

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques



## Mémoire de Master :

Domaine : Mathématiques et Informatique  
Filière : Mathématiques  
Option : Analyse Mathématiques et numérique

### Thème :

Deuxième polynôme de Chebyshev pour l'équation intégrale de  
Volterra-Fredholm du premier type

Présenté par:  
KHOUDOUR Amal  
Soutenu publiquement le: 03/06/2026

Devant le jury composé de:

|                      |         |                      |                    |
|----------------------|---------|----------------------|--------------------|
| <b>GAGUI Bachir</b>  | M.C.A., | Université de M'sila | <b>Président :</b> |
| <b>NADIR Mostefa</b> | Prof    | Université de M'sila | <b>Encadreur :</b> |
| <b>LAKHAL Aissa</b>  | M.C.B., | Université de M'sila | <b>Examineur :</b> |

Année universitaire 2025/2026





Louange à  
**ALLAH**

*Avant tout propos, mes premiers mots de gratitude s'élèvent vers Allah, le Clément, le Miséricordieux, qui m'a octroyé la santé, l'énergie, la détermination et la constance nécessaires pour mener à bien cette recherche. Je Le remercie infiniment pour Ses faveurs incommensurables et pour avoir guidé mes pas vers la réussite de mes études .*

## ***Remerciements***

*J'adresse mes remerciements les plus sincères :*

*À mon encadreur*

*Monsieur Le Professeur **NADIR Mostefa***

*Réaliser ce travail sous votre prestigieuse direction fut un privilège insigne et une source constante de motivation.*

*Je tiens à vous exprimer ma gratitude la plus profonde pour votre encadrement magistral, pour la confiance précieuse que vous m'avez accordée, ainsi que pour la profusion de vos idées lumineuses qui ont éclairé les sentiers de cette étude*

*Au-delà de votre rigueur scientifique absolue, j'ai été profondément touchée par la noblesse de votre âme, votre modestie exemplaire et votre patience infinie. Vous avez été pour moi bien plus qu'un directeur de thèse : un véritable mentor et un modèle à suivre.*

*Veillez trouver dans cet humble mémoire, cher Maître, l'expression de ma reconnaissance éternelle et de mon respect le plus absolu.*



*Au Président de Jury*

*Monsieur Le Professeur **GAGUI Bachir***

*Vous me faites un honneur exceptionnel en acceptant de présider ce jury. Votre présence à la tête de cette table académique, ainsi que votre bienveillance à évaluer cette production, confèrent à cette soutenance un prestige et une valeur scientifique dont je m'honore profondément.*

*Veillez agréer, Monsieur le Président, l'hommage de mon plus profond respect.*

*Au Membre de Jury*

*Monsieur Le Professeur **LAKHAL Aissa***

*Je vous adresse mes remerciements les plus sincères pour avoir accepté d'examiner ce mémoire et de siéger parmi ce jury. L'assurance de votre lecture attentive, la pertinence de vos remarques et la justesse de vos précieux conseils constituent un apport inestimable, destiné à enrichir ce travail*

*Veillez trouver ici, Monsiesieur le Professeur, l'expression de ma haute considérations*



## ***DEDICACES***

*Au point de rencontre où les efforts soutenus de plusieurs années se couronnent enfin de succès, je dédie ce modeste travail, empreint de mes veilles et de mes aspirations, à ceux qui ont été le souffle, la lumière et la force de mon chemin :*

*À mon très cher et honoré Père "**Malek**",*

*L'artisan de mon succès et mon éternel modèle de rigueur. Les mots s'avèrent bien impuissants pour traduire l'immensité de mon amour et de mon respect. Ta noble présence a toujours été mon plus grand refuge, et tes sacrifices silencieux ont tracé les sentiers de ma réussite. Tu m'as appris à regarder toujours plus haut, à affronter les défis avec dignité et à ne jamais courber l'échine devant les obstacles. Ce succès est avant tout le tien, la juste récompense de ta foi inébranlable en mes capacités. Que ce travail soit le reflet de ta fierté.*

*À ma très chère, tendre et précieuse Mère "**Messaouda**",*

*Le paradis de ma vie, ma source de paix et de pureté. À toi qui as veillé sur mes nuits, qui as partagé mes moindres soucis et dont les prières quotidiennes ont été mon bouclier le plus précieux contre le doute. Ta tendresse infinie et ton affection indéfectible ont nourri mon âme et fortifié ma volonté à chaque étape de ce parcours exigeant. Aucune réussite scientifique ne saurait égaler la grandeur de ton dévouement. Que Dieu te préserve, t'accorde une santé de fer, une longue vie et te récompense au-delà de tes espérances.*

*À mes chers Sœurs "**Lemya, Radhia, Fatima et Aridje**",*

*Mes compagnons de vie, mes piliers et mes soutiens les plus solides. Votre présence indéfectible à mes côtés a été une force tranquille qui m'a enveloppée de confiance et de sérénité. Dans chaque moment de fatigue, j'ai trouvé en vous l'oreille attentive, le conseil juste et l'encouragement sincère qui ranimaient ma détermination. Vous êtes mon repère, ma plus belle certitude et ma fierté. Que notre complicité reste à jamais inaltérable.*

À mes chers Neveux et Nièces,

les enfants de mes sœurs "**Adibe, Ranime, Mouadhe et Tamime**",

Mes petits anges, les doux rayons de soleil qui illuminent mon quotidien. La pureté de vos sourires, l'innocence de vos rires et vos regards émerveillés ont le don magique d'effacer mes plus grandes fatigues et d'adoucir mes journées de labeur. Vous incarnez la joie pure et la beauté de la vie. Je vous dédie cette réussite en espérant qu'elle soit pour vous une source d'inspiration pour vos futurs chemins vers le savoir.

À toute ma grande Famille,

Mes chères Grands-mères, oncles, tantes, cousins et cousines, qui ont toujours manifesté une bienveillance sincère à mon égard. Vos vœux de réussite, votre fierté partagée et vos encouragements constants tout au long de mes études ont été d'un grand réconfort.

À mes fidèles Amies "**Anfel, Sarah et bouchra**",

Les perles de mon parcours académique, qui ont partagé mes joies, mes doutes, mes longues heures de révision et mes moments de fatigue. Merci pour votre précieuse amitié, votre soutien moral et votre complicité qui ont rendu ce chemin universitaire tellement plus beau et mémorable.

Un hommage de gratitude particulier

à Monsieur Le Professeur : "**NADIR Mohammed Nasseh**"

Je tiens à exprimer ma reconnaissance la plus vive et la plus sincère pour votre précieuse contribution. Au-delà de vos compétences remarquables, j'ai été profondément touchée par votre générosité scientifique, votre bienveillance constante et la spontanéité avec laquelle vous m'avez tendu la main. Vos conseils judicieux et vos orientations ont été un phare qui a grandement facilité l'accomplissement de ce travail.

