

# MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

**Domaine :** Mathématiques et Informatiques

**Filière:** Mathématiques

**Option:** Analyse Mathématique et Numérique

**Par**

ALILI Dounia

**Sujet**

**L'interpolation polynômiale : étude et applications**

Date de soutenance : 20 Juin 2018

**Devant le jury :**

Mr. GAGUI Bachir	MCA. Univ de M'sila	Président
Mr. LAKEHALI Belkacem	MCA. Univ de M'sila	Rapporteur
Mr. BENSALOUA Cheniti	MCB. Univ de M'sila	Examineur

**Promotion : 2017 / 2018**

الاستقطاب أو الاستيفاء هو عملية حسابية لبناء منحنى من البيانات من عدد محدود من النقاط، أو وجدول من البيانات من عدد محدود من القيم. ويمكن تطبيقه في جميع مجالات الحياة.

في هذه المذكرة قمنا بتقديم صنفى الاستقطاب عام (شامل) و محلي بواسطة كثيرات حدود لاقرونج، نيوتن، ارميت و كثيرات حدود التلمة. وفي كل هذا استعملنا المثال المضاد لرانج وفي الأخير قمنا بمقارنة.

### Résumé

L'interpolation est un calcul pour construire une courbe de données à partir d'un nombre limité de points. Il peut être appliqué dans tous les domaines de la vie. Dans ce mémoire, on présente deux classes d'interpolation globale et locale, par les polynômes de Lagrange, Newton, Hermite et aussi les splines.

En fin on a donné une comparaison entre les différents polynômes d'interpolation, avec le contre-exemple de Runge.

**Mot clés:** Interpolation, Lagrange, Newton, Hermite, spline, Runge.

### Abstract

Interpolation is a method to construct a curve from a limit number of points, or a data table from a finite number of values. It can be applied in all areas of life. In this thesis, we present two classes global and local of interpolation, by the Lagrange, Newton, Hermite polynomials and also the spline.

Finally, we gave a comparison between the deferent polynomial interpolation, with the counter example of Runge.

**Keywords:** Interpolation, Lagrange, Newton, Hermite, spline, Runge.

# *Remerciements*

Avant tout je remercie Allah, le tout puissant d'avoir, éclairer notre vie, renforce notre courage et notre volenté pour un bon travail.

Je tiens à remercier particulièrement mon encadreur Monsieur. **LAKEHALI Belkacem**, pour tout son aide qu'il m'a apporté et sa grande patience son conseil pour avoir guider ce travail avec beaucoup d'importance.

Mes remerciements s'adressent à tous les enseignants du département des mathématiques pour leur dévouement et leurs générosités. Je tiens ici à exprimer mes sentiments respectueux à **mes chers parents** et à qui je dédie ce travail pour leur grand soutien.

Un grand merci à ma famille, à mes proches et à mes collègues pour leurs encouragements et pour leurs amitiés.

# Table des matières

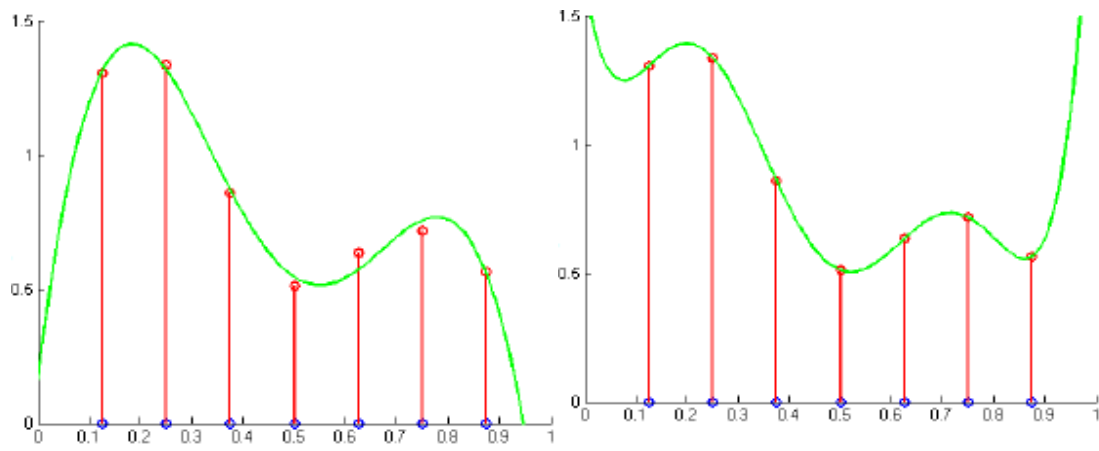
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Définition générale</b>	<b>3</b>
1.1 Interpolation polynômial . . . . .	4
1.2 Représentation des polynômes dans différentes bases . . . . .	4
1.3 Calcul du polynôme d'interpolation . . . . .	6
1.3.1 Matrice de Vandermonde . . . . .	7
<b>2 Interpolation globale</b>	<b>10</b>
2.1 Polynôme d'interpolation de Lagrange . . . . .	10
2.1.1 Erreur d'interpolation de lagrange . . . . .	13
2.1.2 Contre-exemple de Runge . . . . .	13
2.1.3 Limite de l'interpolation polynomiale . . . . .	15
2.2 Interpolation aux noeuds de Chebyshev . . . . .	15
2.3 Polynôme d'interpolation de Newton . . . . .	16
2.3.1 Erreur de l'interpolation de Newton . . . . .	21
2.4 Interpolation d'Hermite-Birkoff . . . . .	23
<b>3 Interpolation locale</b>	<b>26</b>
3.1 Spline linéaire . . . . .	27
3.2 Spline Quadratique . . . . .	29
3.3 Splines cubiques . . . . .	33
3.4 Comparaison . . . . .	37

<b>Conclusion</b>	<b>39</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>41</b>

# Introduction

En analyse numérique et dans son application algorithmique discrète pour le calcul numérique, l'interpolation est une opération mathématique permettant de construire une courbe à partir de la donnée d'un nombre fini de points, ou une fonction à partir de la donnée d'un nombre fini de valeurs. La solution du problème d'interpolation passe par les points prescrits, et, suivant le type d'interpolation, il lui est demandé de vérifier des propriétés supplémentaires. Ainsi le type le plus simple d'interpolation est l'interpolation linéaire, qui consiste à joindre les points donnés. À partir d'une table trigonométrique, elle peut servir à estimer les valeurs situées entre les données de la table. L'interpolation doit être distinguée de l'approximation de fonction, qui consiste à chercher la fonction la plus proche possible, selon certains critères, d'une fonction donnée. Dans le cas de l'approximation, il n'est en général plus imposé de passer exactement par les points donnés initialement. Ceci permet de mieux prendre en compte le cas des erreurs de mesure, et c'est ainsi que l'exploitation de données expérimentales pour la recherche de lois empiriques relève plus souvent de la régression linéaire, ou

plus généralement de la méthode des moindres carrés..



Approximation

Interpolation

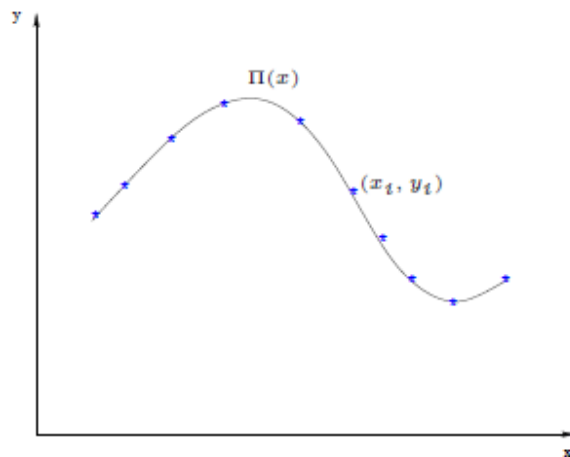
# Chapitre 1

## Définition générale

Par définition le mot " interpolation " signifie l'action d'intercaler dans une série de termes ou de valeurs connues. Le problème de l'interpolation polynomiale consiste à choisir comme fonction reconstruite une fonction polynomiale. C'est la méthode la plus ancienne, la plus élémentaire et encore la plus utile, mais il y en a d'autres heureusement qu'on ne va pas les voir.

On cherche une fonction  $\Pi(x)$  passant par tous les points donnés:

$$(x_0, y_0); (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$



Le fonction  $\Pi(x)$  passant par tous les points donnés  $(x_i, y_i)$

## 1.1 Interpolation polynômial

Soit  $F$  un ensemble de fonctions faciles à manipuler. On considère  $p(x) \in F$  tel que:

$$p(x_i) = y_i \text{ et } i = 1, \dots, k$$

On choisit  $F = P_n[x]$  (ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{R}$  et de degré  $\leq n$ ).

**Théorème 1.1.1** *Soit  $f$  une fonction continue sur intervalle  $[a, b]$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists p_n$  un polynôme (de degré suffisamment grand) tel que:*

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \varepsilon$$

**Preuve.** voir [4], p111 ■

**Remarque 1.1.1** *Pourquoi on choisit les polynômes ? Les polynômes sont très souvent utilisés pour l'interpolation en raison de leurs propriétés mathématiques simples. Il y a une théorie simple à propos d'un polynôme interpolant d'un degré donné existe pour un ensemble donné de points. Plus important, dans un sens réel, les polynômes sont les plus fondamentales des fonctions pour le numérique des ordinateurs. Les fonctions compliquées peuvent être approchées en interpolant des polynômes afin de les rendre calculables avec ces deux opérations matérielles, On utilise une fonction polynômiale c'elle est:*

1. Facile à manipuler(intégration et dérivation) et fonctions de classe  $C^\infty$ .
2. Comportement local de la fonction : les premiers termes du développement de Taylor forment un polynôme.
3. On peut appliquer théorème de Weierstrass.

## 1.2 Représentation des polynômes dans différentes bases

Il existe plusieurs bases dans lesquelles on peut représenter un polynôme voir [7].

