



المسيلة في: 19 ديسمبر 2024

رقم: 892/ن.ع.م.ت.ب.ع.ع.خ.ك.ت/2024

شهادة ادارية

المصادقة على تقرير خبير للموافقة على مطبوعة بيداغوجية

بعد الإطلاع على تقارير لجنة الخبراء للموافقة على المطبوعة البيداغوجية به الأستاذة : بن سهيل إلهام- أستاذ محاضر قسم أ،
بالقاعدة المشتركة بكلية التكنولوجيا بجامعة محمد بوضياف بالمسيلة والتي كانت كلها ايجابية ، تمّ تقرير التالي:
1- المصادقة على تقارير لجنة الخبراء للموافقة المطبوعة البيداغوجية والمعنونة بـ:

Polycopié de travaux dirigés (Physique 2)

1^{ère} Année ST

Series of exercises solved (TD Physics 2)

1st Year (LMD), common base ST

2- حيث تمّ تشكيل هذه اللجنة بناء على اجتماع المجلس العلمي للكلية المنعقد بتاريخ 2024/02/06 المكونة من السادة الآتية
أسمائهم:

عز الدين هبة، أستاذ، جامعة محمد بوضياف- المسيلة

غلاب تركية، أستاذ محاضر "أ"، جامعة محمد بوضياف- المسيلة

جغلول فاطمة الزهراء، أستاذ محاضر "أ"، جامعة سطيف

وقمت الموافقة بالاجماع على هذه المطبوعة.

رئيس المجلس العلمي للكلية



د. علي حريوي



République Algérienne Démocratique et Populaire

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Département des sciences et technologies



Polycopie de Travaux dirigés (Physique 2)
"1 ère Année Licence (LMD), tronc commun ST"

Series of exercises solved (TD physics 2)
"1 st Year (LMD), common base ST"

Selon le Programme de 1^{ère} Année Socle Commun

Domaine Science et Technologie

2023/2024

Présenté par Dr. BENSEHIL Ilhem

RESUME

This document is intended for first-year students in the fields of science and technology (ST) and material science (SM). It is in line with the base program of the first year in both fields.

This course brings together all the essential knowledge on the laws of static and dynamic electricity, which are notions of necessary basis to understand the effects of charges on materials. Electrostatic targets Coulomb's law, the electrostatic field and electrostatic potential that is created by static charges and the continuous distribution of the charge. The relationship between charges and potentials in a conductor in electrostatic equilibrium and in capacitors, which are also presented. Dynamic electricity is the field of physics where the manifestations of charges are studied in terms of currents and voltages. Finally, in the last part, the sources of the magnetic field and the behavior of electrical charges are examined in the presence of a magnetic field. A mathematical reminder is given at the beginning of the course.

Following this course (PHY2) requires a basic knowledge of:

- Line, surface and volume elements.
- Differential operators such as: Nabla (∇), Gradient, divergence, Curl...

AVANT- PROPOS

Conforme aux programmes officiels du LMD, ce polycopié de travaux dirigés de physique II- électricité et magnétisme- s'adresse aux étudiants de première année universitaire des domaines Science et Technologie (ST), et Sciences de la Matière (SM). Il est conforme au programme de la 1ère année du socle commun des deux domaines. Il est conçu de façon à aplanir au mieux les difficultés inhérentes au discours scientifique tout en conservant la rigueur nécessaire.

Il est enseigné en un semestre, à raison d'une heure et demi de travaux dirigés. Le programme d'électricité et de magnétisme du S2 se compose de cinq grands chapitres:

- Rappels mathématiques
- Electrostatique
- Les conducteurs en équilibre électrostatique
- Electrocinétiq
- Magnétisme

Dans le premier chapitre, nous présentons à l'étudiant les différents outils mathématiques dont il aura besoin dans l'étude des différents phénomènes d'électricité et magnétisme. Nous commençons par une définition des différents opérateurs ensuite, on rappelle les expressions des éléments de surface et de volume dans les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'électrostatique du vide, discipline qui étudie l'interaction entre elles, de particules immobiles chargées électriquement. Et

étudie les forces électriques, les champs électriques et le potentiel électrique dans des situations électrostatiques.

Les conducteurs sont des milieux dans lesquels existent des charges libres (positives ou négatives) susceptible de se déplacer sous l'action d'un champ électrique. Cette caractéristique leur confère des propriétés électrostatiques spécifiques que nous détaillerons dans le troisième chapitre. Nous décrirons aussi les condensateurs et introduirons les notions de capacités.

L'électrocinétique est abordée dans la quatrième partie. Cette discipline étudie les lois qui régissent la circulation du courant électrique.

Dans le dernier chapitre, on rappelle quelques concepts de base en magnétisme comme la force magnétique et l'induction magnétique. On rappelle également quelques lois connues en magnétisme comme la loi de Biot et Savart et la loi de Faraday.

Chaque chapitre est introduit un résumé et illustré par des exercices qui constituent une application, à des problèmes concrets, des lois introduites dans le cours. La résolution de ces exercices permet à l'étudiant de vérifier s'il a bien assimilé le cours, d'estimer les ordres de grandeur et d'attacher de l'importance à l'analyse dimensionnelle aux unités de mesures et à la précision d'un résultat numérique.

Sommaire

RESUME DE COURS : Outils mathématiques	6
Contenu de la série 01	12
Corrigé de la série de TD n°01.....	15
 RESUME DE COURS : Electrostatique1	 22
Contenu de la série 02	26
Corrigé de la série de TD n°02.....	30
 RESUME DE COURS : Electrostatique2.....	 41
Contenu de la série 03	44
Corrigé de la série de TD n°03.....	48
 RESUME DE COURS : Conducteurs en équilibre électrostatique	 56
Contenu de la série 04.....	61
Corrigé de la série de TD n°04.....	64
 RESUME DE COURS : Electrocinétiqe	 73
Contenu de la série 05.....	78
Corrigé de la série de TD n°05.....	82
 RESUME DE COURS : Magnétisme	 90
Contenu de la série 06.....	93
Corrigé de la série de TD n°06.....	95

Chapitre I :

Outils mathématiques

RESUME DE COURS : Outils mathématiques

1- Les operateurs :

On appelle operateur une application linéaire agissant sur un champ scalaire ou sur un champ de vecteurs. Un opérateur particulier est l'opérateur nabla, un vecteur noté $\vec{\nabla}$ est défini en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

L'OPÉRATEUR GRADIENT

L'opérateur gradient est un *opérateur différentiel* qui s'applique à un champ scalaire (fonction scalaire dépendant de l'espace et du temps) et le transforme en un champ vectoriel (vecteur dépendant de l'espace et du temps). Il se note :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(M, t) = \vec{\nabla} f(M, t)$$

Le tableau ci-dessous donne les différentes expressions du gradient dans les systèmes de coordonnées utilisés couramment en physique.

Système de coordonnées	$f(M, t)$	Expression de $\overrightarrow{\text{grad}} f$
Cartésiennes	$f(x, y, z, t)$	$\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$
Cylindriques	$f(r, \theta, z, t)$	$\frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$
Sphériques	$f(r, \theta, \varphi, t)$	$\frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{r \sin \theta \partial \varphi} \vec{u}_\varphi$

L'OPÉRATEUR DIVERGENCE

L'opérateur divergence est un opérateur différentiel qui s'applique à un champ vectoriel et qui renvoie un champ scalaire. Il se note :

$$\text{div } \vec{A}(M, t) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(M, t)$$

Le tableau ci-dessous donne les différentes expressions de la divergence d'un champ vectoriel exprimé dans différents systèmes de coordonnées.

Système de coordonnées	Expression de $\text{div } \vec{A}$
Cartésiennes	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
Cylindriques	$\frac{\partial(rA_r)}{r\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
Sphériques	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial A_\phi}{r \sin \theta \partial \phi}$

L'OPÉRATEUR ROTATIONNEL

L'opérateur rotationnel est un opérateur différentiel qui transforme un champ vectoriel en un autre champ vectoriel. Il se note :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M, t) \text{ ou } \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(M, t)$$

Le tableau ci-dessous donne les différentes expressions du rotationnel dans différents systèmes de coordonnées.

Système de coordonnées	Expression de $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$
Cartésiennes	$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \vec{k}$
Cylindriques	$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) \vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \vec{u}_z$

Sphériques

$$\left(\frac{\partial (\sin \theta A_\varphi)}{r \sin \theta \partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r A_\varphi)}{r \partial r} \right) \vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{r \partial \theta} \right) \vec{u}_\varphi$$

2- Les intégrales

➤ Théorème de Green- Ostrogradski :

Pour un champ de vecteur $\vec{V}$ et pour une surface fermée (S) délimitant le volume τ on a :

$$\oint_S \vec{V} \cdot \vec{n}_{ext} \cdot dS = \iiint_\tau \text{div } \vec{V} \cdot d\tau$$

➤ Théorème de Stokes:

Pour un champ de vecteur $\vec{V}$, un contour fermé (C) sur lequel s'appuie une surface (S), on a :

$$\oint_{(C)} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \text{rot } \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS$$

3- Longueurs, aires et volumes élémentaires :

Lorsqu'on doit intégrer une grandeur physique sur un domaine donné, on utilise une expression appropriée pour la longueur, l'aire et le volume élémentaire qui est nécessaire au calcul.

3.1 Coordonnées cartésiennes

Un tronçon élémentaire est du type (par exemple pour un déplacement le long de Ox) :

$$d\vec{l} = dx \vec{i}$$

Les aires élémentaires sont :

$$dS = dx \cdot dy \quad \text{ou bien} \quad dS = dy \cdot dz \quad \text{ou bien} \quad dS = dx \cdot dz$$

Dans le cas du volume élémentaire, une seule expression est possible :

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz$$

3.2 Coordonnées cylindriques

Les tronçons élémentaires sont :

$$\vec{dl} = dr \vec{u}_r \text{ ou bien } \vec{dl} = r d\theta \vec{u}_\theta$$

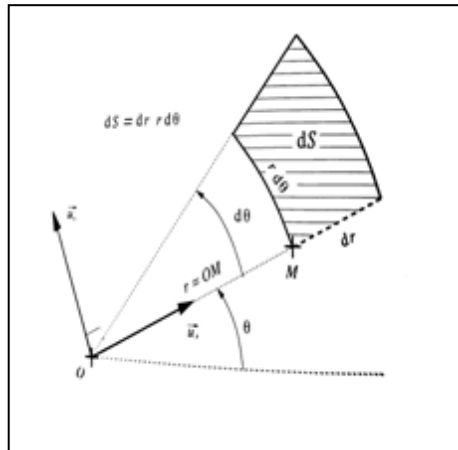
$$\text{ou bien } \vec{dl} = dz \vec{u}_z$$

L'aire élémentaire) dans le plan xOy a pour expression :

$$dS = r dr d\theta$$

Le volume élémentaire :

$$dV = r dr d\theta dz$$



3.3 Coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques les longueurs élémentaires sont :

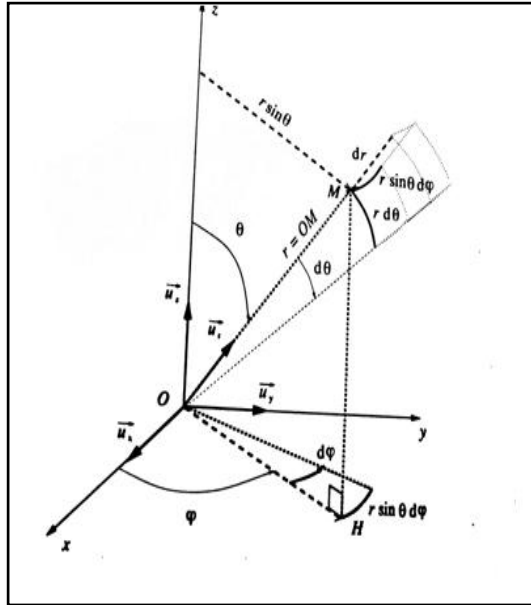
$$\vec{dl} = dr \vec{u}_r \text{ ou bien } \vec{dl} = r d\theta \vec{u}_\theta \text{ ou bien } \vec{dl} = r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$

