# Table des matières

# Notations

- $B(x,r)$: la boule de centre $x$ est de rayon $r$.
- $R(t,\tau) := B(0,\tau) \backslash B(0,t) = \{x \in \mathbb{R}^n : t \leq |x| < \tau\}$ et $R_k := R\left(2^{k-1}, 2^k\right)$.
- $\mathbb{R}^N$ : l'espace Euclidien.
- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$: est l'ensemble des nombre natureles.
- Pour un multi-index $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, nous écrivons $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.
- $x.y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i.y_i$ : est le produit sur $\mathbb{R}^n$.
- Si $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$, "supp $f$ " est le support de $f$,

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \neq 0\}}.$$

- $C(K)$ : est l'espace des fonctions continues sur un compact $K$ à valeurs réelles.
- La fonction caractéristique d'un ensemble $E$ et notée par

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

- $\chi_{t,\tau}(x) = \chi_{R(t,\tau)}(x)$.
- Pour $A \subset \mathbb{R}^n$: $|A|$ et la mesure de Lebesgue de $A$.
- Soient $f_\upsilon : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\upsilon \geq 0$, on définit

$$\|f_\upsilon\|_{\ell^{q(\cdot)}} = \left(\sum_{\upsilon=0}^{\infty} |f_\upsilon(x)|^{q(x)}\right)^{\frac{1}{q(x)}}.$$

- Soit $0 < p \leq \infty$, $L^p(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Lebesgue. C'est l'espace des fonctions $f$ mesurables telles que
$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < \infty$$
si $0 < p < \infty$ et
$$\|f\|_\infty = \operatorname{esssup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty.$$

- Soient $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, alors $\ell^q(L^p)$ est l'espace des suites $\{f_v\}_v \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ telle que
$$\|\{f_v\}_v\|_{\ell^q(L^p)} = \left(\sum_{v=0}^{\infty} \|f_v\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}},$$
si $0 < q < \infty$ et
$$\|\{f_v\}_v\|_{\ell^q(L^p)} = \sup_{v \geq 0} \|f_v\|_p,$$
si $q = \infty$.

- $f \lesssim g$ pour $f$ et $g$ non négative signifie que $f \leq Cg$,où $C$ ne dépend pas de variables impliquées dans $f$ et $g$.

- $f \approx g$ qui équivalent $f \lesssim g \lesssim f$.

# Introduction

Les espaces de Herz $K^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q}$ et $\dot{K}^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q}$ avec l'exposant $p$ était variable mais $\alpha \in \mathbb{R}$ fixe et $q \in (0, \infty]$ ont été récemment étudié par **Izuki** ([12],[13]) . Le cas où $p$ et $\alpha$ sont variables ont été étudiés par **A. ALMEIDA** et **D. DRIHEM** dans [2] . Les espaces $K^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}$ et $\dot{K}^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}$ avec des exposants variables ont été introduit par **Izuki** et **Noi** dans [14] . Où ils ont donné les résultats de la continuité des opérateurs sous-linéaire pour une large classe d'opérateurs classiques sur ces espaces fonctionnels.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier **L'espace de Herz** avec des exposants variables $K^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}$. Cet espace fonctionnel fait une partie très importante de l'analyse harmonique et joue un rôle aussi importante dans la résolution des équations aux dérivées partielles (**EDP**).

Dans ce mémoire on rappellent quelques propriétés de base sur les espaces fonctionnels avec intégrabilité variables est présenter quelque résultats pour ces espaces où en généralisant les résultats classiques sur les espace de Herz.

Le mémoire est subdivisé en trois chapitres, une deux page pour les notations utilisées et une liste de références plus introduction.

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques propriétés des espaces de Lebesgue avec exposant variable $L^{p(\cdot)}$ et l'espace $\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)$ et on termine par quelques lemmes techniques clés nécessaires qui utilisés dans la suite.

Plus précisément, on donne la définition de l'espace modulaire, semi-modulaire et inégalités auxiliaires.

Dans le deuxième chapitre, on donne la définition de l'espace de Herz avec exposant variable $K^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}$ et quelques propriétés sur cette espace.

Plus précisément, on donne la définition de l'espace de Herz non homogène $K^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}$ et l'espace de Herz homogène $\dot{K}^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}$ et leur application et ôn donne quelques inclusions élementaires.

Dans le troisième chapitre, on étudie la continuité de certains opérateurs sur les espaces de Herz avec des exposants variables.

Plus précisément, on donne un rappel sur les fonctions maximales de Hardy-Littlewood et on étudie la continuté des opérateurs sous-linéaire sur les espaces de Herz non homogène $K^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}$ et sur les espaces de Herz homogène $\dot{K}^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}$.

# Chapitre 1

# Les espaces $\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)$

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et propriétés fondamentaux et les notations essentielles qui seront utilisées dans la suite de cette mémoire.

Nous donnons ici la définition et les propriétés de l'espace modulaire et semi-modulaire pour définir le variable exposant de Lebesgue et l'espace $\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)$.

## 1.1 L'espace de Lebesgue $L^{p(\cdot)}$

### 1.1.1 L'espace modulaire

Nous commençons par un rappel sur les notions de base de la théorie des espaces modulaires.

**Définition 1.1.1** *Soit $X$ une espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ ($\mathbb{k} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$). Une fonction $\varrho : X \longrightarrow [0, \infty]$ est dite semi-modulaire sur $X$ si les propriétés suivantes soient vérifiées*

**(1)** $\varrho(0) = 0$.

**(2)** $\varrho(\lambda x) = \varrho(x)$ *pour tout* $x \in X$ , $\lambda \in \mathbb{k}$ *avec* $|\lambda| = 1$.

**(3)** $\varrho$ *est quasi-convexe. i.e.*$\forall x, y \in X$

$$\varrho(\theta x + (1-\theta) y) \leq K(\theta \varrho(x) + (1-\theta)\varrho(y)), \theta \in [0,1] \text{ et } K \in [1, \infty).$$

**(4)** $\varrho$ *est continue à gauche.*

**(5)** $\varrho(\lambda x) = 0$ *pour tout* $\lambda > 0$ *implique* $x = 0$.

*Une semi-modulaire $\varrho$ est dit continue si*

**(6)** *L'application* $\lambda \longrightarrow \varrho(\lambda x)$ *est continue sur* $[0, \infty)$, *pour tout* $x \in X$.

**Remarque 1.1.1** *:*

1. *Le semi-modulaire $\varrho$ est toujours quasi-convexe.*

2. *Le semi-modulaire $\varrho$ est dit modulaire si, $\varrho(x) = 0$ implique $x = 0$.*

**Exemple 1.1.1** *Si $1 \leq p < \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, alors*

$$\varrho_p(f) := \int_\Omega |f(x)|^p \, dx,$$

*définie un modulaire continue sur $L^0(\Omega)$, Ou $L^0(\Omega)$ est l'espace de fonctions mésurables.*

**Définition 1.1.2** *Si $\varrho$ un semi-modulaire ou modulaire sur $X$, alors*

$$X_\varrho := \left\{ x \in X : \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \varrho(\lambda x) = 0 \right\},$$

*est appelé espace semi-modulaire ou espace modulaire (respectivement).*

**Remarque 1.1.2** *On peut définir $X_\varrho$ par*

$$X_\varrho := \{ x \in X \ : \varrho(\lambda x) < \infty \ ; \text{ pour } \lambda > 0 \}.$$

*Pour la preuve (voir [10]).*

**Théorème 1.1.1** *Soit $\varrho$ un semi-modulaire sur $X$. alors $X_\varrho$ est un espace vectoriel quasi-normé sur $\mathbb{k}$, muni de la quasi-norme*

$$\|x\|_\varrho = \inf \left\{ \lambda > 0 : \varrho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}.$$

**Preuve.** Pour la preuve (voir [10, Théorème 2.1.7,p.24]) ■

**Définition 1.1.3** *Soit*

$$\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n) = \{ p \text{ mésurable} : p(\cdot) : \mathbb{R}^n \longrightarrow [c, \infty), c > 0 \}.$$
$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) = \{ p \text{ mésurable} : p(\cdot) : \mathbb{R}^n \longrightarrow [1, \infty) \}.$$

*On pose*

$$p^- = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} ess \, p(y) \quad et \quad p^+ = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} ess \, p(y)$$
$$p^- = p^-(\mathbb{R}^n) \qquad et \qquad p^+ = p^+(\mathbb{R}^n)$$

*Si $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ alors on définit $p' \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ le conjugué de $p$, par $\frac{1}{p(y)} + \frac{1}{p'(y)} = 1$.*

**Remarque 1.1.3** $p_\infty := \lim\limits_{|x|\to\infty} p(x)$ *et* $(p'_\infty) = (p_\infty)'$, *pour* $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

**Définition 1.1.4** *Soit* $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. *Alors on obtient un semi-modulaire,*

$$\varrho_{p(\cdot)}(f) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(x)}\, dx.$$

(**a**) *On définit l'espace de Lebesgue avec exposant variable* $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ *par*

$$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \text{ mésurable: } \lim_{\lambda\to 0} \varrho_{p(\cdot)}(\lambda f) = 0 \right\}.$$

*Ou*

$$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \text{ mésurable : } \exists\ \lambda > 0,\ \varrho_{p(\cdot)}(\lambda f) < \infty \right\}.$$

*Muni de la norme*

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \inf\left\{ \lambda > 0 : \varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}.$$

(**b**) *On définit l'espace* $L^{p(\cdot)}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *par*

$$L^{p(\cdot)}_{loc}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \text{ mésurable : } f \in L^{p(\cdot)}(k), \text{ pour tous les sous-ensembles compacts } K \subset \mathbb{R}^n \right\}.$$

**Lemme 1.1.1** *Si* $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *Alors*

$$\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1 \Longleftrightarrow \varrho_{p(\cdot)}(f) \leq 1, \quad \forall f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n).$$

*On a*

(**a**) *Si* $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$, *alors* $\varrho_{p(\cdot)}(f) \leq \|f\|_{p(\cdot)}$.

(**b**) *Si* $1 \leq \|f\|_{p(\cdot)}$, *alors* $\|f\|_{p(\cdot)} \leq \varrho_{p(\cdot)}(f)$.

**Preuve.** Pour la preuve (voir [10, Lemme 3.2.4]). ■

**Remarque 1.1.4** (**a**) *Si la fonction* $p(x) = p = cet$, *donc la norme coïncide avec la norme usuelle de l'espace* $L^p(\mathbb{R}^n)$, *autrement dit*

$$L^{p(x)}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n).$$

(**b**)

$$\min\left(\varrho_{p(\cdot)}(f)^{\frac{1}{p^+}}, \varrho_{p(\cdot)}(f)^{\frac{1}{p^-}}\right) \leq \|f\|_{p(\cdot)} \leq \max\left(\varrho_{p(\cdot)}(f)^{\frac{1}{p^+}}, \varrho_{p(\cdot)}(f)^{\frac{1}{p^-}}\right). \tag{1.1.1}$$

**Lemme 1.1.2** *Soit $p \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ et $s > 0$ telle que $sp^- \geq 1$. Alors*

$$\left\| |f|^s \right\|_{p(\cdot)} = \quad \|f\|_{sp(\cdot)}^s$$

**Preuve.** En utilisant la formule $t^{sp} = (t^s)^p$ et

$$\begin{aligned}
\|f\|_{sp(\cdot)}^s &= \left(\inf\left\{\lambda > 0 : \varrho_{sp(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\right\}\right)^s \\
&= \left(\inf\left\{\lambda > 0 : \varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{|f|^s}{\lambda^s}\right) \leq 1\right\}\right)^s \\
&= \left(\inf\left\{t^{\frac{1}{s}} > 0 : \varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{|f|^s}{t}\right) \leq 1\right\}\right)^s \\
&= \left\| |f|^s \right\|_{p(\cdot)}.
\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. ■

**Théorème 1.1.2** *Si $p \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$, alors $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ est un espace de quasi-Banach.*

**Preuve.** Pour la preuve (voir [10, Théorème 3.2.13,p.78]). ■

### 1.1.2 Inégalités auxiliaires

**Lemme 1.1.3** ***(Inégalité de Hölder)***

*Soient $p, q, s \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\frac{1}{s(\cdot)} = \frac{1}{p(\cdot)} + \frac{1}{q(\cdot)}$.Alors*

$$\|fg\|_{s(\cdot)} \leq 2\|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_{q(\cdot)}.$$

*Pour tout $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

**Preuve.** (Voir [10, Lemme 3.2.20,p.81]). ■

**Définition 1.1.5** *Soit $g \in C(\mathbb{R}^n)$. On dit que $g$ est localement Log-Höldérienne continue noté $g \in C_{loc}^{\log}(\mathbb{R}^n)$, s'il existe $c_{\log} > 0$ telle que*

$$|g(x) - g(y)| \leq \frac{c_{\log}}{\log(e + 1/|x-y|)}, \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y.$$

*Et aussi on dit que $g$ est Log-Hölderienne continue à l'origine si*

$$|g(x) - g(0)| \leq \frac{c_{\log}}{\log(e + 1/|x|)}, \text{ pour } x \in \mathbb{R}^n.$$

*On dit que g est globalement Log-Höldérienne continue noté* $g \in C^{\log}(\mathbb{R}^n)$ *,si elle est localement Log-Höldérienne continue et il existe* $g_\infty \in \mathbb{R}$*, telle que*

$$|g(x) - g_\infty| \leq \frac{c_{\log}}{\log(e + |x|)}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

**Exemple 1.1.2** *On pose*

$$p(x) = \max\left(1 - e^{3-|x|}, \min\left(6/5, \max\left(1/2, 3/2 - x^2\right)\right)\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

*alors* $p \in C^{\log}(\mathbb{R}^n)$.