### Base canonique

La base canonique d'un polynôme est de la forme:

$$\{1, x, \dots, x^n\}$$

### Base centrée

La base centrée d'un polynôme est :soit  $c \neq 0$

$$\{1, (x - c), \dots, (x - c)^n\}$$

On montre que  $\{1, (x - c), \dots, (x - c)^n\}$  est une base

1. Famille génératrice

$$p(x) = p(c) + p'(c)(x - c) + \dots + \frac{p^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + \frac{p^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - c)^{n+1}$$

Avec  $\xi \in ]c, x[$

2. Famille libre

$$a_0 + a_1(x - c) + \dots + a_n(x - c)^n = 0$$

Donc  $a_n = 0$  (coefficient de  $x_n$ )  $\Rightarrow a_n - 1 = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_0 = 0$

### Base de Newton

Soit  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, n$  points deux à deux distincts, la base associée aux abscisses  $x$  est donnée par :

$$\left\{ 1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \dots, \underbrace{\prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k)}_{\text{de degré } n} \right\}$$

1. Si  $x_0 = \dots = x_{n-1} = 0$ , on retrouve une base canonique.
2. Si  $x_0 = \dots = x_{n-1} = c$ , on retrouve une base centrée au point  $c$ .
3. Tout dépend de l'ordre des abscisses:  $n!$  permutations donnent  $n!$  bases de Newton.

### Base de lagrange

Soient  $(x_i)_{i=1}^{n+1}$ ,  $(n + 1)$  points deux a deux distincts. On appelle base de lagrange relative aux points  $x_i$  les polynômes

$$L_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

De cette définition, on déduit immédiatement :

$$L_i(x_j) = \delta_{i,j}$$

Et on a :  $L_i$  est un polynôme de degré  $n$ .

i)  $L_i(x_j) = 0$  si  $i \neq j$  et  $0 \leq j \leq n$

ii)  $L_i(x_i) = 1$ .

La famille  $L_i(x)$  forme une base de lagrange et le polynôme qui interpole les valeurs  $y_i$  aux points  $x_i$ .

## 1.3 Calcul du polynôme d'interpolation

Etant donné  $n$  couples  $(x_i, f(x_i))$ , il existe un seul polynôme interpolant d'ordre inférieur ou égal à  $n - 1$  passant par les  $n$  points:voir[3]

$$\forall i = 1, \dots, n. \quad p_{n-1}(x_i) = f(x_i)$$

Le polynôme d'interpolation peut donc s'écrire:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

Les coefficients  $a_i$  du polynôme interpolant sont solution du système linéaire de  $n$  equations:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_{n-1} x_1^{n-1} &= f(x_1) \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_{n-1} x_2^{n-1} &= f(x_2) \\ &\dots = \dots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_{n-1} x_n^{n-1} &= f(x_n) \end{aligned}$$

On peut écrire sous forme matricielle, on aura:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1^1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2^1 & \dots & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & x_n^1 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

### 1.3.1 Matrice de Vandermonde

En algèbre linéaire, une matrice de **Vandermonde** est une matrice avec une progression géométrique dans chaque ligne. Elle tient son nom du mathématicien français Alexandre-Théophile Vandermonde.

De façon matricielle, elle se présente ainsi :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1^1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2^1 & \dots & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & x_n^1 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice est connue:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j).$$

Comme  $x_i \neq x_j \forall i, j$  alors le déterminant de Vandermonde ne sera jamais nul. Ce qui prouve que pour faire passer un polynôme unique par  $n$  points distincts celui-ci doit être au plus de degré  $n$ . Alors le polynôme d'interpolation existe et unique ce qui prouve le théorème

de Weierstrass pour confirmer, ceci on pocède comme suit:  $f_0(x) = x^0$ , la 2<sup>eme</sup>  $f_1(x) = x^1$ ,  
 $f_2(x) = x^2, \dots, f_n(x) = x^n$

$$\begin{array}{c} f_0(x) \quad f_1(x) \dots f_n(x) \\ \hline \left( \begin{array}{cccc} 1 & x_1^1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2^1 & \dots & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & x_n^1 & \dots & x_n^{n-1} \end{array} \right) \end{array}$$

On représente cette suite des fonctions par le graphe (1.3.1).

**Remarque 1.3.1** dans la figure (1.3.1) on observe que lorsque  $n$  augmente les colonnes de la matrice de vandermonde sont presque égales. Par conséquent la matrice devient presque singulière, c'est à dire que le système n'est pas stable.

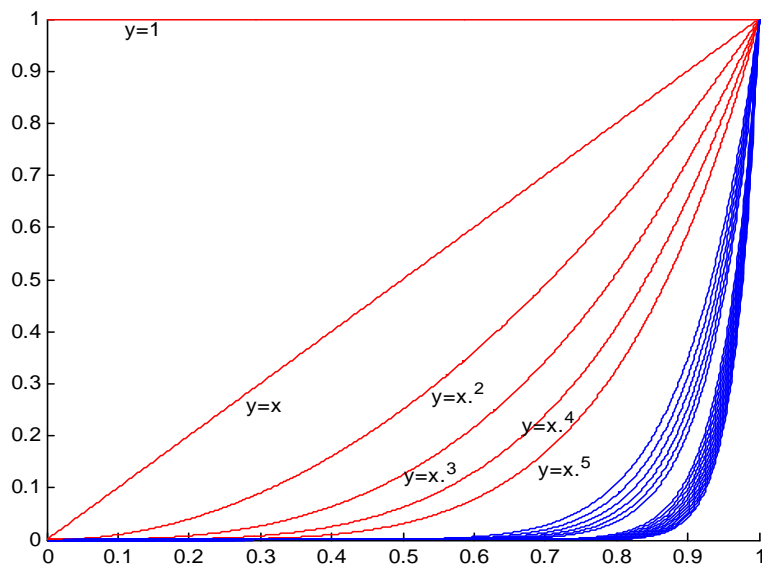


Figure 1.3.1 : Graphe de la suite  $f(x) = x^n$ ,  $n = 0, \dots, 20$

# Chapitre 2

## Interpolation globale

### 2.1 Polynôme d'interpolation de Lagrange

En analyse numérique, les polynômes de Lagrange, du nom de Joseph-Louis Lagrange, permettent d'interpoler une série de points par un polynôme qui passe exactement par ces points appelés aussi nœuds. Cette technique d'interpolation polynomiale a été découverte par Edward Waring en 1779 et redécouverte plus tard par Leonhard Euler en 1783.

Soit  $f$  une fonction continue à valeurs réelles dans  $[a, b]$  et soient  $x_0, \dots, x_n$ ,  $(n+1)$  points deux à deux distincts. On cherche alors un polynôme  $P$  de degré  $\leq n$  tel que

$$P(x_i) = f(x_i), \forall i = 0 \dots n.$$

On dit que  $P$  interpole  $f$  aux points  $x_0, \dots, x_n$

**Théorème 2.1.1** *Il existe un unique polynôme de degré  $n$  qui interpole  $f$  en les points  $x_0, \dots, x_n$  voir [1], p260*

**Preuve.** Soit  $p(x_i) = f(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  alors système linéaire est

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_1^n = f(x_1) \\ \dots \\ a_0 + a_1x_n + \dots + a_nx_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

d'inconnues  $a_0, a_1, \dots, a_n$ . Le déterminant du système est un déterminant de type Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \neq 0$$

Les  $x_i$  sont distincts donc il y a une unique solution. ■

Le polynôme d'interpolation de Lagrange d'ordre 1 est égal à :

$$p_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1)$$

Le polynôme d'interpolation de Lagrange d'ordre 2 est égal à

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) \\ &= \sum_{i=0}^2 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^2 \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} f(x_i) = \sum_{i=0}^2 L_i(x) f(x_i) \end{aligned}$$

En généralisant à l'ordre  $n$  le polynôme d'interpolation de Lagrange s'écrit :

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i)$$

Où les facteurs  $L_i(x)$  sont égales à :

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

On peut tracer les 3 polynômes caractéristiques de Lagrange dans la figure (2.1.1)

Le polynôme de Lagrange est déterminé en l'écrivant sous la forme :

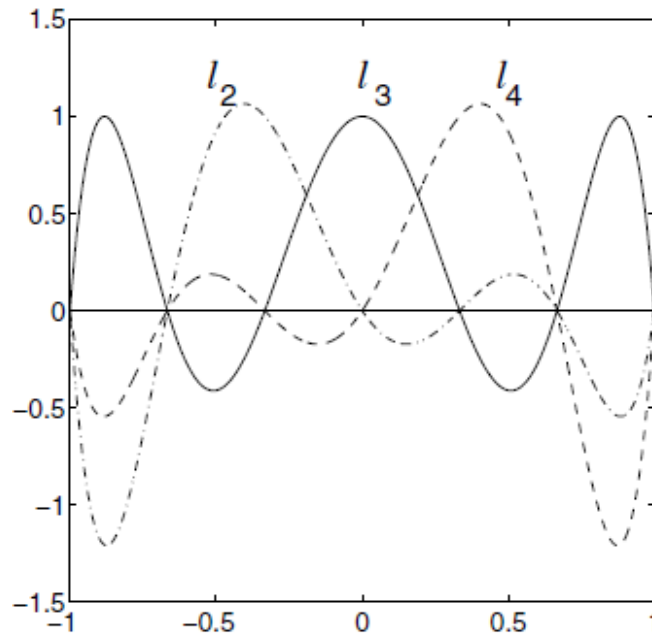


Figure 2.1.1 : Polyômes caractéristiques de Lagrange

$$\begin{aligned}
 p_n(x) &= a_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n) \\
 &+ a_1(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n) \\
 &+ \dots \\
 &+ a_i(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n) \\
 &+ \dots \\
 &+ a_n(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_{n-1})
 \end{aligned}$$

Où les  $a_i$  sont égales à:

$$a_i = \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}$$

Comme précédemment, la fonction  $f(x)$  est égale à:

$$f(x) = p_n(x) + E_n(x)$$

telle que  $E_n$  est l'erreur

### 2.1.1 Erreur d'interpolation de Lagrange

Dans cette section, nous évaluons l'erreur d'interpolation faite quand on remplace une fonction  $f$  donnée par le polynome  $P_n$  qui l'interpole aux noeuds  $x_0, x_1, \dots, x_n$

**Théorème 2.1.2** Soient  $x_0, x_1, \dots, x_n, n + 1$  noeuds distincts et soit  $x$  un point appartenant au domaine de définition de  $f$  On suppose que  $f \in C^{n+1}(I_x)$ , où  $I_x$  est le plus petit intervalle contenant les noeuds  $x_0, x_1, \dots, x_n$  et  $x$ . L'erreur d'interpolation au point  $x$  est donnée par:

$$E_n(x) = \left[ \prod_{i=0}^n (x - x_i) f[x, x_n, \dots, x_1, x_0] \right]$$

$$E_n(x) = \left[ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w_{n+1}(x) \right] \quad \xi \in I_x$$

$$w_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

**Preuve.** voir [1] ■

### 2.1.2 Contre-exemple de Runge

Supposons qu'on approche la fonction suivante:

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2} \quad , -1 \leq x \leq 1$$

En utilisant l'interpolation de Lagrange avec noeuds équirépartis. On peut vérifier qu'il existe des points  $x$  à l'intérieur de l'intervalle d'interpolation telle que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - p_n(x)| \neq 0$$

En particulier, l'interpolation de Lagrange diverge ce phénomène est particulièrement évident au voisinage des extrémités de l'intervalle d'interpolation comme le montrent les figures (2.1.2) et (2.1.3).