Une aire élémentaire découpée sur la sphère de rayon r a l'expression :

$$dS = r \cdot d\theta \cdot r \sin \theta d\varphi$$

Finalement pour le volume élémentaire on a :

$$dV = dr r d\theta r \sin \theta d\varphi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$



Série de TD N° 01

Exercice n°01 :

Calculer :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f)$$

avec :

$$f(x, y, z) = x^2 + 5y - 2e^z + 5$$

Puis pour :

$$f(r, \theta, z) = 2r^2 + 5 \cos \theta - 2rz$$

Exercice n°02 :

Calculer :

$$\text{div } \vec{\mu}$$

avec :

$$\vec{\mu} = (3x^2 - z)\vec{i} + (5yz - 9\sqrt{y} + 8x)\vec{j} + (5x - 2y^3)\vec{k}$$

Puis avec :

$$\vec{\mu} = (2r^2 - 2\theta)\vec{u}_r + (5r - \sin \theta + 8z)\vec{u}_\theta + (5z - 2r^3)\vec{u}_z$$

Exercice n°03:

En coordonnées cartésienne ; Montrer que :

$$\text{div} \left(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{\mu}) \right) = 0$$

Exercice n°04:

Calculer :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{\mu})$$

avec :

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} 8xyz^2 \\ 7e^{3z} \\ \cos(y) + x^3 \end{pmatrix}$$

Exercice n°05:

Calculer :

$$\Delta f$$

avec :

$$f(x, y, z) = 3x^2y + 5e^{2y} + 5z$$

Montrer par ailleurs que :

$$\Delta f = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad} f})$$

Exercice n°06:

Dans une base orthonormée, on donne la fonction scalaire

$$f(x, y, z) = 2x^2y^3 + 5yz - 3xz^2$$

1°/ Déterminer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial f}{\partial y}$; $\frac{\partial f}{\partial z}$ de f .

2°/ Déduire le gradient de la fonction f au point $P(1, 2, 1)$.

3°/ Déterminer la normale à la surface f au point $Q(1, 0, 1)$.

4°/ Déterminer la dérivée directionnelle au point $Q(1, 0, 1)$ dans la direction

$$\vec{u} = 1\vec{i} + 1\vec{j} - \vec{k}.$$

Exercice n°07:

Montrer que le vecteur :

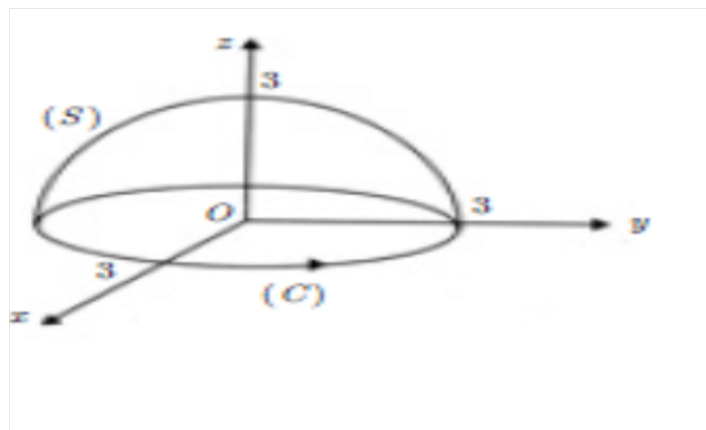
$$\vec{V} = \begin{pmatrix} y \\ x + z \\ y + 2z \end{pmatrix}$$

dérive d'un potentiel et calculer ce potentiel.

Exercice n° 08 :

Vérifier le théorème de Stokes pour le champ de vecteurs $\vec{V} = 2y\vec{i} + 3x\vec{j} - z^2\vec{k}$, dans le cas où S est la surface de l'hémisphère supérieure d'équation:

$x^2 + y^2 + z^2 = 9$, et (C) le contour sur lequel s'appuie cet hémisphère.



CORRIGÉ DE LA SÉRIE DE TD N° 01

Exercice n°01:

- *calcul de $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$:*

En coordonnées cartésiennes le gradient d'une fonction est donnée par :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

Pour : $f(x, y, z) = x^2 + 5y - 2e^z + 5$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -2e^z$$

Et donc :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = 2x \vec{i} + 5 \vec{j} - 2e^z \vec{k}$$

En coordonnées cylindriques le gradient d'une fonction est donnée par :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

Pour : $f(r, \theta, z) = 2r^2 + 5 \cos \theta - 2rz$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 4r - 2z$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -5 \sin \theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -2r$$

Et donc :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = (4r - 2z) \vec{u}_r + \frac{-5 \sin \theta}{r} \vec{u}_\theta - 2r \vec{u}_z$$

Exercice n°02:

- Calcule de la divergence : ***div*** $\vec{\mu}$

En coordonnées cartésiennes la divergence d'une fonction est donnée par :

$$\mathbf{div} \vec{\mu} = \frac{\partial \mu_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu_y}{\partial y} + \frac{\partial \mu_z}{\partial z}$$

$$\text{Pour : } \vec{\mu} = (3x^2 - z)\vec{i} + (5yz - 9\sqrt{y} + 8x)\vec{j} + (5x - 2y^3)\vec{k}$$

$$\frac{\partial \mu_x}{\partial x} = 6x$$

$$\frac{\partial \mu_y}{\partial y} = 5z - \frac{9}{2\sqrt{y}}$$

$$\frac{\partial \mu_z}{\partial z} = 0$$

$$\text{Et donc : } \mathbf{div} \vec{\mu} = 6x + 5z - \frac{9}{2\sqrt{y}}$$

En coordonnées cylindriques la divergence d'une fonction est donnée par :

$$\mathbf{div} \vec{\mu} = \frac{\partial(rA_r)}{r\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{Pour : } \vec{\mu} = (2r^2 - 2\theta)\vec{u}_r + (5r - \sin \theta + 8z)\vec{u}_\theta + (5z - 2r^3)\vec{u}_z$$

$$\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} = (6r^2 - 2\theta)$$

$$\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} = -\cos \theta$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} = 5$$

$$\text{Et donc : } \mathbf{div} \vec{\mu} = \frac{(6r^2 - 2\theta)}{r} - \frac{\cos \theta}{r} + 5$$

Exercice n°03:

En coordonnées cartésienne :

$$\overrightarrow{\text{rot } \vec{\mu}} = \left(\frac{\partial \mu_z}{\partial y} - \frac{\partial \mu_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial \mu_x}{\partial z} - \frac{\partial \mu_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial \mu_y}{\partial x} - \frac{\partial \mu_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

La divergence du $\overrightarrow{\text{rot } \vec{\mu}}$ est égale :

$$\text{div} (\overrightarrow{\text{rot } \vec{\mu}}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mu_z}{\partial y} - \frac{\partial \mu_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mu_x}{\partial z} - \frac{\partial \mu_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mu_y}{\partial x} - \frac{\partial \mu_x}{\partial y} \right)$$

$$\text{div} (\overrightarrow{\text{rot } \vec{\mu}}) = \frac{\partial^2 \mu_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \mu_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \mu_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \mu_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \mu_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \mu_x}{\partial z \partial y}$$

$$\text{div} (\overrightarrow{\text{rot } \vec{\mu}}) = 0 \text{ Ce qu'on veut montrer}$$

Exercice n°04:

En coordonnées cartésienne :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot } \vec{\mu}} &= \left(\frac{\partial \mu_z}{\partial y} - \frac{\partial \mu_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial \mu_x}{\partial z} - \frac{\partial \mu_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial \mu_y}{\partial x} - \frac{\partial \mu_x}{\partial y} \right) \vec{k} \\ &= \left(\frac{\partial (\cos y + x^3)}{\partial y} - \frac{\partial (7e^{3z})}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial (8xyz^2)}{\partial z} - \frac{\partial (\cos y + x^3)}{\partial x} \right) \vec{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial (7e^{3z})}{\partial x} - \frac{\partial (8xyz^2)}{\partial y} \right) \vec{k} \\ &= (-\sin y - 21 e^{3z}) \vec{i} + (16 x y z - 3x^2) \vec{j} + (-8xz^2) \vec{k} \end{aligned}$$

Exercice n°05:

1 / Calcule de Δf :

$$\Delta f = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Pour : $f(x, y, z) = 3x^2y + 5e^{2y} + 5z$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 20 e^{2y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

$$\Delta f = 6y + 20 e^{2y}$$

$$2/ \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) = \operatorname{div} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f \text{ ce que l'on veut montrer.}$$

Exercice n°06:

$$f(x, y, z) = 2x^2y^3 + 5yz - 3xz^2$$

1°/ Détermination des dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy^3 - 3z^2 ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y^2 + 5z ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 5y - 6xz .$$

2°/ Le gradient de la fonction f au point $P(1, 2, 1)$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\operatorname{grad}}(f) &= \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \\ &= (4xy^3 - 3z^2)\vec{i} + (6x^2y^2 + 5z)\vec{j} + (5y - 6xz)\vec{k} \end{aligned}$$

Au point $P(1, 2, 1)$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\operatorname{grad}}(f) &= (4xy^3 - 3z^2)\vec{i} + (6x^2y^2 + 5z)\vec{j} + (5y - 6xz)\vec{k} \\ &= 29\vec{i} + 29\vec{j} + 4\vec{k} \end{aligned}$$

3°/ La normale à la surface f au point $Q(1, 0, 1)$:

Le gradient est toujours orienté le long de la normale de la fonction surface

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f = \|\vec{\nabla} f\| \vec{n}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{\nabla} f}{\|\vec{\nabla} f\|} = \vec{n}$$

$$\vec{\nabla} f = (4xy^3 - 3z^2)\vec{i} + (6x^2y^2 + 5z)\vec{j} + (5y - 6xz)\vec{k} \text{ et au point } (1, 0, 1):$$

$$\vec{\nabla} f = -3\vec{i} + 5\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\|\vec{\nabla} f\| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + (-6)^2} = \sqrt{70}$$

$$\text{alors } \vec{n} = \frac{\vec{\nabla} f}{\|\vec{\nabla} f\|} = \frac{-3\vec{i} + 5\vec{j} - 6\vec{k}}{\sqrt{70}}$$

4°/ La dérivée directionnelle au point $Q(1, 0, 1)$ dans la direction

$$\vec{u} = 1\vec{i} + 1\vec{j} - \vec{k}$$

La dérivée directionnelle d'une fonction est la projection de son gradient le long d'une direction donnée :

$$\frac{df}{du} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{u}_n \text{ tel que } \vec{u}_n = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

$$\frac{df}{du} = (-3\vec{i} + 5\vec{j} - 6\vec{k}) \cdot \left(\frac{1\vec{i} + 1\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\frac{df}{du} = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

Exercice n°07:

Le vecteur : $\vec{V}$ est dérive d'un potentiel, si $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x+z & y+2z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(y+2z)}{\partial y} - \frac{\partial(x+z)}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial z} - \right.$$

$\partial y + 2z \partial x j + \partial x + z \partial x + \partial y \partial y k = 1 - 1i + 0 - 0j + 1 - 1k = 0$. Ce que veut dire que le vecteur $\vec{V}$ est dérive d'un potentiel.

