

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE M'SILA MOHAMED MOHAMED BOUDIAF
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES

Mémoire présenté en mathématiques

Troisième année

Par

ETUDIANT

THÈME

Dual D'un espace vectoriel

sujetbbbbbbbbbbbbbb

Soutenu publiquement, le jj/mm/anne devant le jury composé de :

T. eacher

T. eacher

Remerciements

Je remercie tout d'abord mon Dieu qui m'a donné la force pour terminer ce modeste travail.

*Je tiens à remercier mes promoteurs : **Mr Gasmi** , Professeur à universite de M'sila ;pour la confiance qu'il m'a témoignée en me proposant ce sujet, ses encouragements et sa patience.*

Les discussions scientifiques qu'il a su générer, ses remarques et ses suggestions qui m'ont permis de finaliser ce modeste travail. Je souhaite leurs transmettent ma reconnaissance et ma plus profonde gratitude.

Je remercie aussi tous les membres du Jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait, en acceptant de juger ce modeste travail.

Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Je ne peux pas clôturer mes remerciements sans se retourner vers les êtres qui me sont les plus chers ; ma famille qui ont eu un rôle essentiel et continu dans ma réussite.

Table des matières

Introduction	1
1 Quelques Notions préliminaires sur la mécanique des fluides	2
1.1 Introduction:	2
1.2 Définitions	3
1.2.1 Fluide parfait :	3
1.2.2 Fluide réel:	3
1.2.3 Fluide incompressible:	3
1.2.4 Fluide compressible:	3
1.2.5 lignes de courant:	3
1.2.6 Viscosité:	4
1.2.7 Formule de Green:	4
1.3 Equations du mouvements des fluides	4
1.3.1 Equation de continuité.	4
1.3.2 Equation d'Euler et équation de Bernoulli	7
1.4 Ecoulement bidimensionnel, irrotationnel et stationnaire d'un fluide parfait incompressible.	10
1.4.1 Ecoulement irrotationnel-potentiel de vitesse	10
1.4.2 Ecoulement incompressible-Fonction de courant.	11
1.4.3 Equation différentielles des fonctions ϕ et ψ .	12

2	Transformation conforme	14
2.1	Transformations conformes	14
2.1.1	Introduction:	14
2.2	Jacobien d'une transformation	15
2.3	Représentation conforme	16
2.4	Théorème de la représentation conforme de Riemann	17
2.5	Transformation linéaire:	18
2.6	La Transformation bilinéaire ou fractionnelle	18
2.7	Transformations successives	19
2.8	Quelques transformations générales:	19
2.9	Les points Fixes ou invariables d'une Transformation	20
2.10	Représentation d'un demi-plan sur un cercle	20
2.11	Transformations des frontières en forme paramétrique	21
2.12	Propriétés de base des transformations conformes	21
3	Applications des transformations conformes	24
3.1	Preliminaire	24
3.2	méthodologie	25
3.3	Application	27
3.4	Conclusion générale	30
	 Conclusion générale	 30
	 Bibliographie	 32

Notations

ρ La densité.

P La pression.

μ Viscosité dynamique.

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ Viscosité cinématique.

ω Tourbillon.

J Jacobienne.

T Le tenseur des contraintes.

v_t Volume matériel.

Mots clés : transformation conforme , la représentation conforme de Riemann, transformation de **Möbius** , Le profil *Joukowski*.

L'application de la théorie des variables complexes joue un rôle très important pour le traitement des problèmes des milieux continus en deux dimensions. Notre travail dans ce mémoire entre dans la problématique générale de résolution des problèmes bidimensionnels non linéaires d'hydrodynamiques, et plus précisément l'application de la technique des transformations conformes.

Ce mémoire est fait l'objet de trois chapitres.

Dans le premier chapitre on donne quelques notions préliminaires sur les équations qui régissent les mouvements des fluides dans le cas où le fluide est considéré comme incompressible et non visqueux et l'écoulement soit irrotationnelle.

Dans le deuxième chapitre on présente quelques transformations conformes qui basent sur la notion des fonctions analytiques.

Dans le troisième chapitre on applique cette technique pour étudier un problème aérodynamique où on transforme un écoulement autour d'un aérofile en un demi plan supérieur en utilisant la transformation de *Joukowski*.

On se termine ce travail par une conclusion.

Chapitre 1

Quelques Notions préliminaires sur la mécanique des fluides

1.1 Introduction:

La mécanique des fluides est la science qui étudie les écoulements de milieux continus c'est-à-dire des liquides et des gaz lorsque ceux-ci subissent des forces ou des contraintes.

Un fluide peut être considéré comme étant une substance formée d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. C'est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler.

On insiste sur le fait qu'un fluide est supposé être un milieu continu : même si l'on choisit un très petit élément de volume, il sera toujours beaucoup plus grand que la dimension des molécules qui le constitue. Par exemple, une gouttelette de brouillard, aussi petite soit-elle à notre échelle, est toujours immense à l'échelle moléculaire.

1.2 Définitions

1.2.1 Fluide parfait :

Un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de frottement. C'est à dire quand la composante $d\vec{F}_T$ est nulle. Autrement dit , la force $d\vec{F}$ est normale à l'élément de surface dS .

1.2.2 Fluide réel:

Contrairement à un fluide parfait, qui n'est qu'un modèle pour simplifier les calculs, pratiquement inexistant dans la nature, dans un fluide réel les forces tangentielles de frottement interne qui s'opposent au glissement relatif des couches fluides sont prise en considération. Ce phénomène de frottement visqueux apparaît lors du mouvement du fluide.

C'est uniquement au repos, qu'on admettra que le fluide réel se comporte comme un fluide parfait, et on suppose que les forces de contact sont perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquels elles s'exercent.

1.2.3 Fluide incompressible:

Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donné ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, etc.)

1.2.4 Fluide compressible:

Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure. Les gaz sont des fluides compressibles. Par exemple, l'air, l'hydrogène, le méthane à l'état gazeux, sont considérés comme des fluides compressibles.