**Remarque 2.1.1** le contre exemple de Runge, nous montre que si  $n$  augmente, l'erreur de la méthode de Lagrange, sera très grande.

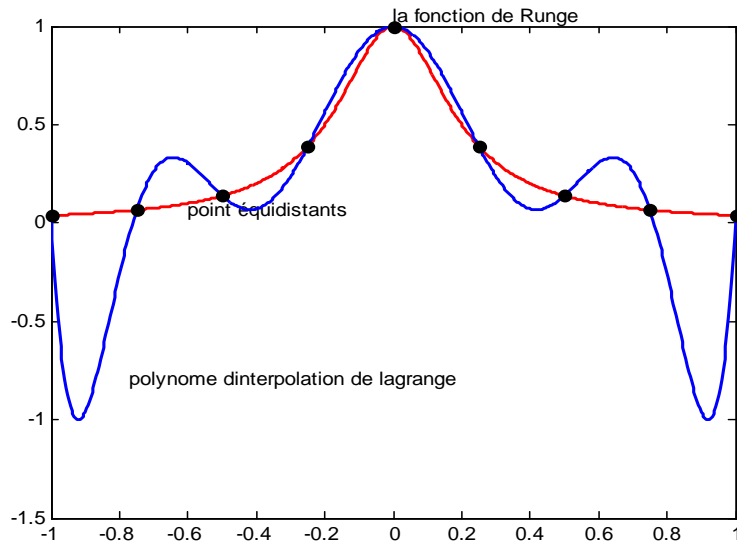


Figure 2.1.2 : Comparision entre la fonction de Runge et l'interpolation de lagrange pour  $n = 8$

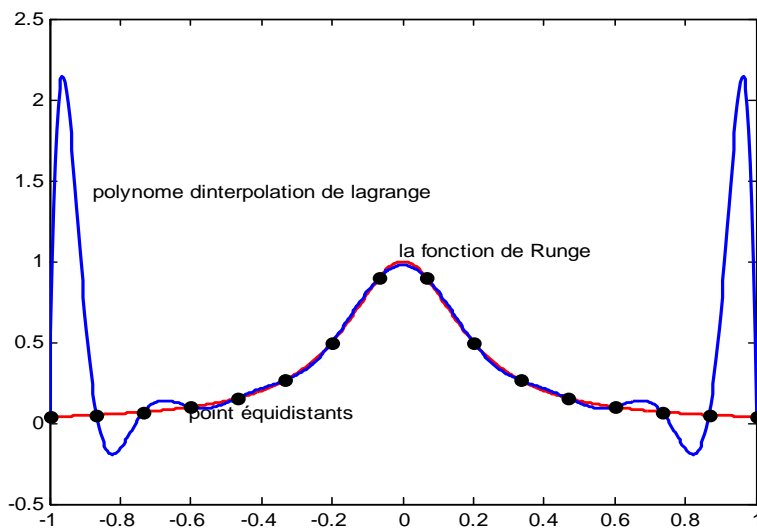


Figure 2.1.3 : Comparision entre la fonction de Runge et l'interpolation de lagrange pour  $n = 15$

Comme nous l'avons vu, les exemples du phénomène de Runge ont généralement de grandes erreurs près de l'extérieur de l'intervalle des points de données. Le remède à ce problème est intuitif, c'est de faire concentrer les noeuds d'interpolation aux extrémités de l'intervalle. Les noeuds de Chebyshev sont les plus favorables à ce phénomène. Nous verrons comment accomplir cela dans la section suivante sur l'interpolation de Chebyshev.

### 2.1.3 Limite de l'interpolation polynomiale

L'interpolation polynomiale est la base de nombreuses techniques numériques, en particulier les techniques d'intégration approchée. Elle se généralise de façon naturelle aux cas de dimension  $n \geq 2$ . Cependant elle a des limites :

- **Théoriquement:** On n'est pas assurée de la convergence du polynôme d'interpolation vers la fonction interpolée lorsque l'on fait tendre le nombre de points d'interpolation (et donc le degré du polynôme) vers l'infini (voir le phénomène de Runge).
- **Numériquement:** Même dans le cas où la convergence théorique est assurée, l'instabilité du calcul provenant de l'accumulation des erreurs d'arrondis, auxquelles le procédé d'interpolation polynomiale est particulièrement sensible, limite l'usage de cette technique dû aux nombres de points d'interpolation .
- **pratiquement:** Remarquons que dans de nombreux cas, les valeurs données résultent d'expériences ou de calculs préalables. Ces valeurs sont donc approximatives. Le problème réel n'est alors plus un problème d'interpolation.

## 2.2 Interpolation aux noeuds de Chebyshev

On peut éviter le phénomène de Runge en choisissant correctement la distribution des noeuds d'interpolation. Sur un intervalle  $[a, b]$ , on peut

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \hat{x}_i \text{ où}$$

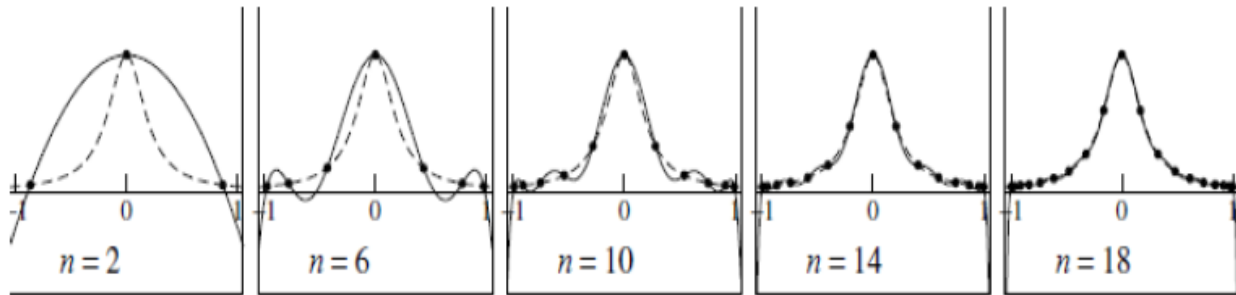
$$\hat{x}_i = -\cos(\pi i/n), \quad i = 0, \dots, n$$

On a bien sûr  $x_i = \hat{x}_i, i = 0, \dots, n$ , quand  $[a, b] = [-1, 1]$ . Pour cette distribution particulière des noeuds, il est possible de montrer que si  $f$  est dérivable sur  $[a, b]$ , alors  $P_n$  converge vers  $f$  quand  $n \rightarrow \infty$  pour tout  $x \in [a, b]$ . Les noeuds de Chebyshev-Gauss-Lobatto, qui sont les abscisses des noeuds équirépartis sur le demi-cercle unité, se trouvent à l'intérieur de  $[a, b]$  et sont regroupés près des extrémités de l'intervalle.

Une autre distribution non uniforme dans l'intervalle  $]a, b[$ , possédant les mêmes propriétés de convergence que les noeuds de Chebyshev-Gauss-Lobatto, est définie par les noeuds de Chebyshev-Gauss

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{n+1} \frac{\pi}{2}\right), \quad i = 0, \dots, n$$

**Exemple 2.2.1** Considérons la fonction  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  sur l'intervalle  $[-1, 1]$  voir figure (2.1.2). Dans les figures suivante, on compare le polynôme d'interpolation basé sur des points équidistants avec celui basé sur les points de Chebyshev, On observe une nette amélioration.



Interpolation avec des points équidistants contre exemple de Range (à gauche) et les points de Chebyshev (à droite)

## 2.3 Polynôme d'interpolation de Newton

Dans l'interpolation de Lagrange si on ajoute un noeud on doit refaire tout le calcul mais dans la méthode de Newton on dépasse cet inconvénient. La forme de Lagrange du polynome d'interpolation n'est pas la plus commode d'un point de vue pratique. Nous introduisons dans cette section une forme alternative dont le coût de calcul est moins élevé. Notre but est le suivant :

étant donné  $n + 1$  point  $\{x_i, y_i\}$ ,  $i = 0, \dots, n$ , on peut représenter  $P_n$  tel que

$$p(x_i) = y_i \text{ pour } i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.3.1)$$

$$p(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots \quad (2.3.2)$$

- Cas  $n = 1$  Le polynôme de degré 1 (une droite) qui passe par  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  est donné par

$$p(x) = y_0 + (x - x_0) \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad (2.3.3)$$

- Cas  $n = 2$  Pour obtenir un polynôme de degré 2 (une parabole) qui passe par les trois points  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  on ajoute un terme de correction (de degré 2) à la formule. Comme ce terme doit être nul aux points  $x_0$  et  $x_1$ , on a nécessairement

$$p(x) = y_0 + (x - x_0) \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + a(x - x_0)(x - x_1) \quad (2.3.4)$$

Le coefficient  $a$  est déterminé par  $p(x_2) = y_2$ . Un calcul simple (soustraire  $p(x_1)$  de  $p(x_2)$  et diviser par  $(x_2 - x_0)(x_1 - x_1)$ ) nous donne

$$a = \frac{1}{x_2 - x_0} \left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right) \quad (2.3.5)$$

Un exemple pour, le cas  $n = 5$  avec des  $x_i$  non équidistants est donné. Pour les cas  $n > 2$  les formules deviennent plus complexes et il est recommandé d'introduire une notation convenable pour simplifier les expressions

**Définition 2.3.1** (*différences divisées*) D'après la définition de la dérivée d'une fonction continue  $f(x)$  :

$$\left[ \frac{df(x)}{dx} \right]_{x_0} = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

on pourra définir la différence divisée d'ordre 1 :

$$f[x, x_0] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

on sait d'après le théorème de valeur moyenne que :  $\forall f(x)$  continue sur  $a \leq x \leq b$  et dérivable sur  $a \leq x \leq b$ ,  $\exists \xi \in [a, b]$  tel que