Calcul de ce potentiel :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x+z \\ y+2z \end{pmatrix}$$

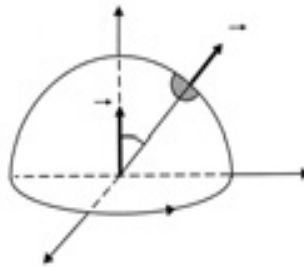
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \Rightarrow f = yx + g(y, z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + z \Rightarrow f = yx + zy + h(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y + 2z \Rightarrow f(x, y, z) = yx + yz + z^2$$

Le vecteur $\vec{V}$ est dérivé d'un potentiel $\boxed{f(x, y, z) = yx + yz + z^2 + Cste}$

Exercice n°08:



Pour un champ de vecteur $\vec{V} = 2y\vec{i} + 3x\vec{j} - z^2\vec{k}$, un contour fermé (C) sur lequel s'appuie une surface (S), on a :

$$\oint_{(C)} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot } V} \cdot \vec{n} \, dS$$

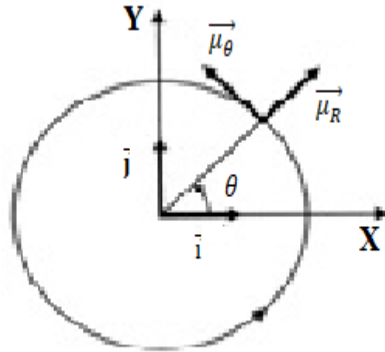
a- Calcul de : $\iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot } V} \cdot \vec{n} \, dS$

$$\overrightarrow{\text{rot } V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 3x & -z^2 \end{vmatrix} = (3 - 2)\vec{k} = \vec{k}$$

On a $\overrightarrow{dS} = \vec{n} dS$ et $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$

$\iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot } V} \cdot \vec{n} dS = \iint_{(S)} \vec{k} \cdot \vec{n} dS$ Puisque le produit scalaire $\vec{k} \cdot \vec{n} = \|\vec{k}\| \|\vec{n}\| \cos \theta$

$$\iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot } V} \cdot \vec{n} dS = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi R^2 = 9\pi$$



b- Calcul de : $\oint_{(C)} \vec{V} \cdot \overrightarrow{dl}$

On $\overrightarrow{dl} = R d\theta \vec{u}_\theta$ où $\vec{u}_\theta$ est le vecteur unitaire porté par la tangente à (C).

$$\vec{u}_\theta = -(\sin \theta)\vec{i} + (\cos \theta)\vec{j}$$

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{dl} = -2y(\sin \theta)R d\theta + 3x(\cos \theta)R d\theta$$

$$\text{avec } x = R \cos \theta \text{ et } y = R \sin \theta$$

$$\oint_{(C)} \vec{V} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_0^{2\pi} -2R \sin \theta (\sin \theta) R d\theta + \int_0^{2\pi} 3R \cos \theta (\cos \theta) R d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -2R^2 \sin^2 \theta d\theta + \int_0^{2\pi} 3R^2 \cos^2 \theta d\theta = -2\pi R^2 + 3\pi R^2$$

$$\boxed{\oint_{(C)} \vec{V} \cdot \overrightarrow{dl} = \pi R^2 = 9\pi}$$

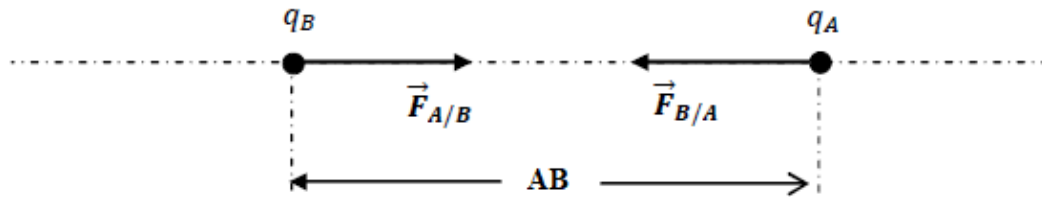
Chapitre II :

Electrostatique

RESUME DE COURS : Electrostatique

La force électrique- Loi de Coulomb

Une charge électrique q_A placée au point A fait subir une force $\vec{F}_{AB}$ à une charge électrique q_B placée au point B, cette force suit la loi de Coulomb :



$$\vec{F}_{AB} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{AB^2} \vec{u}_{AB}$$

$\vec{u}_{AB}$ est un vecteur unitaire porté par la droite passant par q_A et q_B , dont le sens est de q_A vers q_B :

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

$$\vec{F}_{AB} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B \overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|^3}$$

Suivant cette loi :

- Deux charges de même signe se repoussent
- Deux charges de signes opposés s'attirent.

Pour N charges ponctuelles ($q_1, q_2, q_3 \dots q_j \dots q_N$) :

$$\vec{F}_{AB} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j}^N \frac{q_i q_j \vec{r}_{ij}}{\|\vec{r}_{ij}\|^3}$$

Champ électrique et le potentiel

Le champ crée par une charge q_A au point B :

$$\vec{E}_{AB} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A}{AB^2} \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

La force exercée sur la charge q_B : $\vec{F}_{AB} = q_B \vec{E}_{AB}$

Une propriété scalaire, le potentiel électrostatique:

$$V_{AB} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A}{AB} + cte$$

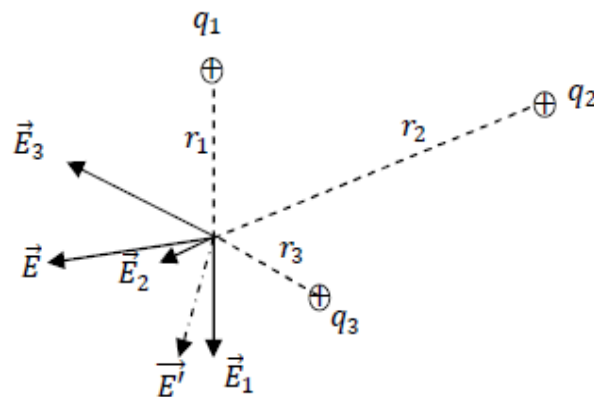
La relation entre le champ et le potentiel :

$$\vec{E}_{AB} = -\overrightarrow{\text{grad}} V_{AB}$$

$$\text{ou } dV = -\vec{E}_{AB} \cdot d\overrightarrow{AB}$$

Le champ électrique est orienté vers les potentiels décroissants.

Champ et potentiel crée par un ensemble de charges ponctuelles

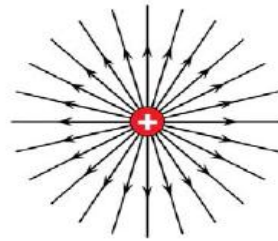
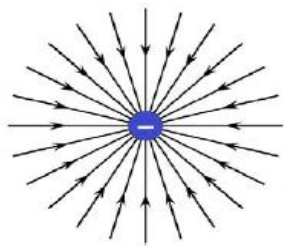


$$\vec{E}_T(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{i=N} \frac{q_i}{OM_i^2} \vec{u}_i$$

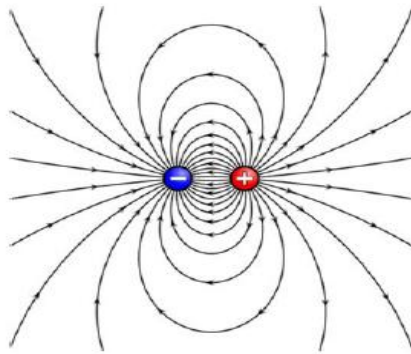
$$\text{et } V_T(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{i=N} \frac{q_i}{OM_i}$$

Lignes de champ

- Charges ponctuelles



Dipôle :



Série de TD N° 02

Exercice n°01 :

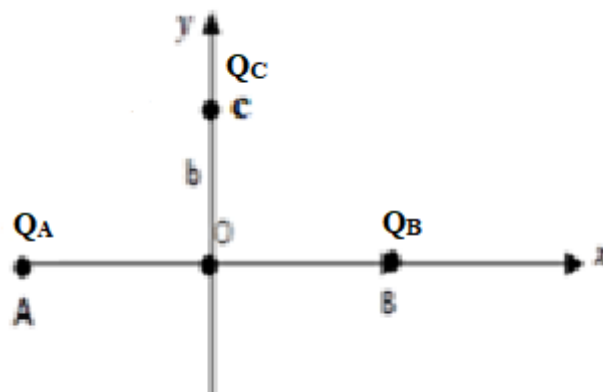
L'atome d'hydrogène est constitué essentiellement d'un électron de charge $q_e = -1.6 \times 10^{-19}$ C et de masse $M_e = 0.91 \times 10^{-30}$ Kg et d'un proton de charge $q_p = 1.16 \times 10^{-19}$ C et de masse $M_p = 1.872 \times 10^{-27}$ Kg. Supposons que l'électron tourne autour du proton à une distance $r = 5.3 \times 10^{-11}$ m.

- Quelle est la nature de la force.
- Calculer cette force.

Exercice n°02 :

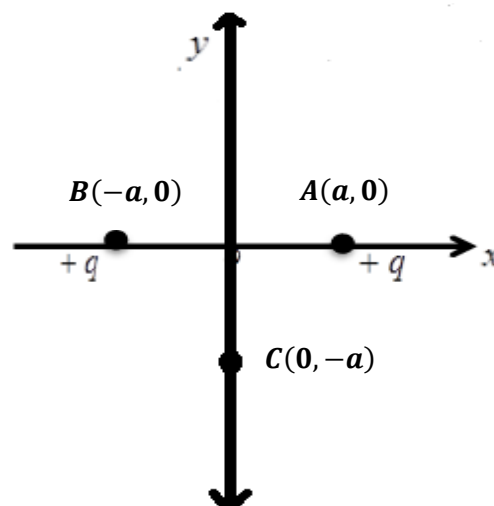
On considère trois charges ponctuelle $Q_A (-3,0,0) = +3\mu\text{C}$, $Q_B (2,0,0) = +2\mu\text{C}$ et $Q_C (0,2,0) = +1\mu\text{C}$

- 1- Quelle est la force exercée par les charges Q_A et Q_B sur Q_C ?
- 2- Déduire le champ dans ce point.
- 3- A quelle distance x , du milieu de Q_A et Q_B doit se situer Q_C pour qu'elle soit en équilibre?



Exercice n°03 :

On place deux charges ponctuelles identiques q aux deux points $A(a, 0)$ et $B(-a, 0)$ (voir figure ci-contre)



1 - Dédurre sans calcul le champ électrique résultant au point $O(0,0)$ et le représenter dans la figure correspondante.

2- Calculez le potentiel électrique au même point O .

3 - Calculer le champ électrique résultant au point $C(0, -a)$ et le représenter, puis calculez le potentiel électrique au même point C .

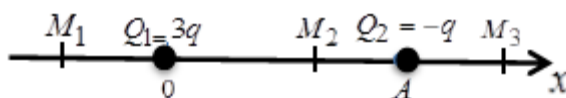
4- Dédurre la force exercée sur la charge Q_c .

Exercice n° 04

On met deux charges ponctuelles $q_1 = 3q$ et $q_2 = -q$ sur l'axe xox' , au point O et A tel que $x_A = a$ (avec $a > 0$) et $x_O = 0$.