Que ce modeste témoignage vienne saluer la noblesse de votre esprit et la grandeur de votre dévouement

À mes chers camarades de promotion 2026, À tous les étudiants de ma promotion, avec qui j'ai partagé ce mémorable parcours universitaire. Je vous remercie pour les moments d'entraide, de partage et de solidarité qui ont marqué nos années d'études. Je tiens à saluer les efforts de chacun et à vous adresser mes vœux les plus sincères de réussite, de succès et d'excellence dans vos futurs projets professionnels et académique

# Table des matières

|                                                                                                            |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introduction</b>                                                                                        | <b>i</b>  |
| <b>1 Préliminaires en analyse fonctionnelle</b>                                                            | <b>1</b>  |
| 1.1 Base de l'analyse fonctionnelle . . . . .                                                              | 1         |
| 1.1.1 Espace vectoriel normé : . . . . .                                                                   | 1         |
| 1.1.2 Espace de Banach : . . . . .                                                                         | 2         |
| 1.1.3 Espace de Hilbert . . . . .                                                                          | 3         |
| 1.1.4 Opérateurs linéaires bornés . . . . .                                                                | 6         |
| 1.1.5 Opérateurs compact : . . . . .                                                                       | 8         |
| 1.1.6 Equations aux Opérateurs compacts : . . . . .                                                        | 9         |
| <b>2 Equations intégrales et leurs classification</b>                                                      | <b>12</b> |
| 2.1 Classification des équations intégrales première espèce : . . . . .                                    | 12        |
| 2.1.1 Equations intégrales de Volterra de première espèce : . . . . .                                      | 12        |
| 2.1.2 Equations intégrales de Fredholm de première espèce : . . . . .                                      | 12        |
| 2.1.3 Equations intégrales de Volterra-Fredholm de première espèce . . . . .                               | 13        |
| 2.2 Régularisation de l'équation intégrale de Volterra-Fredholm . . . . .                                  | 13        |
| 2.3 Classification des équations intégrales de seconde espèce . . . . .                                    | 14        |
| 2.3.1 Equations intégrales de Volterra de seconde espèce : . . . . .                                       | 14        |
| 2.3.2 Equations intégrales de Fredholm de seconde espèce : . . . . .                                       | 14        |
| 2.3.3 Equations intégrales de Volterra -Fredholm de seconde espèce . . . . .                               | 14        |
| 2.4 Existence et unicité de la solution des équation intégrale linéaire de Volterra-<br>Fredholm . . . . . | 15        |
| 2.5 Polynômes de Chebyshev de seconde espèce . . . . .                                                     | 17        |
| <b>3 Résolution numériques des équations intégrales de Volterra-Fredholm</b>                               | <b>18</b> |
| 3.1 Méthodes numériques pour les équations intégrales de Volterra-Fredholm : . . . . .                     | 18        |
| 3.1.1 Méthode de collocation . . . . .                                                                     | 18        |
| 3.1.2 Méthode de collocation-Chebyshev . . . . .                                                           | 19        |
| 3.2 Exemples Numériques . . . . .                                                                          | 22        |
| 3.3 Conclusion . . . . .                                                                                   | 25        |
| <b>Bibliographie</b>                                                                                       | <b>26</b> |



# Introduction

Les équations intégrales de Volterra-Fredholm représentent un outil mathématique essentiel pour la modélisation de nombreux problèmes issus de l'ingénierie, de la physique et de la biologie. Leur nature mixte, combinant des bornes d'intégration fixes et variables, rend souvent la recherche d'une solution exacte complexe, d'où la nécessité de recourir à des méthodes numériques performantes.

L'objectif de ce travail est de résoudre ce type d'équations en utilisant une méthode spectrale basée sur les polynômes de Chebyshev de second type. Ces polynômes sont privilégiés pour leurs excellentes propriétés d'orthogonalité et leur capacité à fournir des approximations hautement précises avec un coût calculateur réduit.

Pour structurer notre étude, ce mémoire est organisé comme suit :

Chapitre 1 : Il est consacré à un rappel sur l'analyse fonctionnelle et aux notions préliminaires nécessaires. Ce chapitre pose le cadre théorique indispensable (espaces de fonctions et opérateurs) pour aborder l'étude des équations intégrales.

Chapitre 2 : Ce chapitre traite des classifications des équations de Volterra-Fredholm (premier et second type). Il aborde également les théorèmes d'existence et d'unicité de la solution, tout en introduisant les propriétés fondamentales des polynômes de Chebyshev de second type.

Chapitre 3 : Il est dédié à l'aspect numérique, où nous présentons la méthode de collocation basée sur les polynômes de Chebyshev. Nous validons ensuite l'efficacité de cette approche à travers des exemples numériques et une analyse des résultats obtenus.

# Chapitre 1

## Préliminaires en analyse fonctionnelle

### 1.1 Base de l'analyse fonctionnelle

#### 1.1.1 Espace vectoriel normé :

##### Normes

Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  on appelle une norme sur l'espace  $E$  toute fonction notée  $\|\cdot\|$ ,  $E \rightarrow \mathbb{R}$ , vérifiant les propriétés suivantes :

1. **Séparation** :  $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. **Homogénéité** :  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ , pour tout  $x \in E$ , et  $\lambda \in K$
3. **Inégalité triangulaire** :  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ , pour tout  $x, y \in E$

Un espace vectoriel muni d'une norme  $\|\cdot\|$  est appelé **espace vectoriel normé**.

Tout espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  est un espace métrisable

**Proof.** Pour tout  $x, y \in E$  on définit la fonction  $\phi$  par

$$\phi(x, y) = \|x - y\|$$

On remarque que cette fonction est bien une métrique sur  $E$  car, on a

$$\phi(x, y) = \|x - y\| = 0$$

ou encore

$$x - y = 0$$

D'où l'égalité

$$x = y$$

Il est évident de voir que la distance  $\phi(x, y)$  est symétrique

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \|x - y\| \\ &= \|y - x\| = \phi(y, x)\end{aligned}$$

Pour l'inégalité triangulaire, on écrit

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \\ &\leq \|x - z\| + \|z - y\| \\ &= \phi(x, z) + \phi(z, y)\end{aligned}$$

□

### 1.1.2 Espace de Banach :

#### Suite de Cauchy :

Soit  $(x_n)$  une suite d'éléments d'un espace normé  $(E, \|\cdot\|)$  ; on dit que la suite  $(x_n)$  est de Cauchy si, on a la relation suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \quad \forall p, q \geq N_\varepsilon \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

Soit  $x_n$  une suite de Cauchy dans un espace normé  $(E, \|\cdot\|)$  contient une sous suite  $x_{n_k}$  convergente vers  $x$  alors la suite  $x_n$  est aussi convergente vers le même élément  $x$ .