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

On en déduit que la première différence divisée d'ordre 1:

$$f[x, x_0] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi) \quad \xi \in [x, x_0]$$

le concept de différence divisée se généralise Pour  $(x_i, y_i)$  donnés ( $x_i$  distincts) on définit

ordre	différences divisées	formule
0	$f[x_0]$	$f(x_0)$
1	$f[x_1, x_0]$	$\frac{f(x_1) - f[x_0]}{x_1 - x_0}$
2	$f[x_2, x_1, x_0]$	$\frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}$
n	$f[x_n, \dots, x_1, x_0]$	$\frac{f[x_n, \dots, x_2, x_1] - f[x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]}{x_n - x_0}$

on déduit que la différence divisée d'ordre n est égale à:

$$f[x_n, \dots, x_1, x_0] = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}$$

**Théorème 2.3.1 (formule de Newton)** Le polynôme d'interpolation de degré n qui passe par les n + 1 points  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , ou les  $x_i$  sont distincts, est unique et donné par

$$P(x) = f[x_0] + (x - x_0) f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_2, x_1, x_0] + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0] \quad (2.3.6)$$

$$= f[x_0] + \sum_{i=1}^n f[x_0, \dots, x_i] (x - x_0) \dots (x - x_{i-1}). \quad (2.3.7)$$

**Preuve.** Pour  $n = 1$  et  $n = 2$  la formule (2.3.6) est équivalente à (2.3.3), (2.3.4), (2.3.5) pour démontrer le cas général, nous procédons par récurrence. Supposons que

$$p_1(x) = f[x_0] + (x - x_0) f[x_1, x_0] + \dots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-2}) f[x_{n-1}, \dots, x_0]$$

soit le polynôme unique de degré  $n - 1$  qui passe par  $(x_i, y_i)$  pour  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ . Alors, comme (2.3.4), polynôme  $p(x)$  a nécessairement la forme:

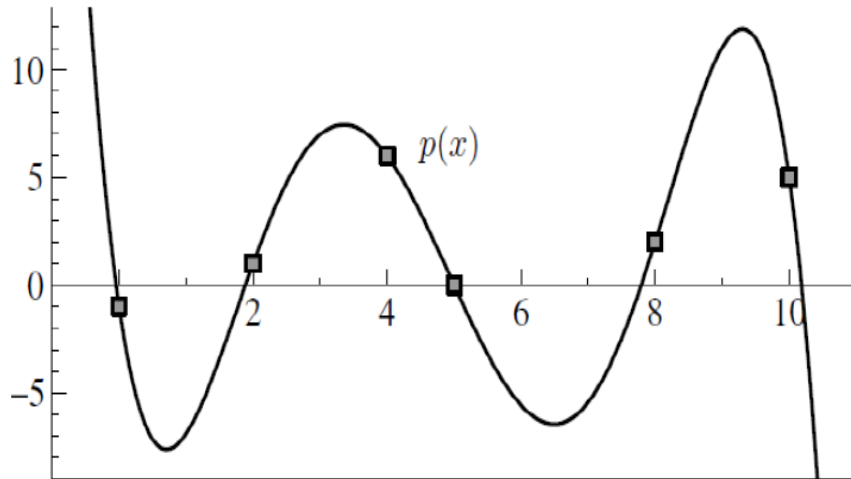


Figure 2.3.1 : Polynôme d'interpolation de degré 5

$$p(x) = p_1(x) + a \cdot (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \quad (2.3.8)$$

où  $a$  est déterminé par  $p(x_n) = y_n$

Pour montrer que  $a = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ , ce qui achève la démonstration, nous considérons également le polynôme de degré  $n - 1$

$$p_2(x) = f[x_1] + (x - x_1)f[x_1, x_2] + \dots + (x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})f[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

qui passe par  $(x_i, y_i)$  pour  $i = 1, \dots, n$ . En suite on pose d'après (Aitken - Neville, 1929-1932 )

$$q(x) = \frac{1}{x_n - x_0} ((x_n - x)p_1(x) + (x - x_0)p_2(x)) \quad (2.3.9)$$

Il s'agit d'un polynôme de degré  $n$ , qui satisfait la condition (2.3.2) pour le point  $x_0$  (ici, le facteur  $(x - x_0)$  est nul), pour le point  $x_n$  (ici, le facteur  $(x_n - x)$  est nul), et pour les points  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  (ici, les deux polynômes  $p_1(x)$  et  $p_2(x)$  sont égaux à  $y_i$ ). Pour l'unicité du polynôme d'interpolation on a alors  $q(x) = p(x)$ . En comparant le coefficient de  $x^n$  dans (2.3.9) avec celui de (2.3.8), nous obtenons

$$a = \frac{1}{x_n - x_0} (f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]) = f[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

ce qui démontre la formule (2.3.6) ■

Pour les données de la figure (2.3.1), les différences divisées sont présentées dans le tableau

$x_i$	$y_i$	$\delta y$	$\delta^2 y$	$\delta^3 y$	$\delta^4 y$	$\delta^5 y$
0	-1					
		1				
2	1		3/8			
		5/2		-77/120		
4	6		-17/6		167/960	
		-6		3/4		-287/9600
5	0		5/3		-1/8	
		2/3		-1/4		
8	2		1/6			
		3/2				
10	5					

(2.3.10)

Le polynôme d'interpolation est alors donné par

$$\begin{aligned}
 p(x) = & -1 + x + x(x-2)\frac{3}{8} - x(x-2)(x-4)\frac{77}{120} \\
 & + x(x-2)(x-4)(x-5)\frac{167}{960} - x(x-2)(x-4)(x-5)(x-8)\frac{257}{9600}
 \end{aligned}$$

Ou mieux encore pour la programmation (ou le calcul a la main)

$$p(x) = -1 + x(1 + (x-2)(\frac{3}{8} + (x-4)(-\frac{77}{120} + (x-5)(\frac{167}{960} - (x-8)\frac{257}{9600}))))$$

**Remarque 2.3.1** L'ordre des  $\{x_i\}$  n'a aucun importance pour la formule de Newton (2.3.6) si l'on permute les données  $(x_i, y_i)$ , on obtient évidemment le même polynôme. Pour l'exemple ci-dessus et pour les  $\{x_i\}$  choisis dans l'ordre  $\{4, 5, 2, 8, 0, 10\}$ , on obtient ainsi

$$p(x) = 6 + (x-4)(-6 + (x-5)(-\frac{17}{6} + (x-2)(\frac{3}{4} - (x-8)(\frac{167}{960} - x\frac{257}{9600}))))$$

En observant que  $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$  est une fonction symétrique de ses arguments (par exemple,  $f[x_2, x_3, x_1] = f[x_1, x_2, x_3]$ ), on peut utiliser les valeurs calculées dans le tableau. Pour

diminuer l'influence des erreurs d'arrondi, il est recommandé d'ordonner les  $\{x_i\}$  de manière à ce que les valeurs situées au milieu soient prises d'abord et les valeurs aux extrémités à la fin pour ce choix, les expressions  $(x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots$ , sont en générale plus petites que pour un autre choix et l'amplification des erreurs dans les différences divisées est moins importante

### 2.3.1 Erreur de l'interpolation de Newton

Supposons que les points  $(x_i, y_i)$  soient sur le graphe d'une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  c-à-d.,

$$y_i = f(x_i) \quad , i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.3.11)$$

étudions alors l'erreur  $|f(x) - p(x)|$  du polynôme d'interpolation  $p(x)$ . Deux exemples sont données dans la figure suivante. A gauche, on voit un polynôme d'interpolation pour la fonction  $f(x) = \sin x$ , et à droite pour la fonction  $1/(1 + x^2)$ . Pour mieux rendre visible l'erreur, voir la figure (2.3.2).

Les résultats suivants sont dûs à Cauchy. Commençons par une relation intéressante entre les différences divisées pour (2.3.11) et les dérivées de la fonction  $f(x)$ .

**Lemme 2.3.1** *Soit  $f(x)$   $n$  fois différentiable et  $y_i = f(x_i)$  pour  $i = 0, 1, \dots, n$  ( $x_i$  distincts). Alors, il existe un  $\xi \in (\min x_i, \max x_i)$  tel que*

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

**Preuve.** Soit  $p(x)$  le polynôme d'interpolation de degré  $n$  passant par  $(x_i, y_i)$  et notons  $d(x) = f(x) - p(x)$ . Par définition de  $p(x)$ , la différence  $d(x)$  s'annule en  $n + 1$  points distincts

$$d(x_i) = 0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, n.$$

Comme  $d(x)$  est différentiable, on peut appliquer  $n$  fois le théorème de Rolle (voir le cours d'Analyse I) et on en déduit que

$$d^{(1)}(x) \quad \text{a } n \text{ zéros distincts dans } (\min x_i, \max x_i)$$

Le meme argument appliqué à  $d'(x)$  donne

$$d^{(2)}(x) \quad a \quad n - 1 \text{ zéros distincts dans } (\min x_i, \max x_i)$$

et finalement encore

$$d^{(n)}(x) \quad a \quad 1 \text{ zéros distincts dans } (\min x_i, \max x_i)$$

Notons ce zéro de  $d^{(n)}(x)$  par  $\xi$ . Alors, on a

$$f^{(n)}(\xi) = P^{(n)}(\xi) = n! \cdot f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

La deuxième identité dans la dernière équation résulte du fait que  $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$  est le coefficient de  $x^n$  dans  $P(x)$ . ■

**Théorème 2.3.2** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}(n + 1)$  — fois différentiable et soit  $p(x)$  le polynome d'interpolation de degré  $n$  qui passe par  $(x_i, f(x_i))$  pour  $i = 0, 1, \dots, n$ . Alors, pour  $x \in [a, b]$ , il existe un  $\xi \in (\min(x_i, x), \max(x_i, x))$  tel que

$$f(x) - p(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}.$$

**Preuve.** Si  $x = x_i$  pour un indice  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , la dernière formule est vérifiée car  $P(x_i) = f(x_i)$ . Fixons alors un  $\bar{x}$  dans  $[a, b]$  qui soit différent de  $x_i$  et montrons cette formule pour  $x = \bar{x}$ . L'idée est de considérer le polynome  $\bar{p}(x)$  de degré  $n + 1$  qui passe par  $(x_i, f(x_i))$  pour  $i = 0, 1, \dots, n$  et par  $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ . La formule de Newton donne

$$\bar{p}(x) = p(x) + (x - x_0) \cdots (x - x_n) f[x_0, \dots, x_n, \bar{x}].$$

Si l'on remplace la différence divisée dans cette formule par  $f^{(n+1)}(\xi)/(n + 1)!$  (voir le lemme précédent) et si l'on pose  $x = \bar{x}$ , on obtient le résultat (2.4) pour  $x = \bar{x}$  car  $\bar{p}(\bar{x}) = f(\bar{x})$ . Comme  $\bar{x}$  est arbitraire, la formule est vérifiée pour  $x$ . ■