Trouvez le vecteur du champ électrique et le potentiel électrique dans les points M_1, M_2, M_3 tel que :

$$M_1 < 0, \quad 0 < M_2 < a, \quad M_3 > a$$

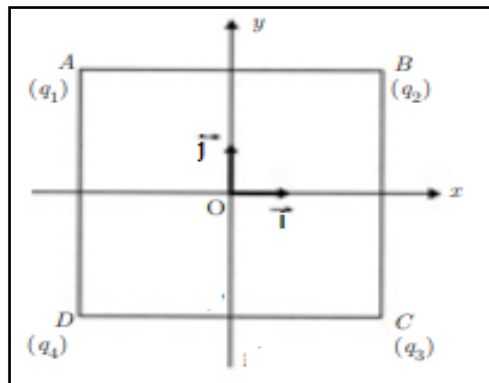


Exercice n°05 :

On place quatre charges ponctuelles aux sommets ABCD d'un carré de côté $a = 1$ m, et de centre O , origine d'un repère orthonormé Oxy . On donne : $q_1 = q = 10^{-8}$ C, $q_2 = -2q$, $q_3 = 2q$ et $q_4 = -q$, avec $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9$ S.I.

1- Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ au centre O du carré. Préciser la direction, le sens et la norme de $\vec{E}$.

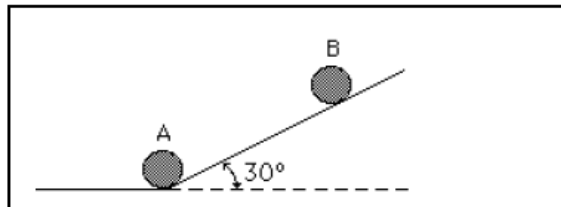
2- Exprimer le potentiel V créé en O par les quatre charges.



Exercice n° 06 :

Deux masses ponctuelles $m_A = m_B = 30 \text{ g}$, chacune porte une charge positive égale à $1 \mu\text{C}$, ils se trouvent en équilibre au point A et B, tel que A est fixe alors que B est mobile. On considère qu'il n'y a pas de frottements

- Calculer l'hauteur entre la masse A et B lors de l'équilibre



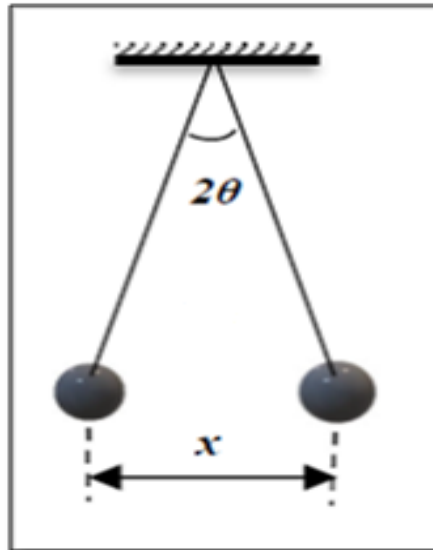
Exercice n°07 :

Considérons deux sphères identiques de masse m et portant la même charge Q , elles sont suspendues sous forme de pendules simples de même longueur a , comme le montre la figure ci-dessous.

En supposant que l'angle θ est très petit de telle sorte que $\tan \theta = \sin \theta$.

- Calculer la charge Q en fonction de la longueur a , de la masse m , et de l'angle θ

A.N. : $m = 0.01 \text{ kg}$; $a = 1 \text{ m}$; $\theta = 5.7^\circ$.



Exercice n°08 :

Trois charges ponctuelles $q_1 = 3\mu\text{C}$, $q_2 = -1\mu\text{C}$ et $q_3 = -2\mu\text{C}$ placées aux sommets d'un triangle équilatéral de côté $a = 30\text{ cm}$.

- Déterminer le champ électrique au centre O du triangle équilatéral.
- Déterminer le potentiel V au centre O.
- Dédire la force exercée sur une quatrième charge $q_4 = 2\mu\text{C}$ placée au centre O.

CORRIGÉ DE LA SÉRIE DE TD N° 02

Exercice 01 :

a) La force électrique est attractive.

$$b) F = K \frac{q_e q_p}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{(1.6 \times 10^{-19})(1.6 \times 10^{-19})}{(5.3 \times 10^{-11})^2} = 8 \times 10^{-8} \text{ N}$$

Exercice 02:

1-

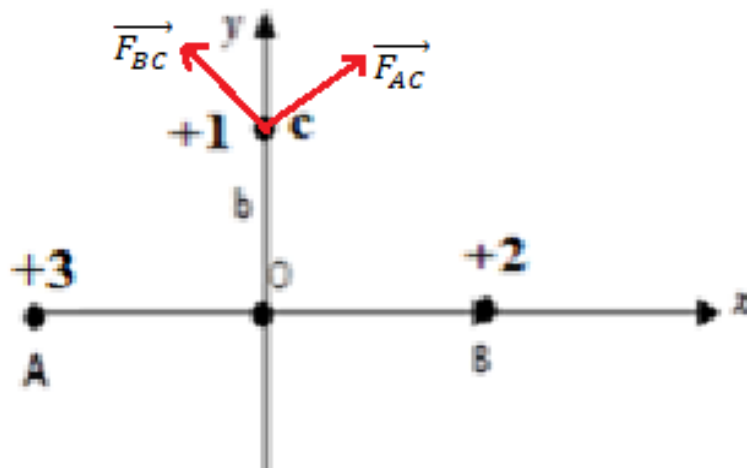
$$\vec{F}_{AC} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_C}{AC^2} \frac{\vec{AC}}{AC} = 9 \times 10^9 \frac{(3 \times 10^{-6})(1 \times 10^{-6})}{(\sqrt{3^2 + 2^2})^3} (3\vec{i} + 2\vec{j})$$

$$\vec{F}_{AC} = 0.576 \times 10^{-3} (3\vec{i} + 2\vec{j}) \text{ N}$$

$$\vec{F}_{BC} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_B q_C}{BC^2} \frac{\vec{BC}}{BC} = 9 \times 10^9 \frac{(2 \times 10^{-6})(1 \times 10^{-6})}{(\sqrt{2^2 + 2^2})^3} (-2\vec{i} + 2\vec{j})$$

$$\vec{F}_{BC} = 0.798 \times 10^{-3} (-2\vec{i} + 2\vec{j}) \text{ N}$$

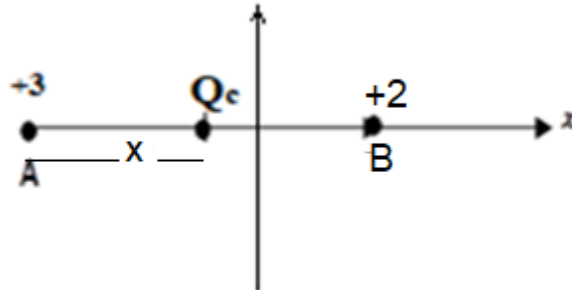
$$\vec{F}_C = \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{BC} = (0.132\vec{i} + 2.748\vec{j}) \times 10^{-3} \text{ N}$$



2- Le champ au point C :

$$\vec{E}_C = \frac{\vec{F}_C}{Q_C} = \frac{(0.132 \vec{i} + 2.748 \vec{j}) \times 10^{-3}}{1 \times 10^{-6}} = (0.132 \vec{i} + 2.748 \vec{j}) \times 10^3 \text{ N/C}$$

3-



$$\vec{F}_{AC} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_C}{AC^2} \vec{i} = 9 \times 10^9 \frac{(3 \times 10^{-6})(1 \times 10^{-6})}{x^2} \vec{i}$$

$$\vec{F}_{BC} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_B q_C}{BC^2} (-\vec{i}) = 9 \times 10^9 \frac{(2 \times 10^{-6})(1 \times 10^{-6})}{(5-x)^2} (-\vec{i})$$

L'équilibre sera lorsque $\vec{F}_C = \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{BC} = \vec{0}$

$$\vec{F}_C = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_{AC} = -\vec{F}_{BC}$$

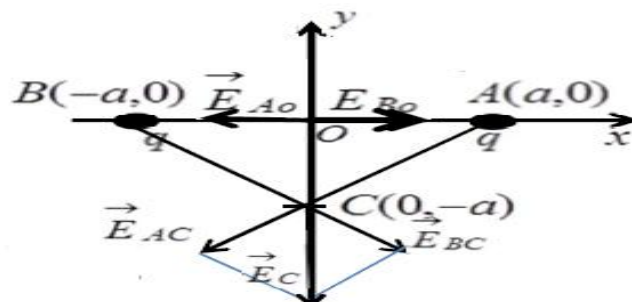
$$9 \times 10^9 \frac{(3 \times 10^{-6})(1 \times 10^{-6})}{x^2} \vec{i} = 9 \times 10^9 \frac{(2 \times 10^{-6})(1 \times 10^{-6})}{(5-x)^2} \vec{i}$$

$$\frac{3}{x^2} = \frac{2}{(5-x)^2} \Leftrightarrow 3(5-x)^2 = 2x^2 \Leftrightarrow \sqrt{3}(5-x) = \sqrt{2}x \text{ ou } \sqrt{3}(5-x) = -\sqrt{2}x$$

$$x = +2.75 \text{ (valeur acceptée)} \quad \text{ou} \quad x = +27.23 \text{ (valeur refusée)}$$

Alors l'équilibre sera pour : $x = +2.75$

Exercice 03 :



1- calcul du champ électrique résultant au point O(0,0) :

À cause de la symétrie, le champ résultant au point O égale à zéro

$$\vec{E}(O) = \vec{E}_{AO} + \vec{E}_{BO} = \vec{0}$$

2- Calcul du potentiel électrique au même point O :

$$V(O) = K \frac{Q_A}{AO} + K \frac{Q_B}{BO}$$

$$\text{Dont } \overrightarrow{AO} = -a\vec{i}, \overrightarrow{BO} = +a\vec{i} \text{ et } AO = BO = a$$

Alors :

$$V(O) = K \frac{q}{a} + K \frac{q}{a} = 2K \frac{q}{a}$$

3- Calcul du champ électrique résultant au point C (0, -a) :

$$\vec{E}(C) = \vec{E}_{AC} + \vec{E}_{BC}$$

$$\vec{E}_{AC} = \frac{KQ_A}{AC^3} \overrightarrow{AC}$$

$$\vec{E}_{BC} = \frac{KQ_B}{BC^3} \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AC} = -a\vec{i} - a\vec{j} \text{ et } \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2} a$$

$$\overrightarrow{BC} = +a\vec{i} - a\vec{j} \text{ et } \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{2} a$$

$$\vec{E}(C) = \vec{E}_{AC} + \vec{E}_{BC} = \frac{Kq}{(\sqrt{2}a)^3} (-a\vec{i} - a\vec{j}) + \frac{Kq}{(\sqrt{2}a)^3} (a\vec{i} - a\vec{j})$$

Et donc :

$$\vec{E}(C) = -2 \frac{Kq}{(\sqrt{2}a)^3} a\vec{j}$$

$$\vec{E}(C) = -\frac{Kq}{a^2\sqrt{2}} \vec{j}$$

- le potentiel électrique au point C :

$$V(C) = K \frac{Q_A}{AC} + K \frac{Q_B}{BC}$$

- Dont $\overrightarrow{AC} = -a\vec{i} - a\vec{j}$, $\overrightarrow{BC} = a\vec{i} - a\vec{j}$ et $AC = BC = a\sqrt{2}$

Alors :

$$V(C) = K \frac{q}{a\sqrt{2}} + K \frac{q}{a\sqrt{2}} = 2K \frac{q}{a\sqrt{2}}$$

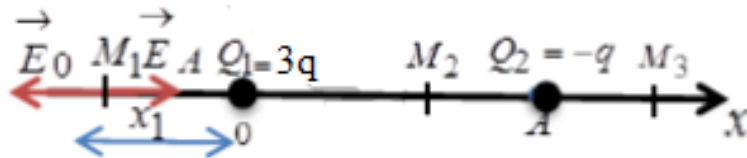
4- - Déduire la force exercée sur la charge Q_c :

$$\vec{F}(C) = Q_c \vec{E}_C$$

$$\vec{F}(C) = -\frac{KqQ_c}{a^2\sqrt{2}}\vec{j}$$

Exercice 04 :