**Définition 1.1.6** *Nous définissons la classe suivante des exposants variables*

$$\mathcal{P}^{\log} := \left\{p \in \mathcal{P} : \frac{1}{p} \text{ est globalement Log- Höldre continue}\right\}.$$

## 1.2 Les espaces $\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)$

**Définition 1.2.1** *Soient* $p, q \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$*. On définit l'espace* $\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)$ *par la modulaire suivant*

$$\varrho_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}\left((f_\upsilon)_\upsilon\right) := \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \inf\left\{\lambda_\upsilon > 0 : \varrho_{p(\cdot)}\left(f_\upsilon/\lambda_\upsilon^{\frac{1}{q(\cdot)}}\right) \leq 1\right\}, \forall (f_\upsilon)_\upsilon \subset L^{p(\cdot)}.$$

*On définit la norme usuel sous la forme suivante*

$$\|(f_\upsilon)_\upsilon\|_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)} := \inf\left\{\mu > 0 : \varrho_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}\left(\frac{1}{\mu}(f_\upsilon)_\upsilon\right) \leq 1\right\}.$$

*Si* $q^+ < \infty$*, alors*

$$\inf\left\{\lambda > 0 : \varrho_{p(\cdot)}\left(f/\lambda^{\frac{1}{q(\cdot)}}\right) \leq 1\right\} = \left\||f|^{q(\cdot)}\right\|_{\frac{P(\cdot)}{q(\cdot)}}.$$

*D'ou*

$$\varrho_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}\left((f_\upsilon)_\upsilon\right) = \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \left\||f_\upsilon|^{q(\cdot)}\right\|_{\frac{P(\cdot)}{q(\cdot)}}.$$

**Remarque 1.2.1** *:*

1. *Si* $p(\cdot) = p$ *et* $q(\cdot) = q$ *sont des foncione constantes, alors*

$$\|(f_\upsilon)_\upsilon\|_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)} = \|(f_\upsilon)_\upsilon\|_{\ell^q(L^p)} = \left(\sum_{\upsilon=0}^{\infty} \|(f_\upsilon)_\upsilon\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

*2. Si $q \in (0,\infty]$ telle que $q$ constante. Alors*

$$\|(f_v)_v\|_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)} = \|(f_v)_v\|_{\ell^{q}\left(L^{p(\cdot)}\right)} = \left(\sum_{v=0}^{\infty} \|(f_v)_v\|_{p(\cdot)}^{q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

**Proposition 1.2.1** *Si $p,q \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ ,alors $\varrho_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}$ est un semi-modulaire .De plus*

(**a**) *Si $p^+ < \infty$, alors $\varrho_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}$est un modulaire.*

(**b**) *Si $p^+, q^+ < \infty$, alors $\varrho_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}$ est continue.*

**Preuve.** Pour la preuve (voir [1, Proposition 3.5]). ■

**Exemple 1.2.1** *Soit $(f_v) = (f,0,0,\cdots)$ .On a le modulaire*

$$\varrho_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}\left(\frac{1}{\mu}(f_v)_v\right) = \inf\left\{\lambda > 0 : \quad \varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\mu\lambda^{\frac{1}{q(\cdot)}}}\right) \le 1\right\}.$$

*Donc*

$$\|(f_v)_v\|_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)} = \inf\left\{\mu > 0 : \inf\left\{\lambda > 0 : \quad \varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\mu\lambda^{\frac{1}{q(\cdot)}}}\right) \le 1\right\} \le 1\right\}.$$

*On sait que l'inégalité finale indique que $\lambda \le 1$, pour $\lambda = 1$ on trouve*

$$\|(f_v)_v\|_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)} = \inf\left\{\mu > 0 : \quad \varrho_{p(\cdot)}\left(\frac{1}{\mu}f\right) \le 1\right\} = \|f\|_{p(\cdot)}.$$

**Théorème 1.2.1** *Soient $p,q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ Si $\frac{1}{P(\cdot)} + \frac{1}{q(\cdot)} \le 1$ , ou $q$ est une constante, alors $\|\cdot\|_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}$ est une norme.*

**Preuve.** Pour la preuve (voir [1, Théorème 3.6]). ■

**Théorème 1.2.2** *Si $p,q \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$, alors $\|\cdot\|_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}$ est une quasi-norme sur $\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)$.*

**Preuve.** Soit $r \in \left(0, \frac{1}{2}\min\{p^-, q^-, 2\}\right]$ , on définit $\tilde{p} = \frac{p}{r}$ et $\tilde{q} = \frac{q}{r}$ ,puis clairement $\frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} \le 1$ .On a d'après le théorème 1.1.1 nous avons besoin de considérer quasi-convexité on obtenons

$$\|(f_v)_v + (g_v)_v\|_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)} = \left\||(f_v)_v + (g_v)_v|^r\right\|_{\ell^{\tilde{q}(\cdot)}\left(L^{\tilde{p}(\cdot)}\right)}^{\frac{1}{r}}.$$

Mais

$$|f_v + g_v|^r \le |f_v|^r + |g_v|^r, \quad v \ge 0.$$

On trouve que

$$\begin{aligned}\|(f_v)_v+(g_v)_v\|_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)} &\leq \|(|f_v|^r)_v+(|g_v|^r)_v\|^{\frac{1}{r}}_{\ell^{\tilde{q}(\cdot)}\left(L^{\tilde{p}(\cdot)}\right)}\\ &\leq \left(\|(|f_v|^r)_v\|_{\ell^{\tilde{q}(\cdot)}\left(L^{\tilde{p}(\cdot)}\right)}+\|(|g_v|^r)_v\|_{\ell^{\tilde{q}(\cdot)}\left(L^{\tilde{p}(\cdot)}\right)}\right)^{\frac{1}{r}},\end{aligned}$$

car $\||f|^r\|_{p(\cdot)}=\|f\|^r_{rp(\cdot)}$. Ce qui prouve que la dernière expression est majorée par

$$c\left(\|(|f_v|)_v\|_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}+\|(|g_v|)_v\|_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}\right).$$

Ceci qui termine la preuve. ■

## 1.3 Quelques lemmes techniques

On pose

$$\mathcal{P}^{\ln}_{\infty}(\mathbb{R}^n)=\{p\in\mathcal{P}\colon\ p \text{ est globalement } \log\text{-}\textit{Höldreienne continue} \text{ à l'infini}\}.$$

et

$$\mathcal{P}^{\ln}_{0}(\mathbb{R}^n)=\{p\in\mathcal{P}\colon\ p \text{ est globalement } \log\text{-}\textit{Höldreienne continue} \text{ à l'origine}\}.$$

**Lemme 1.3.1** *Soit $0<a<1$ et $0<q\leq\infty$. Pour toute suite réeles a terme positifs $\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ dans $\ell^q$ telle que $\left\|\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{\ell^q}=I<\infty$. Les suites $\left\{\delta_k:\delta_k=\sum_{j\leq k}a^{k-j}\varepsilon_j\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ et $\left\{\eta_k:\eta_k=\sum_{j\geq k}a^{j-k}\varepsilon_j\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ appartenir à $\ell^q$ et*

$$\left\|\{\delta_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\right\|_{\ell^q}+\left\|\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\right\|_{\ell^q}\leq cI.$$

*Avec $c>0$ en fonction d'un seul et $q$ .*

**Preuve.** Pour la preuve (voir[2]) ■

**Lemme 1.3.2** *Soit $\alpha\in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ et $r_1>0$. Si $\alpha$ est log-Hölder continues à la fois à l'origine et de l'infini $(\alpha\in\mathcal{P}^{\ln}_{\infty}(\mathbb{R}^n)\cap\mathcal{P}^{\ln}_{0}(\mathbb{R}^n))$ on a*

$$r_1^{\alpha(x)}\lesssim r_2^{\alpha(y)}\times\begin{cases}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\alpha^+} & si \quad 0<r_2\leq\frac{r_1}{2}\\ 1 & si \quad \frac{r_1}{2}<r_2\leq 2r_1\\ \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\alpha^-} & si \quad r_2>2r_1\end{cases}$$

*Pour tout* $x \in B(0, r_1) \backslash B\left(0, \frac{r_1}{2}\right)$ *et* $y \in B(0, r_2) \backslash B\left(0, \frac{r_2}{2}\right)$ *avec les constante implicite en fonction de* $x, y, r_1$ *et* $r_2$.

**Preuve.** (**a**) Cas $0 < r_2 \leq \frac{r_1}{2}$. On considérons $r_2 \geq 1$. Nous avons

$$r_1^{\alpha(x)} \leq \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\alpha^+} r_2^{\alpha(x)-\alpha(y)} r_2^{\alpha(y)}.$$

Donc on va montre qu'il existe une constante $c > 1$ telle que $c^{-1} \leq r_2^{\alpha(x)-\alpha(y)} \leq c$ pour tout $x, y$ avec $|x| \geq \frac{r_1}{2}$ et $|y| \geq \frac{r_2}{2}$, qui est équivalent à l'inégalité

$$|\alpha(x) - \alpha(y)| \log r_2 \leq \log c.$$

Comme $\alpha \in \mathcal{P}_\infty^{\ln}(\mathbb{R}^n)$ nous obtenons

$$\begin{aligned} |\alpha(x) - \alpha(y)| \log r_2 &\leq |\alpha(x) - \alpha_\infty| \log r_2 + |\alpha(y) - \alpha_\infty| \log r_2 \\ &\lesssim \frac{\log r_2}{\log(e + |x|)} + \frac{\log r_2}{\log(e + |y|)} \\ &\lesssim \frac{\log \frac{r_1}{2}}{\log\left(e + \frac{r_1}{2}\right)} + \frac{\log 2 + \log \frac{r_2}{2}}{\log\left(e + \frac{r_2}{2}\right)} \lesssim 1. \end{aligned}$$

On considérons $r_2 < 1$. Si $r_1 \geq 1$, on a

$$r_1^{\alpha(x)} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\alpha^+} r_1^{\alpha(x)-\alpha^+} r_2^{\alpha^+} \leq \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\alpha^+} r_1^{\alpha(x)-\alpha^+} r_2^{\alpha(y)} \lesssim \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\alpha^+} r_2^{\alpha(y)}.$$

On utilise le fait que $\alpha \in \mathcal{P}_0^{\ln}(\mathbb{R}^n)$ pour montrer que

$$\begin{aligned} |\alpha(x) - \alpha(y)| \log \frac{1}{r_1} &\leq |\alpha(x) - \alpha(0)| \log \frac{1}{r_1} + |\alpha(y) - \alpha(0)| \log \frac{1}{r_1} \\ &\leq \frac{\log \frac{1}{r_1}}{\log\left(e + \frac{1}{r_1}\right)} \leq 1. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in B(0, r_1)$ *et* $y \in B(0, r_2)$. Alors $r_1^{\alpha(x)-\alpha(y)} \approx 1$, pour ces valeurs de $x, y$. Donc

$$r_1^{\alpha(x)} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\alpha(y)} r_1^{\alpha(x)-\alpha(y)} r_2^{\alpha(y)} \lesssim \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\alpha^+} r_2^{\alpha(y)}.$$

(**b**) Cas $\frac{r_1}{2} < r_2 \leq 2r_2$. Comme $r_1^{\alpha(x)} \lesssim r_1^{\alpha(x)-\alpha(y)} r_2^{\alpha(y)}$, on va démontre que $r_1^{\alpha(x)-\alpha(y)} \approx 1$. Si $r_1 > 1$, on obtient l'estimation car $\alpha$ est Log-Hölderienne continue à l'infini et que $|x| \geq \frac{r_1}{2}$ et $|y| \geq \frac{r_2}{2}$.

Si $r_1 < 1$, on utilisons le fai que $\alpha$ est log-Hölderienne continue à l'origine au lieu de prouver que l'équivalence qui nous avons fait dans le premier cas.