1.2.5 lignes de courant:

La ligne de courant est une courbe où le vecteur de vitesse est tangente en chacun de ses points. La définition d'une ligne de courant est donnée par l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{\omega}$$

1.2.6 Viscosité:

C'est une grandeur qui caractérise les frottements internes du fluide, autrement dit sa capacité à s'écouler. Elle caractérise la résistance d'un fluide à son écoulement lorsqu'il est soumis à l'application d'une force.

1.2.7 Formule de Green:

Soit un volume V de limite, la surface S et \vec{u}_n le vecteur normal à S dirigé vers l'extérieur du volume V . Soit \vec{F} un champ vectoriel défini dans un voisinage de V , alors la forme de Green nous donne:

$$\iint_s (\vec{F} \cdot \vec{u}_n) ds = \iiint_v \operatorname{div}(\vec{F}) dv$$

1.3 Equations du mouvements des fluides

1.3.1 Equation de continuité.

L'équation de continuité traduit la conservation de la masse au cours de son déplacement. Le principe de conservation de la masse est appliqué sur un petit élément de volume de l'espace. Soit V un volume délimité par une surface S de masse M . Par le principe de conservation de la masse, on peut affirmer que l'augmentation de la masse M à l'intérieur de V est égale à la masses de fluide qui y entrent diminuée de celle des masse qui sortent .

La masse contenue dans le volume V à l'instant t est égale à :

$$M = \iiint_v \rho dV$$

ρ est la densité du fluide.

A travers ds il s'écoule par unité de temps, une quantité

$$\rho \vec{v} \cdot \vec{u}_n \times ds$$

Cette quantité est positive si le fluide sort du volume V , et négative si le fluide pénètre.

Donc la quantité totale du fluide sortant du volume V par unité est égale à :

$$\iint_s (\rho \vec{v}) \cdot \vec{u}_n \times ds$$

D'autre part, la variation de la quantité du fluide contenue dans ce volume est donnée par:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho dV$$

On applique le principe de conservation de la masse, on obtient:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho dV = \iint_s (\rho \vec{v}) \cdot \vec{u}_n \times ds$$

L'intégrale de surface peut être transformée en une intégrale de volume en appliquant la formule de Green.

$$\iint_s (\rho \vec{v}) \cdot \vec{u}_n \times ds = \iiint_v (\operatorname{div}(\rho \vec{v})) dV$$

donc

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho dV = \iiint_v (\operatorname{div}(\rho \vec{v})) dV$$

d'où

$$\iiint_v \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right) dV = 0$$

Puisque V est arbitraire, on obtient l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

En utilisant les relations: $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}\rho$ et $\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \rho \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}\rho$

on a une autre forme de l'équation de continuité

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{1.3.1}$$

Cas particuliers:

Si le fluides est incompressibles l'équation 1.3.1 devient

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Si de plus, l'écoulement est irrotationnel i-e $\nabla \times \vec{v} = 0$, le champs de vitesse dérive d'un potentiel ϕ c'est-à-dire:

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\phi$$

Alors l'équation de continuité devient:

$$\nabla^2\phi = 0$$

ou bien

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

Ecoulement stationnaire, i-e $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$. L'équation de continuité prend la forme

$$\text{div}(\rho\vec{v}) = 0$$

1.3.2 Equation d'Euler et équation de Bernoulli

Equation d'Euler:

Soit V un domaine délimité par une surface S . la résultante des surfaces surfaciques s'exerçant sur ce volume et donnée par l'intégrale:

$$-\iint_S P \cdot \vec{u}_n ds$$

où P est la pression.

En transformant l'intégrale de surface en une intégrale de volume, nous obtenons :

$$-\iint_S P \cdot \vec{u}_n ds = -\iiint_V \overrightarrow{\text{grad}}P dv$$

Cette égalité montre que l'élément de volume du fluide est soumis à la force $-dV \overrightarrow{\text{grad}} p$ exercée par le fluide environnant. Dans le cas où on ne considère que les forces surfaciques, l'équation de la balance des forces s'écrit alors :

le domaine étant arbitraire, on aura donc

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = - \overrightarrow{\text{grad}} P \quad (1.3.2)$$

Lorsque le fluide est placé dans un champ (champ de pesanteur, champ magnétique, ...), chacun de ses éléments de volume est encore soumis à la force \vec{F}_{champ} cette force doit être ajoutée au second membre de l'équation 1.3.2 de sorte que l'équation 1.3.2 doit s'écrire sous la forme:

$$\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P + \vec{F}_{\text{champ}}$$

Cette équation a été établie par L. Euler 1755.

Equation de Bernoulli:

A partir de l'équation d'Euler pour un fluide incompressible et parfait lorsque les forces de volume dérivent d'un potentiel $\vec{F}_{\text{champ}} = \overrightarrow{\text{grad}} u$ on a:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P + \overrightarrow{\text{grad}} u$$

On rappelle l'identité vectorielle:

$$(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} \right) + (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \times \vec{V}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{V^2}{2}\right) + (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \times \vec{V} = \frac{1}{\rho} - \overrightarrow{\text{grad}}P - \overrightarrow{\text{grad}}u$$

On a alors:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + u\right) + (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \times \vec{V} = 0 \quad (1.3.3)$$

On rappelle la forme du vecteur tourbillon:

$$\text{Rot } \vec{V} = (\vec{\nabla} \times \vec{V})$$

Dans le cas d'un écoulement permanent (un écoulement du fluide est dit stationnaire) (ou permanent) lorsque la \vec{V} de son écoulement reste constante dans le temps en importe quel point de l'espace occupé par le fluide c'est-à-dire:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$$

l'équation 1.3.3 s'écrit

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + u\right) + \text{Rot } \vec{V} \times \vec{V} = 0$$

Sur une ligne de courant de vecteur unitaire \vec{s} , on a:

$\frac{\partial}{\partial s} = \vec{s} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}$ ce qui donne:

$$\vec{s} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + u\right) + \vec{s} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \times \vec{V} = 0$$

comme \vec{s} et \vec{V} sont colinéaires $\vec{s} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \times \vec{V} = 0$