Le champ électrique au point M_1 :



$$\vec{E}(M_1) = \vec{E}_O(M_1) + \vec{E}_A(M_1)$$

$$\vec{E}(M_1) = K \frac{3q \overrightarrow{OM_1}}{\|\overrightarrow{OM_1}\|^3} + K \frac{-q \overrightarrow{AM_1}}{\|\overrightarrow{AM_1}\|^3}$$

$$\|\overrightarrow{OM_1}\| = x_1, \quad \overrightarrow{OM_1} = (x_{M_1} - x_O)\vec{i} = -x_1\vec{i}$$

$$\|\overrightarrow{M_1A}\| = a + x_1, \quad \overrightarrow{AM_1} = (x_{M_1} - x_A)\vec{i} = (-x_1 - a)\vec{i}$$

$$\vec{E}(M_1) = -K \frac{3q x_1 \vec{i}}{x_1^3} + K \frac{q (a + x_1) \vec{i}}{(a + x_1)^3}$$

alors :

$$\vec{E}(M_1) = Kq \left(\frac{1}{(a + x_1)^2} - \frac{3}{x_1^2} \right) \vec{i}$$

Le potentiel au point M_1 :

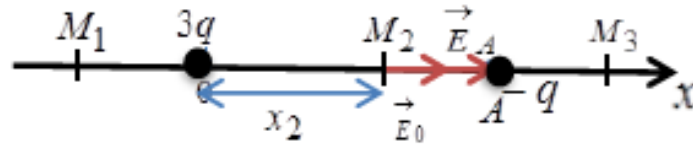
$$V(M_1) = V_O(M_1) + V_A(M_1)$$

$$\text{tel que : } V_O(M_1) = K \frac{q_1}{\|\overrightarrow{OM_1}\|} = K \frac{3q}{x_1}$$

$$\text{et } V_A(M_1) = K \frac{q_2}{\|\overrightarrow{M_1A}\|} = K \frac{-q}{a + x_1}$$

$$\text{Alors : } V(M_1) = K \frac{3q}{x_1} - K \frac{q}{a + x_1} = Kq \left(\frac{3}{x_1} - \frac{1}{a + x_1} \right)$$

Le champ électrique au point M_2 :



$$\vec{E}(M_2) = \vec{E}_O(M_2) + \vec{E}_A(M_2)$$

$$\vec{E}(M_2) = K \frac{3q \overrightarrow{OM_2}}{\|\overrightarrow{OM_2}\|^3} + K \frac{-q \overrightarrow{AM_2}}{\|\overrightarrow{AM_2}\|^3}$$

$$\|\overrightarrow{OM_2}\| = x_2, \quad \overrightarrow{OM_2} = (x_{M_2} - x_O)\vec{i} = x_2\vec{i}$$

$$\|\overrightarrow{AM_2}\| = a - x_2, \quad \overrightarrow{AM_2} = (x_{M_2} - x_A)\vec{i} = (x_2 - a)\vec{i}$$

$$\vec{E}(M_2) = K \frac{3q x_2 \vec{i}}{x_2^3} - K \frac{q (x_2 - a) \vec{i}}{(x_2 - a)^3}$$

alors :

$$\vec{E}(M_2) = Kq \left(\frac{3}{x_2^2} - \frac{1}{(x_2 - a)^2} \right) \vec{i}$$

Le potentiel au point M_2 :

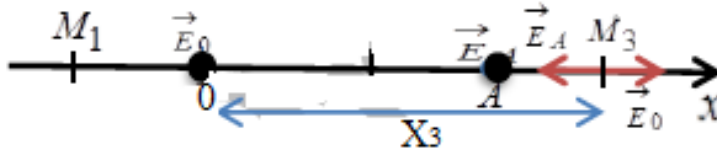
$$V(M_2) = V_O(M_2) + V_A(M_2)$$

$$\text{tel que : } V_O(M_2) = K \frac{q_1}{\|\overrightarrow{OM_2}\|} = K \frac{3q}{x_2}$$

$$\text{et } V_A(M_2) = K \frac{q_2}{\|\overrightarrow{M_2A}\|} = K \frac{-q}{a - x_2}$$

$$\text{Alors : } V(M_2) = K \frac{3q}{x_2} - K \frac{q}{a - x_2} = Kq \left(\frac{3}{x_2} - \frac{1}{a - x_2} \right)$$

Le champ électrique au point M_3 :



$$\vec{E}(M_3) = \vec{E}_O(M_3) + \vec{E}_A(M_3)$$

$$\vec{E}(M_3) = K \frac{3q \overrightarrow{OM_3}}{\|\overrightarrow{OM_3}\|^3} + K \frac{-q \overrightarrow{AM_3}}{\|\overrightarrow{AM_3}\|^3}$$

$$\|\overrightarrow{OM_3}\| = x_3, \quad \overrightarrow{OM_3} = (x_{M_3} - x_0)\vec{i} = x_3\vec{i}$$

$$\|\overrightarrow{AM_3}\| = x_3 - a, \quad \overrightarrow{AM_3} = (x_{M_3} - x_A)\vec{i} = (x_3 - a)\vec{i}$$

$$\vec{E}(M_3) = K \frac{3q x_3 \vec{i}}{x_3^3} - K \frac{q (x_3 - a) \vec{i}}{(x_3 - a)^3}$$

alors :

$$\vec{E}(M_3) = Kq \left(\frac{3}{x_3^2} - \frac{1}{(x_3 - a)^2} \right) \vec{i}$$

Le potentiel au point M_3 :

$$V(M_3) = V_O(M_3) + V_A(M_3)$$

$$\text{tel que : } V_O(M_3) = K \frac{q_1}{\|\overrightarrow{OM_3}\|} = K \frac{3q}{x_3}$$

$$\text{et } V_A(M_3) = K \frac{q_2}{\|\overrightarrow{AM_3}\|} = K \frac{-q}{x_3 - a}$$

$$\text{Alors : } V(M_3) = K \frac{3q}{x_3} - K \frac{q}{x_3 - a} = Kq \left(\frac{3}{x_3} - \frac{1}{x_3 - a} \right)$$

Exercice 05 :

1 / le champ $\vec{E}$ au centre O du carré :

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \vec{E}_{AO} + \vec{E}_{BO} + \vec{E}_{CO} + \vec{E}_{DO} = \frac{kQ_A}{AO^3} \vec{AO} + \frac{kQ_B}{BO^3} \vec{BO} + \frac{kQ_C}{CO^3} \vec{CO} + \frac{kQ_D}{DO^3} \vec{DO} \\
&= \frac{K}{(\frac{\sqrt{2}a}{2})^3} [q(\frac{a}{2}\vec{i} - \frac{a}{2}\vec{j}) - 2q(-\frac{a}{2}\vec{i} - \frac{a}{2}\vec{j}) + 2q(-\frac{a}{2}\vec{i} + \frac{a}{2}\vec{j}) \\
&\quad - q(\frac{a}{2}\vec{i} + \frac{a}{2}\vec{j})] \\
\vec{E} &= 2\sqrt{2} \frac{Kq}{a^2} \vec{j}
\end{aligned}$$

Le champ résultant $\vec{E}$ est donc :

- dirigé suivant l'axe $y'oy$;
- dans le sens positif de l'axe $y'oy$;
- de norme : $E = 2\sqrt{2} \frac{Kq}{a^2}$

2/

$$V = K \frac{Q_A}{AO} + K \frac{Q_B}{BO} + K \frac{Q_C}{CO} + K \frac{Q_D}{DO} = \frac{2Kq}{a\sqrt{2}} (1 - 2 + 2 - 1)$$

$$V = 0 \text{ volt}$$

Exercice 06:

L'équilibre sera lorsque la somme des forces exercées sur B égale à zéro :

$$\begin{aligned}
\sum \vec{F} &= \vec{0} \\
\sum \vec{F} &= \vec{P} + \vec{F}_e = \vec{0}
\end{aligned}$$

Sur l'axe des X on a :

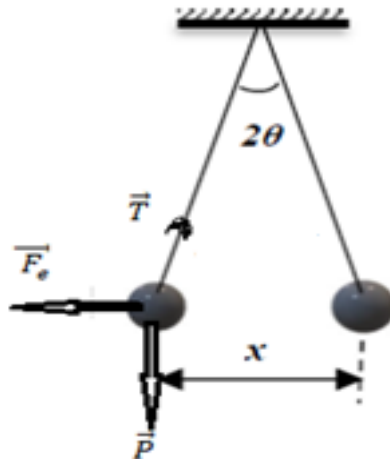
$$m \cdot g \cdot \sin \theta = F_e = K \frac{q^2}{a^2} \dots \dots (1)$$

L'hauteur entre la masse A et B : $h = a \sin \theta$; on remplace h dans l'équation (1) :

$$h = \sqrt{\frac{K q^2 \sin \theta}{m \cdot g}} = \sqrt{\frac{9 \times 10^9 (1 \times 10^{-6})^2 \sin 30}{30 \times 10^{-3} \times 10}} = 0.1225 \text{ m}$$

La hauteur entre la masse A et B lors de l'équilibre est = **12.25 cm** .

Exercice 07 :



Les deux sphères ayant des charges identiques, elles vont subir des forces de

répulsion : $\vec{F}_e = K \frac{Q \cdot Q}{x^2} (-\vec{i}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{x^2} \vec{i}$

On prend une seule charge (celle de gauche pas spécialement), elle est soumise a trois force :

La force électrostatique $\vec{F}_e$; le poids $\vec{P}$ et la tension du fil $\vec{T}$.

Selon la deuxième loi de Newton, à l'équilibre :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{F}_e + \vec{T} = \vec{0}$$

Pour résoudre cette équation vectorielle, on passe aux équations scalaires par projection sur le système de coordonnées adéquat (dans ce cas le système cartésien)

Suivant l'axe ox

$$T \sin \theta - F_e = 0 \Rightarrow T \sin \theta = K \frac{Q^2}{x^2} \dots \dots (1)$$

Suivant l'axe oy

$$T \cos \theta - mg = 0 \Rightarrow T \cos \theta = mg \dots \dots (2)$$

Le rapport des deux équations $\frac{(1)}{(2)} = \tan \theta = \frac{K Q^2}{mgx^2}$

Puisque l'écartement entre les deux sphères est très petit, on peut utiliser

l'approximation suivante : $\tan \theta \simeq \sin \theta = \frac{x}{2a}$

$$\sin \theta = \frac{K Q^2}{mgx^2}$$

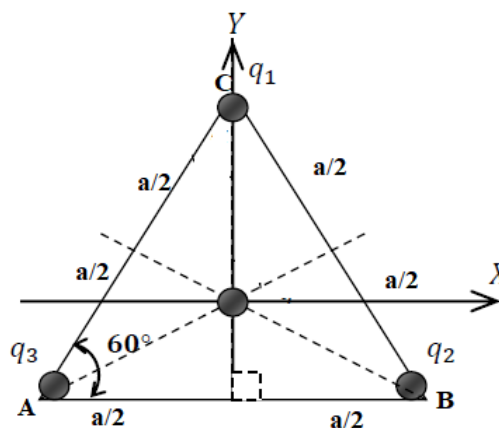
$$Q = \sqrt{\frac{mg x^2 \sin \theta}{k}} = \sqrt{\frac{mg 4 a \sin^3 \theta}{k}}$$

A.N. : $m = 0.01 \text{ kg} ; a = 1 \text{ m} ; \theta = 5.7^\circ$

$$\Rightarrow Q = \sqrt{\frac{mg 4 a \sin^3 \theta}{k}} = \sqrt{\frac{0.01 \times 10 \times 4 \times 1 \times \sin^3(5.7)}{9 \times 10^9}}$$

$$Q = 2.086 \times 10^{-7} \text{ C}$$

Exercice 08 :