(**c**) Cas $r_2 > 2r_1$. Si $r_1 \geq 1$ puis à partir de la condition de décroissance logarithmique à l'infini on a

$$r_1^{\alpha(x)} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\alpha(y)} r_1^{\alpha(x)-\alpha(y)} r_2^{\alpha(y)} \lesssim \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\alpha^-} r_2^{\alpha(y)}.$$

Si $r_1 < 1$ et $r_2 < 1$,on utilisons le fait que $\alpha$ est log-Hölderienne continue à l'origine pour obtenir $r_2^{\alpha(x)-\alpha(y)} \approx 1$, pour tout $x \in B(0, r_1)$ et $y \in B(0, r_2)$ et par conséquent d'obtenir

$$r_1^{\alpha(x)} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\alpha(x)} r_1^{\alpha(x)-\alpha(y)} r_2^{\alpha(y)} \lesssim \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\alpha^-} r_2^{\alpha(y)}.$$

Si $r_1 < 1$ et $r_2 \geq 1$.On a

$$r_1^{\alpha(x)} \leq r_1^{\alpha^-} = r_1^{\alpha^-} r_2^{-\alpha(y)} r_2^{\alpha(y)} \leq \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\alpha^-} r_2^{\alpha(y)}.$$

D'où le lemme est démontrée. ■

**Lemme 1.3.3** *Soit $p \in \mathcal{P}_\infty^{\ln}(\mathbb{R}^n)$ est soit $R = B(0, r) \backslash B\left(0, \frac{r}{2}\right)$. Si $|R| \geq 2^{-n}$, alors*

$$\|\chi_R\|_{p(\cdot)} \approx |R|^{\frac{1}{p(x)}} \approx |R|^{\frac{1}{p_\infty}}. \tag{1.3.1}$$

*Avec les constantes sont indépendantes de $r$ et $x \in R$. De plus*

$$\|\chi_R\|_{p(\cdot)} \approx |R|^{\frac{1}{p(x)}}.$$

*Pour tous $|R| > 0$, si $p \in \mathcal{P}_0^{\ln}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}_\infty^{\ln}(\mathbb{R}^n)$.*

**Preuve. Étape 1**. On montron que $\|\chi_R\|_{p(\cdot)} \approx |R|^{\frac{1}{p(x)}}$. D'abord, nous montrons que

$$\left\| |R|^{-\frac{1}{p(x)}} \chi_R(\cdot) \right\|_{p(\cdot)} \lesssim 1.$$

Avec des constantes indépendantes de $x$ et $r$. Puisque $p^+ < \infty$, il suffit de montrer que

$$\varrho_{p(\cdot)}\left(|R|^{-\frac{1}{p(x)}} \chi_R\right) \leq c.$$

Est une conséquence de l'estimation $|R|^{\frac{p(x)-p(y)}{p(x)}} \leq c_1$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Si $|R| > 1$, alors

$$\left|\frac{p(x) - p(y)}{p(x)}\right| \log |R| \leq c_2,$$

Ce qui est une conséquence par le fait que $p \in \mathcal{P}_{\infty}^{\ln}(\mathbb{R}^n)$. On a

$$\begin{aligned}\left|\frac{p(x)-p(y)}{p(x)}\right|\log|R| &\leq |p(x)-p_\infty|\log|R| + |p(y)-p_\infty|\log|R| \\ &\lesssim \frac{\log|R|}{\log(e+|x|)} + \frac{\log|R|}{\log(e+|y|)} \lesssim 1, \quad |x| > \frac{r}{2}, |y| > \frac{r}{2}.\end{aligned}$$

Le cas $2^{-n} \leq |R| < 1$ est évidente de puis

$$|p(x)-p(y)|\log\frac{1}{|R|} \leq 2np^+\log 2 \leq 1.$$

Dans le cas $|R| < 2^{-n}$, on utilise le $log - Hölderienne$ de $p$ à l'origine pour obtenir l'estimation (avec $|x| < r, |y| < r$)

$$\begin{aligned}|p(x)-p(y)|\log\frac{1}{|R|} &\lesssim |p(x)-p(0)|\log\frac{1}{|R|} + |p(x)-p(0)|\log\frac{1}{|R|}. \\ &\lesssim \frac{\log\frac{1}{|R|}}{\log\left(e+\frac{1}{|x|}\right)} + \frac{\log\frac{1}{|R|}}{\log\left(e+\frac{1}{|y|}\right)} \lesssim 1.\end{aligned}$$

Maintenant, on montrons que $|R|^{\frac{1}{p(x)}} \lesssim \|\chi_R\|_{p(\cdot)}$. Ceci est une conséquence de l'inégalité de Hölder et l'estimation $\|\chi_R\|_{p'(\cdot)} \lesssim |R|^{\frac{1}{p'(x)}}$ lequel a déjà prouvé. En fait, nous avons

$$\begin{aligned}|R|^{\frac{1}{p(x)}} &= |R|^{\frac{1}{p(x)}-1}\int_{\mathbb{R}^n}\chi_R(y)\,dy \leq 2|R|^{\frac{-1}{p'(x)}}\|\chi_R\|_{p(\cdot)}\|\chi_R\|_{p'(\cdot)} \\ &\lesssim \|\chi_R\|_{p(\cdot)}.\end{aligned}$$

**Étape 2.** On montrons que $|R|^{\frac{1}{p(x)}} \approx |R|^{\frac{1}{p_\infty}}$ quand $|R| > 2^{-n}$ et $p \in \mathcal{P}_{\infty}^{\ln}(\mathbb{R}^n)$. Comme indiqué précédemment, cette relation est équivalente aux inégalité

$$\left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p_\infty}\right|\log|R| \lesssim 1,\ |R| > 1.$$

et

$$\left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p_\infty}\right|\log\frac{1}{|R|} \lesssim 1,\quad 2^{-n} \leq |R| < 1.$$

On trouve par les deux cas , d'après l'hypothèse $p \in \mathcal{P}_{\infty}^{\ln}(\mathbb{R}^n)$ : $|R|^{\frac{1}{p_\infty}} \approx |R|^{\frac{1}{p(x)}}$. La preuve est terminée ■

**Lemme 1.3.4** *Soit $\tau \in \mathcal{P}^{\log}$, pour tous cubes (ou Boules) $P$ et $Q$ telle que $P \subset Q$ , nous avons*

$$A\left(\frac{|Q|}{|P|}\right)^{1/\tau^+} \leq \frac{\|\chi_Q\|_{\tau(\cdot)}}{\|\chi_P\|_{\tau(\cdot)}} \leq B\left(\frac{|Q|}{|P|}\right)^{1/\tau^-}$$

*Avec $A, B > 0$ sont indépendants de $|Q|$ et $|P|$.*

**Preuve.** Si $|P| \geq 1$: dans ce cas, on utilisons (1.3.1) pour obtenir $\|\chi_P\|_{\tau(\cdot)} \approx |P|^{\frac{1}{\tau_\infty}}$ et $\left\|\chi_Q\right\|_{\tau(\cdot)} \approx |Q|^{\frac{1}{\tau_\infty}}$. Par conséquent

$$A\left(\frac{|Q|}{|P|}\right)^{1/\tau^+} \leq \frac{\left\|\chi_Q\right\|_{\tau(\cdot)}}{\|\chi_P\|_{\tau(\cdot)}} \approx \left(\frac{|Q|}{|P|}\right)^{\frac{1}{\tau_\infty}} \leq B\left(\frac{|Q|}{|P|}\right)^{1/\tau^-}.$$

Considérons maintenant $|P| < 1$ :

Si $|Q| \leq 1$,puis de (1.3.1), on obtenons $\|\chi_P\|_{\tau(\cdot)} \approx |P|^{\frac{1}{\tau(y)}}$, pour $y \in P$ et $\left\|\chi_Q\right\|_{\tau(.)} \approx |Q|^{\frac{1}{\tau(y)}}$, pour $y \in P \subset Q$, donc

$$A\left(\frac{|Q|}{|P|}\right)^{1/\tau^+} \leq \frac{\left\|\chi_Q\right\|_{\tau(\cdot)}}{\|\chi_P\|_{\tau(\cdot)}} \approx \left(\frac{|Q|}{|P|}\right)^{\frac{1}{\tau(y)}} \leq B\left(\frac{|Q|}{|P|}\right)^{1/\tau^-}.$$

Si $|Q| > 1$, on utilisons (1.1.1) on obtient

$$|Q|^{1/\tau^+} \lesssim \left\|\chi_Q\right\|_{\tau(\cdot)} \lesssim |Q|^{1/\tau^-}$$

et

$$|P|^{1/\tau^+} \lesssim \|\chi_P\|_{\tau(\cdot)} \lesssim |P|^{1/\tau^-}$$

qui se termine la preuve. ■

# Chapitre 2

# L'espace de Herz $K^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}$

Le but de ce chapitre est le présenter l'espace de Herz avec des exposants variables et quelques properiétés sur ces espaces.

## 2.1 Définitions et propriétés

Pour plus de commodité, nous avons mis $B_k := B\left(0, 2^k\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2^k\right\}$, $R_k := \left\{x \in \mathbb{R}^n : 2^{k-1} < |x| \leq 2^k\right\} = B_k \backslash B_{k-1}$ et $\chi_k = \chi_{R_k}$, $k \in \mathbb{Z}$.

**Définition 2.1.1** *Soit* $p, q \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$, *et* $\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *avec* $\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
(**i**) ***L'espace de Herz nonhomogène*** $K^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ *est l'ensemble de* $f \in L^{p(\cdot)}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, *telle que*

$$\|f\|_{K^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}} := \left\|f\chi_{B_0}\right\|_{p(\cdot)} + \left\|\left(2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k\right)_{k\geq 1}\right\|_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)} < \infty.$$

(**ii**) *L'**espace de Herz homogène*** $\dot{K}^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ *est l'ensemble de* $f \in L^{p(\cdot)}_{loc}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, *telle que*

$$\|f\|_{\dot{K}^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}} = \left\|\left(2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k\right)_{k\in\mathbb{Z}}\right\|_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)} < \infty.$$

*Pour l'espace de Herz homogène on peut aussi associé le modulaire*

$$\varrho_{\dot{K}^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}}(f) = \varrho_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}\left(\left(2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k\right)_{k\in\mathbb{Z}}\right).$$

**Corollaire 2.1.1** *Si $q$ est une constante. Alors*

$$\|f\|_{K^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q}} := \|f\chi_{B_0}\|_{p(\cdot)} + \left\| \left\| \left(2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k\right)_{k\geq 1} \right\|_{p(\cdot)} \right\|_{\ell^q}.$$

*et*

$$\|f\|_{\dot{K}^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q}} = \left\| \left\| \left(2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k\right)_{k\in\mathbb{Z}} \right\|_{p(\cdot)} \right\|_{\ell^q}.$$

**Remarque 2.1.1** *Si $p, q$ et $\alpha$ sont des constantes, alors*

$$K^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = K^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

*et*

$$\dot{K}^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = \dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n).$$

*Sont les espaces de Herz classiques.*

**Définition 2.1.2** *Si $q = \infty$ alors pour les suite $\{g_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ des fonctions mesurables on définit*

$$\|\{g_k\}\|_{\ell^q_>(L^{p(\cdot)})} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|g_k\|^q_{p(\cdot)}\right)^{1/q}.$$

*et*

$$\|\{g_k\}\|_{\ell^q_<(L^{p(\cdot)})} = \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} \|g_k\|^q_{p(\cdot)}\right)^{1/q}.$$

**Proposition 2.1.1** *Soient $\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $p, q \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$. Si $\alpha$, $q \in \mathcal{P}^{\ln}_\infty(\mathbb{R}^n)$, alors*

$$K^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n) = K^{\alpha_\infty}_{p(\cdot),q_\infty}(\mathbb{R}^n).$$

*En autre, si $\alpha$ et $q \in \mathcal{P}^{\ln}_0(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}^{\ln}_\infty(\mathbb{R}^n)$, alors*

$$\|f\|_{\dot{K}^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q}} = \left\|\left\{2^{k\alpha(0)} f\chi_k\right\}\right\|_{\ell^{q(0)}_<(L^{p(\cdot)})} + \left\|\left\{2^{k\alpha_\infty} f\chi_k\right\}\right\|_{\ell^{q_\infty}_>(L^{p(\cdot)})}. \tag{2.1.1}$$

**Preuve.** La preuve sur les trois étapes.

**Étape 1**. Nous allons prouver que

$$K^{\alpha_\infty}_{p(\cdot),q_\infty}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow K^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n),$$

qui est équivalent à

$$\|f\|_{K^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}} \lesssim \|f\|_{K^{\alpha_\infty}_{p(\cdot),q_\infty}}.$$

Pour toute $f \in K^{\alpha_\infty}_{p(\cdot),q_\infty}(\mathbb{R}^n)$. Il suffit de considère le cas $\|f\|_{K^{\alpha_\infty}_{p(\cdot),q_\infty}} = 1$ et de montrer que le modulaire de $f$ sur le côté gauche est bornée. En particulier, nous allons montrer que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \left| c2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k \right|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \leq 1. \tag{2.1.2}$$

Pour une constante $c > 0$, depuis $\alpha \in \mathcal{P}^{\ln}_{\infty}(\mathbb{R}^n)$, pour $k \geq 1$ et $x \in R_k$ nous avons

$$k\,|\alpha(x) - \alpha_\infty| \lesssim \frac{k}{ln\,(e+|x|)} \lesssim 1.$$

Donc, $2^{k\alpha(x)} \approx 2^{k\alpha_\infty}$ avec les constantes indépendantes de $k$ et $x$, et par conséquent

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \left| c2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k \right|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \approx \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \left| c2^{k\alpha_\infty} f\chi_k \right|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}}.$$