Ainsi, on a

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + u \right) = 0$$

le long d'un ligne de courant on a alors :

$$\left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + u \right) = cte$$

En général, la constante change avec la ligne de courant . Les forces de volume de réduisent le plus souvent à la seule force de pesanteur. Dans ce cas, on:

$$\left(\rho \frac{V^2}{2} + p + \rho g z \right) = cte \tag{1.3.4}$$

1.4 **Ecoulement bidimensionnel, irrotationnel et stationnaire d'un fluide parfait incompressible.**

1.4.1 **Ecoulement irrotationnel-potentiel de vitesse**

Définition 1.4.1 *On dit qu'un écoulement est irrotationnel si :*

$$\vec{\Omega} = \overrightarrow{Rot} \vec{v} = 0$$

On rappelle qu'en mathématique une fonction, dont le rotationnel est nul, peut être toujours représenté par le gradient d'une fonction scalaire, car on a toujours :

$$\overrightarrow{Rot}(\overrightarrow{grad} \phi) = 0$$

On peut donc déduire:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\phi = \vec{v} \quad (1.4.1)$$

ϕ : représente la potentielle de vitesse, par analogie au potentiel de forces en mécanique. Du à l'existence d'une fonction potentiel, les écoulements irrotationnels sont dit écoulements potentiels.

1.4.2 Écoulement incompressible-Fonction de courant.

Dans le cas des écoulements bidimensionnels, le concept de lignes de courant est rattaché à l'équation de continuité. Si on considère que le fluide est incompressible i-e $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ alors :

$$\text{div } \vec{v} = 0$$

ou encore

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.4.2)$$

On introduit une nouvelle fonction ψ de x et y que l'on appelle *fonction de courant*, vérifiant

$$u_1 = -\frac{\partial\psi}{\partial y}; \quad v_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (1.4.3)$$

Les surfaces définies par ($\psi = cte$) sont des lignes de courant, en effet, la différentielle exacte de ψ sont donne :

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = -vdx + udy \quad (1.4.4)$$

Puisque $\psi = cte$, alors $d\psi = 0$, on trouve l'équation de la ligne de courant d'après 1.4.2. Soient, C une courbe fine qui part d'une ligne de courant vers autre caractérisée par $\psi = \psi_1$ et $\psi = \psi_2$ respectivement.

Soient \vec{u}_n un vecteur unitaire normale à C et orienté dans le sens de l'écoulement, le flux à travers C donné par

$$Q = \int_C \vec{v} \cdot \vec{u}_n = \int_C \left(-u \frac{dy}{dt} + v \frac{dx}{dt} \right) = \int_C (v dx - u dy) dt$$

d'où

$$Q = \int_C \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) = \int_C d\psi$$

par conséquent

$$Q = \psi_1 - \psi_2 \tag{1.4.5}$$

1.4.3 Equation différentielles des fonctions ϕ et ψ .

Soit un écoulement bidimensionnel, irrotationnel et stationnaire d'un fluide incompressible non-visqueux. Puisque $\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}\phi$ et $\text{div} \vec{v} = 0$, il vient $\text{div}(-\overrightarrow{\text{grad}}\phi) = 0$ d'où

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

c'est-à-dire

$$\Delta \phi = 0 \tag{1.4.6}$$

De même, d'après $\vec{v} = (u, v) = (-\frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial x})$ et $\overrightarrow{Rot}\vec{v} = 0$, on trouve

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.4.7)$$

d'où

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.4.8)$$

c'est-à-dire

$$\Delta\psi = 0 \quad (1.4.9)$$

D'où, la fonction potentielle ϕ et la fonction ligne de courant ψ et vérifient l'équation de *Laplace*. Un écoulement bidimensionnel, irrotationnel et stationnaire d'un fluide incompressible, non-visqueux est dite *écoulement potentiel*.

Chapitre 2

Transformation conforme

2.1 Transformations conformes

2.1.1 Introduction:

Une transformation conforme est une transformation des coordonnées qui préserve les angles, sans nécessairement préserver l'élément de volume. Autrement dit, c'est une dilatation locale de l'espace qui ne change pas l'angle entre deux courbes quelconques.

Définition 2.1.1 *Si $w = u + iv$ est une fonction uniforme de $z = x + iy$ où $(u, v, x$ et y sont des réels) alors nous peut écrire $u + iv = f(x + iy)$ ceci est équivalent à*

$$u = u(x, y) \tag{2.1.1}$$

$$v = v(x, y)$$

l'ensemble des équations (2.1.1) définit, en générale, une transformation, qui établit une correspondance entre les points (x, y) du plan z et les points (u, v) du plan w , les équations (2.1.1) sont appelées équations de la transformation.

Exemple 2.1.1 *Exemple de transformation conforme.*

On à résoudre l'équation dans le demi-plan $y > 0$:

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0,$$

avec

$$\phi(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1, \\ 1. & \end{cases}$$

Pour cela on utilise la transformation conforme:

$$Z = \ln \frac{z-1}{z+1},$$

qui transforme le demi-plan en une bande infinie comme le montre la figure 1.

Il est beaucoup plus simple de résoudre l'équation avec les conditions aux limites et compte tenu de l'invariance en x . L'équation en elle-même ne change pas puisque la transformation est conforme, donc avec $Z = X + iY$, on a toujours :

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0,$$

avec

$$\phi(x, 0) = 0 \text{ et } \phi(x, \pi) = 1.$$

On trouve: $\varphi = y/\pi$. En repassant aux variables x et y , on obtient finalement:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi} \arctan^{-1} \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1}.$$

2.2 Jacobien d'une transformation

Sous la transformation 2.1.1, une région \mathbb{R} du plan xy est, en général, tracé en une région \mathbb{R}' du plan uv . Ensuite, si ΔA_{xy} et ΔA_{uv} désignent, respectivement, les aires de ces régions, nous pouvons montrer que si u et v sont continûment différentiable,

$$\lim \frac{\Delta A_{uv}}{\Delta A_{xy}} = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| \quad (2.2.1)$$

où \lim désigne la limite comme ΔA_{xy} (où ΔA_{uv}) se rapproche de zéro et où le déterminant

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.2.2)$$

est appelé *le jacobien de la transformation* 2.1.1.