1- le champ électrique au centre O du triangle équilatéral :

Si on considère que le centre de triangle équilatéral coïncide avec l'origine et la charge q_1 (point C) se trouve sur l'axe Oy, on doit déterminer les coordonnées des sommets pour cela on :

$$A(-a/2, -a/2\sqrt{3}) \quad B = (a/2, -a/2\sqrt{3}) \quad C = (0, a/\sqrt{3})$$

$$\vec{E}_{AO} = k \frac{q_3}{(\frac{a}{\sqrt{3}})^3} (\frac{a}{2}\vec{i} + \frac{a}{2\sqrt{3}}\vec{j})$$

$$\vec{E}_{BO} = k \frac{q_2}{(\frac{a}{\sqrt{3}})^3} (-\frac{a}{2}\vec{i} + \frac{a}{2\sqrt{3}}\vec{j})$$

$$\vec{E}_{CO} = k \frac{q_1}{(\frac{a}{\sqrt{3}})^3} (-\frac{a}{\sqrt{3}}\vec{j})$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_{tot} &= \vec{E}_{AO} + \vec{E}_{BO} + \vec{E}_{CO} \\ &= \frac{K}{(\frac{a}{\sqrt{3}})^3} [q_3 (\frac{a}{2}\vec{i} + \frac{a}{2\sqrt{3}}\vec{j}) + q_2 (-\frac{a}{2}\vec{i} + \frac{a}{2\sqrt{3}}\vec{j}) \\ &\quad + q_1 (-\frac{a}{\sqrt{3}}\vec{j})] \end{aligned}$$

Application numérique :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{tot} &= 9.10^9 \left[\frac{-2.10^{-6}}{(\frac{0.03}{\sqrt{3}})^3} (\frac{0.03}{2}\vec{i} + \frac{0.03}{2\sqrt{3}}\vec{j}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{-1.10^{-6}}{(\frac{0.03}{\sqrt{3}})^3} (-\frac{0.03}{2}\vec{i} + \frac{0.03}{2\sqrt{3}}\vec{j}) + \frac{3.10^{-6}}{(\frac{0.03}{\sqrt{3}})^3} (-\frac{0.03}{\sqrt{3}}\vec{j}) \right] \\ &= 9.10^9 \frac{-0.015.10^{-6}\vec{i} - 0.08.10^{-6}\vec{j}}{5.10^{-6}} \end{aligned}$$

$$\vec{E}_{tot} = (-27\vec{i} - 144\vec{j})10^6 \text{ Volts.m}^{-1}$$

1- Le potentiel V au centre O :

$$V_{tot} = V_{AO} + V_{BO} + V_{CO} = k \frac{q_3}{\frac{a}{\sqrt{3}}} + k \frac{q_2}{\frac{a}{\sqrt{3}}} + k \frac{q_1}{\frac{a}{\sqrt{3}}}$$

Application numérique : $V = 0 \text{ volt}$

2- La force exercée sur une charge $q_4 = 2\mu\text{C}$ au centre O :

$$\vec{F}_4 = q_4 \cdot \vec{E}_{tot} = 2 \cdot 10^{-6} (-27 \vec{i} - 144 \vec{j}) 10^6 = -54 \vec{i} - 288 \vec{j} [\text{N}]$$

RESUME DE COURS : Electrostatique

Distribution des charges :

Les charges électriques se répartissent suivant trois formes: linéaires, surfacique ou volumique. Cette distribution peut être uniforme ou non uniforme selon la géométrie du conducteur ou du diélectrique.

La distribution de charge est caractérisée par une grandeur physique notée la densité de charge. Selon la nature de distribution on trouve la densité de charge linéique λ , surfacique σ et volumique ρ .

On définit donc :

- a) La densité de charge linéaire λ est le rapport de la quantité de charge dQ par l'élément de longueur dl c'est à dire :

$$\lambda = \frac{dQ}{dl}$$

Son unité est le coulomb par mètre.

- b) La densité de charge surfacique σ est le rapport de la quantité de charge dQ par l'élément de surface dS c'est à dire :

$$\sigma = \frac{dQ}{dS}$$

Son unité est le Coulomb par mètre carré.

- c) La densité de charge volumique ρ est le rapport de la quantité de charge dQ par l'élément de volume dV c'est à dire :

$$\rho = \frac{dQ}{dV}$$

Son unité est le Coulomb par mètre cube.

Champ électrique et Potentiel crée par une ligne chargée

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{dQ}{PM^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{\lambda dl}{PM^2} \vec{u}$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{\lambda dl}{PM}$$

$dq = \lambda dl$, λ est la densité lineique de charge, elle s'exprime en C. m⁻¹

Champ électrique et Potentiel crée par une surface chargée

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{dQ}{PM^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma dS}{PM^2} \vec{u}$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma dS}{PM}$$

$dq = \sigma dS$, σ est la densité surfacique de charge, elle s'exprime en $C. m^{-2}$

Champ électrique et Potentiel crée par un volume chargé

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{dQ}{PM^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho dV}{PM^2} \vec{u}$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho dV}{PM}$$

$dq = \rho dV$, ρ est la densité volumique de charge, elle s'exprime en $C. m^{-3}$

Flux du champ électrique :

On appelle Flux d'un champ électrique au travers d'une surface (S) la quantité :

$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$

Le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normale à (S) au point considéré.

Théorème de Gauss :

Le flux d'un vecteur champ électrique à travers une surface fermée n'est dû qu'aux charges à l'intérieur de cette surface :

$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \sum_i \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Où Q_{int} est la charge électrique totale contenue dans le volume (τ) délimité par la surface fermée (S).

La **forme locale** du théorème de Gauss est :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$$

Cette expression est valable en tout point M de l'espace qu'il y ait des charges ou non.

Le potentiel électrique

La circulation du champ électrique $\vec{E}$ entre les points A et B la quantité ;

$$C_{AB}^{\Gamma} = \int_{A(\Gamma)}^B \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$$

On peut introduire un champ scalaire V tel que :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = V(A) - V(B)$$

On appelle la quantité V le potentiel électrique associé au champ électrique $\vec{E}$. Son unité est le volt (V).

La relation locale entre le champ et le potentiel électrique :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V(M)$$

Le champ électrique $\vec{E}$ est dans le sens des potentiels décroissants.

Série de TD N° 03

Exercice n°01 :

Une rondelle métallique de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 porte une charge surfacique de densité σ répartie uniformément entre R_1 et R_2 (**Fig.1**)

1. Calculer la charge totale du système Q en fonction de σ , R_1 et R_2
2. Que devient cette charge si on a une distribution superficielle non uniforme et qui dépend de la distance relative par rapport au centre de la rondelle $\sigma = \alpha r^2$.

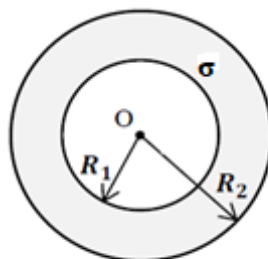


Figure 1

Exercice n°02 :

Soit une sphère de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 , une charge volumique ρ positive est uniformément répartie entre les deux rayons.

Calculer la charge totale du système Q .

Exercice n°03 :

Calculer le champ électrique $\vec{E}$ au point M, créé par un fil rectiligne de longueur finie a , portant une densité linéique de charges $\lambda > 0$ pour les trois cas :

- le fil est prolongé sur l'axe des X et le point M se trouve à une distance d de son extrémité (**Fig.2.a**)
- le fil est sur l'axe des X et le point M se trouve sur le plan médiateur au point M(0, y) (**Fig.2.b**)
- le fil a une longueur infinie



Fig. 2.a

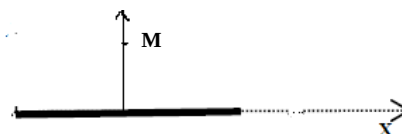


Fig.2.b

Exercice n°04 :

Dans le plan Oxy , on considère une tige très fine circulaire de rayon R et chargée uniformément de distribution linéique $\lambda > 0$. (Fig.3)

1. Calculer le champ électrique $\vec{E}$ créé à un point M situé à une distance "z" sur l'axe Oz.
2. Que devient ce champ pour $z \gg R$.

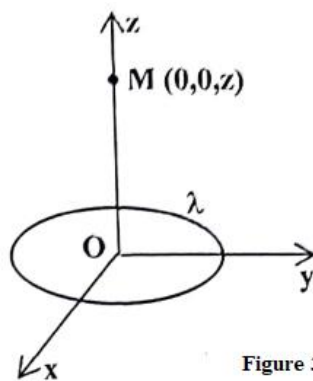


Figure 3

Exercice n°05 :

On considère un disque de rayon R chargé avec une distribution superficielle uniforme σ . (Fig.4)

1. Calculer le champ électrique $\vec{E}$ en un point M situé sur l'axe perpendiculaire au disque et passant par son centre et situé à une distance z ($z \ll R$)
2. Dédire la force électrostatique exercée sur la charge QM placée au point M.

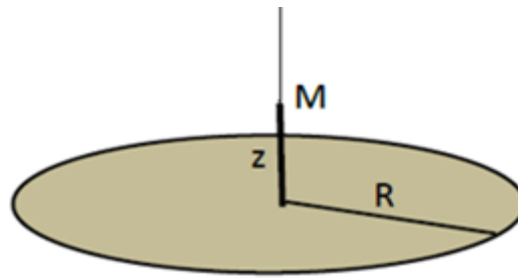


Figure 4

Exercice n°06 :

Un anneau de centre O et de rayon R porte une densité linéique uniforme de charges positive sauf sur un arc d'angle au centre 2α (Fig.5)

- Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}$ au centre d'anneau.

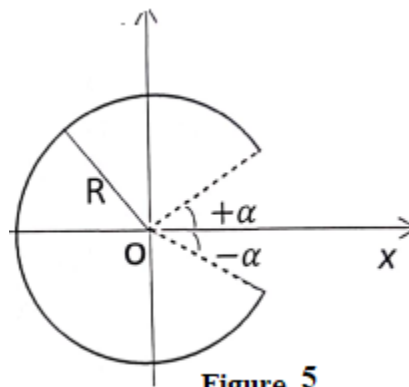
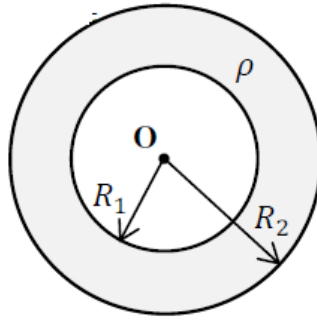


Figure 5

Exercice n°07 :

Soit une distribution uniforme de charges, de densité volumique constante « ρ » répartie entre deux sphères concentriques S_1 et S_2 , la première sphère a un rayon R_1 et la deuxième sphère a un rayon R_2 (figure ci-dessous).

1. Calculer le champ électrique $\vec{E}$ créé en tout point de l'espace en fonction du rayon r (r variant de 0 à l'infini).



Exercice n°08 :

Un cylindre plein de longueur infinie, de rayon R porte une densité de charge volumique $\rho > 0$.

- 1- En utilisant le théorème de Gauss, calculer le champ électrostatique à l'intérieur, à la surface et à l'extérieur du cylindre.
- 2- En déduire le potentiel à l'intérieur, à la surface et à l'extérieur du cylindre, en supposant $V = 0$ sur l'axe du cylindre.