**Exemple 2.3.1** Dans la situation de la figure (2.3.2,) on a  $n + 1 = 7$ . Comme la 7<sup>ème</sup> d'érivée de  $\sin x$  est bornée par 1, on a que

$$|P(x) - \sin x| \leq |x(x - 1.5)(x - 3)(x - 4.5)(x - 6)(x - 7.5)(x - 9)| \cdot \frac{1}{7!}.$$

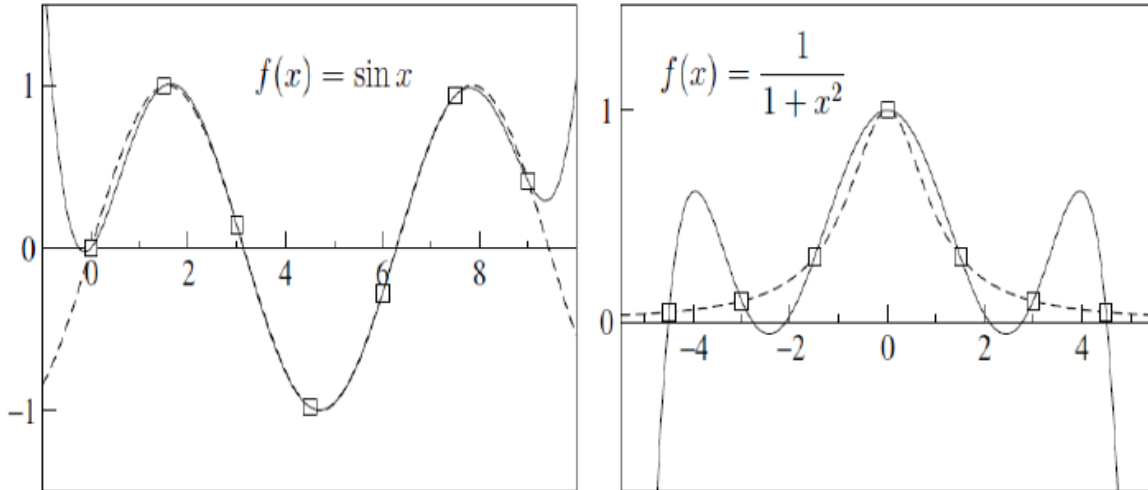


Figure 2.3.2 : Polynôme d'interpolation de Newton pour  $\sin(x)$  à (gauche) et pour  $\frac{1}{1+25x^2}$  à (droite)

Par exemple

$$|P(4) - \sin 4| \leq 0.035 \quad \text{ou} \quad |P(1) - \sin 1| \leq 0.181$$

Pour le deuxième exemple,  $f(x) = 1/(1+x^2)$ , la 7<sup>ème</sup> dérivée est donnée par

$$f^{(7)}(x) = -8! \cdot \frac{(x+1)(x-1)x(x^2-2x-1)(x^2+2x-1)}{(1+x^2)^8}$$

qui est maximale pour  $x \approx \pm 0.17632698$ . On obtient ainsi

$$\left| p(x) - \frac{1}{1+x^2} \right| \leq |(x^2 - 20.25)(x^2 - 9)(x^2 - 2.25)x| \cdot \frac{4392}{7!}.$$

Alors, l'erreur peut être plus grande que pour l'interpolation de  $\sin x$ . donc l'interpolation de Newton n'est pas valide pour  $n$  grand.

## 2.4 Interpolation d'Hermite-Birkoff

On peut généraliser l'interpolation de Lagrange d'une fonction  $f$  pour prendre en compte, en plus de ses valeurs nodales, les valeurs de ses dérivées en certains noeuds (ou en tous les noeuds).

On se donne  $(x_i, f^{(k)}(x_i))$ , pour  $i = 0, \dots, n, k = 0, \dots, m_i$  où  $m_i \in \mathbb{N}$ . En posant  $N = \sum_{i=0}^n (m_i + 1)$ , on peut montrer que si les noeuds  $\{x_i\}$  sont distincts, il existe un unique polynôme  $H_{N-1} \in P_{N-1}$ , appelé polynôme d'interpolation d'Hermite, tel que:

$$H_{N-1}^{(k)}(x_i) = y_i^{(k)}, i = 0, \dots, n, k = 0, \dots, m_i$$

Ce polynôme s'écrit

$$H_{N-1}(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{m_i} y_i^{(k)} L_{ik}(x)$$

ou  $y_i^{(k)} = f^{(k)}(x_i), i = 0, \dots, n, k = 0, \dots, m_i$ . Les fonctions  $L_{ik} \in P_{N-1}$  sont appelées *polynomes caractéristiques d'Hermite* et sont définies par les relations

$$\frac{d^p}{dx^p}(L_{ik})(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ et } k = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En définissant les polynômes

$$l_{ij}(x) = \frac{(x - x_i)^j}{j!} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \left( \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right)^{m_k+1}, i = 0, \dots, n, k = 0, \dots, m_i$$

et en posant  $L_{im_i}(x) = l_{im_i}(x)$  pour  $i = 0, \dots, n$ , on a les relations de récurrence suivantes pour les polynomes  $L_{ij}$  :

$$L_{ij}(x) = l_{ij}(x) - \sum_{k=j+1}^{m_i} l_{ij}^{(k)}(x_i) L_{ik}(x) \quad j = m_i - 1, m_i - 2, \dots, 0$$

Concernant l'erreur d'interpolation, on a l'estimation

$$f(x) - H_{N-1}(x) = \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!} \Omega_N(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

où  $\xi \in I(x, x_0, \dots, x_n)$  et  $\Omega_N$  est le polynôme de degré  $N$  défini par

$$\Omega_N(x) = (x - x_0)^{m_0+1} (x - x_1)^{m_1+1} \dots (x - x_n)^{m_n+1}.$$

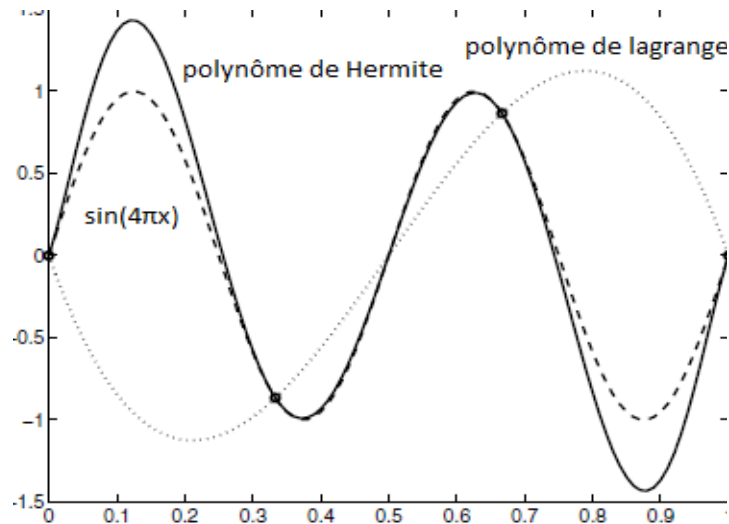


Figure 2.4.1 : Interpolation de Lagrange et d'Hermite de la fonction  $f(x) = \sin(4\pi x)$  sur  $[0, 1]$

**Exemple 2.4.1** (*polynôme d'interpolation osculateur*)

Posons  $m_i = 1$  pour  $i = 0, \dots, n$ . Dans ce cas  $N = 2n + 2$  et le polynôme d'Hermite est appelé polynôme osculateur. Il est donné par

$$H_{N-1}(x) = \sum_{i=0}^n (y_i A_i(x) + y_i^{(1)} B_i(x))$$

où  $A_i(x) = (1 - 2(x - x_i)l'_i(x_i))l_i(x)^2$  et  $B_i(x) = (x - x_i)l_i(x)^2$ , pour  $i = 0, \dots, n$ .

Remarquer que

$$l'_i(x_i) = \sum_{k=0, k \neq i}^n \frac{1}{(x_i - x_k)}, \quad i = 0, \dots, n.$$

A titre de comparaison, on représente les polynômes d'interpolation de Lagrange et d'Hermite de la fonction  $f(x) = \sin(4\pi x)$  sur l'intervalle  $[0; 1]$  en prenant quatre noeuds équirépartis ( $n = 3$ ) sur le graphe.(2.4.1)

# Chapitre 3

## Interpolation locale

L'interpolation à plusieurs inconvénients comme on a vu au chapitre précédent. Alors on a besoin d'autres méthodes qui sont appelées méthodes d'interpolation locale

**Définition 3.0.1** Soient  $x_0, \dots, x_n, n + 1$  noeuds distincts de  $[a, b]$ , avec  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . La fonction  $s_k(x)$  sur l'intervalle  $[a, b]$  est une spline de degré  $k$  relative aux noeuds  $x_j$  si

$$s_k(x) : [x_j, x_{j+1}] \rightarrow \mathbb{R}, \quad j = 0, 1, \dots, n - 1,$$

$$s_k \in C_{k-1}[a, b].$$

Si  $S_k$  désigne l'espace des splines  $s_k$  définies sur  $[a, b]$  et relatives à  $n + 1$  noeuds distincts, alors  $\dim S_k = n + k$ . Evidemment, tout polynôme de degré  $k$  sur  $[a, b]$  est une spline, mais en pratique, une spline est constituée de polynômes différents sur chaque sous-intervalle. Il peut donc y avoir des discontinuités de la dérivée  $k$ -ième aux noeuds internes  $x_1, \dots, x_{n-1}$ . Les noeuds où se produisent ces discontinuités sont appelés *noeuds actifs*.