Si on résout (1) pour x et y en fonction de u et v , on obtient la transformation $x = x(u, v), y = y(u, v)$, souvent appelée *transformation inverse* correspondant à 2.1.1. Si x et y sont à valeur unique continûment différentiable, le jacobien de cette transformation est $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ et peut être montré égal à l'inverse de $\partial(u, v)/\partial(x, y)$. Ainsi, si un jacobien est différent de zéro dans une région, est de même de l'autre.

le Jacobien de la transformation est donnée par

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = |f'(z)|^2 \quad (2.2.3)$$

Il suit que la transformation est linéaire dans les régions où $f'(z) \neq 0$. Les points où $f'(z) = 0$ sont appelés *points critiques*.

2.3 Représentation conforme

Supposons que sous la transformation 2.1.1, le point (x_0, y_0) du plan xy est tracé dans le point (u_0, v_0) du plan uv (Figs. 2-1 et 2-2), tandis que les courbes C_1 et C_2 [coupant à (x_0, y_0)] sont tracé, respectivement, dans les courbes C'_1 et C'_2 [coupant à (u_0, v_0)]. Ensuite, si la transformation est telle que l'angle (x_0, y_0) entre C_1 et C_2 est égal à l'angle (u_0, v_0) entre C'_1 et C'_2 chacun des deux dans la grandeur et le sens, la transformation est dit être *conforme* à (x_0, y_0) . Une tracé qui préserve les grandeurs des angles mais pas nécessairement le sens est appelé *isogonal*.

Le théorème suivant est fondamental.

Théorème 2.3.1 : Si $f(z)$ est analytique et $f'(z) \neq 0$ dans une région \mathbb{R} , alors la représentation $w = f(z)$ est conforme dans tous points de \mathbb{R} .

Pour applications conformes ou transformations , petites figures dans le voisinage d'un point z_0 dans le plan z représente en petits chiffres similaires dans le plan w et sont magnifié (ou réduit) par une quantité donnée approximativement par $|f'(z_0)|^2$, appelé *le facteur de grossissement de aire* ou simplement *facteur de grossissement* . De distances courtes dans le plan z dans le voisinage de z_0 sont amplifiés (ou réduite) dans le plan w par une quantité donnée approximativement par $|f'(z_0)|$, appelé *le facteur de grossissement linéaire*. Les grandes figures dans le plan z carte généralement en chiffres dans le plan w qui sont loin d'être similaire.

2.4 Théorème de la représentation conforme de Riemann

Soit C (fig . 2 – 3) une courbe fermée simple dans le plan z formant la limite d'un région \mathbb{R} simplement connexe . Laissez C' (fig . 2 – 4) représente un cercle d'un rayon et d'un centre à l'origine [le *cercle de l'unité*] formant la limite de la région de \mathbb{R}' dans le plan w . La région \mathbb{R}' est parfois appelé *le disque d'unité* . Puis le *théorème de transformation de Riemann* affirme qu'il existe une fonction $w = f(z)$, analytique dans \mathbb{R} , qui trace chaque point de \mathbb{R} dans un point correspondant de \mathbb{R}' et chaque point de C correspondant à un point de C' . Tous les points de \mathbb{R}' est l'image d'exactly un point de \mathbb{R} .

Cette fonction $f(z)$ contient trois constantes réelles arbitraires qui peuvent être déterminés en faisant le centre de C' correspondent à un certain point dans \mathbb{R} donné, alors que certains point de C' correspond à un point donné sur C . Il convient de noter que, bien que le théorème de transformation de Reimann démontre *l'existence* d'une fonction de transformation , il n'est pas réellement produire cette fonction .

Il est possible d'étendre le théorème de transformation de Riemann pour le cas où une région délimitée par deux courbes fermées simples, l'un dans l' autre , est mis en correspondance avec une région délimitée par deux cercles concentriques. En outre, toute région qui n'est pas tout le plan xy peut être tracée de façon conforme sur le disque unité simplement connexe . Par exemple , le demi-plan supérieur peut être tracé de façon conforme sur le disque de l'unité (voir la section 2.11)

Théorème 2.4.1 (Riemann)

Si D et D' sont deux régions simplement connexes et si leurs frontières respectives consistent de plus qu'un seul point alors il est toujours possible de trouver une fonction analytique f laquelle définit une transformation conforme entre D et D' .

Remarque 2.4.1 *Le théorème de Riemann est d'importance théorique critique, mais sa preuve n'est pas constructeur, ceci indique que le théorème établit l'existence de transformation $w = f(z)$.*

2.5 Transformation linéaire:

Définition 2.5.1 *la transformation*

$$w = \alpha z + \beta \quad (2.5.1)$$

où α et β sont des constantes données complexes, que l'on appelle une transformation linéaire. Laisser $\alpha = a \exp(i\theta_0)$, nous voyons que une transformation linéaire général est une combinaison des transformations de translation, rotation et homothétie.

2.6 La Transformation bilinéaire ou fractionnelle

Définition 2.6.1 *la transformation*

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \quad (2.6.1)$$

*s'appelle une transformation de **Möbius** ou parfois une transformation bilinéaire (ou fractionnelle). Cette transformation peut être considérée comme combinaison des transformations de translation, inverse et homothétie..*

Théorème 2.6.1 *Toute transformations de Möbius est conforme.*

Théorème 2.6.2 *Le transformation de Möbius préserve la famille qui consiste de toute les droites et tous les cercles du plan.*

La transformation 2.6.1 a la propriété que des cercles dans le plan z sont tracés dans des cercles dans le plan w , où par des cercles nous incluons cercles de rayon infini qui sont des lignes droites .