CORRIGÉ DE LA SÉRIE DE TD N° 03

Exercice n°1:

1- La charge totale Q :

$$dQ = \sigma dS = \sigma r dr d\theta$$

$$\int dQ = \iint \sigma r dr d\theta = \sigma \int_{R_1}^{R_2} r dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$Q = \sigma \times \frac{1}{2} (R_2^2 - R_1^2) \times 2\pi$$

$$Q = \sigma \pi (R_2^2 - R_1^2)$$

2- La charge totale pour une distribution superficielle non uniforme :

$$dQ = \sigma dS = \sigma r dr d\theta$$

$$\int dQ = \iint \sigma r dr d\theta = \int_{R_1}^{R_2} \underbrace{\alpha r^2}_{\sigma} r dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\int dQ = \alpha \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$Q = 2\pi \alpha \times \frac{1}{4} (R_2^4 - R_1^4)$$

Exercice n°2:

1- La charge totale Q :

$$dQ = \rho dV = \rho r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$$

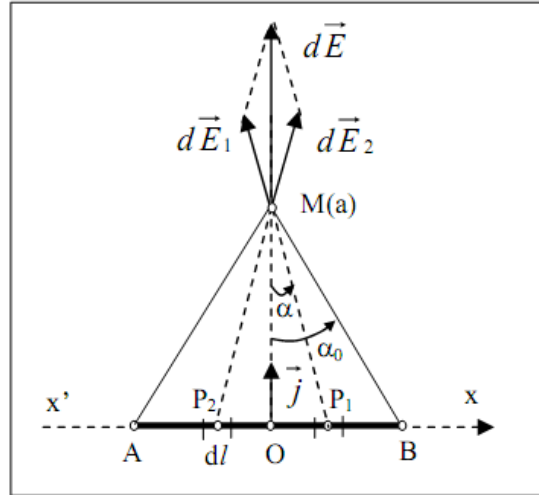
$$\int dQ = \iiint \rho r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$Q = \rho \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$Q = \rho \frac{1}{3} (R_2^3 - R_1^3) [-\cos \pi - (-\cos 0)] \times 2\pi$$

$$Q = \frac{4\pi}{3} \rho (R_2^3 - R_1^3)$$

Exercice n°3 :



1/

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{dQ}{PM^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{\lambda dl}{PM^2} \vec{u} \text{ avec } \vec{u} = \vec{r} \text{ et } PM = (a + d) - x$$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{\lambda dx}{(a + d - x)^2} \vec{r} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{a + d} \right) \vec{r} = \frac{\lambda a \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 d(a + d)}$$

2 /

Considérons les points A et B sur l'axe X'X tel que l'origine O soit le milieu de AB (figure ci-dessus). Deux éléments de charges dq_1 et dq_2 , centrés en deux points P_1 et P_2 symétriques par rapport à O, créent en M des champs électrostatiques élémentaires respectivement $d\vec{E}_1$ et $d\vec{E}_2$. La résultante de ces champs est portée par la médiatrice (OM), par exemple l'axe y'y de vecteur $\vec{j}$.

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{\cos \alpha}{y} d\alpha \vec{j}$$

Avec , $\tan \alpha = \frac{x}{y}$, $dx = y(1 + \tan^2 \alpha) d\alpha = \frac{y}{\cos^2 \alpha} d\alpha$

$$\frac{1}{PM^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{y^2}$$

Pour x varie entre $x = -\frac{a}{2}$ et $x = \frac{a}{2}$, et α entre $\alpha = -\alpha_0$ et $\alpha = \alpha_0$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \sin \alpha_0 \vec{j} = \frac{\lambda \frac{a}{2}}{2\pi\epsilon_0 y \sqrt{\frac{a^2}{4} + y^2}} \vec{j}$$

3 /Le fil a une longueur infinie : $x_A \rightarrow -\infty$ et $x_B \rightarrow \infty$

$$\vec{E} = \frac{\lambda \frac{a}{2}}{2\pi\epsilon_0 y \sqrt{\frac{a^2}{4} + y^2}} \vec{j} = \frac{\lambda \frac{a}{2}}{2\pi\epsilon_0 y \sqrt{\frac{a^2}{4}}} \vec{j}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \vec{j}$$

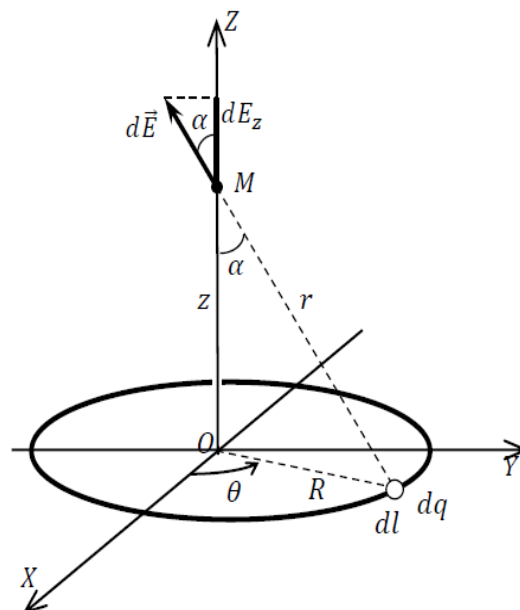
Exercice n°4 :

1- Le champ électrique $\vec{E}$ crée à un point M :

$$d\vec{E} = K \frac{dQ}{r^2} \vec{u}_r$$

La distribution est linéaire $\Rightarrow dq = \lambda \cdot dl$. Donc :

$$\vec{E} = d\vec{E} = K \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u}_r$$



A cause de la symétrie, le champ électrique total est suivant l'axe (OZ).

On calcul uniquement la composante suivant (OZ).

En projetant sur l'axe OZ : $dE_z = dE \cdot \cos\alpha = K \frac{\lambda dl}{r^2} \cos\alpha$

$$E_z = \int dE \cdot \cos\alpha = \int K \frac{\lambda dl}{r^2} \cos\alpha$$

D'après la figure :

$$dl = R \cdot d\theta \text{ dont } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$r = \sqrt{R^2 + z^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

En remplaçant dans l'intégrale, il vient que :

$$E_z = \int K \frac{\lambda dl}{r^2} \cos\alpha = \int K \frac{\lambda}{(\sqrt{R^2 + z^2})^2} R d\theta \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$E_z = K \frac{R \lambda z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\text{Donc } E_z = 2\pi \frac{k\lambda R z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et} \quad \vec{E}_z = 2\pi \frac{k\lambda R z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{k}$$

2- Pour $z \gg R$:

Pour $z \gg R$, $(R^2 + z^2) \approx z^2$, donc :

$$\vec{E}_z = 2\pi \frac{k\lambda R z}{(z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{k} = 2\pi \frac{k\lambda R}{z^2} \vec{k}$$

Exercice n°05 :

1/ Pour calculer le champ électrique $\vec{E}$ on considère un élément de surface du disque

$ds = \rho d\rho d\theta$, Contient une charge élémentaire $dq = \sigma ds$ autour d'un point P (x, y, 0) ou en coordonnées cylindriques $(\rho, \theta, 0)$ qui produit un champ infinitésimal

$$d\vec{E} = K \frac{dQ}{PM^3} \overrightarrow{PM}$$

En coordonnées cylindriques $\overrightarrow{PM} = -\rho \vec{u}_\rho + z \vec{k}$

Donc on a :

$$d\vec{E} = K \frac{\sigma \rho d\rho d\theta}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (-\rho \vec{u}_\rho + z \vec{k})$$

Et par conséquence,

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \iint K \frac{\sigma \rho d\rho d\theta}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (-\rho \vec{u}_\rho + z \vec{k}) \\ &= \iint K \sigma \frac{-\rho^2 d\rho d\theta}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_\rho + \iint K \frac{\sigma \rho d\rho d\theta}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} z \vec{k} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \end{aligned}$$

On calcule chaque intégrale séparément :

$$\vec{E}_1 = \iint K \sigma \frac{-\rho^2 d\rho d\theta}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_\rho = K \sigma \int_0^R \frac{-\rho^2 d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) d\theta = \mathbf{0}$$

$$\vec{E}_2 = \iint K \sigma \frac{\rho d\rho d\theta}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} z \vec{k} = K \sigma z \vec{k} \int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \vec{k}$$

Et donc

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \vec{k}}$$

2/ la force exercée sur Q_M :

$$\boxed{\vec{F}_M = Q_M \cdot \vec{E} = \frac{Q_M \sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \vec{k}}$$

Exercice n°06 :

L'axe Ox est un axe de symétrie de la répartition des charges, alors le champ total sera porté sur l'axe OX :

$$\overrightarrow{dE}(O) = \overrightarrow{dE}_{ox}(O) = -E_{ox} \vec{i} = -E_o \cos \theta \vec{i}$$

$$\overrightarrow{dE}(O) = -E_o \cos \theta \vec{i} = -K \frac{\lambda dl}{R^2} \cos \theta \vec{i} \text{ avec } dl = R d\theta$$

$$\vec{E}(O) = \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} -K \frac{\lambda R d\theta}{R^2} \cos \theta \vec{i}$$

$$\vec{E}(O) = -K \frac{\lambda}{R} \vec{r} \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \cos \theta d\theta$$

On a $\int \cos \theta = \sin \theta$, et $\sin (2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$

$$\vec{E}(O) = -K \frac{\lambda}{R} \vec{r} (-\sin \alpha - \sin \alpha)$$

Donc :

$$\vec{E}(O) = K \frac{\lambda}{R} 2 \sin \alpha \vec{r}$$

Exercice n°07 :

Le champ électrique $\vec{E}$:

pour $r < R_1$:

$$\phi_{SG} = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_1(4\pi r^2) = \frac{\sum q}{\epsilon_0} = \frac{0}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_1 = \vec{0}$$

pour $R_1 < r < R_2$:

$$\phi_{SG} = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_2(4\pi r^2) = \frac{\sum q}{\epsilon_0} = \frac{\rho V'}{\epsilon_0} = \frac{\rho \frac{4\pi}{3} (r^3 - R_1^3)}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\rho(r^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

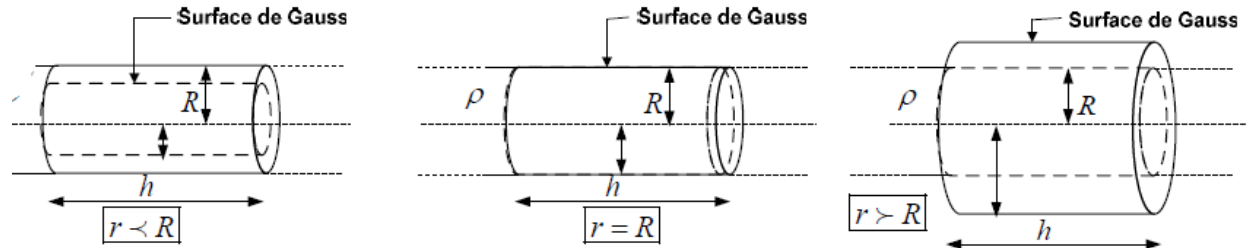
pour $r > R_2$:

$$\phi_{SG} = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_3(4\pi r^2) = \frac{\sum q}{\epsilon_0} = \frac{\rho V}{\epsilon_0} = \frac{\rho \frac{4\pi}{3} (R_2^3 - R_1^3)}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_3 = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

Exercice n°08 :

Le champ électrostatique dans le cylindre : la surface de Gauss convenable à ce cas est un cylindre de hauteur h , et de rayon r .