Soit  $x_n$  une suite de Cauchy alors il vient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \quad \forall p, q \geq N_\varepsilon \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

en particulier pour  $n_k \geq N_\varepsilon$ , on a



$$\forall p, n_k \geq N_\varepsilon, \|x_p - x_{n_k}\| < \varepsilon$$

avec la convergence de la suite  $x_{n_k}$  vers  $x$

$$n_k \geq N_\varepsilon, \|x_{n_k} - x\| < \varepsilon$$

D'où la convergence de la suite  $x_n$  vers l'élément  $x$

$$\begin{aligned} \forall p, n_k \geq N_\varepsilon, \|x_p - x\| &= \|x_p - x + x_{n_k} - x_{n_k}\| \\ &\leq \|x_p - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| < \varepsilon \end{aligned}$$

Espaces complets

**Definition 1.1** *Un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  est dit complet, si toute suite de Cauchy  $x_n$  d'élément de  $E$  est une suite convergente dans  $E$*

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall p, q \geq N_\varepsilon \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

Implique l'existence d'un élément  $x \in E$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

**Espaces de Banach**

**Definition 1.2** *On appelle espace de Banach  $(E, \|\cdot\|)$  tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de sa norme.*

### 1.1.3 Espace de Hilbert

**Produit scalaire**

**Definition 1.3** On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel  $E$  (réel ou complexe) une application :  $\langle ., . \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $x, y, z \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$

1.  $\langle x, x \rangle \geq 0$
2.  $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$
3.  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
4.  $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
5.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

**Definition 1.4** un espace de Hilbert  $H$  est un espace complet par rapport à la norme induite par le produit scalaire. En d'autres termes un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme induite par un produit scalaire.

Généralement l'espace  $H$  est séparable est de dimension infinie, en d'autre terme, il existe un ensemble dénombrable partout dense dans  $H$  et pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $n$  vecteurs dans  $H$  linéairement indépendants.

**Exemple 1.5** L'espace  $L^2(a, b)$

L'espace  $L^2(I, \mathbb{R})$  des fonctions de carré intégrales défini par

$$L^2(I, \mathbb{R}) = \left\{ f; \int_I |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

ou l'intégrale est prise au sens de Lebesgue, muni de la norme

$$\|f\|^2 = \int_I |f(t)|^2 dt$$

induite par le produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(x)g(x)dx$$

est un espace de Hilbert

### Orthogonalité

**Definition 1.6** (*Vecteurs orthogonaux*) On dit que deux vecteurs  $x$  et  $y$  d'un espace de Hilbert  $H$  sont orthogonaux si :

$$\langle x, y \rangle = 0$$

### Base hilbertienne

Une partie  $X$  de  $H$  est dite dense dans  $H$  si :

$$\forall y \in H, \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X; \|x - y\| < \varepsilon$$

de manière équivalente si tout  $y$  de  $H$  est limite d'une suite d'éléments  $x_n$  de  $X$  :

$$\|x_n - y\| \longrightarrow 0$$

**Definition 1.7** Soit  $H$  un espace de Hilbert sur le corps  $\mathbb{K}$  et  $F = (e_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs. On dit que  $F$  est une base de Hilbert (base hilbertienne) de  $H$  si :

1.  $F$  est une famille orthonormée de  $H$ , c'est-à-dire :  $\begin{cases} \forall (i, j) \in I^2 \quad i \neq j \implies \langle e_i, e_j \rangle = 0 \\ \forall i \in I, \quad \langle e_i, e_i \rangle = \|e_i\|^2 = 1 \end{cases}$
2. La famille  $F$  est de plus complète ou total, c'est-à-dire : l'ensemble des combinaisons linéaires finies des éléments de  $F$  est dense dans  $H$

**Theorem 1.8** (*Riesz-Fischer*) Soit un système orthonormé dans un espace de Hilbert  $H$ , et soient les valeurs  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_i$  telles que la série  $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$  soit convergente, alors on peut trouver un vecteur  $f \in H$ , tel que

$$\alpha_i = \langle f; \varphi_i \rangle, \quad \forall i = 1, 2, \dots$$

et de plus, on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f; \varphi_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$$

ou encore

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$$

Soit  $\{\varphi_k\}$  un système orthonormé d'éléments d'un espace de Hilbert  $H$ , pour que ce système soit complet, il faut et il suffit que, le seul vecteur de  $H$  orthogonal au système  $\{\varphi_k\}$  est le vecteur nul. Cela signifie qu'il n'existe pas un vecteur non nul de  $H$ , qui soit orthogonal à tous les vecteurs du système  $\{\varphi_k\}$

**Theorem 1.9**      *Tous les espaces de Hilbert séparables sont isomorphes entre eux.*

**Remark 1.10**      *Comme il est connu en algèbre linéaire, que tous les espaces vectoriels ou euclidiens de mêmes dimensions finies  $n$  sont isomorphes entre eux, car chacun est isomorphe à l'espace  $K^n$  alors de même tous les espaces de Hilbert sont isomorphes entre eux, car chacun est isomorphe à  $L_2$*

### 1.1.4 Opérateurs linéaires bornés

#### Linéarité des opérateurs

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés, un opérateur  $A$  défini sur  $E$  dans  $F$  est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes

– *Condition additive*

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E, \text{ on a } A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2).$$

– *Condition homogène*

$$\forall \varphi \in E, \lambda \in K = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \text{ on a } A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi).$$

#### Continuité des opérateurs linéaires

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés, un opérateur linéaire  $A$  défini sur un sous ensemble  $G \subset E$  dans  $F$  est dit continu au point  $x_0$  de  $G$  si, on a la propriété suivante



Pour toute suite  $x_n$  de  $G$  converge vers  $x_0$ , la suite  $A(x_n)$  converge vers  $A(x_0)$  c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n) = A(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = A(x_0).$$

L'opérateur linéaire  $A$  est dit continu sur  $G$ , s'il est continu en chaque point de l'ensemble  $G$ .

*Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés, un opérateur linéaire  $A$  défini sur un sous ensemble  $G \subset E$  dans  $F$ , est dit continu partout sur  $G$  s'il est continu en point  $x_0$  de  $G$ .*

### Opérateurs bornés

*Un opérateur linéaire  $A$  défini sur  $E$  dans  $F$  est dit borné s'il existe une constante positive  $C > 0$ , telle que*

$$\|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

*La norme  $\|A\| = \sup \|A(x)\|_F$  sur la boule unité est toujours finie pour tout opérateur linéaire continu.*

*Un opérateur linéaire  $A$  est continu, si et seulement si, il est borné.*

La notion d'isométrie est plus forte que celle de l'isomorphie.

### Normes équivalentes

Soit  $E$  un espace vectoriel muni de deux normes  $(E, \|\cdot\|_1)$  et  $(E, \|\cdot\|_2)$ , ces deux normes sont dites équivalentes, si on peut trouver deux constantes positives  $\alpha$  et  $\beta$ , telles que

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1, \quad \forall x \in E.$$

Autrement dit, les deux normes sont dites équivalentes si et seulement si, l'application identique de  $E$  dans  $E$  soit un isomorphisme entre les espaces vectoriels normés  $(E, \| \cdot \|_1)$  et  $(E, \| \cdot \|_2)$ .