Pour estimer (2.1.2) il est claire que de démontrer l'inégalité suivante

$$\left\| \left| c2^{k\alpha_\infty} f\chi_k \right|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \leq \left\| 2^{k\alpha_\infty} f\chi_k \right\|^{q_\infty}_{p(\cdot)} + 2^{-k} = \delta. \tag{2.1.3}$$

Ce implique que

$$\left\| \delta^{-1} \left| c2^{k\alpha_\infty} f\chi_k \right|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \leq 1.$$

C'est-à-dire

$$\left\| c\delta^{-\frac{1}{q(\cdot)}} 2^{k\alpha_\infty} f\chi_k \right\|_{p(\cdot)} \leq 1.$$

Nous avons pour tout $x \in R_k$

$$\delta^{-\frac{1}{q(x)}} = \left(2^k\delta\right)^{\frac{1}{q_\infty} - \frac{1}{q(x)}} 2^{k\left(\frac{1}{q_\infty} - \frac{1}{q(x)}\right)} \delta^{-\frac{1}{q_\infty}}.$$

Depuis $q \in \mathcal{P}^{\ln}_{\infty}(\mathbb{R}^n)$, pour $k \geq 1$, et $x \in R_k$ nous avons

$$\frac{k\,|q(x) - q_\infty|}{q_\infty q(x)} \leq \frac{k\,|q(x) - q_\infty|}{q_\infty q^-} \lesssim \frac{k}{\ln(e+|x|)} \lesssim 1.$$

Donc $2^{k\left(\frac{1}{q_\infty} - \frac{1}{q(x)}\right)} \approx 1$, avec les constantes indépendantes de $k$ et $x$. et d'un autre pars $1 < 2^k\delta < 2^{k+1}$ , on obtient

$$\left(2^k\delta\right)^{\frac{1}{q_\infty} - \frac{1}{q(x)}} \leq \left(2^{k+1}\right)^{\left|\frac{1}{q_\infty} - \frac{1}{q(x)}\right|} \lesssim 1.$$

Donc $\delta^{-\frac{1}{q(x)}} \lesssim \delta^{-\frac{1}{q_\infty}}$. Avec un choix approprié de $c > 0$ alors

$$\begin{aligned} \left\| c\delta^{-\frac{1}{q(\cdot)}} 2^{k\alpha_\infty} f\chi_k \right\|_{p(\cdot)} &\leq \left\| \delta^{-\frac{1}{q_\infty}} 2^{k\alpha_\infty} f\chi_k \right\|_{p(\cdot)} \\ &\leq \delta^{-\frac{1}{q_\infty}} \left\| 2^{k\alpha_\infty} f\chi_k \right\|_{p(\cdot)}, \end{aligned}$$

Pour estimer la dernière inégalité nous avons $\left\|2^{k\alpha_\infty} f\chi_k\right\|_{p(\cdot)} \leq \delta^{\frac{1}{q_\infty}}$ alors

$$\left\|c\delta^{-\frac{1}{q(\cdot)}} 2^{k\alpha_\infty} f\chi_k\right\|_{p(\cdot)} \leq \delta^{-\frac{1}{q_\infty}} \delta^{\frac{1}{q_\infty}} \leq 1.$$

Finalement on concluons $\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \left|c2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k\right|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \leq 1$. Donc

$$K_{p(\cdot),q_\infty}^{\alpha_\infty}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow K_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}(\mathbb{R}^n).$$

**Étape 2**. Nous allons prouver que

$$K_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow K_{p(\cdot),q_\infty}^{\alpha_\infty}(\mathbb{R}^n)$$

qui est équivalent à

$$\|f\|_{K_{p(\cdot),q_\infty}^{\alpha_\infty}} \lesssim \|f\|_{K_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}}.$$

Pour toute $f \in K_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Il suffit de considère le cas $\|f\|_{K_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}} = 1$, et de montrer que le modulaire de $f$ sur le côté gauche est bornée. En particulier, nous allons montrer que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\|c2^{k\alpha_\infty} f\chi_k\right\|_{p(\cdot)}^{q_\infty} \lesssim 1. \tag{2.1.4}$$

Pour une constante $c > 0$, depuis $\alpha \in \mathcal{P}_\infty^{\ln}(\mathbb{R}^n)$, pour $k \geq 1$ et $x \in R_k$ nous avons $2^{k\alpha(x)} \approx 2^{k\alpha_\infty}$ avec des constantes indépendantes de $k$ et $x$, et par conséquent

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\|c2^{k\alpha_\infty} f\chi_k\right\|_{p(\cdot)}^{q_\infty} \approx \sum_{k=1}^{\infty} \left\|c2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k\right\|_{p(\cdot)}^{q_\infty}.$$

Ce implique que

$$\left\|2^{k\alpha_\infty} f\chi_k\right\|_{p(\cdot)}^{q_\infty} \lesssim \left\|2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k\right\|_{p(\cdot)}^{q_\infty}.$$

Pour estimer (2.1.4) il est claire que de démontrer l'inégalité suivante

$$\left\|c2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k\right\|_{p(\cdot)}^{q_\infty} \leq \left\| \left|2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k\right|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} + 2^{-k} = \delta. \tag{2.1.5}$$

Ce implique que

$$\left\|\delta^{-\frac{1}{q_\infty}} \left|c2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k\right|\right\|_{p(\cdot)}^{q_\infty} \leq 1.$$

qui est équivalent à

$$\left\| \left|c\delta^{-\frac{1}{q_\infty}} 2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k\right|^{q_\infty} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q_\infty}} \leq 1.$$

C'est-à-dire

$$\left\| c\delta^{-\frac{1}{q_\infty}} 2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k \right\|_{p(\cdot)} \leq 1.$$

D'en haut $\delta^{-\frac{1}{q_\infty}} \lesssim \delta^{-\frac{1}{q(x)}}$, puis avec un choix approprié de $c > 0$ on a

$$\left\| c\delta^{-\frac{1}{q_\infty}} 2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k \right\|_{p(\cdot)} \leq \left\| \delta^{-\frac{1}{q(\cdot)}} 2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k \right\|_{p(\cdot)}.$$

Du côté gauche est inférieure ou égale à 1 si et seulement si $\left\| \delta^{-\frac{1}{q(\cdot)}} 2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k \right\|_{p(\cdot)} = 1$ qui est équivalent à

$$\left\| \left| \delta^{-\frac{1}{q(\cdot)}} 2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k \right|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \leq \delta^{-1} \left\| \left| 2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k \right|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}}.$$

Pour estimer la dernière inégalité nous avons $\left\| \left| 2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k \right|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \leq \delta$, alors

$$\begin{aligned} \left\| \left| \delta^{-\frac{1}{q(\cdot)}} 2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k \right|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} &\leq \delta^{-1}\delta \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Finalement on concluons $\sum_{k=1}^{\infty} \left\| c2^{k\alpha_\infty} f\chi_k \right\|_{p(\cdot)}^{q_\infty} \lesssim 1$. Donc

$$K_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow K_{p(\cdot),q_\infty}^{\alpha_\infty}(\mathbb{R}^n).$$

**Étape 3**. (**i**) On prouver que

$$\left\| \left\{ 2^{k\alpha(0)} f\chi_k \right\} \right\|_{\ell_<^{q(0)}(L^{p(\cdot)})} + \left\| \left\{ 2^{k\alpha_\infty} f\chi_k \right\} \right\|_{\ell_>^{q_\infty}(L^{p(\cdot)})} \lesssim \|f\|_{\dot{K}_{p(\cdot),q}^{\alpha(\cdot)}}.$$

On supposons que $\|f\|_{\dot{K}_{p(\cdot),q}^{\alpha(\cdot)}} \leq 1$.avec $\alpha \in \mathcal{P}_0^{\ln}(\mathbb{R}^n)$, alors pour $k < 0$, et $x \in R_k$ nous avons $2^{k\alpha(x)} \approx 2^{k\alpha(0)}$ et par conséquent

$$\left\| \left\{ 2^{k\alpha(0)} f\chi_k \right\} \right\|_{\ell_<^{q(0)}(L^{p(\cdot)})} \approx \left\| \left\{ 2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k \right\} \right\|_{\ell_<^{q(0)}(L^{p(\cdot)})}.$$

Avec

$$\left\| \left\{ 2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k \right\} \right\|_{\ell_<^{q(0)}(L^{p(\cdot)})} = \left( \sum_{k=-\infty}^{-1} \left\| 2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k \right\|_{p(\cdot)}^{q(0)} \right)^{1/q(0)}.$$

Comme à l'étape 2, nous avons prouver que

$$\left\| c2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k \right\|_{p(\cdot)}^{q(0)} \leq \left\| \left| 2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k \right|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} + 2^k.$$

Pour tout $k<0$, et pour une constante $c>0$, on a

$$\left\|\left\{2^{k\alpha(0)}f\chi_k\right\}\right\|_{\ell_<^{q(0)}\left(L^{p(\cdot)}\right)} \lesssim 1.$$

En utilisant l'estimation (2.1.5) on obtient

$$\left\|\left\{2^{k\alpha_\infty}f\chi_k\right\}\right\|_{\ell_>^{q_\infty}\left(L^{p(\cdot)}\right)} \lesssim 1.$$

Donc

$$\left\|\left\{2^{k\alpha(0)}f\chi_k\right\}\right\|_{\ell_<^{q(0)}\left(L^{p(\cdot)}\right)} + \left\|\left\{2^{k\alpha_\infty}f\chi_k\right\}\right\|_{\ell_>^{q_\infty}\left(L^{p(\cdot)}\right)} \lesssim 1.$$

L'estimation désirée peut être obtenue par l'argument de mise à l'échelle.

(**ii**) On prouver que

$$\|f\|_{\dot{K}^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q}} \lesssim \left\|\left\{2^{k\alpha(0)}f\chi_k\right\}\right\|_{\ell_<^{q(0)}\left(L^{p(\cdot)}\right)} + \left\|\left\{2^{k\alpha_\infty}f\chi_k\right\}\right\|_{\ell_>^{q_\infty}\left(L^{p(\cdot)}\right)}.$$

Maintenant nous avons

$$\left\|\left\{2^{k\alpha(0)}f\chi_k\right\}\right\|_{\ell_<^{q(0)}\left(L^{p(\cdot)}\right)} \leq 1 \text{ et } \left\|\left\{2^{k\alpha_\infty}f\chi_k\right\}\right\|_{\ell_>^{q_\infty}\left(L^{p(\cdot)}\right)} \leq 1.$$

Comme à l'étape 1 nous avons pour tout $k<0$, et pour une constante $c>0$, on a

$$\left\|\left|c2^{k\alpha(\cdot)}f\chi_k\right|^{q(\cdot)}\right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \leq \left\|2^{k\alpha(0)}f\chi_k\right\|_{p(\cdot)}^{q(0)} + 2^k.$$

En utilisant l'estimation (2.1.3) on obtient

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left\|\left|2^{k\alpha(\cdot)}f\chi_k\right|^{q(\cdot)}\right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \lesssim 1.$$

Donc, $\|f\|_{\dot{K}^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q}} \leq 1$. Finalement de (**i**) et (**ii**) on concluons

$$\|f\|_{\dot{K}^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q}} = \left\|\left\{2^{k\alpha(0)}f\chi_k\right\}\right\|_{\ell_<^{q(0)}\left(L^{p(\cdot)}\right)} + \left\|\left\{2^{k\alpha_\infty}f\chi_k\right\}\right\|_{\ell_>^{q_\infty}\left(L^{p(\cdot)}\right)}.$$

Ce qui termine la preuve. ∎

## 2.2 Inclusions

Le théorème suivante donne quelques inclusions élementaires.

**Théorème 2.2.1** *Soient* $\alpha, \alpha_0, \alpha_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *et* $q_0, q_1 \in (0, \infty]$.

(**i**) *Si* $q_0 \leq q_1$. *Alors*

$$K^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q_0}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow K^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q_1}(\mathbb{R}^n) \quad et \quad \dot{K}^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q_0}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{K}^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q_1}(\mathbb{R}^n) \ .$$

(**ii**) *Si* $(\alpha_0 - \alpha_1)^- > 0$. *Alors*

$$K^{\alpha_0(\cdot)}_{p(\cdot),q_0}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow K^{\alpha_1(\cdot)}_{p(\cdot),q_1}(\mathbb{R}^n).$$

**Preuve.** (**i**) Par l'inclusion $\ell^{q_0} \subset \ell^{q_1}$ (**ii**) D'après (**i**), on a ce qu'indique encore par $q_0, q_1 \in (0, \infty]$. Pour prouver l'intégration (**ii**), il suffit de considérer $q_1$ finie . Ensuite nous avons

$$\left\| \left\| 2^{k\alpha_1(\cdot)} f\chi_k \right\|_{p(\cdot)} \right\|_{\ell^{q_1}(\mathbb{N})} \leq c_1 \left\| \left\| 2^{k\alpha_0(\cdot)} f\chi_k \right\|_{p(\cdot)} \right\|_{\ell^{\infty}(\mathbb{N})} \leq c_1 \left\| \left\| 2^{k\alpha_0(\cdot)} f\chi_k \right\|_{p(\cdot)} \right\|_{\ell^{q_0}(\mathbb{N})}.$$

Ce qui implique

$$\left\| \left( 2^{k\alpha_1(\cdot)} f\chi_k \right)_{k \geq 1} \right\|_{\ell^{q_1}\left(L^{p(\cdot)}\right)} \leq c_1 \left\| \left( 2^{k\alpha_0(\cdot)} f\chi_k \right)_{k \geq 1} \right\|_{\ell^{q_0}\left(L^{p(\cdot)}\right)}.$$

Avec $c_1^{q_1} = \sum_{k \geq 1} 2^{-kq_1(\alpha_0 - \alpha_1)^-} < \infty$. Donc

$$K^{\alpha_0(\cdot)}_{p(\cdot),q_0}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow K^{\alpha_1(\cdot)}_{p(\cdot),q_1}(\mathbb{R}^n).$$

Ce qui termine la preuve. ■

La proposition suivante donne des résultats plus incorporation, maintenant dans le cas où l'indice d'intégration principale est modifiée.