La transformation est définie par la donnée de trois points distincts du plan z et de leurs trois points transformés le plan w , dont l'un d'entre peut être à l'infini t.q: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des nombres complexes.

Si z_1, z_2, z_3, z_4 sont distincts , alors la quantité

$$\frac{(z_4, z_1)(z_2, z_3)}{(z_2, z_1)(z_4, z_3)} \quad (2.6.2)$$

est appelé le rapport croisé de z_1, z_2, z_3, z_4 . Ce rapport est invariable sous la transformation bilinéaire, et cette propriété peut être utilisée pour obtenir transformations bilinéaires spécifiques traçant trois points dans trois autres points.

2.7 Transformations successives

Si $w = f_1(\zeta)$ trace région de le plan z dans la région \mathbb{R}_w du plan w alors que $\zeta = f_2(z)$ trace région \mathbb{R}_z du plan z dans la région \mathbb{R}_ζ , alors $w = f_1[f_2(z)]$ trace \mathbb{R}_z dans \mathbb{R}_w . Les fonctions f_1 et f_2 définissent *transformations successives* d'un plan à l'autre, qui sont équivalentes à une seule transformation . Ces idées sont facilement généralisée .

2.8 Quelques transformations générales:

Dans ce qui suit , α, β sont des constantes complexes tandis que a, θ_0 sont des constantes réelles .

1. Translation . $w = z + \beta$

Par cette transformation , les figures du plan z sont *déplacées* ou *translatées* dans la direction du vecteur β .

2. Rotation . $w = \exp(i\theta_0)z$

par cette transformation les figures du plan z sont tournées par l'angle θ , Si $\theta_0 > 0$, la rotation est antihoraire tout, si $\theta_0 < 0$, la rotation est dans le sens horaire.

3. Homothétie . $w = az$

Par cette transformation, les figures du plan z sont dilatées (ou contracté) dans la direction z si $a > 1$ (ou $0 < a < 1$) .

4. Inverse . $w = 1/z$

Une transformation linéaire $w = 1/z$ pour z non nul transforme les cercles en cercles/droites,

les lignes en droites/cercles selon que l'objet passe ou non par l'origine.

2.9 Les points Fixes ou invariables d'une Transformation

Supposons que l'on superpose le plan w sur le plan z de sorte que l'axes de coordonnées coïncident et il est essentiellement un seul plan. Ensuite, nous pouvons penser à la transformation $w = f(z)$ que la prise de certains points de le plan dans autres points. Les points pour lesquels $z = f(z)$ sont appelés des *points fixes ou invariables* du la transformation.

2.10 Représentation d'un demi-plan sur un cercle

Soit z_0 n'importe quel point P dans la moitié supérieure du plan z désigné par \mathbb{R} sur la figure. 2 – 5. Ensuite, la transformation

$$w = (\exp(i\theta_0)) \left(\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right) \tag{2.10.1}$$

traces cette demi plan supérieur d'une façon linéaire sur l'intérieur \mathbb{R}' du cercle unité $|w| = 1$. Chaque point de l'axe x est associé à la limite du cercle. Le constante θ_0 peut être déterminée en faisant une point de l'axe des x particulier correspond à un point sur le cercle donné.

Dans les chiffres ci-dessus , nous avons utilisé la convention que les points non apprêtées telles que A, B, C , etc. , dans le plan z correspondent à des points amorcées A', B', C' , etc. , dans le plan w . En outre, dans le cas où les points sont à l'infini, on indique par une flèche comme en A et F sur la figure . 2 – 5 , qui correspondent , respectivement , à A' et F' (le même point) dans la figure . 2 – 6 . Comme point z se déplace sur limite de \mathbb{R} [i.e, l'axe réel] de $-\infty$ (point A) à $+\infty$ (point F) , se déplace dans le sens antihoraire w long du cercle unité de A' retour à A' .

2.11 Transformations des frontières en forme paramétrique

Supposons que dans le plan z une courbe C , ce qui peut ou ne peut pas être fermé , a équations paramétriques donnée par

$$x = F(t), \quad y = G(t) \tag{2.11.1}$$

où l'on suppose que F et G sont continûment différentiable . Ensuite, la transformation

$$z = F(w) + iG(w) \tag{2.11.2}$$

cartes l'axe réel C' du plan w sur C .

2.12 Propriétés de base des transformations conformes

Soit C un arc régulier représenté par l'équation dans le plan z

$$z = z(t), \text{ avec } (a \leq t \leq b)$$

et soit $f(z)$ est une fonction définie en tout point z de C , l'équation suivante

$$w = f[z(t)], \text{ avec } (a \leq t \leq b)$$

est représentation paramétrique de l'image Γ de C sous la transformation $w = f(z)$, on suppose que C passe par le point $z_0 = z(t_0)$, ($a < t_0 < b$) qui est f est analytique tel que : $f'(z_0) \neq 0$

si $w(t) = f[z(t)]$, il se suite $w'(t_0) = f'[z(t_0)] z'(t_0)$, alors :

$$\arg w'(t_0) = \arg f'[z(t_0)] + \arg z'(t_0) \quad (2.12.1)$$

soit \vec{t} le vecteur tangent unitaire construit à C au point z_0 et $\theta_0 = \arg z'(t_0)$ est l'angle de l'inclinaison de \vec{t} et \vec{T} le vecteur tangent unitaire construit à Γ l'image de C au point $w_0 = f(z_0)$ et $\phi_0 = \arg w'(t_0)$ est l'angle de l'inclinaison de \vec{T} , et aussi $\psi_0 = \arg f'[z(t_0)]$.

De (2.12.1) on obtient $\phi_0 = \theta_0 + \psi_0$ tel que ψ_0 l'angle de rotation ($\psi_0 = \phi_0 - \theta_0$).

Il se suit que l'angle ψ_0 (dans la grandeur et l'orientation) étant la différence des angles des tangentes est préservée par telles transformations ,Alors une transformation avec cette propriété s'appelle **transformation conforme**.(voir la figure 1)

le théorème suivant est fondamental:

Théorème 2.12.1 Soit f est une fonction analytique dans région R , et soit z_0 est une point dans R , si $f'(z_0) \neq 0$ alors f est conforme en z_0 .