### 1.1.5 Opérateurs compact :

**Definition 1.11** Soit  $A$  un opérateur linéaire d'un espace normé  $E$  dans un espace normé  $F$ , on dit que  $A$  est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné  $G$  dans  $E$  à un ensemble relativement compact  $A(G)$  dans  $F$ . Autrement dit, la fermeture  $\overline{A(G)}$  est compacte.

#### Ensembles relativement compacts

Un ensemble  $G \subset E$  est relativement compact si pour toute suite  $\{u_n\}$  de  $G$ , il existe une sous suite  $\{u_{n(k)}\}$  qui converge dans  $F$ .

**Theorem 1.12** (critère de compacité)

Un opérateur linéaire  $A : E \rightarrow F$  est compact si et seulement si pour toute suite bornée  $\varphi_n$  de  $E$ , la suite  $A\varphi_n$  contient une sous suite convergente dans  $F$ .

**Proof.** Il suffit d'appliquer les définitions appropriés d'un ensemble borné et un ensemble relativement compact.  $\square$

**Theorem 1.13** Une combinaison linéaire  $A = \alpha A_1 + \beta A_2$  des opérateurs compacts est un opérateur compact.

**Theorem 1.14** Le produit  $AB$  de deux opérateurs bornés  $A$  et  $B$  est compact si l'un des opérateurs  $A$  ou  $B$  est compact.

**Proof.** Soit  $\{\varphi_n\}$  une suite bornée de  $E$ , alors si  $B$  est un opérateur borné la suite  $B\varphi_n(x)$  est aussi bornée, et de la compacité de l'opérateur  $A$  il existe une sous suite de  $A(B\varphi_n(x))$  qui converge, ce qui implique que  $AB$  est compact.

D'autres part si  $B$  est compact, on peut extraire de la suite  $B\varphi_n(x)$  une sous suite convergente  $B\varphi_{n(k)}(x)$ , et de la continuité de l'opérateur  $A$  car il est borné la suite  $A(B\varphi_{n(k)}(x))$  converge, ce qui implique que  $AB$  est compact.  $\square$

**Theorem 1.15** Soit  $E$  un espace normé et  $F$  un espace de Banach, et soit  $\{A_n\}$  une suite d'opérateurs compacts de  $E$  dans  $F$ , convergente en norme vers l'opérateur linéaire  $A$  de  $E$  dans  $F$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Alors  $A$  est compact.

**Corollary 1.16** La boule unité  $B(0,1)$  dans un espace de dimension infinie n'est pas compact.

**Theorem 1.17** Un opérateur compact est un opérateur borné. La réciproque est fausse.

**Theorem 1.18** L'opérateur intégral  $A$  de  $C(G)$  dans  $C(G)$  à noyau continu est un opérateur compact.

### Noyau faiblement singulier

**Definition 1.19** On appelle noyau faiblement singulier la fonction  $K$  continue sur  $G \times G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  sauf peut être aux points  $x = y$  et telle que,

$$\forall x, y \in G, x \neq y, \exists M > 0, |K(x, y)| < \frac{M}{|x - y|^{n-\alpha}}, \quad 0 < \alpha \leq n$$

**Theorem 1.20** L'opérateur intégral  $A$  de  $C(G)$  dans  $C(G)$  à noyau faiblement singulier est un opérateur compact.

## 1.1.6 Equations aux Opérateurs compacts :

### Equations de second espèce

Soit  $A$  un opérateur compact d'un espace normé  $X$  dans lui même alors l'opérateur  $T = I - A$  définit l'équation de second espèce donnée par

$$\varphi - A\varphi = f; \quad \varphi, f \in X$$

où  $f$  est une fonction donnée et  $\varphi$  la fonction inconnue

**Theorem 1.21** *Le noyau de l'opérateur  $T$  défini par*

$$\ker T = N(T) = \{\varphi \in X ; T\varphi = (I - A)\varphi = 0\},$$

*est un sous espace fermé et de dimension finie*

**Theorem 1.22** *La suite d'ensemble des noyaux*

$$N(T), N(T^2), \dots, N(T^n), \dots$$

*est une suite croissante stationnaire. Autrement dit, elle ne contient qu'un nombre fini d'ensemble distincts, c'est à dire il existe un entier  $p \in \mathbb{N}$  tel que*

$$\{0\} \subset N(T), N(T^2) \subset \dots \subset N(T^p) = N(T^{p+1}) = \dots$$

Le nombre  $p$  est appelé le nombre de Riez de l'opérateur compact  $A$  pour l'ensemble des noyaux  $\{N(T^n)\}$

**Theorem 1.23** *L'image de l'opérateur  $T$  défini par ,*

$$\operatorname{Im} T = T(X) = R(T) = \{\psi = T\varphi; \text{ telle que } \varphi \in X\}$$

*est un sous espace fermé*

Le nombre de Riez  $p$  pour l'ensemble des noyaux  $\{N(T^n)\}$  et le nombre de Riez  $q$  pour l'ensemble des images  $\{R(T^n)\}$  sont égaux. Autrement dit

$$p = q$$

**Theorem 1.24** *Les sous espaces  $N(T^n)$  et  $R(T^n)$  sont supplémentaires. Autrement dit*

$$X = \ker T^n \oplus \operatorname{Im} T^n \equiv N(T^n) \oplus R(T^n)$$

où  $r = p = q$  est le nombre de Riesz

**Lemma 1.25** *L'opérateur  $T = I - A$  est injectif si et seulement si  $T^r$  est injectif pour tout  $r \in \mathbb{N}$*

**Lemma 1.26** *L'opérateur  $T = I - A$  est surjectif si et seulement si  $T^r$  est surjectif pour tout  $r \in \mathbb{N}$*

**Theorem 1.27** *soit  $A$  un opérateur compact d'un espace normé  $X$  dans lui même alors l'opérateur  $T = I - A$  est injectif si et seulement si il est surjectif, de plus l'opérateur admet un inverse  $T^{-1} = (I - A)^{-1}$  borné*

**Theorem 1.28** *soit  $A$  un opérateur compact d'un espace normé  $X$  dans lui même alors, pour que l'équation non homogène*

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = f$$

*admette une solution unique  $\varphi \in X$ , pour tout  $f \in X$ , il faut et il suffit que l'équation homogène*

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = 0$$

*admette la solution triviale  $\varphi = 0$ .*

# Chapitre 2

## Equations intégrales et leurs classification

### 2.1 Classification des équations intégrales première espèce :

#### 2.1.1 Equations intégrales de Volterra de première espèce :

Les équations de Volterra sont des cas particuliers d'équations intégrales de Fredholm il suffit de prendre le noyau  $k$  est tel que  $k(x, t) = 0$  pour  $x < t$

**Definition 2.1** On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce une équation à une inconnue  $\varphi(x)$ , de la forme :

$$\int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt = f(x)$$

#### 2.1.2 Equations intégrales de Fredholm de première espèce :

**Definition 2.2** On appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce une équation de la forme :

$$\int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt = f(x)$$

où  $\varphi$  est la fonction inconnue,  $f$  et  $k$  sont des fonctions connues, les bornes d'intégration sont constantes. C'est la caractéristique principale d'une équations de Fredholm .