On vérifie facilement que les conditions précédentes ne sont pas suffisantes pour caractériser une spline de degré  $k$ . En effet, la restriction  $S_{k,j} = S_{k|[x_j, x_{j+1}]}$  peut être écrite sous la forme

$$s_{k,j}(x) = \sum_{i=0}^k s_{i,j}(x - x_j)^i \quad \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}]$$

on doit donc déterminer les  $(k + 1)n$  coefficients  $s_{ij}$ . D'autre part, on a  $s_k \in C_{k-1}[a, b]$ .

$$s_{k,j-1}^{(m)}(x_j) = s_{k,j}^{(m)}(x_j), \quad j = 1, \dots, n - 1, m = 0, \dots, k - 1,$$

### 3.1 Spline linéaire

Etant donné un ensemble des points:  $(x_i, y_i) \quad i = 0, \dots, n$  avec

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

et soit

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

en plus, soit  $s_i(x)$  le spline de degré 1 défini sur l'intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $s_i(x)$  est linéaire qui passe par les points  $(x_{i-1}; y_{i-1})$  et  $(x_i; y_i)$  tels que

$$s_i(x) = y_{i-1} + m_i(x - x_{i-1}) \tag{3.1.1}$$

avec

$$m_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

**Remarque 3.1.1** En substituant  $i = 1, \dots, n$ , successivement dans l'équation (3.1.1) on obtient des différents splines de degré 1, sur chaque sous-intervalles  $[x_{i-1}, x_i]$  et  $i = 1, \dots, n$ .

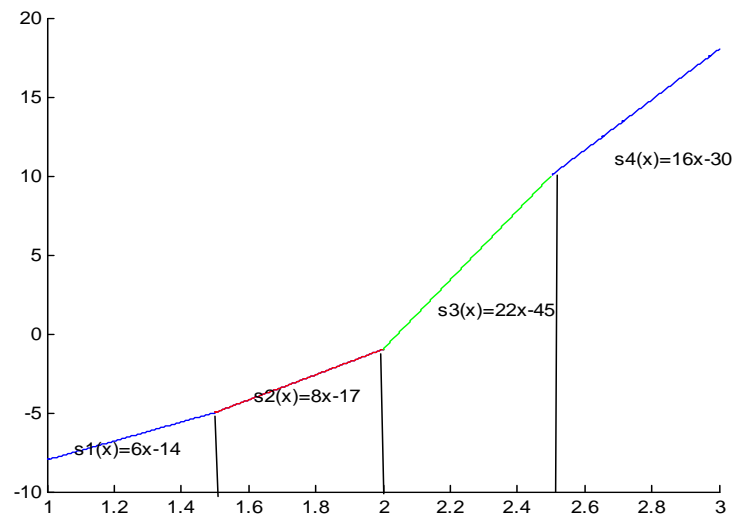
**Exemple 3.1.1** compte tenu de l'ensemble des points de données  $(1, -8), (1.5, -5), (2, -1), (2.5, 10)$  et  $(3, 18)$  satisfaisant la fonction  $y = f(x)$ . On cherche les splines linéaires qui passent par les points  $A(1, -8), (1.5, -5), C(2, -1), D(2.5, 10)$  et  $E(3, 18)$

l'équation de  $AB$  est

$$s_1(x) = -8 + 6(x - 1) = 6x - 14$$

l'équation de  $BC$  est

$$s_2(x) = -5 + (x - 1.5)8 = 8x - 17$$

Figure 3.1.1 : Graphe de les splines linéaire tels que  $n = 4$ 

l'équation de  $CD$  est

$$s_3(x) = -1 + (x - 2)22 = 22x - 45$$

l'équation de  $DE$  est

$$s_4(x) = 10 + (x - 2.5)16 = 10x - 30$$

donc

$$f(x) = \begin{cases} s_1(x) = 6x - 14 & \text{si } x \in [1, 1.5] \\ s_2(x) = 8x - 17 & \text{si } x \in [1.5, 2] \\ s_3(x) = 22x - 45 & \text{si } x \in [2, 2.5] \\ s_4(x) = 10x - 30 & \text{si } x \in [2.5, 3] \end{cases}$$

on peut représenter cette fonction par le graphe (3.1.1).

Il est facile de vérifier que les splines  $s_i(x)$  sont continues sur l'intervalle  $[1, 3]$  mais leurs pentes sont discontinues c'est clairement un retrait des splines linéaires et par conséquent nous discutons ensuite des splines quadratiques qui supposent la continuité des pentes en plus de celle de la fonction

## 3.2 Spline Quadratique

**Définition 3.2.1** une spline quadratique est un polynôme de degré  $\leq 2$ , Soit  $s_i(x)$  une spline quadratique approche la fonction  $y = f(x)$  dans l'intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$ , on a  $h_i = x_i - x_{i-1}$ . On a  $s_i(x)$  est continue sur  $[a, b]$  est :

$$s_i(x) = y_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Où  $s_i(x)$  est une fonction quadratique sur l'intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$ , et  $s'_i(x)$  est une fonction linéaire qui peut être écrite sous la forme:

$$s'_i(x) = \frac{1}{h_i} [(x_i - x) m_{i-1} + (x - x_{i-1}) m_i] \quad i = 1, \dots, n \quad (3.2.1)$$

tels que

$$m_i = s'_i(x_i)$$

En intégrant l'équation (3.2.1) terme à terme on obtient

$$s_i(x) = \frac{1}{h_i} \left[ -\frac{(x_i - x)^2}{2} m_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^2}{2} m_i \right] + c_i \quad (3.2.2)$$

$c_i$  est une constante. Pour déterminer  $c_i$  on pose  $x = x_{i-1}$  dans l'équation (3.2.2)

$$c_i = y_{i-1} + \frac{1}{h_i} \frac{h_i^2}{2} m_{i-1} = y_{i-1} + \frac{h_i}{2} m_{i-1}$$

donc l'équation (3.2.2) devient

$$s_i(x) = \frac{1}{h_i} \left[ -\frac{(x_i - x)^2}{2} m_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^2}{2} m_i \right] + y_{i-1} + \frac{h_i}{2} m_{i-1} \quad (3.2.3)$$

dans l'équation (3.2.3) les  $m_i$  sont encore inconnus, pour déterminer les  $m_i$  on utilise la condition de continuité de la fonction  $s_i(x)$  puisque les dérivées premières sont toujours continues, pour la continuité de la fonction  $s_i(x)$  à  $x = x_i$ , on doit avoir

$$s_i(x_i^-) = s_i(x_i^+)$$

de l'équation (3.2.3) nous obtenons

$$\begin{aligned} s_i(x_i^-) &= \frac{h_i}{2} m_i + y_{i-1} + \frac{h_i}{2} m_{i-1} \\ &= \frac{h_i}{2} (m_{i-1} + m_i) + y_{i-1} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

en plus

$$s_{i+1}(x) = \frac{1}{h_{i+1}} \left[ -\frac{(x_{i+1} - x)^2}{2} m_i + \frac{(x - x_i)^2}{2} m_{i+1} \right] + y_i + \frac{h_{i+1}}{2} m_i$$

donc

$$s_{i+1}(x_i^+) = -\frac{h_{i+1}}{2} m_i + y_i + \frac{h_{i+1}}{2} m_i = y_i \quad (3.2.5)$$

le formules (3.2.4) et (3.2.5) donne la relation de récurrence

$$m_{i-1} + m_i = \frac{2}{h_i} (y_i - y_{i-1}) \quad (3.2.6)$$

pour les splines les premières dérivées  $m_i$ , l'équation (3.2.6) constituent  $n$  équation avec  $(n + 1)$  inconnues, à savoir,  $m_0, m_1, \dots, m_n$ . Comme nous avons besoin d'une condition supplémentaire pour déterminer les  $m_i$ , de manière unique. Il existe plusieurs façons de choisir cette condition. La façon la plus naturelle est de choisir

$$s_i''(x) = 0, \quad \text{tq } x = 0, x = b.$$

Cette spline est appelée spline naturelle .

En dérivant la formule (3.2.3) deux fois par rapport à  $x$ , nous obtenons

$$s_i''(x) = \frac{1}{h_i} (-m_{i-1} + m_i)$$

où

$$s_1''(x_1) = \frac{1}{h_1} (m_1 - m_0)$$

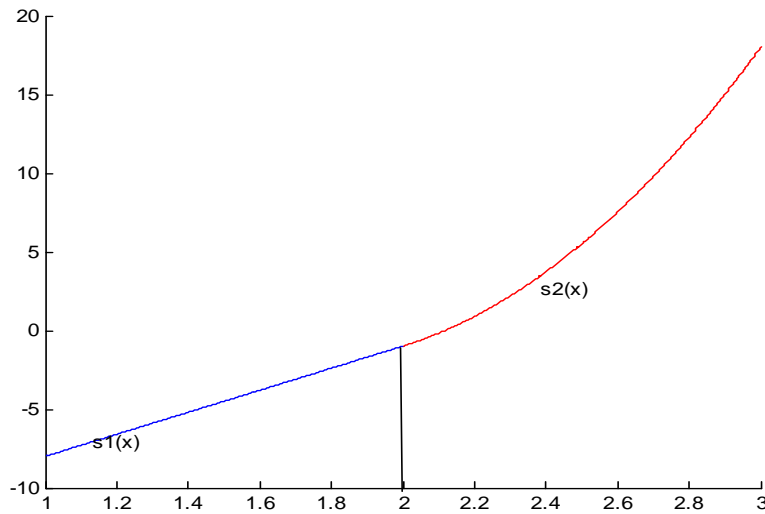
Par conséquent, nous avons la condition supplémentaire

$$m_1 = m_0 \quad (3.2.7)$$

Donc (3.2.7) et (3.2.6) peuvent être résolus pour  $m_i$ , qui ensuite substitué en (3.2.3) donne la spline quadratique requise.

