of linear integral equations using hat function basis, in Asian Journal of Mathematics and Computer Research. 15 (1) (2017), 1-8.
- [9] **M. Nadir, M. Dilmi**, Euler series solutions for linear integral equations, in The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications. 14(2), (2017), 1-7.
- [10] **M. Nadir, B. Lakehali**, A variational form with Legendre series for linear integral equations, in Malaya Journal of Matematik. 6(1), (2018), 49-52.
- [11] **M. A. Ramadan, M. R. Ali**, An efficient hybrid method for solving fredholm integral equations using triangular functions, in NTMSCI 5(1), (2017), 213-224.

- [12] **S. Yalcımbas, M Aynigul**, Hermite series solutions of linear Fredholm integral equations, in Mathematical and Computational Applications, 16(2), (2011), 497-506.
- [13] **M. Nadir**, Cours d'analyse fonctionnelle, université de M'sila Algérie 2004.
- [14] **J. C. Masan and D. C. Handscanb**, chebychev polyomials, CRS press, 2003.
- [15] **G. Brian**, The classical orthogonal polynomials, University of liverpool, Word Scientific, 177P, 2016.
- [16] **M S. Boudrioua**, sur les fonction générqtrice des polynomes, université mouloud, mammeri tizi-ouzou, 2013.
- [17] **O. Oric**, A neuw numerical treatment based on lucas polynomials for 1D and 2D sinh-gordan equation, commun Nonlinear sci Numer simulat , 14-25. 57, 2018
- [18] **N. Tuglu, E. G. kocer, A. stakhov**, Bivariate fibonacci like p-polynomials, Qpplied Mathematics and computation 21710239-10246, 2011.

## ملخص

في هذا العمل، نسعى للحصول على الحل التقريبي لمعادلات فريدهولم وفولتيرا التكاملية باستخدام متعدد الحدود لوكاس ودوال اختبار معينة، من أجل تقليل هذه المعادلات إلى نظام خطي حيث يكون حلها هو إيجاد معاملات لوكاس وبعد ذلك حل المعادلة. يتم التأكد من تقارب هذه الطريقة ومقارنة الخطأ بالطرق الأخرى.

**الكلمات المفتاحية:** المعادلات التكاملية الخطية، كثيرات حدود لوكاس، طرق التجميع، تقريب سلون

## Abstract

In this work, we seek the approximate solution of Fredholm and Volterra integral equations using Lucas polynomials and a given test functions, in order to reduce those equations to a linear system where its solution is to find the Lucas coefficients and thereafter the solution of the equation. The convergence of this method is assured and the error is compared with other methods.

**Keywords :** linear integral equations, Lusas polynomials, collocation methods, Sloan approximation

## Résumé

Dans ce travail, nous cherchons la solution approchée des équations intégrales de Fredholm et Volterra en utilisant Polynômes de Lucas et fonctions de test données, afin de réduire ces équations à un système linéaire ou sa solution est de trouver les coefficients de Lucas et ensuite la solution de l'équation. la convergence de cette méthode est assurée et l'erreur est comparée avec d'autres méthodes.

**Mots-clés :** équations intégrales linéaires, polynômes de Lusas, méthodes de collocation, approximation de Sloan