### 2.1.3 Equations intégrales de Volterra-Fredholm de première espèce

**Definition 2.3** On appelle équation intégrale de Volterra-Fredholm une équation de la forme :

$$f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t)\varphi(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t)dt = 0, \quad x \in [a, b] \quad (2.1)$$

## 2.2 Régularisation de l'équation intégrale de Volterra-Fredholm

Pour des fonctions lisses  $k_1(x, t)$ ,  $k_2(x, t)$  et  $f(x)$  l'équation (2.1) peut être convertie en une équation de Volterra-Fredholm de seconde espèce en différenciant par rapport à  $x$

$$k_1(x, x)\phi(x) + \int_a^x \frac{\partial k_1}{\partial x}(x, t)\phi(t)dt + \int_a^b \frac{\partial k_2}{\partial x}(x, t)\phi(t)dt = f'(x) \quad (2.2)$$

Si  $k_1(x, x) \neq 0$  pour tout  $t \in [a, b]$ , la division de l'équation (2.2) par le facteur  $k_1(x, x)$  nous donne une équation intégrale de seconde espèce, connue en tant que problème bien posé

$$\phi(x) + \int_a^x k_3(x, t)\phi(t)dt + \int_a^b k_4(x, t)\phi(t)dt = g(x) \quad (2.3)$$

où les fonctions  $k_3, k_4$  et  $g$  sont données par :

$$k_3 = \frac{1}{k_1(x, x)} \frac{\partial k_1}{\partial x}(x, t), \quad k_4 = \frac{1}{k_1(x, x)} \frac{\partial k_2}{\partial x}(x, t) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{f'(x)}{k_1(x, x)}$$

Si  $k_1(x, x) = 0$  pour  $t \in [a, b]$ , alors nous répétons le processus de différenciation jusqu'à obtenir  $\frac{\partial^q k_1}{\partial x^q}(x, t) \neq 0$  pour tout  $t \in [a, b]$ , avec  $k_1, k_2$  et  $f$  dans  $C^{q+1}([a, b] \times [a, b])$  et  $C^{q+1}([a, b])$ , respectivement, où  $q$  représente le plus petit entier pour lequel la dérivée de  $k_1$  d'ordre  $q$  ne s'annule pas. Ainsi, nous avons :

$$\frac{\partial^q k_1}{\partial x^q}(x, t)\phi(x) + \int_a^x \frac{\partial^{q+1} k_1}{\partial x^{q+1}}(x, t)\phi(t)dt + \int_a^b \frac{\partial^{q+1} k_2}{\partial x^{q+1}}(x, t)\phi(t)dt = f^{(q+1)}(x) \quad (2.4)$$

## 2.3 Classification des équations intégrales de seconde espèce

### 2.3.1 Equations intégrales de Volterra de seconde espèce :

**Definition 2.4** On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce une équation à inconnue  $\varphi(x)$  de la forme :

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$$

### 2.3.2 Equations intégrales de Fredholm de seconde espèce :

**Definition 2.5** On appelle équation intégrale de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt$$

où  $\varphi(x)$  est la fonctions inconnue ,  $k(x, y)$ , et  $f(x)$  des fonctions donnés,  $\lambda$  est un facteur connu

### 2.3.3 Equations intégrales de Volterra -Fredholm de seconde espèce

Une équation intégrale de Volterra -Fredholm est une combinaison des intégrales de Volterra et Fredholm disjoints , apparaît dans une équation intégrale .

**Definition 2.6** On appelle équation intégrale de Volterra-Fredholm une équation de la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t) \varphi(t) dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t) \varphi(t) dt , \quad x \in [a, b] \quad (2.5)$$

On appelle équation intégrale mixte une équation de la forme :2

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \int_a^b k(s, t) \varphi(t) dt ds$$

où les fonctions  $k_1$ ,  $k_2$  et  $f$  sont connues et  $\varphi(x)$  la fonction inconnue.

## 2.4 Existence et unicité de la solution des équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm

Dans cette section nous rappelons les théorèmes que nous allons utilisées pour obtenir des résultats d'existence et unicité de solutions de l'équation (2.5)

**Definition 2.7** Soit  $X$  un espace normé et  $T : X \rightarrow X$  un opérateur,  $T$  est dit un opérateur de Picard s'il existe  $\varphi_0 \in X$  unique tel que

$$T(\varphi_0) = \varphi_0, \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(\varphi_0) = \varphi_0, \text{ pour tout } \varphi \text{ de } X$$

**Theorem 2.8** (principe de contraction). Soit  $X$  un espace normé. Si  $T : X \rightarrow X$  un opérateur de contraction admis un point fixe unique  $\varphi$ , alors  $T$  est un opérateur de Picard

$$\|\varphi_0 - T^n(\varphi_0)\| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|\varphi - T(\varphi)\|, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

### Théorèmes d'existence et d'unicité :

On considère l'équation linéaire de Volterra-Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t) \varphi(t) dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t) \varphi(t) dt, \quad x \in [a, b] \quad (2.6)$$

où

1.  $f \in C[a, b]$ ,  $k_1(x, t) \in C(D_1)$ , avec  $D_1 = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } a \leq t \leq x \leq b\}$
2.  $\varphi \in C[a, b]$ ,  $k_2(x, t) \in C(D_2)$ , avec  $D_2 = [a, b] \times [a, b]$
3.  $M_1 = \max_{(x, t) \in D_1} |k_1(x, t)|$ , et  $M_2 = \max_{(x, t) \in D_2} |k_2(x, t)|$

**Theorem 2.9** Dans les conditions de continuité ci-dessus, supposons qu'il existe une constante  $c > 0$  tel que :

$$\frac{1}{c} [M_1 + M_2 \exp(c(b-a))] < 1$$

Alors l'équation (2.6) a une solution unique  $\varphi \in C[a, b]$ , et cette solution peut être obtenir par la méthode d'approximation successive, à partir de  $\varphi_0 \in C[a, b]$

**Proof.** Soit l'opérateur intégral  $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ , défini par

$$T\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x, t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t)dt$$