**Proposition 2.2.1** *Soit* $\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $p_0, p_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *et* $q \in (0, \infty]$. *Si* $p_0 \leq p_1$ *et* $\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} \in \mathcal{P}^{\ln}_\infty(\mathbb{R}^n)$, *alors*

$$K^{\alpha(\cdot)+n/p_0(\cdot)-n/p_1(\cdot)}_{p_1(\cdot),q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow K^{\alpha(\cdot)}_{p_0(\cdot),q}(\mathbb{R}^n).$$

*En autre, si* $\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} \in \mathcal{P}^{\ln}_0(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}^{\ln}_\infty(\mathbb{R}^n)$, *puis*

$$\dot{K}^{\alpha(\cdot)+n/p_0(\cdot)-n/p_1(\cdot)}_{p_1(\cdot),q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{K}^{\alpha(\cdot)}_{p_0(\cdot),q}(\mathbb{R}^n).$$

**Preuve.** Soit $\frac{1}{t(x)} = \frac{1}{p_0(x)} - \frac{1}{p_1(x)}$. Par l'inégalité de Hölder nous avons

$$\left\|2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k\right\|_{p_0(\cdot)} \leq 2\left\|2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k\right\|_{p_1(\cdot)} \|\chi_k\|_{t(\cdot)} = 2\left\|2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k \|\chi_k\|_{t(\cdot)}\right\|_{p_1(\cdot)}.$$

Alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et par le lemme 1.3.3, on obtient l'équivalence

$$2^{k\alpha(x)} |f(x)| \|\chi_k\|_{t(\cdot)} \approx 2^{k\alpha(x)} |f(x)| |R_k|^{\frac{1}{t(x)}}, \quad k \in \mathbb{Z}, x \in R_k,$$

où les constantes sont indépendantes de $k$ et $x$ avec $|R_k|^{\frac{1}{t(x)}} \approx 2^{\frac{kn}{t(x)}}$, on obtient l'estimation

$$\left\|2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k\right\|_{p_0(\cdot)} \lesssim \left\|2^{k\alpha(\cdot)+kn(1/p_0(\cdot)-1/p_1(\cdot))} f\chi_k\right\|_{p_1(\cdot)}.$$

Prenant maintenant $\ell^q$ est une quasi-norme donc

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\|2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k\right\|_{p_0(\cdot)}^q\right)^{1/q} \lesssim \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\|2^{k\alpha(\cdot)+kn(1/p_0(\cdot)-1/p_1(\cdot))} f\chi_k\right\|_{p_1(\cdot)}^q\right)^{1/q}.$$

Donc

$$\dot{K}_{p_1(\cdot),q}^{\alpha(\cdot)+n/p_0(\cdot)-n/p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{K}_{p_0(\cdot),q}^{\alpha(\cdot)}(\mathbb{R}^n).$$

Pour tout $k \geq 1$.On a

$$\left\|f\chi_{B_0}\right\|_{p_0(\cdot)} + \left(\left\|2^{k\alpha(\cdot)} f\chi_k\right\|_{p_0(\cdot)}\right)^{1/q} \lesssim \left\|f\chi_{B_0}\right\|_{p_1(\cdot)} + \left(\left\|2^{k\alpha(\cdot)+kn(1/p_0(\cdot)-1/p_1(\cdot))} f\chi_k\right\|_{p_1(\cdot)}\right)^{1/q}.$$

Donc

$$K_{p_1(\cdot),q}^{\alpha(\cdot)+n/p_0(\cdot)-n/p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow K_{p_0(\cdot),q}^{\alpha(\cdot)}(\mathbb{R}^n).$$

Ce qui termine la preuve. ■

**Remarque 2.2.1** *On considère l'inclusion de type Herz, pour des exposants constantes il bien connu que*

$$K_{p_0,q}^{\alpha_0} \hookrightarrow K_{p_1,q}^{\alpha_1}.$$

*Si* $\alpha_0 - \frac{1}{p_0} = \alpha_1 - \frac{1}{p_1}$, *où* $0 < p_0 \leq p_1 \leq \infty, 0 < q \leq \infty, -\infty < \alpha_1 \leq \alpha_0 < \infty$.

**Corollaire 2.2.1** *Soit* $p_0, p_1 \in \mathcal{P}_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$. *Si* $p_0 \leq p_1$ *alors*

$$L^\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow K_{p_1(\cdot),\infty}^{-n/p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow K_{p_0(\cdot),\infty}^{-n/p_0(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow K_{1,\infty}^{-n}(\mathbb{R}^n)$$

*et*

$$K_{1,\infty}^{n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow K_{p_1(\cdot),1}^{n/p'_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow K_{p_0(\cdot),1}^{n/p'_0(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow K_{1,1}^{0}(\mathbb{R}^n) = L^1(\mathbb{R}^n).$$

*Plongements même tiennent dans le cas homogène si* $p_0, p_1 \in \mathcal{P}_0^{\log}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$.

**Preuve.** Prendre les exposants constants $r, s$ tel que $1 \leq r \leq p_0^- \leq p_1^+ \leq s < \infty$. Depuis $p_0, p_1 \in \mathcal{P}_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$, de sorte qu'ils ne $\frac{1}{p_1} - \frac{1}{s}, \frac{1}{r} - \frac{1}{p_0}$ et $\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}$. Alors par la proposition précédent on a

$$K_{s,\infty}^{-n/s}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow K_{p_1(\cdot),\infty}^{-n/p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow K_{p_0(\cdot),\infty}^{-n/p_0(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow K_{r,\infty}^{-n/r}(\mathbb{R}^n).$$

D'où la première chaîne de plongements suit en tenant compte des affirmations classiques

$$L^\infty(\mathbb{R}^n) = K_{\infty,\infty}^0(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow K_{s,\infty}^{-n/s}(\mathbb{R}^n) \text{ et } K_{r,\infty}^{-n/r}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow K_{1,\infty}^{-n}(\mathbb{R}^n).$$

Donc

$$L^\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow K_{p_1(\cdot),\infty}^{-n/p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow K_{p_0(\cdot),\infty}^{-n/p_0(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow K_{1,\infty}^{-n}(\mathbb{R}^n).$$

La seconde chaîne de encastrements peut être prouvé d'une manière similaire. Ce qui termine la preuve. ■

# Chapitre 3

# Continuité de certains opérateurs sur les espaces de Herz avec des exposants variables

Dans ce chapitre, nous montrons la continuité de certains opérateurs sur les espaces Herz avec l'exposant variables sous des hypothèses appropriées.

## 3.1 Rappel sur les fonctions maximales de Hardy-Littlewood

**Définition 3.1.1** *A toute fonctions localement intégrable $f$ sur $\mathbb{R}^n$. On associe sa fonction maximal de Hardy-littlewood $\mathcal{M}f(x)$ telle que*

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy.$$

*Où* $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| < r\}$.

**Remarque 3.1.1** *:*

1. *La fonction maximale est une fonction mesurable.*
2. *Si* $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *et* $\alpha > 0$, *alors*

$$\mathcal{M}(f+g) \le \mathcal{M}(f) + \mathcal{M}(g), \text{ et } \mathcal{M}(\alpha f) = |\alpha| \mathcal{M}(f).$$

3. $\mathcal{M}_t f = \mathcal{M}\left|f\right|^t$ *pour tout* $0 < t \leq 1.$

**Définition 3.1.2** *On pose*

$$Mf(x) = \sup_{x\in B} \frac{1}{|B|}\int_B |f(z)|\, dz.$$

*Donc* $\mathcal{M}f(x) \approx Mf(x)$.

**Proposition 3.1.1** *Soit* $1 < p \leq \infty$ *. Alors il existe une constante* $c = c(n,p) > 0$ *telle que pour tout* $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *on a*

$$\|\mathcal{M}g\|_p \leq c\,\|g\|_p\,.$$

**Preuve.** Voir [26] ∎

**Théorème 3.1.1** *La fonction maximale* $\mathcal{M} : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ *pour* $1 < p \leq \infty$.

**Remarque 3.1.2** *La fonction maximale* $\mathcal{M} : L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ *pour* $p \in \mathcal{P}^{\log}$*, et* $p_- > 1$.

Pour la preuve (voir [10, Théorème 4.3.8]).

## 3.2 Continuité

On considérons les opérateurs suos-linéaire satisfaisant à la condition de taille

$$|Tf(x)| \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n} dy, \qquad x \notin \operatorname{supp} f \tag{3.2.1}$$

pour les fonctions intégrables et support compact de $f$. Cette condition a été considérée par [13] et il est satisfait par plusieurs opérateurs classiques dans l'analyse harmonique, comme les opérateurs Calderón-Zygmund et la fonction maximale de Hardy-Littlewood. En effet si $x \in B(x_0, r)$ avec $x \notin \operatorname{supp} f$ et $y \in B(x_0, r) \cap \operatorname{supp} f$ on a $|x-y| \leq |x-x_0| + |y-x_0| \leq 2r$ et donc on obtient le resultats.

**Théorème 3.2.1** *Soient $q \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ et $p \in \mathcal{P}_\infty^{\ln}(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p^- \leq p^+ < \infty$,et soit $\alpha$, $q \in \mathcal{P}_\infty^{\ln}(\mathbb{R}^n)$, avec $\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et*

$$-\frac{n}{p_\infty} < \alpha < \frac{n}{p'_\infty}. \tag{3.2.2}$$

*Supposons que $T$ est un l'opérateur sous-linéaire satisfaisant (3.2.1). Si $T$ est borné dans $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, alors $T$ est borné dans $K_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

**Preuve.** La preuve sur les deux étapes.

**Étape 1**. Nous allons prouver que: $\|Tf\|_{K_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}} \lesssim \|f\|_{K_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}}$. A partir la proposition 2.1.1 on utilisons la quasi-norme équivalente $\|f\|_{K_{p(\cdot),q_\infty}^{\alpha_\infty}}$. Nous avons divisé l'opérateur en

$$|Tf(x)| \lesssim \left|T\left(f\chi_{B_{-2}}\right)(x)\right| + \left|T\left(f\chi_{B_{k-2}\backslash B_{-2}}\right)(x)\right| + \left|T\left(f\chi_{\tilde{R}_k}\right)(x)\right| + \left|T\left(f\chi_{\mathbb{R}^n\backslash B_{k+2}}\right)(x)\right|.$$

où $\tilde{R}_k := \left\{x \in \mathbb{R}^n : 2^{k-2} \leq |x| < 2^{k+2}\right\}$, avec $k \in \mathbb{N}$.

**Estimation de** $T\left(f\chi_{B_{-2}}\right)$. On a pour $x \in R_k$ et $y \in B_{-2}$, nous avons $|x-y| \geq |x| - |y| > 2^{k-2}$ et par l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned}
\left|T\left(f\chi_{B_{-2}}\right)(x)\right| &\lesssim \int_{B_{-2}} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n} dy \lesssim 2^{-kn} \int_{B_{-2}} |f(y)|\, dy \\
&\lesssim 2^{-kn} \left\|f\chi_{B_{-2}}\right\|_{p(\cdot)} \left\|\chi_{B_{-2}}\right\|_{p'(\cdot)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\left|T\left(f\chi_{B_{-2}}\right)(x)\right| \lesssim 2^{-kn} \left\|f\chi_{B_{-2}}\right\|_{p(\cdot)}, \text{ pour } x \in R_k.$$

Avec une constante indépendante de $k$ et $x$. Prenant $L^{p(\cdot)}$ est une norme nous obtenons

$$\begin{aligned}
2^{k\alpha_\infty} \left\|\chi_k T\left(f\chi_{B_{-2}}\right)\right\|_{p(\cdot)} &\lesssim 2^{k(\alpha_\infty - n)} \left\|\chi_k f\chi_{B_{-2}}\right\|_{p(\cdot)} \\
&\lesssim 2^{k\left(\alpha_\infty - n + \frac{n}{p_\infty}\right)} \left\|f\chi_{B_{-2}}\right\|_{p(\cdot)} \\
&\lesssim 2^{k\left(\alpha_\infty - n + \frac{n}{p_\infty}\right)} \left\|f\chi_{B_0}\right\|_{p(\cdot)}.
\end{aligned}$$

Avec (par le lemme 1.3.3) $\|\chi_k\|_{p(\cdot)} = \left\|\chi_{R_k}\right\|_{p(\cdot)} \approx |R_k|^{\frac{1}{p_\infty}} \approx 2^{\frac{kn}{p_\infty}}$ et $\left\|f\chi_{B_{-2}}\right\|_{p(\cdot)} \leq \left\|f\chi_{B_0}\right\|_{p(\cdot)}$. Prenant maintenant $\ell^{q_\infty}$ est une quasi-norme donc

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k\geq 1} 2^{k\alpha_\infty q_\infty} \left\|\chi_k T\left(f\chi_{B_{-2}}\right)\right\|_{p(\cdot)}^{q_\infty}\right)^{1/q_\infty} &\lesssim \left(\sum_{k\geq 1} 2^{kq_\infty\left(\alpha_\infty - n + \frac{n}{p_\infty}\right)} \left\|f\chi_{B_0}\right\|_{p(\cdot)}^{q_\infty}\right)^{1/q_\infty} \\
&\lesssim c_0 \left(\sum_{k\geq 1} \left\|f\chi_{B_0}\right\|_{p(\cdot)}^{q_\infty}\right)^{1/q_\infty} \\
&\leq c_0 \|f\|_{K_{p(\cdot),q_\infty}^{\alpha_\infty}}.
\end{aligned}$$

Avec $c_0^{q_\infty} = \sum_{k\geq 1} 2^{kq_\infty\left(\alpha_\infty - n + \frac{n}{p_\infty}\right)} < \infty$.