Preuve. Soient C_1 et C_2 deux arcs régulier qui passent par le point z_0 avec les tangentes données par \vec{t}_1 et \vec{t}_2 respectivement, θ_1 et θ_2 sont les angles d'inclinaison de \vec{t}_1 et \vec{t}_2 respectivement et soient Γ_1 et Γ_2 sont l'image du C_1 et C_2 qui passent par le point w_0 avec les tangentes données par \vec{T}_1 et \vec{T}_2 respectivement, ϕ_1 et ϕ_2 sont les angles d'inclinaison de \vec{T}_1 et \vec{T}_2 respectivement.

on utilise (2.12.1) et on obtient : $\phi_1 = \theta_1 + \psi_1$ et $\phi_2 = \theta_2 + \psi_2$ où $\psi_0 = \arg f'(z_0)$

d'où $\theta_2 - \theta_1 = \phi_2 - \phi_1$ c'est-à-dire, l'angle $\theta_2 - \theta_1$ de Γ_1 à Γ_2 est le même dans la grandeur et le sens que l'angle $\theta_2 - \theta_1$ de C_1 à C_2 , ces angles sont dénotés par α . D'où la transformation $w = f(z)$ est conforme en z_0 . ■

Remarque 2.12.1 Une transformation qui préserve la valeur absolue des angles mais qui renverse l'orientation aux points où sa dérivée ne s'annule pas, s'appelle une transformation

anti-conforme.

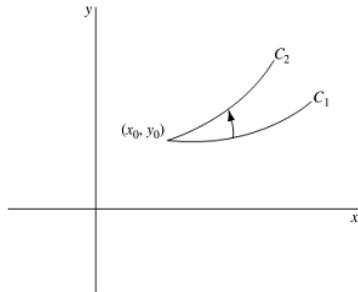


figure 2 – 1

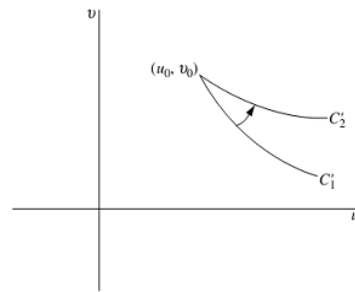


figure 2 – 2

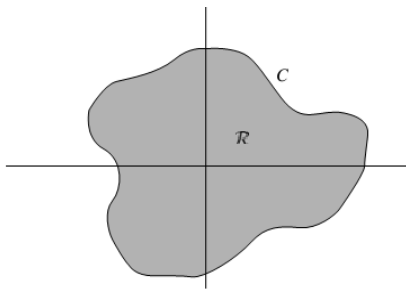


figure 2 – 3

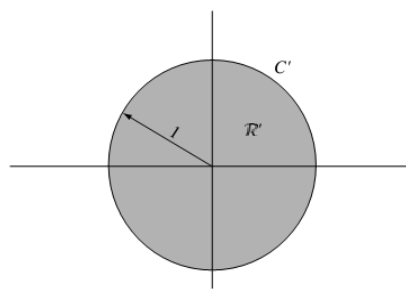


figure 2 – 4

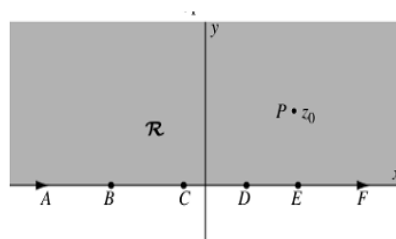


figure 2 – 5

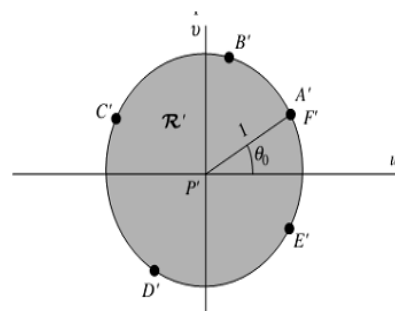


figure 2 – 6

Chapitre 3

Applications des transformations conformes

3.1 Préliminaire

Un grand nombre de problèmes surgissant la mécanique de fluide, électrostatique, conduction de la chaleur et beaucoup d'autres situations physiques peuvent être mathématiquement formulées en termes d'équation de Laplace, c'est-à-dire, tous ces problèmes réduisent à résoudre l'équation suivante dans certain domaine D du plan z ;

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$$

En plus, la fonction ϕ satisfait certaines conditions aux limites sur le bord C et D , donc les techniques de transformation conforme harmonique avec des condition aux limites.

Dans le domaine de la dynamique des fluides, une superficie de significatif importance pratique est l'étude des ailes, Une aile se réfère à la forme en coupe transversale d'un objet conçu pour générer une portance lors du déplacement à travers un fluide. Fondamentalement, une aile génère de la portance en détournant le mouvement de fluide coulant sur sa surface dans une direction vers le bas.

Faites au fait que les ailes ont des géométries compliqué, il est difficile de résoudre pour le fluide circuler autour des ailes en utilisant l'équation de Laplace et le potentiel d'écoulement théorie, Kutta (1902) a calculé les lignes de courant autour d'une aile utilisant

les applications conformes, indépendante du travail plus tôt par Lord Rayleigh. la technique de l'application conforme nous aidera à comprendre et calculer écoulement autour des ailes utilisées dans la pratique aéronautique.

3.2 méthodologie

Supposons que , dans le plan ζ , il ya une région G , qui est la section transversale d'une manière uniforme, dans le corps infiniment longue pour que la fonction de potentiel pour un flux de plan est connu et est donnée par

$$F(\zeta) = \phi(\xi, \eta) + \psi(\xi, \eta) \quad (3.2.1)$$

où $\psi = 0$ sur G depuis l'écoulement à travers le ∂G doit être égal zéro. Par exemple, G peut être le corps cylindrique utilisé ci-dessus, avec fonction potentielle superposé F_c .