On a

$$\begin{aligned} |T\varphi(x) - T\psi(x)| &= \left| \int_a^x k_1(x, t) (\varphi(t) - \psi(t)) dt + \int_a^b k_2(x, t) (\varphi(t) - \psi(t)) dt \right| \\ &\leq \int_a^x |k_1(x, t)| |(\varphi(t) - \psi(t))| dt + \int_a^b |k_2(x, t)| |(\varphi(t) - \psi(t))| dt \\ &\leq M_1 \int_a^x |(\varphi(t) - \psi(t))| \exp(-c(t-a)) \exp(c(t-a)) dt + \\ &\quad M_2 \int_a^b |(\varphi(t) - \psi(t))| \exp(-c(t-a)) \exp(c(t-a)) dt \\ &\leq \left[ \frac{M_1}{c} (\exp(c(x-a)) - 1) + \frac{M_2}{c} (\exp(c(b-a)) - 1) \right] \|\varphi - \psi\| \\ &\leq \left[ \frac{M_1}{c} \exp(c(x-a)) + \frac{M_2}{c} \exp(c(x-a+b-x)) \right] \|\varphi - \psi\| \\ &\leq \frac{\exp(c(x-a))}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-x))) \|\varphi - \psi\| \\ &\leq \frac{\exp(c(x-a))}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-a))) \|\varphi - \psi\| \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$|A\varphi(x) - A\psi(x)| \exp(-c(x-a)) \leq \frac{1}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-a))) \|\varphi - \psi\|, \text{ pour tout } x \in [a, b].$$

Alors

$$\|A\varphi - A\psi\| \leq \frac{1}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-a))) \|\varphi - \psi\|$$

On déduit que l'opérateur  $A$  est Lipschitzien de constante  $k = \frac{1}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-a)))$

La condition supposée garantit que  $A$  est une contraction. Alors on applique principe de contraction  $\square$

## 2.5 Polynômes de Chebyshev de seconde espèce

Les polynômes de Chebyshev  $U_n(x)$  de seconde espèce sont des polynômes en  $x$  de degré  $n$ , définis par la relation

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} \text{ quand } x = \cos \theta \quad (2.7)$$

La formule de récurrence des termes satisfaite par les polynômes de Chebyshev est la traduction de l'identité trigonométrique élémentaire :

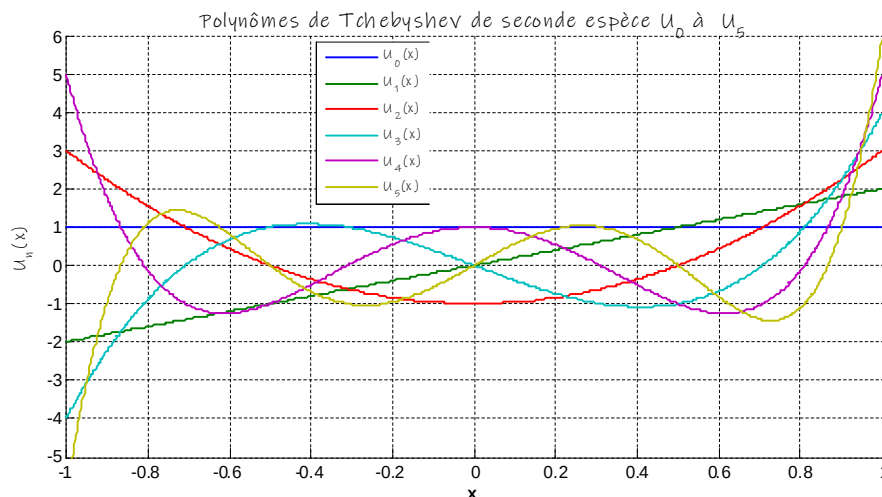
$$\sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta = 2 \cos \theta \sin n\theta$$

qui donne :

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

avec :

|                           |                            |
|---------------------------|----------------------------|
| $U_0(x) = 1$              | $U_1(x) = 2x$              |
| $U_2(x) = 4x^2 - 1$       | $U_3(x) = 8x^3 - 4x$       |
| $U_4 = 16x^4 - 12x^2 + 1$ | $U_5 = 32x^5 - 32x^3 + 6x$ |



# Chapitre 3

## Résolution numériques des équations intégrales de Volterra-Fredholm

### 3.1 Méthodes numériques pour les équations intégrales de Volterra-Fredholm :

Dans ce chapitre on va résoudre numériquement des équation intégrales de volterra-Fredholm de second espèce en utilisant les polynômes de Tchebychev.

#### 3.1.1 Méthode de collocation

On considère l'équation intégrale de Volterra-Fredholm suivante

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x, t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t)dt \quad (3.1)$$

Généralement, le principe de la méthode de collocation appliqué à l'équation (3.1) consiste à chercher une solution approchée dans un sous espace de dimension finie, en exigeant que l'équation (3.1) soit vérifiée seulement sur un nombre fini de points appelés points de collocation.

En pratique, nous choisissons une suite de sous espaces  $X_n \subset X$ ,  $n \geq 1$  de dimension finie, généralement des sous espaces de  $C([a, b])$  ou de  $L^2([a, b])$ . Soit  $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$  une base de  $X_n$ . On cherche une fonction  $\varphi_n \in X_n$ , telle que

$$\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^n c_j \psi_j(x) \text{ , } x \in [a, b]$$

Pour déterminer les coefficients  $(c_j)$ , on substituant, cette fonction dans l'équation (3.1), et on exigeant que l'équation soit exacte dans le sens où le résidu

$$\begin{aligned}
r_n(x) &= \varphi_n(x) - \int_a^x k_1(x, t) \varphi_n(t) dt - \int_a^b k_2(x, t) \varphi_n(t) dt - f(x), \quad x \in [a, b] \\
&= \sum_{j=1}^n c_j \psi_j(x) - \int_a^x k_1(x, t) dt \sum_{j=1}^n c_j \psi_j(t) - \int_a^b k_2(x, t) dt \sum_{j=1}^n c_j \psi_j(t) - f(x) \\
&= \sum_{j=1}^n c_j \left\{ \psi_j(x) - \int_a^x k_1(x, t) \psi_j(t) dt - \int_a^b k_2(x, t) \psi_j(t) dt \right\} - f(x), \quad x \in [a, b]
\end{aligned}$$

soit nul sur un système de noeuds  $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ , (i.e, aux points de collocation)

ce qui conduit à la résolution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \psi_j(x_i) - \int_a^x k_1(x_i, t) \psi_j(t) dt - \int_a^b k_2(x_i, t) \psi_j(t) dt \right\} c_j = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

qui s'écrit sous la forme  $AC = F$ , où

$$\begin{aligned}
A &= \psi_j(x_i) - \int_a^x k_1(x_i, t) \psi_j(t) dt - \int_a^b k_2(x_i, t) \psi_j(t) dt, \quad i, j = 1, \dots, n \\
C &= (c_i), \quad i = 1, \dots, n \\
F &= f(x_i), \quad i = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

ce système admet une solution unique si  $\det A \neq 0$ , ce qui dépend d'ailleurs du choix des points de collocation.

### 3.1.2 Méthode de collocation-Chebyshev

On considère l'équation de Volterra-Fredholm de second espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x, t) \varphi(t) dt + \int_a^b k_2(x, t) \varphi(t) dt, \quad x \in [a, b] \quad (3.2)$$

On définit les polynômes de Chebyshev  $U_i^*(x)$  de degré  $i$  sur  $[a, b]$  comme suit

$$U_i^*(x) = U_i\left(\frac{2x - (a + b)}{b - a}\right)$$

où  $U_i(x)$  sont les polynômes de Chebyshev de degré  $i$  définis sur  $[-1, 1]$



On utilise la méthode de Collocation pour approximer la solution exacte  $\varphi(x)$  de l'équation (3.2).