**Exemple 3.2.1** on cherche les splines quadratiques satisfaisant les données données:

$$\{(1, -8), (2, -1), (3, 18)\}$$

Figure 3.2.1 : Graphe de les splines quadratique tels que  $n = 2$ 

on a  $n = 2$  et  $h = 1$  Equation (3.2.3) donne

$$m_1 + m_0 = 14 \quad \text{et} \quad m_1 + m_2 = 38$$

depuis  $m_1 = m_0$  on obtient  $m_1 = m_0 = 7$  and  $m_2 = 31$ . donc l'equation (3.2.3) donne:

$$\begin{aligned} s_1(x) &= -\frac{(x_1 - x)^2}{2}(7) + \frac{(x - x_0)^2}{2}(7) - 8 + \frac{7}{2} \\ &= -\frac{(2 - x)^2}{2}(7) + \frac{(x - 1)^2}{2}(7) - 8 + \frac{7}{2} \\ &= 7x - 15 \end{aligned}$$

qui est la spline dans l'intervalle  $[1, 2]$  et

$$\begin{aligned} s_2(x) &= -\frac{(x_2 - x)^2}{2}(7) + \frac{(x - x_1)^2}{2}(31) - 1 + \frac{7}{2} \\ &= -\frac{(3 - x)^2}{2}(7) + \frac{(x - 2)^2}{2}(31) - 1 + \frac{7}{2} \\ &= 12x^2 - 41x + 33 \end{aligned}$$

qui est la spline dans l'intervalle  $[2, 3]$  donc

$$f(x) = \begin{cases} s_1(x) = 7x - 15 & 1 \leq x \leq 2 \\ s_2(x) = 12x^2 - 41x + 33 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Par conséquent

$$f(2.5) \simeq s_2(2.5) = 5.5$$

on peut représenter cette fonction par le graphe (3.2.1)

Une méthode simple pour dériver les splines quadratiques est la suivante:

puisque  $s_i(x)$  est quadratique, nous pouvons écrire

$$s_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2$$

où  $a_i$ ,  $b_i$  et  $c_i$  sont des constantes à déterminer. Clairement, il y a  $3n$  constantes et donc nous avons besoin de  $3n$  conditions pour les déterminer. Ces conditions sont obtenues en utilisant les propriétés de la spline quadratique. Premièrement, nous utilisons la condition que la spline passe à travers les points intérieurs. Ce moyen

$$s_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Ensuite,  $s_i(x)$  est continue à  $x = x_i$  cette condition nécessite

$$s_i(x_i^-) = s_{i+1}(x_i^+)$$

Par conséquent, nous devons avoir

$$a_i + b_i x_i + c_i x_i^2 = a_{i+1} + b_{i+1} x_i + c_{i+1} x_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

Encore une fois,  $s'_i(x)$  est continue à  $x = x_i$  ce que donne

$$b_i + 2c_i x_i = b_{i+1} + 2c_{i+1} x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

Nous avons donc des conditions  $3n - 3$  et nous avons besoin de trois conditions supplémentaires. Puisque la spline passe aussi par les points extrêmes, nous devons avoir

$$y_0 = a_1 + b_1 x_0 + c_1 x_0^2$$

et

$$y_n = a_n + b_n x_n + c_n x_n^2$$

Enfin, pour la spline naturelle, nous avons

$$s_1''(x_0) = 0$$

Et cela donne

$$c_1 = 0$$

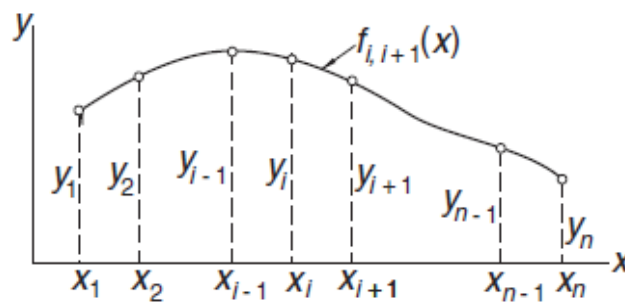
nous avons donc un système complet de  $(3n)$  équations et de  $(3n)$  inconnues. Bien que cela puisse certainement être soulagé, il est évidemment plus désavantageux et donc, cette méthode est moins préférée à la précédente.

La discontinuité dans les dérivées secondes est un inconvénient évident des cannelures quadratiques et cet inconvénient est supprimé dans les cannelures cubiques discutées ci-dessous.

### 3.3 Splines cubiques

Nous considérons le même ensemble de points de données,  $(x_i, y_i)$  et  $s_i(x)$  la spline cubique définie dans l'intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$ , les conditions pour la spline cubique naturelle sont:

- i)  $s_i(x)$  est au plus un cube dans chaque sous-intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- ii)  $s_i(x_i) = y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$
- iii)  $s_i(x), s_i'(x), s_i''(x)$  est continue sur l'intervalle  $[x_0, x_n]$
- iv) et  $s_i''(x_0) = s_i''(x_n) = 0$ .



Spline cubique.

pour déduire les équations gouvernantes de la spline cubique, nous observons que ces deuxièmes dérivées doivent être linéaires. De là, nous avons dans  $[x_{i-1}, x_i]$  :

$$s_i''(x) = \frac{1}{h_i} [(x_i - x) M_{i-1} + (x - x_{i-1}) M_i] \quad (3.3.1)$$

où  $h_i = x_i - x_{i-1}$  et  $s_i''(x_i) = M_i$  pour tout  $i$  ce qui est évident, les dérivées de la deuxième spline sont continues. L'équation d'intégration (3.3.1) par rapport à  $x$ , nous obtenons

$$s_i(x) = \frac{1}{h_i} \left[ \frac{(x_i - x)^3}{6} M_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^3}{6} M_i \right] + c_i (x_i - x) + d_i (x - x_{i-1}) \quad (3.3.2)$$

où  $c_i$  et  $d_i$  sont des constantes à définir.

En utilisant les conditions  $s_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$  et  $s_i(x_i) = y_i$  nous avons immédiatement

$$c_i = \frac{1}{h_i} \left( y_{i-1} - \frac{h_i^2}{6} M_{i-1} \right) \quad \text{et} \quad d_i = \frac{1}{h_i} \left( y_i - \frac{h_i^2}{6} M_i \right)$$

en substituant  $c_i$  et  $d_i$  dans l'équation (3.3.2), nous obtenons

$$s_i(x) = \frac{1}{h_i} \left[ \frac{(x_i - x)^3}{6} M_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^3}{6} M_i + \left( y_{i-1} - \frac{h_i^2}{6} M_{i-1} \right) (x_i - x) + \left( y_i - \frac{h_i^2}{6} M_i \right) (x - x_{i-1}) \right] \quad (3.3.3)$$

dans l'équation (3.3.3) les dérivées secondes des splines  $M_i$ , ne sont pas encore connues. Pour les déterminer, nous utilisons la condition de continuité de  $s_i'(x)$ . De l'équation (3.3.3) nous obtenons par dérivation:

$$s_i'(x) = \frac{1}{h_i} \left[ \frac{-3(x_i - x)^2}{6} M_{i-1} + \frac{3(x - x_{i-1})^2}{6} M_i - \left( y_{i-1} - \frac{h_i^2}{6} M_{i-1} \right) + \left( y_i - \frac{h_i^2}{6} M_i \right) \right]$$

En mettant  $x = x_i$ , dans précédente, on obtient la dérivée à gauche

$$\begin{aligned} s_i'(x_i^-) &= \frac{h_i}{2} M_i - \frac{1}{h_i} \left( y_{i-1} - \frac{h_i^2}{6} M_{i-1} \right) + \frac{1}{h_i} \left( y_i - \frac{h_i^2}{6} M_i \right) \\ &= \frac{1}{h_i} (y_i - y_{i-1}) + \frac{h_i^2}{6} M_{i-1} + \frac{h_i}{3} M_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

pour obtenir la dérivée à droite, il faut d'abord écrire l'équation de la spline cubique dans le sous-intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ . On fait cela en mettant  $i = i + 1$  dans l'équation (3.3.3)

$$s_{i+1}(x) = \frac{1}{h_{i+1}} \left[ \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6} M_i + \frac{(x - x_i)^3}{6} M_{i+1} + \left( y_i - \frac{h_{i+1}^2}{6} M_i \right) (x_{i+1} - x) + \left( y_{i+1} - \frac{h_{i+1}^2}{6} M_{i+1} \right) (x - x_i) \right] \quad (3.3.5)$$

où  $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$  l'équation.(3.3.5) est différentiation et mise  $x = x_i$ , on obtient la dérivée droite à  $x = x_i$

$$s'_{i+1}(x_i^+) = \frac{1}{h_{i+1}}(y_{i+1} - y_i) - \frac{h_{i+1}^2}{6}M_i - \frac{h_{i+1}}{3}M_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.3.6)$$

l'égalité des équations (3.3.4) et (3.3.6) donne la relation de récurrence

$$\begin{aligned} & \frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{1}{3}(h_i + h_{i+1})M_i + \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} \\ &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

pour des intervalles égaux. Nous avons  $h_{i+1} = h_i = h$  et l'équation (3.3.7) devient

$$M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} = \frac{6}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}), \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.3.8)$$

le système d'équations (3.3.7) a la même signification spéciale. Si  $M_0$  et  $M_n$  sont connus, alors le système peut être écrit comme

$$\left. \begin{aligned} h_1M_0 + 2(h_1 + h_2)M_1 + h_2M_2 &= 6 \left( \frac{y_2 - y_1}{h_2} - \frac{y_1 - y_0}{h_1} \right) \\ h_2M_1 + 2(h_2 + h_3)M_2 + h_3M_3 &= 6 \left( \frac{y_3 - y_2}{h_3} - \frac{y_2 - y_1}{h_2} \right) \\ h_3M_2 + 2(h_3 + h_4)M_3 + h_4M_4 &= 6 \left( \frac{y_4 - y_3}{h_4} - \frac{y_3 - y_2}{h_3} \right) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ h_{n-1}M_{n-2} + 2(h_{n-1} + h_n)M_{n-1} + h_nM_n &= 6 \left( \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.3.9)$$

on obtient une matrice tridaigonale on pose  $\alpha_i = h_i + h_{i+1}$ :

$$\begin{pmatrix} 2\alpha_1 & h_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ h_1 & 2\alpha_2 & h_3 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & h_2 & 2\alpha_3 & h_4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & h_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & h_{n-1} & 2\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

L'équations (3.3.7) et (3.3.8) constituent un système de  $(n + 1)$  équations et avec les deux conditions en (iv). Pour la spline naturelle nous avons un système complet de matrice tridiagonal qui peut être résolu facilement par des méthodes itérative.