Ecrire $z = x + iy$. Nous avons besoin d' une transformation T qui sera convenablement l'application des points du plan z au plan ζ . On note dans la région du plan z qui est la pré- image de G sous T par P (Plus tard , nous penserons à P comme un profil. Nous voulons T pour satisfaire les quatre conditions suivantes.

- i** T trace les points uniques ∂P aux points uniques de ∂G .
- ii** $\frac{dt}{dz}$ est finie et non nulle sur l'ensemble du plan extérieur ζ de G , pour puis , en raison de (i) T trace des points extérieur de P à points extérieur de G .
- iii** T est analytique à l'infini et que $z \rightarrow \infty, \zeta \rightarrow \infty$ et $\frac{dt}{dz} \rightarrow K$, où K est une constante réel, fini , non nulle.
- iv** T a un inverse à l'extérieur de G .

Nous pouvons obtenir une nouvelle fonction potentiel $\mathcal{F}(z)$ pour l'écoulement autour de P de 3.2.1 et T , donnée par

$$\mathcal{F}(z) = F(T(z)) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) \quad (3.2.2)$$

Notez que pour chaque ζ sur ∂G , $\phi(\xi, \eta) = 0$, et ainsi de $F(\zeta)$ est purement réel sur ∂G .

Ainsi, par 3.2.2 et la condition (i) de T , il en résulte que $\Phi(x, y) = 0$ pour les points sur ∂P , et donc nous avons que l'écoulement à travers ∂P est égal à zéro.

Nous avons dérivé plus tôt que la fonction de vitesse pour écoulement dans le plan ζ est $\frac{dF}{d\zeta} = u - iv$. Ecrivez $u - iv = \omega_\zeta$, pour la clarté. Alors nous pouvons dériver la fonction de vitesse pour l'écoulement dans le plan z , ω_z . Par la règle à chaînes, nous avons

$$\frac{d\mathcal{F}}{dz} = \frac{dF}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = \omega_\zeta \cdot \frac{dt}{dz} = u_z - iv_z = \omega_z \quad (3.2.3)$$

Observez que la condition (iii) sur T assure que la vitesse du fluide ω_z à l'infini dans le plan z est proportionnelle à la vitesse du fluide ω_ζ à l'infini dans le plan ζ .

Nous avons $\mathcal{F}(z) = F(\zeta)$ lorsque $\zeta = t(z)$, et donc il en résulte que pour correspondant et ζ , $\phi(\xi, \eta) = \Phi(x, y)$ et $\psi(\xi, \eta) = \Psi(x, y)$. laisser $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ensuite, pour chaque ligne de potentiel $\phi = c_1$ dans le Plan ζ il existe un correspondant

ligne de potentiel $\Phi = c_1$ dans le plan z , et à chaque ligne de courant $\psi = c_2$ dans le plan ζ il ya une ligne de courant correspondante dans le plan z .

Maintenant, la condition (ii) sur T que $\frac{dT}{dz}$ est finie et non nulle sur l'ensemble ζ du plan extérieur G est faite de telle sorte que la famille de courbes $\phi = c_1$ et $\psi = c_2$ dans le plan extérieur du G sont tracés de manière conforme, préservant des angles, dans

le plan z à l'extérieur de P , formant les familles $\Phi = c_1$ et $\psi = c_2$. Depuis les courbes $\phi = c_1$ et $\psi = c_2$ sont orthogonaux, les courbes $\Phi = c_1$ et $\psi = c_2$ doit être également orthogonaux.

Ainsi, étant donné un potentiel $F(\zeta)$ et une région G qui représente la section transversale d'une manière uniforme, dans le corps infiniment longue, nous avons montré comment trouver le potentiel $\mathcal{F}(z)$ pour l'écoulement d'un fluide idéal autour d'un corps avec tout profil et une section transversale donnée par P , qui est formée à partir de G par une application conforme.

3.3 Application

Dans cette section, nous allons penser à G comme étant la section transversale d'un cylindre de rayon a et nous allons penser à P comme un profil. Nous avons dérivé la fonction de potentiel pour l'écoulement autour d'un cylindre. Elle est donnée par

$$F(\zeta) = U(\exp(-i\alpha))(\zeta - \zeta_0) + \frac{Ua^2 \exp(i\alpha)}{\zeta - \zeta_0} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \log\left(\frac{\zeta - \zeta_0}{a}\right) \quad (3.3.1)$$

Maintenant, nous voulons que notre aile P pour satisfaire la condition de *Kutta*. Ainsi, nous allons supposer que P a un bord de fuite forte et nous supposera que l'angle d'attaque α est faible. Dans ce cas, nous pouvons calculer la circulation Γ autour de l'aile et nous pouvons l'utiliser pour calculer l'ascenseur. On note le bord de fuite de la surface portante p par z_t et le point correspondant sur le cylindre G par ζ_t .

Nous allons nous orienter de telle sorte que la pale P est tourné vers la gauche. Ensuite, le bord de fuite z_t de P se produit sur la main en bas à côté droit de P . Il va tourner que le point correspondant ζ_t de G sera sur le côté inférieur droit du cylindre G et donc il ya un angle $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ tels que $\zeta_t = \zeta_0 + a \exp(-i\beta)$.

La condition *Kutta* est modélisé mathématiquement en exigeant $\frac{dF}{d\zeta} |_{\zeta_t} = 0$.

A de la condition de *Kutta*, il en résulte que

$$\frac{dF}{d\zeta} |_{\zeta_t} = U \exp(-i\alpha) - U \exp(i(\alpha + 2\beta)) + \frac{i\Gamma}{2\pi a} \exp(i\beta) = 0 \quad (3.3.2)$$

Ainsi,

$$\Gamma = \frac{2\pi a U}{i} (\exp(i(\alpha + \beta)) - \exp(-i((\alpha + \beta)))) = 4\pi a U \sin(\alpha + \beta) \quad (3.3.3)$$

Par le théorème de *Kutta - Joukowski*, la force d'ascenseur agissant sur la boîte d'aile peut être calculé avec la formule $\rho\Gamma U$. Ainsi, à partir de 3.3.3, la force de levage est donné par

$$L = 4\pi\rho a U^2 \sin(\alpha + \beta). \quad (3.3.4)$$

Maintenant que nous avons développé tout le background théorique nécessaire à comprendre transformations conformes entre cylindres et profils, on présente quelques exemples. Nous avons juste besoin d'une transformation T , satisfaisant les conditions de section 3 – 1, les points d'application du plan z à le plane ζ .