On suppose

$$\varphi(x) \simeq \varphi_i(x) = \sum_{i=0}^n c_i U_i^*(x) \quad (3.3)$$

où  $U_i^*(x)$  sont les polynômes de Chebyshev de degré  $i$  définis sur  $[a, b]$  et  $c_i$  des coefficients à déterminer.

Substituant (3.3) dans (3.2) on obtient

$$\sum_{i=0}^n c_i U_i^*(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x, t) \sum_{i=0}^n c_i U_i^*(t) dt + \int_a^b k_2(x, t) \sum_{i=0}^n c_i U_i^*(t) dt$$

d'où

$$\sum_{i=0}^n c_i \left[ U_i^*(x) - \int_a^x k_1(x, t) U_i^*(t) dt - \int_a^b k_2(x, t) U_i^*(t) dt \right] = f(x) \quad (3.4)$$

l'équation (3.4) peut s'écrire :

$$\sum_{i=0}^n c_i \psi_i(x) = f(x)$$

où

$$\psi_i(x) = U_i^*(x) - \int_a^x k_1(x, t) U_i^*(t) dt - \int_a^b k_2(x, t) U_i^*(t) dt$$

Soit  $\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right), i = 1, \dots, n$  les points de Chebyshev :

Alors les équations de collocation sont obtenues en prenant des points  $x_j$

$$\sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x_j) = f(x_j), \quad j = 1, \dots, n \quad (3.5)$$

$$\sum_{i=1}^n c_i \psi_{ij} = f_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.6)$$

L'équation (3.5) représente un système linéaire de  $(n)$  inconnues qui s'écrit sous la forme

$$Ac = F$$

où

$$A = \psi_{ij}, i, j = 1, \dots, n$$

$$c = (c_1, \dots, c_n)^t$$

$$F = (f_1, \dots, f_n)^t$$

$$c = A^{-1}F$$

## 3.2 Exemples Numériques

Après avoir traité les aspects théoriques liés aux équations intégrales et aux méthodes d'approximation en utilisant les polynômes de Chebyshev, nous passons dans ce chapitre à l'aspect pratique, en présentant des exemples numériques visant à évaluer l'efficacité de la méthode proposée.

**Exemple 3.1** Résoudre l'équation intégrale suivante :

$$\int_0^x \varphi(t) \cos(x+t) dt + \int_0^1 \varphi(t) \sin(x-t) dt = f(x)$$

après la régularisation

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \int_0^x \frac{\sin(x+t)}{\cos 2x} \varphi(t) dt - \int_0^1 -\frac{\cos(x-t)}{\cos 2x} \varphi(t) dt &= \sin x - \frac{1}{4 \cos 2x} (\sin x - \sin 3x + 2x \cos x) \\ &+ \frac{1}{4 \cos 2x} (\cos x + 2 \sin x - \cos(x-2)) \end{aligned}$$

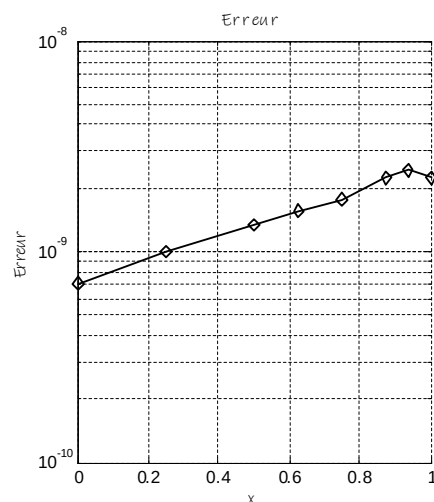
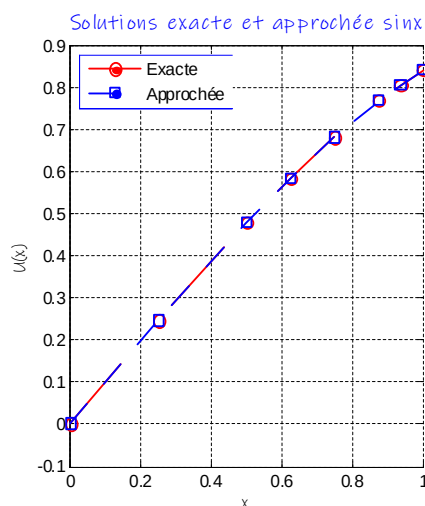
où la fonction  $f(x) = \frac{1}{4} (\sin x - \cos x - \cos 3x - \sin(x-2)) - \frac{1}{2} x \sin x$  est calculée une fois que l'on affecte l'équation la solution  $\varphi(x)$  donnée par

$$\varphi_{ex}(x) = \sin x$$

Nous appliquons polynôme de Chebyshev  $U_n(x)$  de seconde espèce pour approximer

la solution  $\varphi_{ex}(x)$  c'est-à-dire que  $\varphi_N(x)$  solution du système algébrique avec  $N = 8$

| Pts de x        | Solu exacte     | Solu approx      | Erreur          |
|-----------------|-----------------|------------------|-----------------|
| 0.000000e + 000 | 0.000000e + 000 | -7.035150e - 010 | 7.035150e - 010 |
| 2.500000e - 001 | 2.474040e - 001 | 2.474040e - 001  | 1.000729e - 009 |
| 5.000000e - 001 | 4.794255e - 001 | 4.794255e - 001  | 1.348077e - 009 |
| 6.250000e - 001 | 5.850973e - 001 | 5.850973e - 001  | 1.562913e - 009 |
| 7.500000e - 001 | 6.816388e - 001 | 6.816388e - 001  | 1.759866e - 009 |
| 8.750000e - 001 | 7.675435e - 001 | 7.675435e - 001  | 2.229129e - 009 |
| 9.375000e - 001 | 8.060811e - 001 | 8.060811e - 001  | 2.425120e - 009 |
| 1.000000e + 000 | 8.414710e - 001 | 8.414710e - 001  | 2.239929e - 009 |