**Estimation de** $T\left(f\chi_{B_{k-2}\setminus B_{-2}}\right)$. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in R_k$, Alors nous écrivons

$$\begin{aligned}\left|T\left(f\chi_{B_{k-2}\setminus B_{-2}}\right)(x)\right| &\lesssim \int_{B_{k-2}\setminus B_{-2}} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n} dy \\ &= \sum_{-1\leq j\leq k-2} \int_{R_j} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n} dy.\end{aligned}$$

Pour estimer la dernière intégrale on a $|x-y| \geq |x| - |y| > \frac{2^k}{4}$, si $x \in R_k$ et $y \in R_j$, donc

$$\begin{aligned}2^{k\alpha_\infty}\left|T\left(f\chi_{B_{k-2}\setminus B_{-2}}\right)(x)\right| &\lesssim \sum_{-1\leq j\leq k-2} 2^{k\alpha_\infty} \int_{R_j} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n} dy. \\ &\lesssim \sum_{-1\leq j\leq k-2} 2^{(k-j)\alpha_\infty - kn} 2^{j\alpha_\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, \chi_j(y)\, dy,\ \ x \in R_k.\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, \chi_j(y)\, dy \leq 2 \left\|f\chi_j\right\|_{p(\cdot)} \left\|\chi_j\right\|_{p'(\cdot)}.$$

Prenant maintenant $L^{p(\cdot)}$ est une norme nous obtenons

$$2^{k\alpha_\infty}\left\|\chi_k T\left(f\chi_{B_{k-2}\setminus B_{-2}}\right)\right\|_{p(\cdot)} \lesssim \sum_{-1\leq j\leq k-2} 2^{(k-j)\alpha_\infty - kn} 2^{j\alpha_\infty} \left\|f\chi_j\right\|_{p(\cdot)} \left\|\chi_j\right\|_{p'(\cdot)} \left\|\chi_k\right\|_{p(\cdot)}.$$

Pour estimer la dernière inégalité en utilisant le lemme 1.3.3 avec

$$\left\|\chi_k\right\|_{p(\cdot)} \approx |R_k|^{\frac{1}{p_\infty}} \approx 2^{\frac{kn}{p_\infty}} \text{ et } \left\|\chi_j\right\|_{p'(\cdot)} \approx |R_j|^{\frac{1}{p'_\infty}} \approx 2^{\frac{jn}{p'_\infty}}.$$

Par conséquent, pour chaque $k \in \mathbb{N}$,et d'après l'hypothèse (3.2.2) on trouve

$$\begin{aligned}2^{k\alpha_\infty}\left\|\chi_k T\left(f\chi_{B_{k-2}\setminus B_{-2}}\right)\right\|_{p(\cdot)} &\lesssim \sum_{-1\leq j\leq k-2} 2^{(k-j)\alpha_\infty - kn} 2^{j\alpha_\infty} \left\|f\chi_j\right\|_{p(\cdot)} |R_j|^{\frac{1}{p'_\infty}} |R_k|^{\frac{1}{p_\infty}} \\ &\lesssim \sum_{-1\leq j\leq k-2} 2^{(k-j)\alpha_\infty - kn} 2^{j\alpha_\infty} 2^{\frac{jn}{p'_\infty}} 2^{\frac{kn}{p_\infty}} \left\|f\chi_j\right\|_{p(\cdot)} \\ &\lesssim \sum_{-1\leq j\leq k-2} 2^{(k-j)\delta} 2^{j\alpha_\infty} \left\|f\chi_j\right\|_{p(\cdot)}.\end{aligned}$$

telle que $\delta = \alpha_\infty - n + \frac{n}{p_\infty}$.Prenant maintenant $\ell^{q_\infty}$ est une quasi-norme donc

$$
\begin{aligned}
&\left\{\sum_{k\geq 1} 2^{k\alpha_\infty q_\infty} \left\|\chi_k T\left(f\chi_{B_{k-2}\setminus B_{-2}}\right)\right\|_{p(\cdot)}^{q_\infty}\right\}^{\frac{1}{q_\infty}} \\
\lesssim\ & \left\{\sum_{k\geq 1}\left(\sum_{-1\leq j\leq k-2} 2^{(k-j)\delta}2^{j\alpha_\infty}\left\|f\chi_j\right\|_{p(\cdot)}\right)^{q_\infty}\right\}^{\frac{1}{q_\infty}} \\
\lesssim\ & \left\{\sum_{k\geq 1}\left(2^{(k+1)\delta}2^{-\alpha_\infty}\left\|f\chi_{-1}\right\|_{p(\cdot)} + 2^{\delta k}\left\|f\chi_0\right\|_{p(\cdot)} + \sum_{1\leq j\leq k} 2^{(k-j)\delta}2^{j\alpha_\infty}\left\|f\chi_j\right\|_{p(\cdot)}\right)^{q_\infty}\right\}^{\frac{1}{q_\infty}}.
\end{aligned}
$$

Depuis $\alpha$ est bornée et $\chi_{-1}$,de même $\chi_0 \lesssim \chi_{B_0}$ donc le côté droit de la dernière inégalité est majoré par

$$
c_0\left\|f\chi_0\right\|_{p(\cdot)} + \left\{\sum_{k\geq 1}\left(\sum_{1\leq j\leq k} 2^{(k-j)\delta}2^{j\alpha_\infty}\left\|f\chi_j\right\|_{p(\cdot)}\right)^{q_\infty}\right\}^{\frac{1}{q_\infty}}.
$$

Par l'hypothèse (3.2.2) on a $\delta = \left(\alpha_\infty - n + \frac{n}{p_\infty}\right) < 0$, donc $c_0^{q_\infty} = \sum_{k\geq 1} 2^{\delta k q_\infty} < \infty$. A partir le lemme 1.3.1 on a

$$
\left\{\sum_{k\geq 1} 2^{k\alpha_\infty q_\infty}\left\|\chi_k T\left(f\chi_{B_{k-2}\setminus B_{-2}}\right)\right\|_{p(\cdot)}^{q_\infty}\right\}^{\frac{1}{q_\infty}} \lesssim \left\|f_{B_0}\right\|_{p(\cdot)} + \left\{\sum_{j\geq 1} 2^{j\alpha_\infty q_\infty}\left\|f\chi_j\right\|_{p(\cdot)}^{q_\infty}\right\}^{\frac{1}{q_\infty}} = \|f\|_{K^{\alpha_\infty}_{p(\cdot),q_\infty}}.
$$

**Estimation de** $T\left(f\chi_{\tilde{R}_k}\right)$. Utilisé la continuité de $T$ sur $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, et le fait que $\chi_{\tilde{R}_k} = \sum_{j=-1}^{2}\chi_{k+j}$, on obtient l'estimation

$$
\left\|T\left(f\chi_{\tilde{R}_k}\right)\chi_k\right\|_{p(\cdot)} \lesssim \left\|T\left(f\chi_{\tilde{R}_k}\right)\right\|_{p(\cdot)} \lesssim \left\|f\chi_{\tilde{R}_k}\right\|_{p(\cdot)} \lesssim \sum_{j=-1}^{2}\left\|f\chi_{k+j}\right\|_{p(\cdot)}.
$$

On obtient

$$
\left\{\sum_{k\geq 1} 2^{k\alpha_\infty q_\infty}\left\|T\left(f\chi_{\tilde{R}_k}\right)\chi_k\right\|_{p(\cdot)}^{q_\infty}\right\}^{1/q_\infty}
$$

est majoré par

$$
\begin{aligned}
& c\left\{\sum_{k\geq 1}\sum_{-1\leq j\leq 2} 2^{(k+j)\alpha_\infty q_\infty}\left\|f\chi_{k+j}\right\|_{p(\cdot)}^{q_\infty}\right\}^{1/q_\infty} \\
=\ & \left\{\sum_{-1\leq j\leq 2} 2^{(1+j)\alpha_\infty q_\infty}\left\|f\chi_{1+j}\right\|_{p(\cdot)}^{q_\infty} + \sum_{k\geq 2}\sum_{-1\leq j\leq 2} 2^{(k+j)\alpha_\infty q_\infty}\left\|f\chi_{k+j}\right\|_{p(\cdot)}^{q_\infty}\right\}^{1/q_\infty}
\end{aligned}
$$

Cette terme est majoreé par

$$\begin{aligned}
& \|f\chi_0\|_{p(\cdot)}^{q_\infty} + \sum_{0\le j\le 2} 2^{(1+j)\alpha_\infty q_\infty} \left\|f\chi_{1+j}\right\|_{p(\cdot)}^{q_\infty} + \sum_{k\ge 2} 2^{(k-1)\alpha_\infty q_\infty} \left\|f\chi_{k-1}\right\|_{p(\cdot)}^{q_\infty} \\
& + \sum_{k\ge 2}\sum_{0\le j\le 2} 2^{(k+j)\alpha_\infty q_\infty} \left\|f\chi_{k+j}\right\|_{p(\cdot)}^{q_\infty} \\
\le\ & \|f\chi_0\|_{p(\cdot)}^{q_\infty} + \sum_{0\le j\le 2} 2^{(1+j)\alpha_\infty q_\infty} \left\|f\chi_{1+j}\right\|_{p(\cdot)}^{q_\infty} + \sum_{k\ge 2} 2^{(k-1)\alpha_\infty q_\infty} \left\|f\chi_{k-1}\right\|_{p(\cdot)}^{q_\infty} \\
& + \sum_{l\ge 2}\sum_{0\le j\le 2} 2^{l\alpha_\infty q_\infty} \|f\chi_l\|_{p(\cdot)}^{q_\infty} \\
\lesssim\ & \|f\chi_0\|_{p(\cdot)}^{q_\infty} + \sum_{l\ge 2} 2^{l\alpha_\infty q} \|f\chi_l\|_{p(\cdot)}^{q_\infty} \\
\lesssim\ & \|f\|_{K_{p(\cdot),q_\infty}^{\alpha_\infty}}^{q_\infty}.
\end{aligned}$$

**Estimation de** $T\left(f\chi_{\mathbb{R}^n\backslash B_{k+2}}\right)$. Les arguments ici sont tout à fait semblables à ceux utilisés dans l'estimation des $T\left(f\chi_{B_{k-2}\backslash B_{-2}}\right)$. Soit $k\in\mathbb{N}$ et $x\in R_k$ ,alors nous écrivons

$$\left|T\left(f\chi_{\mathbb{R}^n\backslash B_{k+2}}\right)(x)\right| \lesssim \int_{\mathbb{R}^n\backslash B_{k+2}} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n}dy = \sum_{j\ge k+3}\int_{R_j}\frac{|f(y)|}{|x-y|^n}dy.$$

Pour estimer la dernière intégrale nous notons que $|x-y|\ge|x|-|y|>2^{j-3}$. Pour $x\in R_k$ et $y\in R_j$, comme dans le second cas, nous utilisons successivement l'inégalité de Hölder et le Lemme 1.3.3. On a pour $x\in R_k$

$$\begin{aligned}
2^{k\alpha_\infty}\left|T\left(f\chi_{\mathbb{R}^n\backslash B_1}\right)(x)\right| &\lesssim \sum_{j\ge k+3} 2^{k\alpha_\infty}\int_{R_j}\frac{|f(y)|}{|x-y|^n}dy. \\
&\lesssim \sum_{j\ge k+3} 2^{(k-j)\alpha_\infty - nj} 2^{j\alpha_\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|\,\chi_j(y)\,dy.
\end{aligned}$$

Prenant maintenant $L^{p(\cdot)}$ est une norme nous obtenons

$$\begin{aligned}
2^{k\alpha_\infty}\left\|\chi_k T\left(f\chi_{_{\mathbb{R}^n\backslash B_{k+2}}}\right)\right\|_{p(\cdot)} &\lesssim \sum_{j\ge k+3} 2^{(k-j)\alpha_\infty - nj}2^{j\alpha_\infty}\left\|f\chi_j\right\|_{p(\cdot)}\left\|\chi_j\right\|_{p'(\cdot)}\|\chi_k\|_{p(\cdot)} \\
&\lesssim \sum_{j\ge k+3} 2^{(k-j)\left(\alpha_\infty+\frac{n}{p_\infty}\right)}2^{j\alpha_\infty}\left\|f\chi_j\right\|_{p(\cdot)}
\end{aligned}$$

Par l'hypothèse (3.2.2) on a $\delta = \left(\alpha_\infty + \frac{n}{p_\infty}\right) > 0$. Prenant maintenant $\ell^{q_\infty}$ est une quasi-norme donc à partir le lemme 1.3.1, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left\{\sum_{k\geq 1} 2^{k\alpha_\infty q_\infty} \left\|\chi_k T\left(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_{k+2}}\right)\right\|_{p(\cdot)}^{q_\infty}\right\}^{\frac{1}{q_\infty}} \\
\lesssim\ & \left\{\sum_{k\geq 1}\left(\sum_{j\geq k+3} 2^{(k-j)\left(\alpha_\infty+\frac{n}{p_\infty}\right)} 2^{j\alpha_\infty}\left\|f\chi_j\right\|_{p(\cdot)}\right)^{q_\infty}\right\}^{\frac{1}{q_\infty}} \\
\lesssim\ & \left\{\sum_{j\geq 1} 2^{j\alpha_\infty q_\infty}\left\|f\chi_j\right\|_{p(\cdot)}^{q_\infty}\right\}^{\frac{1}{q_\infty}} \\
\leq\ & \|f\|_{K^{\alpha_\infty}_{p(\cdot),q_\infty}}.
\end{aligned}$$

Avec $\sum_{j\geq k+3} 2^{(k-j)\left(\alpha_\infty+\frac{n}{p_\infty}\right)q_\infty} < \infty$.