**Exemple 3.3.1** étant donné les points  $(1, 6), (2, 18)$  et  $(3, 42)$ , satisfaisant la fonction  $y = x^3 + 5x$ , déterminer la spline cubique dans l'intervalle  $[1, 2]$  en utilisant les conditions de fin  $y'(1) = 8$  et  $y'(3) = 32$ . Nous avons  $h = 1$  et  $n = 2$ . La récurrence relation est:

$$\begin{aligned} m_0 + 4m_1 + m_2 &= 3(y_2 - y_0) \\ \implies 40 + 4m_1 &= 3(42 - 6) = 108 \\ \implies m_1 &= 17 \end{aligned}$$

dans l'intervalle  $[1, 2]$ , la spline cubique est donnée par:

$$\begin{aligned} s_1(x) &= m_0(x_1 - x)^2(x - x_0) - m_1(x - x_0)^2(x_1 - x) + \\ & y_0(x_1 - x)^2[2(x - x_0 + 1)] + y_1(x - x_0)^2[2(x_1 - x) + 1] \end{aligned}$$

En substituant les valeurs de  $x_i, y_i$  et  $m_i$ , on obtient

$$s(x) = x^3 + 5x,$$

qui est la fonction tabulée elle-même. Dans ce cas, l'interpolation spline est exacte car les deux et la condition prescrite sont exactes et la fonction tabulée est cubique

**Exemple 3.3.2** calcule de la spline cubique naturelle pour interpoler les points suivants:

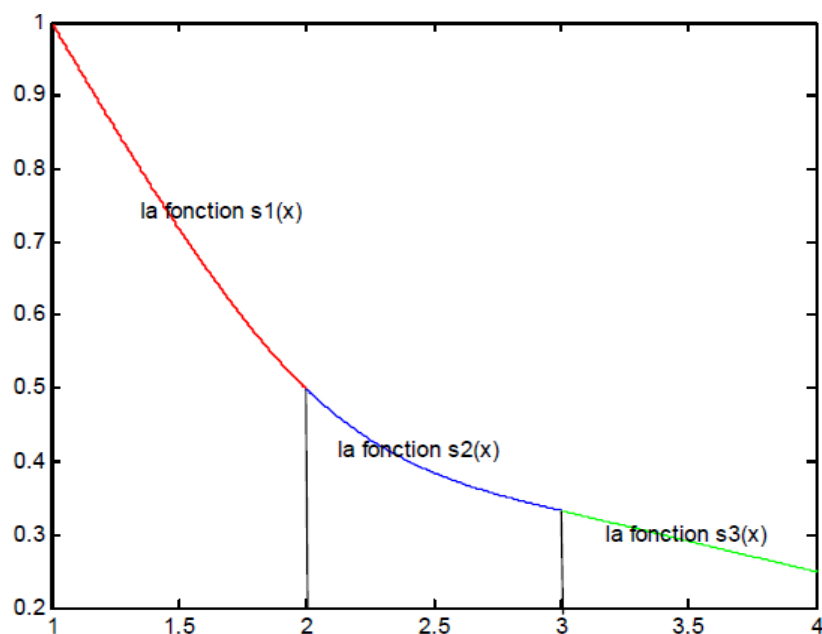
$$\left\{ (1, 1), \left(2, \frac{1}{2}\right), \left(3, \frac{1}{3}\right), \left(4, \frac{1}{4}\right) \right\}$$

pour  $n = 4$  et  $h = x_i - x_{i-1} = 1$  donc on trouve le système suivant d'après (3.3.9)

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}M_1 + \frac{2}{3}M_2 + \frac{1}{6}M_3 &= \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6}M_2 + \frac{2}{3}M_3 + \frac{1}{6}M_4 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

et  $M_1 = M_4$ , on obtient

$$M_2 = \frac{1}{2}, \quad M_3 = 0$$

Figure 3.3.1 : Les splines cubique  $n = 4$ 

alors, d'après (3.3.3)

$$f(x) = \begin{cases} s_1(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, & 1 \leq x \leq 2 \\ s_2(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{17}{6} & 2 \leq x \leq 3 \\ s_3(x) = -\frac{1}{12}x + \frac{7}{12}, & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

on représente cette fonction par le graphe (3.3.1)

## 3.4 Comparaison

Dans cet exemple on compare les deux méthodes globale (interpolation de Lagrange) et locale (interpolation par les splines cubiques) on applique cette comparaison sur l'exemple de Runge

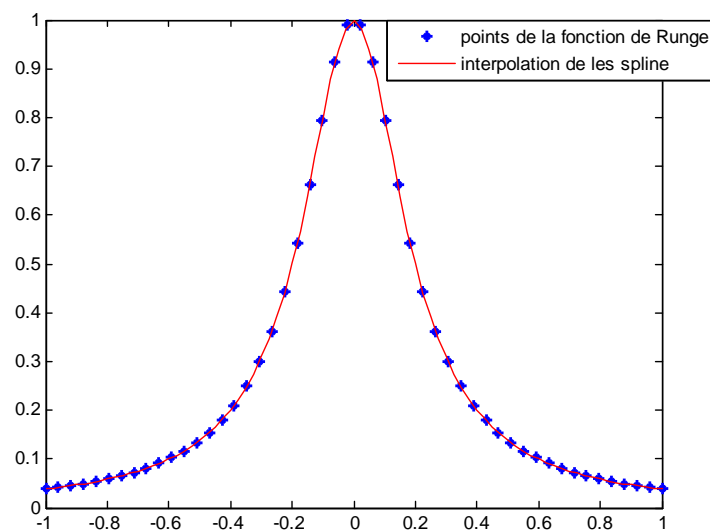


Figure 3.4.1 : Spline avec points de Runge

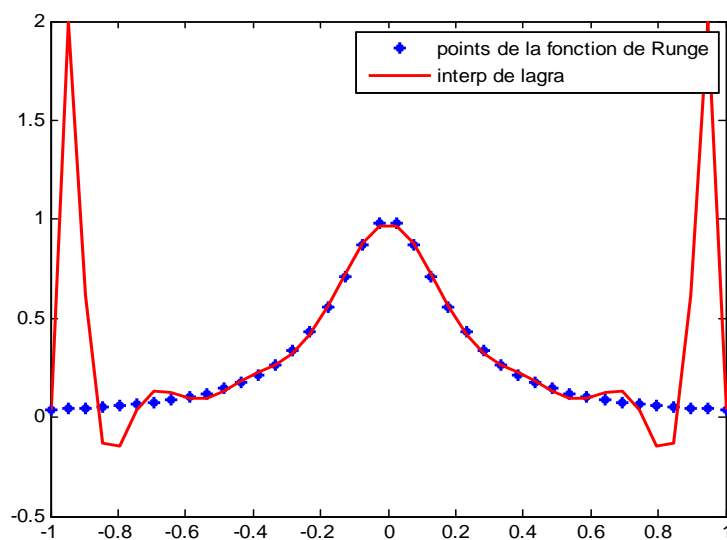


Figure 3.4.2 : Lagrange avec points de Runge

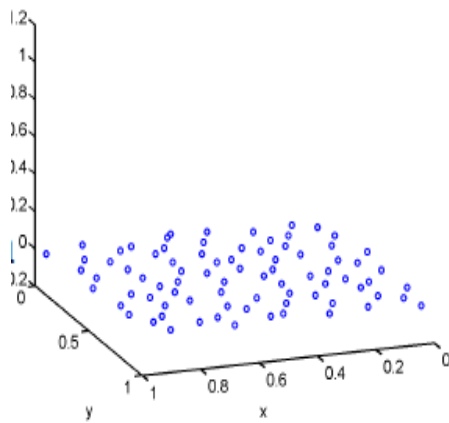
# Conclusion

Après l'exemple de la comparaison on voit clairement que l'interpolation locale (avec les splines) est nettement plus claire et plus précise que la méthode de Lagrange.

L'interpolation locale moyennant les splines est toujours plus fine et plus précise. Cependant le coût de calcul est très élevé. L'avantage le plus encourageant dans les splines est que la matrice du système linéaire est une matrice tridiagonale (matrice creuse), dans laquelle on peut utiliser les méthodes itératives pour trouver les splines.

# Perspective

Inchaa alah ,on va étudier, dans le projet de doctorat, l'interpolation non polynomiale dans  $\mathbb{R}^n$   $n \geq 2$ , qui généralise l'interpolation en 1D.



Les données  $(x_i, y_i)$

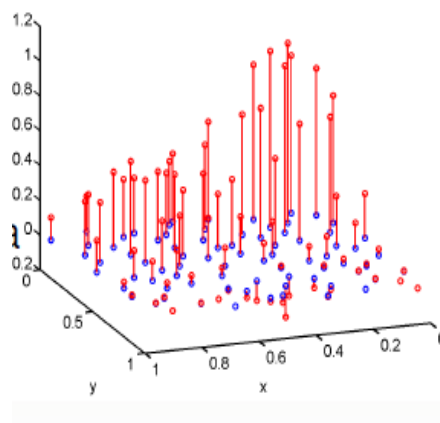
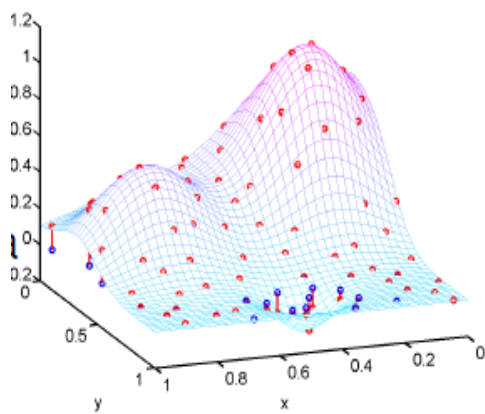
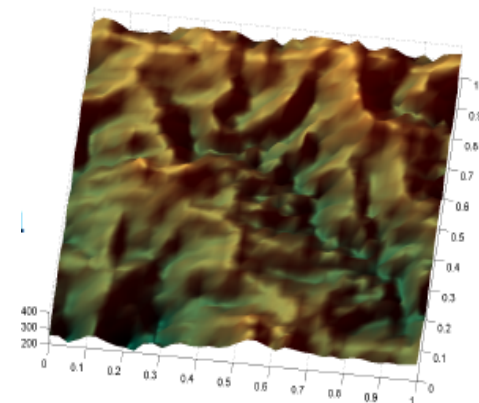


Image de données  $z = f(x, y)$



Interpolation des données



L'image originale

# Bibliographie

- [1] Alfio Quarteroni, Riccardo, Sacco Fausto et Saleri: " Méthodes Numériques (Algorithmes, analyse et applications)", Springer-Verlag Italia, Milano 2007.
- [2] Alfio Quarteroni, Riccardo, Sacco Fausto et Saleri:"Calcul Scientifique (Cours, exercices corrigés et illustrations en MATLAB et Octave)", Springer-Verlag Italia 2010
- [3] Jean-pierre Corriou: "Méthodes numériques et optimisation",Lavoisier, 2010.
- [4] Jean-pierre Marco:."mathémaïque L3", pearson education 2009
- [5] Kendall Atkinson:" Elementary numerical analysis",Copyrigh 2004.
- [6] S.S Sastray: "Introductory Methods of numirical analysis", Fifth edition New Delhi, 2012..
- [7] <https://cboumaths.files.wordpress.com/2012/05/m206ian.pdf>.