**Exemple 3.2** Résoudre l'équation intégrale suivante :

$$\int_0^x \varphi(t)e^{(x+t)} dt + \int_0^1 \varphi(t) (x^2 t) dt = f(x)$$

après la régularisation

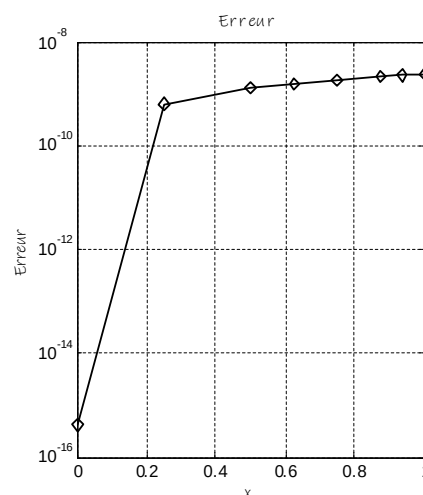
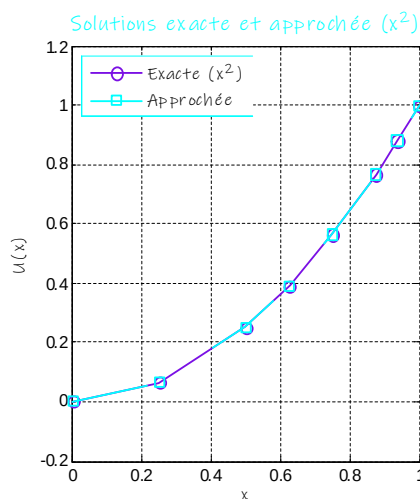
$$\varphi(x) + \int_0^x \varphi(t) (e^{(-x+t)}) dt + \int_0^1 (2xte^{-2x}) \varphi(t) dt = \frac{1}{2}xe^{-2x} - 2e^{-x} - 2x + 2x^2 + 2$$

où la fonction  $f(x) = e^x (2e^x + x^2 e^x - 2xe^x - 2) + \frac{1}{4}x^2$  est calculée une fois que l'on affecte l'équation la solution  $\varphi(x)$  donnée par

$$\varphi_{ex}(x) = x^2$$

Nous appliquons polynôme de Chebyshev  $U_n(x)$  de seconde espèce pour approximer la solution  $\varphi_{ex}(x)$  c'est-à-dire que  $\varphi_N(x)$  solution du système algébrique avec  $N = 8$

| Pts de x        | Solu exacte     | Solu approx      | Erreur          |
|-----------------|-----------------|------------------|-----------------|
| 0.000000e + 000 | 0.000000e + 000 | -4.154999e - 016 | 4.154999e - 016 |
| 2.500000e - 001 | 6.250000e - 002 | 6.250000e - 002  | 6.328990e - 010 |
| 5.000000e - 001 | 2.500000e - 001 | 2.500000e - 001  | 1.280724e - 009 |
| 6.250000e - 001 | 3.906250e - 001 | 3.906250e - 001  | 1.588100e - 009 |
| 7.500000e - 001 | 5.625000e - 001 | 5.625000e - 001  | 1.881427e - 009 |
| 8.750000e - 001 | 7.656250e - 001 | 7.656250e - 001  | 2.161113e - 009 |
| 9.375000e - 001 | 8.789063e - 001 | 8.789062e - 001  | 2.296269e - 009 |
| 1.000000e + 000 | 1.000000e + 000 | 1.000000e + 000  | 2.428609e - 009 |



### 3.3 Conclusion

L'implémentation de la méthode spectrale de collocation, propulsée par les polynômes de Chebyshev de seconde espèce, a pleinement tenu ses promesses face aux équations intégrales de Volterra-Fredholm. Les simulations numériques réalisées constituent la preuve concrète de la robustesse de ce schéma. En effet, l'analyse fine des résidus d'erreur révèle une vitesse de convergence exponentielle et une stabilité remarquable, tout en maintenant un coût calculateur minimal. Ces performances numériques valident l'efficacité supérieure de l'approche choisie, la positionnant comme un outil de référence hautement performant pour cette classe de problèmes

# Bibliographie

- [1] M. NADIR .Cours d'analyse fonctionnelle ,université de M'sila Algérie 2004
- [2] M. N. NADIR, Sur la Solution Numérique des équations Intégrales de Volterra-Fredholm en Utilisant les Polynômes de Tchebyshev, Master, University of Msila (2022).
- [3] K. E. Atkinson, “The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind,” Cambridge University Press, 2010.
- [4] A.M.Wazwaz, Linear and nonlinear integral equations methods and applications, Saint Xavier University Chicago, IL 60655, USA
- [5] L. Aissa, N. Mostefa, N. Mohamed. Nasseh. Application of Chebyshev Polynomials to Volterra-Fredholm Integral. The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, 7, 10 (2022), pp. 1-8.
- [6] NADIR, Mohamed Nasseh ; JAWAHDOU, Adel. Chebyshev polynomials to Volterra-Fredholm integral equations of the first kind. REMAT :, v. 10, n. 1, p. e3002,
- [7] S. Andréas, weakly singular Volterra and Fredholm-Volterra integral equation, Studia Univ . “Babeş-Bolyai, Mathematica , Volume XLVIII, Number 3, September 2003
- [8] Brunner, H. : On the numerical solution of Volterra–Fredholm integral equation by collocation methods. SIAM J. Numer. Anal. 27(4), 87–96 (1990)
- [9] Abd-Elhameed, W.M. ; Youssri, Y.H. : Numerical solutions for Volterra–Fredholm–Hammerstein integral equations via second kind Tchebyshev quadrature collocation algorithm. Adv. Math. Sci. Appl. 24, 129–141 (2014)

- [10] P. Kumar and G. C. Dubey, “ An application of Volterra integral equation by expansion of Taylor’s series in the problem of heat transfer and electrostatics,” IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM), vol.11, no. 5, pp. 59-62, 2015.
- [11] Al-Jubory, A. (2010) ; "Some Approximation Methods for Solving Volterra-Fredholm Integral and IntegroDifferential Equations" ; Ph.D. Thesis, University of Technology.



## الملخص:

الهدف من هذا البحث هو إيجاد حلول عددية تقريبية للمعادلات التكاملية من نوع فولتيرا-فريدولم من النوع الأول، وذلك بعد تحويلها إلى معادلات من النوع الثاني باستخدام تقنية النظام، ثم استخدام كميات حدود تشيبيشيف للمعادلة من النوع الثاني لتقريب الحل. وقد تم تقدير أمثلة عددية لتوضيح فعالية ودقة الطريقة المقترحة.

## الكلمات المفتاحية:

كميات حدود تشيبيشيف من النوع الثاني - المعادلات التكاملية - النظام - الطرق العددية

## Résumé :

Le but de ce mémoire est de trouver des solutions numériques approximatives aux équations intégrales de Volterra-Fredholm du premier type, en les transformant en équations du second type à l'aide de la technique de régularisation. Les polynômes de Chebyshev décalés de Deuxième espèce sont utilisés pour approximer la solution. Des exemples numériques sont présentés pour démontrer l'efficacité et la précision de la méthode proposée.

## Mots clés :

Polynômes de Chebyshev de Deuxième espèce – Équations intégrales –  
Régularisation – Méthodes numériques

## Abstract:

The objective of this study is to find approximate numerical solutions for Volterra-Fredholm integral equations of the first kind by transforming them into second kind equations using a regularisation technique. Shifted Chebyshev polynomials of the Second-kind are used to approximate the solution. Numerical examples are presented to demonstrate the effectiveness and accuracy of the proposed method.

## Keywords:

Second-kind Chebyshev polynomials – Integral equations – Regularisation –  
Numerical methods