Le première ensemble des profils sont représentés par la transformation du *Joukowski*, qui est donnée par

$$z = \zeta + \frac{b^2}{\zeta} \quad (3.3.5)$$

Donné un inverse correctement défini, cette transformation remplit les conditions dans la section 3 – 1. Les points non-conformes de cette transformation sont les points $z = \pm 2b$ correspondant à le point de à l'extrémité d'une aile *Joukowski*. Modification de la valeur de b modifie la forme de la surface portante résultant. Une petite valeur de b produit produit, une surface portante cylindrique épais. Une plus grande valeur de b sera créer un diluant aile. Si $b = a$ (le rayon du cylindre dans le plan ζ), la surface portante correspondante sera une ligne de graisse, en particulier, il est juste la corde de la aérodynamique.

La famille *Joukowski* de profils résultant de 3.3.5 possède deux importantes restrictions. La première est que ces profils ont zéro angle de la queue à l'arrière bord, et l'autre est qu'elles sont relativement légèrement.

La seconde transformation est une généralisation de la transformation *Joukowski*. La transformation de *Kármán-Trefftz* est donnée par

$$z = \lambda \frac{(1 + \frac{b^2}{\zeta})^\lambda + (1 - \frac{b^2}{\zeta})^\lambda}{(1 + \frac{b^2}{\zeta})^\lambda - (1 - \frac{b^2}{\zeta})^\lambda} \quad (3.3.6)$$

où $\lambda = 2 - \frac{\theta}{\pi}$ et θ est l'angle de queue au bord de fuite d'un profil.

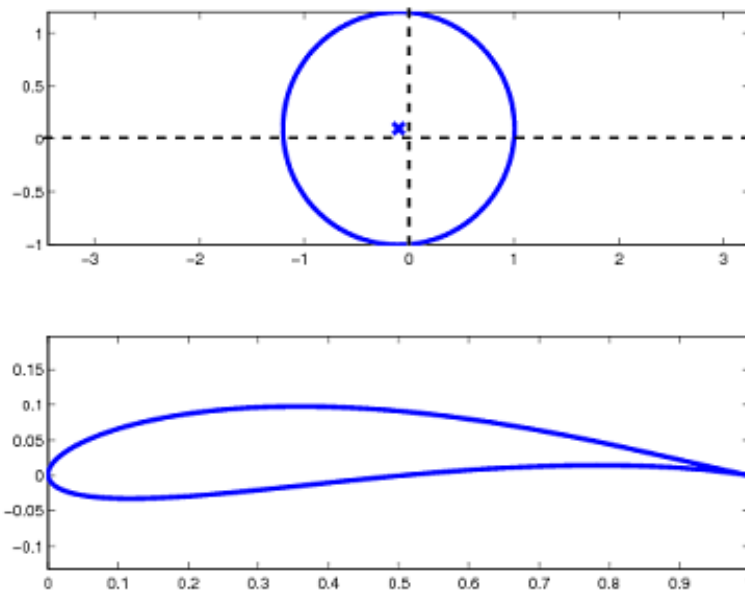


Figure 3 – 1 "Le profil Joukowski"

3.4 Conclusion générale

La transformation conforme a fourni, sous l'hypothèse d'un

écoulement irrotationnel d'un fluide supposé incompressible et parfait, une méthode élégante de calcul de l'écoulement bi-dimensionnel autour d'un profil d'aile et de sa portance. Certaines transformations bien choisies permettent en effet de transformer un cercle en une courbe ressemblant à un profil d'aile et en déduire la portance d'une aile de grand allongement.

La première application de cette technique correspond à ce qu'on appelle la transformation de Joukowski.

Bibliographie

- [1] **Asavanat J and Vanden-Broeck Jean-Marc 1996** Nonlinear free-surface flow emerging from vessels and flows under a sluice gate *J. Austral. Mat. Soc* **B 38** 63-86.
- [2] **Batchelor G. K 1967** An introduction to fluid dynamics (*Cambridge: Cambridge University Press*).
- [3] **Birkhoff G and Zarantonello E. H 1957** Jet, Wakes and Cavities (*Academic Press INC, New York*).
- [4] **ChristopheAncey**, Analyse différentielle Outils mathématiques pour la dynamique des fluides, University of Amsterdam The Netherlands ,Shanghai University People's Republic of China.
- [5] **Dormiani M, Bruch J. C and Sloss J. M (1987)**, Flow past symmetric convex profiles with open wakes *Int. j. numer. methods fluids***7** 1301-1314.
- [6] **Gasmi A and Mekias H 2003** The effect of surface tension on the contraction coefficient of a jet *J.Phys. A: Math. Gen* **36** 851-862.
- [7] **Gasmi A and Mekias H 2007** A jet from container and flow past a vertical flat plate in a channel with the surface tension effects *Appl. Math. Sci* **1(54)** 2687-2698.
- [8] **Murray R. Spiegel, Seymour Lipschutz, John J. Schiller et Dennis Spellman** ,Complex Variables with an introduction to CONFORMAL MAPPING and its applications, SIAM J. Appl. Math., 22, 2, 1972.

- [9] **Naghdi P. M and Vongsarnpigoon L 1986** Steady flow past a sluice gate *Phys. Fluids* **29** 3962-3970.
- [10] **Thomas Johnson**, Conformal Mapping in Wing Aerodynamics , June 4, 2013, McGraw-Hill.
- [11] **Vanden-Broeck Jean-Marc 1986** Flow under a gate *Phys. Fluids* **29** 3148-3151.