**Étape 2**. Nous allons prouver que : $\left\|(Tf)\,\chi_{B_0}\right\|_{p(\cdot)} \lesssim \|f\|_{K^{\alpha_\infty}_{p(\cdot),q_\infty}}$. Alors on divisé l'opérateur en

$$|Tf(x)| \lesssim \left|T\left(f\chi_{B_0}\right)(x)\right| + \left|T\left(f\chi_{B_{k-2}\setminus B_{-2}}\right)(x)\right| + \left|T\left(f\chi_1\right)(x)\right| + \left|T\left(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_1}\right)(x)\right|.$$

Par l'hypothèse $T$ est continue sur $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\left\|T\left(f\chi_{B_0}\right)\chi_{B_0}\right\|_{p(\cdot)} \lesssim \left\|T\left(f\chi_{B_0}\right)\right\|_{p(\cdot)} \lesssim \left\|f\chi_{B_0}\right\|_{p(\cdot)} \lesssim \|f\|_{K^{\alpha_\infty}_{p(\cdot),q_\infty}}.$$

et

$$\left\|T\left(f\chi_1\right)\chi_{B_0}\right\|_{p(\cdot)} \lesssim \left\|T\left(f\chi_1\right)\right\|_{p(\cdot)} \lesssim 2^{\alpha_\infty}\left\|f\chi_1\right\|_{p(\cdot)} \lesssim \|f\|_{K^{\alpha_\infty}_{p(\cdot),q_\infty}}.$$

Pour estimer la $\left|T\left(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_1}\right)(x)\right|$ ,on notons que $|x-y| \geq |x|-|y| > 2^{k-2}$, pour $x \in B_0$ et $y \in R_k$ ,et en déduire que

$$\left|T\left(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_1}\right)(x)\right| \lesssim \sum_{k\geq 2} 2^{-kn}\int_{R_k}|f(y)|\,dy.$$

par l'inégalité de *Hölder* et par le lemme 1.3.3, nous avons

$$\left|T\left(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_1}\right)(x)\right| \lesssim \sum_{k\geq 2} 2^{-k\left(\alpha_\infty+\frac{1}{p_\infty}\right)} 2^{k\alpha_\infty}\left\|f\chi_k\right\|_{p(\cdot)} \leq c_1 \sup_{j\in\mathbb{N}} 2^{j\alpha_\infty}\left\|f\chi_j\right\|_{p(\cdot)},$$

avec $c_1 = \sum_{k\geq 2} 2^{-k\left(\alpha_\infty+\frac{1}{p_\infty}\right)} < \infty$, car $\alpha_\infty + \frac{1}{p_\infty} > 0$.Ainsi, nous obtenons

$$\left\|T\left(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_1}\right)\chi_{B_0}\right\|_{p(\cdot)} \lesssim 2^{j\alpha_\infty}\left\|f\chi_j\right\|_{p(\cdot)}\left\|\chi_{B_0}\right\|_{p(\cdot)} \lesssim \|f\|_{K^{\alpha_\infty}_{p(\cdot),q_\infty}}.$$

Finalement

$$\left\|(Tf)\,\chi_{B_0}\right\|_{p(\cdot)} \lesssim \|f\|_{K^{\alpha_\infty}_{p(\cdot),q_\infty}}.$$

La preuve est terminée. ■

Pour les espaces homogènes, nous avons la déclaration suivante:

**Théorème 3.2.2** *Soient $q \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ et $p \in \mathcal{P}_0^{\ln}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}_\infty^{\ln}(\mathbb{R}^n)$, avec $1 \leq p^- \leq p^+ < \infty$,et soit $\alpha$, $q \in \mathcal{P}_0^{\log}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$, avec $\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et*

$$-\frac{n}{p^+} < \alpha^- \leq \alpha^+ < n\left(1 - \frac{1}{p^-}\right). \tag{3.2.3}$$

*Supposons que $T$ est un l'opérateur sous-linéaire satisfaisant (3.2.1) .Si $T$ est borné dans $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, alors $T$ est borné dans $\dot{K}^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.*

**Preuve.** Nous allons prouver que: $\|Tf\|_{\dot{K}^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}} \lesssim \|f\|_{\dot{K}^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}}$ .A partir la proposition 2.1.1 on utilisons la quasi-norme équivalente $\|f\|_{\dot{K}^{\alpha_\infty}_{p(\cdot),q_\infty}}$ . Nous avons divisé l'opérateur en

$$|Tf(x)| \lesssim \left|T\left(f\chi_{B_{k-2}}\right)(x)\right| + \left|T\left(f\chi_{\tilde{R}_k}\right)(x)\right| + \left|T\left(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_{k+2}}\right)(x)\right|.$$

où $\tilde{R}_k := \left\{x \in \mathbb{R}^n : 2^{k-2} \leq |x| < 2^{k+2}\right\}$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in R_k$.

**Estimation de** $T\left(f\chi_{B_{k-2}}\right)$. Pour $x \in R_k$ et $k < 0$ on a

$$2^{k\alpha(0)}\left|T\left(f\chi_{B_{k-2}}\right)(x)\right| \lesssim 2^{k\alpha(0)}\int_{B_{k-2}} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n}dy = 2^{k\alpha(0)}\sum_{k=-\infty}^{k-2}\int_{R_j}\frac{|f(y)|}{|x-y|^n}dy.$$

Pour estimer la dernière intégrale nous notons que $|x-y| \geq |x| - |y| > \frac{2^k}{4}$, et $2^{\alpha(x)} \approx 2^{\alpha(0)}$ si $x \in R_k$, Ainsi le lemme 1.3.2, on a:

$$2^{k\alpha(0)}\left|T\left(f\chi_{B_{k-2}}\right)(x)\right| \lesssim \sum_{k=-\infty}^{k-2} 2^{(k-j)\alpha^+ - kn}\int_{R_j} 2^{j\alpha(y)}|f(y)|\,dy.$$

par l'inégalité de *Hölder* nous avons

$$\int_{R_j} 2^{j\alpha(y)}|f(y)|\,dy \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} 2^{j\alpha(y)}|f(y)|\,\chi_j(y)\,dy \leq 2\left\|2^{j\alpha(\cdot)}f\chi_j\right\|_{p(\cdot)}\left\|\chi_j\right\|_{p'(\cdot)}.$$

Prenant maintenant $L^{p(\cdot)}$ est une norme pour $k < 0$ ,nous obtenons

$$\left\|2^{k\alpha(0)}T\left(f\chi_{B_{k-2}}\right)\chi_k\right\|_{p(\cdot)} \lesssim \sum_{j=-\infty}^{k-2} 2^{(k-j)\alpha^+ - kn}\left\|2^{j\alpha(\cdot)}f\chi_j\right\|_{p(\cdot)}\left\|\chi_j\right\|_{p'(\cdot)}\|\chi_k\|_{p(\cdot)}.$$

Depuis $p \in \mathcal{P}_0^{\ln}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}_\infty^{\ln}(\mathbb{R}^n)$ implique $p' \in \mathcal{P}_0^{\ln}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}_\infty^{\ln}(\mathbb{R}^n)$ et par le lemme 1.3.3 on a

$$\|\chi_k\|_{p(\cdot)} = \left\|\chi_{R_k}\right\|_{p(\cdot)} \approx |R_k|^{\frac{1}{p(x_k)}},\ x \in R_k \text{ et } \|\chi_j\|_{p'(\cdot)} = \left\|\chi_{R_j}\right\|_{p'(\cdot)} \approx |R_j|^{\frac{1}{p'\left(x_j\right)}},\ x \in R_j.$$

D'où la somme ci-dessus peut être réécrite comme

$$\sum_{j=-\infty}^{k-2} 2^{(k-j)\alpha^+ - kn} |R_j|^{-\frac{1}{p\left(x_j\right)}} |R_k|^{\frac{1}{p(x_k)}} \left\|2^{j\alpha(\cdot)} f\chi_j\right\|_{p(\cdot)}.$$

Maintenant on peut distinguer trois cas de la manière suivante (ici nous présentons les tous les cas):

(**i**) Cas $0 \leq j \leq k-2$ : par le lemme 1.3.3

$$|R_j|^{-\frac{1}{p\left(x_j\right)}} |R_k|^{\frac{1}{p(x_k)}} \approx |R_j|^{-\frac{1}{p_\infty}} |R_k|^{\frac{1}{p_\infty}} \approx 2^{(k-j)\frac{n}{p_\infty}} \lesssim 2^{(k-j)\frac{n}{p^-}}.$$

(**ii**) Cas $j < 0 \leq k-2$ : dans ce cas, On obtient

$$|R_j|^{-\frac{1}{p\left(x_j\right)}} |R_k|^{\frac{1}{p(x_k)}} \lesssim |R_j|^{-\frac{1}{p^-}} |R_k|^{\frac{1}{p^-}} \lesssim 2^{(k-j)\frac{n}{p^-}}.$$

(**iii**) Cas $j \leq k-2 < 0$ : nous avons ici

$$|R_j|^{-\frac{1}{p\left(x_j\right)}} |R_k|^{\frac{1}{p(x_k)}} \lesssim \left(|R_k|\,|R_j|^{-1}\right)^{\frac{1}{p(x_k)}} |R_k|^{\frac{1}{p(x_k)} - \frac{1}{p\left(x_j\right)}} \lesssim 2^{(k-j)\frac{n}{p^-}}.$$

En effet: $|x_k| < 2^k$, $|x_j| < 2^j < 2^k$,alors par l'hypothèse $\log -$*Hölder continuité* de $p$ à l'origine et obtenir, pour $k \leq 0$.

$$\left|\frac{1}{p(x_k)} - \frac{1}{p(x_j)}\right| \log \frac{1}{|R_k|} \lesssim \frac{\log \frac{1}{2^K}}{\log\left(e + \frac{1}{|x_k|}\right)} \lesssim \frac{\log \frac{1}{2^K}}{\log\left(e + \frac{1}{2^k}\right)} \leq c.$$

Avec $c > 0$ indépendant de $k, j, x_k, x_j$.Par conséquent, dans tous les cas, nous avons essentiellement la même limite et, donc l'estimations ci-dessus, nous arrivons à l'inégalité

$$\left\|2^{k\alpha(0)} T\left(f\chi_{B_{k-2}}\right)\chi_k\right\|_{p(\cdot)} \lesssim \sum_{j=-\infty}^{k-2} 2^{(k-j)\left(\alpha^+ - n + \frac{n}{p^-}\right)} \left\|2^{j\alpha(\cdot)} f\chi_j\right\|_{p(\cdot)} \tag{3.2.4}$$

Depuis $\alpha^+ - n + \frac{n}{p^-} < 0$,nous utilisons le lemme 1.3.1 et obtenons

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1} \left\|2^{k\alpha(0)} T\left(f\chi_{B_{k-2}}\right)\chi_k\right\|_{p(\cdot)}^{q(0)}\right)^{\frac{1}{q(0)}} &\lesssim \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} \sum_{j=-\infty}^{k-2} 2^{(k-j)\left(\alpha^+ - n + \frac{n}{p^-}\right)q(0)} \left\|2^{k\alpha(0)} f\chi_j\right\|_{p(\cdot)}^{q(0)}\right)^{\frac{1}{q(0)}} \\ &\lesssim \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} \left\|2^{k\alpha(0)} f\chi_{R_k}\right\|_{p(\cdot)}^{q(0)}\right)^{\frac{1}{q(0)}} \lesssim \|f\|_{\dot{K}_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}}.\end{aligned}$$

Pour estimer de $2^{k\alpha_\infty}T\left(f\chi_{B_{k-2}}\right)$ dans $\ell_{>}^{q_\infty}-$norme .Nous avons la même estimation (3.2.4), avec $2^{k\alpha_\infty}$ en place $2^{k\alpha(0)}$ .Nous écrivons

$$\sum_{j=-\infty}^{k-2} 2^{(k-j)\left(\alpha^+-n+\frac{n}{p^-}\right)}\left\|2^{j\alpha(\cdot)}f\chi_j\right\|_{p(\cdot)}=\sum_{j=-\infty}^{0}\cdots+\sum_{j=1}^{k-2}\cdots \tag{3.2.5}$$

Pour toute $k\geq 0$, (on considéron $k=0,1,2$ alors $\sum_{j=1}^{k-2}\cdots=0$), Depuis $\alpha^+-n+\frac{n}{p^-}<0$ ,alors pour la premier terme

$$\sum_{j=-\infty}^{0} 2^{(k-j)\left(\alpha^+-n+\frac{n}{p^-}\right)}\left\|2^{j\alpha(\cdot)}f\chi_j\right\|_{p(\cdot)}$$

est majoré par

$$\begin{aligned}
&2^{k\left(\alpha^+-n+\frac{n}{p^-}\right)}\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j\left(\alpha^+-n+\frac{n}{p^-}\right)}\sup_{j\leq 0}\left\|2^{j\alpha(0)}f\chi_j\right\|_{p(\cdot)}\\
\lesssim\;& c2^{k\left(\alpha^+-n+\frac{n}{p^-}\right)}\sup_{j\leq 0}\left\|2^{j\alpha(0)}f\chi_j\right\|_{p(\cdot)}.
\end{aligned}$$

Comme $\ell_{>}^{q_\infty}-$norme et par le lemme 1.3.1, nous avons

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}2^{k\left(\alpha^+-n+\frac{n}{p^-}\right)q_\infty}\sup_{j\leq 0}\left\|2^{j\alpha(0)}f\chi_j\right\|_{p(\cdot)}^{q_\infty}\right)^{\frac{1}{q_\infty}} &\lesssim \left(\sum_{k=-\infty}^{-1}2^{k\left(\alpha^+-n+\frac{n}{p^-}\right)q_\infty}\left\|2^{k\alpha_\infty}f\chi_k\right\|_{p(\cdot)}^{q_\infty}\right)^{\frac{1}{q_\infty}}\\
&\lesssim \|f\|_{\dot{K}_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}}.
\end{aligned}$$

**Estimation de** $T\left(f\chi_{\tilde{R}_k}\right)$ .On Utilisé la continuité de $T$ sur $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ ,on a

$$\begin{aligned}
&\left\|\left\{T\left(2^{k\alpha(0)}f\chi_{\tilde{R}_k}\right)\right\}\right\|_{\ell_{<}^{q(0)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}+\left\|\left\{T\left(2^{k\alpha_\infty}f\chi_{\tilde{R}_k}\right)\right\}\right\|_{\ell_{>}^{q_\infty}\left(L^{p(\cdot)}\right)}\\
\lesssim\;&\left\|\left\{2^{k\alpha(0)}f\chi_{\tilde{R}_k}\right\}\right\|_{\ell_{<}^{q(0)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}+\left\|\left\{2^{k\alpha_\infty}f\chi_{\tilde{R}_k}\right\}\right\|_{\ell_{>}^{q_\infty}\left(L^{p(\cdot)}\right)}\\
\lesssim\;&\left\|\left\{2^{k\alpha(\cdot)}f\chi_{\tilde{R}_k}\right\}\right\|_{\ell^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}\\
\lesssim\;&\|f\|_{\dot{K}_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}}.
\end{aligned}$$

**Estimation de** $T\left(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_{k+2}}\right)$ .On a, en utilisant une combinaison des arguments utilisés dans la démonstration du théorème 3.2.1, nous arrivons à l'inégalité

$$\left\|2^{k\alpha(0)}T\left(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B_{k+2}}\right)\chi_k\right\|_{p(\cdot)}\lesssim\sum_{k=j}^{\infty}2^{(k-j)\left(\alpha^-+\frac{n}{p^+}\right)}\left\|2^{j\alpha(\cdot)}f\chi_j\right\|_{p(\cdot)} \tag{3.2.6}$$

pour toute $k < 0$ on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=j}^{\infty} 2^{(k-j)\left(\alpha^- + \frac{n}{p^+}\right)} \left\| 2^{j\alpha(\cdot)} f\chi_j \right\|_{p(\cdot)} \\
\lesssim\ & \sum_{j=k}^{-1} 2^{(k-j)\left(\alpha^- + \frac{n}{p^+}\right)} \left\| 2^{j\alpha(\cdot)} f\chi_j \right\|_{p(\cdot)} + \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(k-j)\left(\alpha^- + \frac{n}{p^+}\right)} \left\| 2^{j\alpha(\cdot)} f\chi_j \right\|_{p(\cdot)}
\end{aligned}$$

Depuis $\alpha^- + \frac{n}{p^+} > 0$,nous utilisons le lemme 1.3.1 et comme $\ell_<^{q(0)}-$norme ,alors pour la premier somme nous avons

$$\begin{aligned}
\left( \sum_{k=-\infty}^{-1} \sum_{j=k}^{-1} 2^{(k-j)\left(\alpha^- + \frac{n}{p^+}\right)q(0)} \left\| 2^{k\alpha(0)} f\chi_j \right\|_{p(\cdot)}^{q(0)} \right)^{\frac{1}{q(0)}} &\lesssim c \left( \sum_{k=-\infty}^{-1} \left\| 2^{k\alpha(0)} f\chi_k \right\|_{p(\cdot)}^{q(0)} \right)^{\frac{1}{q(0)}} \\
&\lesssim \|f\|_{\dot{K}_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}}.
\end{aligned}$$

Depuis $2^{j\alpha(y)} \approx 2^{j\alpha_\infty}$ ,pour toute $y \in R_j,\ j \geq 0$,alors la deuxiéme somme

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^{(k-j)\left(\alpha^- + \frac{n}{p^+}\right)} \left\| 2^{j\alpha_\infty} f\chi_j \right\|_{p(\cdot)}$$

est majoré par

$$\begin{aligned}
&c2^{k\left(\alpha^- + \frac{n}{p^+}\right)} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\left(\alpha^- + \frac{n}{p^+}\right)} \sup_{j\geq 0} \left\| 2^{j\alpha_\infty} f\chi_j \right\|_{p(\cdot)} \\
\lesssim\ & 2^{k\left(\alpha^- + \frac{n}{p^+}\right)} \sup_{j\geq 0} \left\| 2^{j\alpha_\infty} f\chi_j \right\|_{p(\cdot)}
\end{aligned}$$

comme $\ell_<^{q(0)}-$norme et par le lemme 1.3.1,nous avons

$$\begin{aligned}
\left( \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^{k\left(\alpha^- + \frac{n}{p^+}\right)q(0)} \sup_{j\geq 0} \left\| 2^{j\alpha_\infty} f\chi_j \right\|_{p(\cdot)}^{q(0)} \right)^{\frac{1}{q(0)}} &\lesssim c \left( \sum_{k=-\infty}^{-1} \left\| 2^{k\alpha_\infty} f\chi_k \right\|_{p(\cdot)}^{q(0)} \right)^{\frac{1}{q(0)}} \\
&\lesssim \|f\|_{\dot{K}_{p(\cdot),q(\cdot)}^{\alpha(\cdot)}}.
\end{aligned}$$

Pour estimer de $2^{k\alpha_\infty} T\left(f\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_{k+2}}\right)$ dans $\ell_>^{q_\infty}-$norme .Nous avons la même estimation (3.2.6), avec $2^{k\alpha_\infty}$ en place $2^{k\alpha(0)}$ et utilisée le lemme 1.3.1.

Ce qui termine la preuve. ■

# Conclusion

Dans cette travail est d'étudier l'espace de Herz à exposants variables, nous avons rappellent quelques propriétés de base sur les espaces fonctionnels avec exposants variable est présenter quelque résultats pour ces espaces où en généralisant les résultats classiques sur les espace de Herz .

Finalment l'espace de Herz avec exposants variables est concerve quelques propriétés de l'espace Herz usuel et plus cette espace est important dans l'analyse harmonique.

# Bibliographie


[1] **A. Almeida, P. Hästö**, Besov spaces with variable smoothess and integrability, J.Func. Anal. **258** (2010) 1628-1655.

[2] **A. Almeida, D. Drihem**, Maximal, potential and singular type operators on Herz spaces with variable exponents, J. Math. Anal. Appl. **394** (2012), 781–795.

[3] **A. Baernstein ii, E. T. Sawyer**, Embedding and multiplier theorems for $H^p(\mathbb{R}^n)$, Mem. Amer. Math. Soc. 53, no. 318, 1985.

[4] **Y. Chen, S. Levine an, R. Rao**, Variable exponent, linear growth functionals in image restoration, SIAM J. Appl. Math. **66** (2006), no. 4, 1383–1406.

[5] **D. Drihem**, Embeddings properties on Herz-type Besov and Triebel-Lizorkin spaces, Math. Ineq and Appl. **16**, 2 (2013), 439–460.

[6] **D. Drihem**, Some properties of variable Besov-type spaces, Funct. Approx. Comment. Math **52**, 2 (2015), 193–221.

[7] **B. Dong, J. Xu,** New Herz type Besov and Triebel-Lizorkin spaces with variable exponents, J. Funct. Spaces Appl. Volume 2012 (2012), Article ID 384593, 27 pages.

[8] **B. Dong, J. Xu**, Herz-Morrey type Besov and Triebel-Lizorkin spaces with variable exponents, Banach J. Math. Anal. **9**, 1 (2015), 75–101.

[9] **H. G. Feichtingr, F. Weisz**, Herz spaces and summability of Fourier transforms, Math. Nachr. **281**, 3 (2008), 309–324.

[10] **L. Diening, P. Harjulehto, P.Hästö.o , M. Růžička**, Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2017, Springer-Verlag, Berlin, 2011.

[11] **C. Herz**, Lipschitz spaces and Bernstein's theorem on absolutely convergent Fourier transforms, J. Math. Mech. **18** (1968), 283–324.

[12] **M. Izuki**, Herz and amalgam spaces with variable exponent, the Haar wavelets and greediness of the wavelet system, East. J. Approx. **15** (2009), 87–109.

[13] **M. Izuki**, Boundedness of sublinear operators on Herz spaces with variable exponent and application to wavelet characterization, Anal. Math. **36** (2010), 33–50.

[14] **M. Izuki, T. Noi**, Boundedness of some integral operators and commutators on generalized Herz spaces with variable exponents.

[15] **H. Kempka, J. Vybiral**, A note on the spaces of variable integrability and summability of Almeida and Hästö, Proc. Amer. Math. Soc. **141**, 9 (2013), 3207–3212.

[16] **X. Li, D. Yang**, Boundedness of some sublinear operators on Herz spaces, Illinois J. Math. **40** (1996), 484–501.

[17] **Y. Liang, D. Yang, C. Zhuo**, Intrinsic Square Function Characterizations of Hardy Spaces with Variable Exponents, Bull. Malays. Math. Sci. Soc, to appear.

[18] **S. Lu, D. Yang**, The decomposition of weighted Herz space on Rn and its applications, Sci. China (Ser. A) **38** (1995), 147–158.

[19] **Z. Liu, H. Wang**, The Herz-type Hardy spaces with variable exponent and thier applications, Taiwanese. J. Math. **16**, 4 (2012), 1363–1389.

[20] **M. A. Ragusa**, Homogeneous Herz spaces and regularity results, Nonlinear Anal. **71** (2009), 1–6.

[21] **M. A. Ragusa**, Parabolic Herz spaces and their applications, Appl.Math. Lett. **25**, 10 (2012), 1270–1273.

[22] **M. Růžička**, Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory, Lecture Notes in Mathematics,1748, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[23] **S. Samko**, Variable exponent Herz spaces, Mediterr. J. Math. **10**, 4 (2013), 2007–2025.

[24] **C. Shi, J. Xu**, Herz type Besov and Triebel-Lizorkin spaces with variable exponent, Front. Math. China. **8**, 4 (2013), 907–921.

[25] **F. Soria, G. Weiss**, A remark on singular integrals and power weights, Indiana Univ. Math. J.**43** (1994), 187–204.

[26] **H. Triebel**.Theory of function spaces II.Birkhäuser,Basel,1992.

[27] **J. Xu, X. Yang**, Herz-Morrey-Hardy Spaces with Variable exponents and Their Applications, J.Funct. Spaces Appl. Volume 2015 (2015), Article ID 160635, 19 pages.

[28] **J. Xu**, Decompositions of non-homogeneous Herz type Besov and Triebel-Lizorkin spaces, Sci. China.Math. **57**, 2 (2014), 315–331.