D'après le théorème de Gauss :

pour $r < R$:

$$\phi_{SG} = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_1(2\pi r h) = \frac{\sum q}{\epsilon_0} = \frac{\rho \pi r^2 h}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \vec{u}_r$$

pour $r = R$:

$$\phi_{SG} = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_2(2\pi r h) = \frac{\sum q}{\epsilon_0} = \frac{\rho \pi R^2 h}{\epsilon_0}; (r = R)$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\rho R}{2\epsilon_0} \vec{u}_r$$

pour $r > R$:

$$\phi_{SG} = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_3(2\pi r h) = \frac{\sum q}{\epsilon_0} = \frac{\rho \pi R^2 h}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_3 = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

Le potentiel électrostatique V :

Pour en déduire le potentiel électrique, on fait appel à la formule $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$

Et puisque le champ est radial, on peut écrire :

$$V = - \int \vec{E} \cdot \vec{dr}$$

Pour obtenir les expressions de V on doit intégrer :

Potentiel à l'intérieur du cylindre :

pour $r < R$:

$$V_1 = - \int \vec{E} \cdot \vec{dr} = - \int \frac{\rho r}{2\epsilon_0} dr$$

$$V_1 = - \frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} + C_1$$

$$\text{Pour } R = 0 \Rightarrow V = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$$

$$V_1 = - \frac{\rho r^2}{4\epsilon_0}$$

Potentiel à la surface du cylindre : si on remplace r par R dans l'expression de V_1 , on obtient le potentiel à la surface du cylindre :

$$V_2 = - \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0}$$

Potentiel à l'extérieur du cylindre : pour $r > R$:

$$V_3 = - \int \vec{E} \cdot \vec{dr} = - \int \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} dr$$

$$V_3 = - \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln r + C_2$$

Pour trouver C_2 , on sait que pour $r = R$, $V_1(R) = V_3(R)$, alors:

$$- \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} = - \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln R + C_2$$

$$\Rightarrow C_2 = - \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln R$$

$$V_3 = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{R}{r} - \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0}$$

Chapitre III :
Conducteurs en
équilibre électrostatique

RESUME DE COURS : Conducteurs en équilibre électrostatique

Conducteurs en équilibre électrostatique

- Un conducteur est un corps à l'intérieur duquel les charges libres peuvent se déplacer.
- Un conducteur est dit en équilibre électrostatique si toutes ces charges sont immobiles, c'est à dire les charges intérieures ne sont soumises à aucune force.

Propriétés d'un conducteur en équilibre électrostatique

- *Le champ à l'intérieur du conducteur en équilibre électrostatique $\vec{E}_{int} = \vec{0}$*
- *Le potentiel à l'intérieur du conducteur en équilibre électrostatique est constant $\Rightarrow$ **volume équipotentiel***
- *La charge du conducteur en équilibre électrostatique se trouve à la surface*
 $Q = \sigma \cdot S$
- *Le champ au voisinage de la surface est normal à la surface même et vaut :*

$$\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

Capacité d'un conducteur

La charge d'un conducteur unique est proportionnelle au potentiel V . le coefficient de proportionnalité entre la charge et le potentiel est la capacité :

$$C = \frac{Q}{V}$$

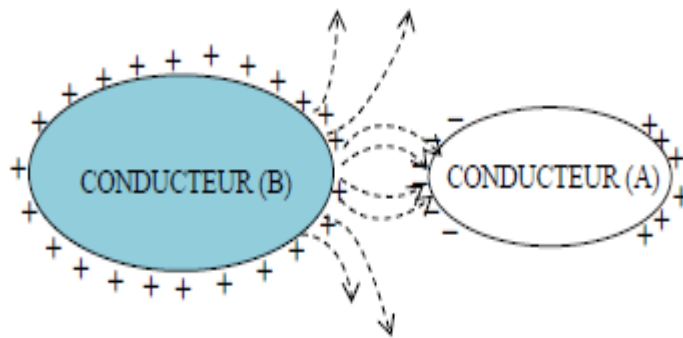
La capacité se mesure en farad (F).

Phénomènes d'influence

Influence partielle

Si on approche un conducteur (A) neutre à un conducteur initialement chargé positivement (B) ce dernier et grâce au champ créé par ses charges agit sur les électrons libres du conducteur (A) qui migrent vers le côté face au conducteur (B). Avec cette migration progressive des électrons, sur l'autre côté du conducteur (A) ils

apparaissent des charges positives. Cette nouvelle répartition des charges dans le conducteur (A) il se crée un champ induit $\vec{E}_{int}$ qui s'oppose au champ extérieur $\vec{E}_{ext}$.



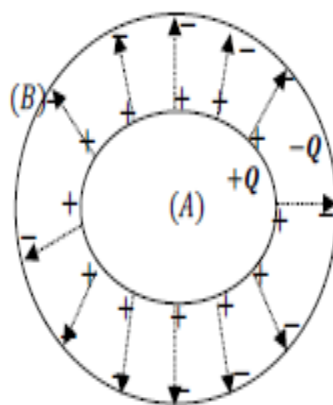
La migration des électrons dans le conducteur (A) cesse (état d'équilibre) lorsque les deux champs se neutralisent c'est-à-dire :

$$\vec{E}_{ext} + \vec{E}_{int} = \vec{0}$$

Ce phénomène s'appelle **l'influence partielle** car le conducteur (A) (influencé) n'est pas entouré complètement par le conducteur (B) (l'influençant).

Influence totale

Dans le cas où le conducteur influencé est entouré complètement par un autre conducteur (influençant), les lignes de champ sortant du conducteur influençant aboutissent le conducteur influencé. Il s'agit donc du phénomène de l'influence totale.



Prenons un exemple, soit le conducteur (A) une sphère initialement chargée (positivement par exemple). On entoure cette sphère par une autre sphère conductrice neutre (B). Toutes les lignes de champ sortant de la sphère chargée (A) aboutissent la

sphère (B). Des charges de signe négatif apparaissent sur la paroi interne de la sphère (B) telle que la charge totale sur la paroi interne de la sphère (B) soit égale à :

$$Q_B^{in} = -Q_A = -Q$$

Sur la paroi externe de la sphère (B) ils apparaissent des charges positives tel que :

$$Q_B^{ext} = -Q_B^{int} = +Q$$

Capacité d'un condensateur

Si deux conducteurs C_1 et C_2 sont en influence totale, ils forment un condensateur de capacité :

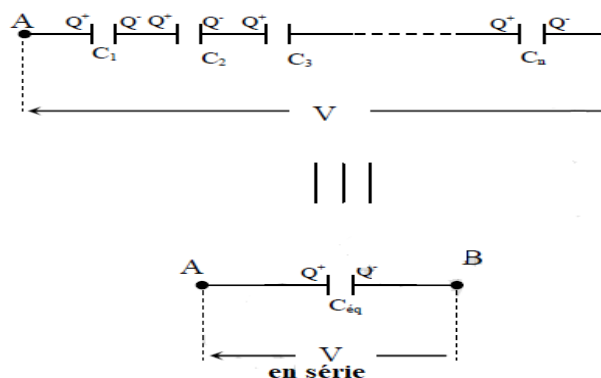
$$C = \frac{Q}{|V_1 - V_2|}$$

- La capacité d'un condensateur plan : $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$
- La capacité d'un condensateur sphérique : $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_2 r_1}{r_2 - r_1}$ avec ($r_2 > r_1$)
- La capacité d'un condensateur cylindrique : $C = \frac{2\pi L \epsilon_0}{\log \frac{R_2}{R_1}}$

Associations de condensateurs

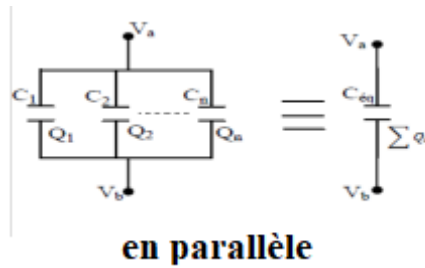
Condensateurs en série:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}$$



Condensateurs en parallèle:

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots \dots \dots + C_n$$



Energie interne d'un condensateur

C'est l'énergie électrique libérée quand on court-circuite les armatures du condensateur

$$U = \frac{1}{2} QV = \frac{1Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2$$

Série de TD N° 04

Exercice n°01 :

Une sphère métallique (S_1) de rayon $R_1 = 6 \text{ cm}$ porte une charge $Q_1 = 1 \mu\text{C}$

- 1- Calculer sa capacité C_1 , son potentiel V_1 et sa densité de charge.

On relie la sphère S_1 par un fil conducteur de capacité négligeable à une autre sphère métallique S_2 de rayon $R_2 < R_1$. La deuxième sphère est placée à une distance de S_1 suffisamment éloignée, pour négliger l'influence de S_1 et S_2 .

- 2- Calculer à l'équilibre les charges Q'_1 et Q'_2 portées par les deux sphères.
- 3- Calculer les densités surfaciques de charges pour les deux sphères.
- 4- Calculer le rapport des densités surfaciques de charges.
- 5- Calculer le champ électrique au voisinage de chaque sphère.

Exercice n°02 :

Une sphère conductrice S_1 de centre O et de rayon $R_1 = 10 \text{ cm}$, porte une charge Q_1 , elle est placée dans une cavité sphérique creuse conductrice S_2 initialement neutre et isolée, de rayon intérieur $R_2 = 20 \text{ cm}$ et de rayon extérieur $R_3 = 30 \text{ cm}$. Les deux conducteurs sont initialement en équilibre.

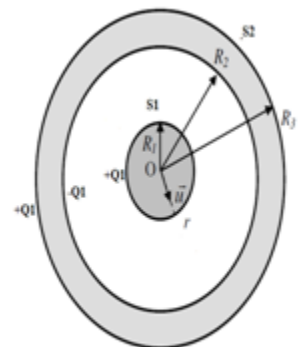


Figure 2.a

- 1- Calculer la charge Q_1 , si la sphère S_1 est portée au potentiel $V = 9 \text{ V}$.
- 2- Déterminer la distribution de charge du système à l'équilibre électrostatique (Figure 2.a).
- 3- Calculer les nouveaux potentiels V_{S1} et V_{S2} des deux sphères, puis déduire la capacité du condensateur formé par les deux sphères S_1 et S_2 .

La sphère S_1 est maintenue au potentiel V_1 tout en reliant la cavité creuse S_2 à la terre comme indiqué sur la figure 2.b.

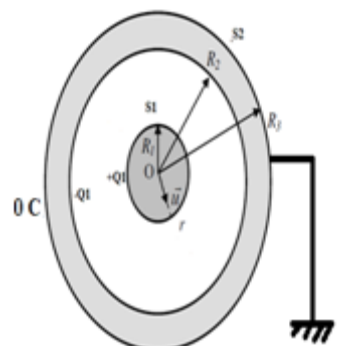


Figure 2.b

- 1- Quelle est la charge et comment se répartit-elle dans ce cas.

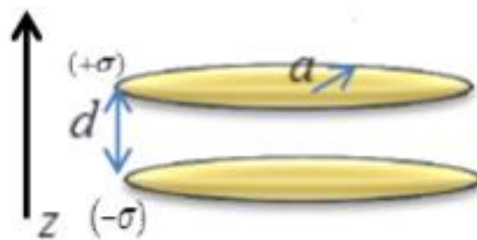
Exercice n°03:

Un condensateur cylindrique est formé à partir d'un cylindre conducteur de longueur h (h est supposé très grand) et de rayon R_A , portant une charge $-Q$, est entouré d'une couche conductrice cylindrique *initialement neutre* de rayon intérieur R_B et de rayon extérieur R_C . L'ensemble est à l'équilibre électrostatique.

- 1- Quelle est le type d'influence.
- 2- A l'équilibre, donner la direction du champ électrique entre les deux cylindres.
Puis trouver l'expression du champ électrique en un point M entre les cylindres par l'utilisation du théorème de Gauss.
- 3- En déduire la différence de potentiel entre les deux cylindres.
- 4- Calculer la capacité du condensateur cylindrique constitué par le cylindre de rayon R_A et la face intérieure de la couche cylindrique de rayon R_B .

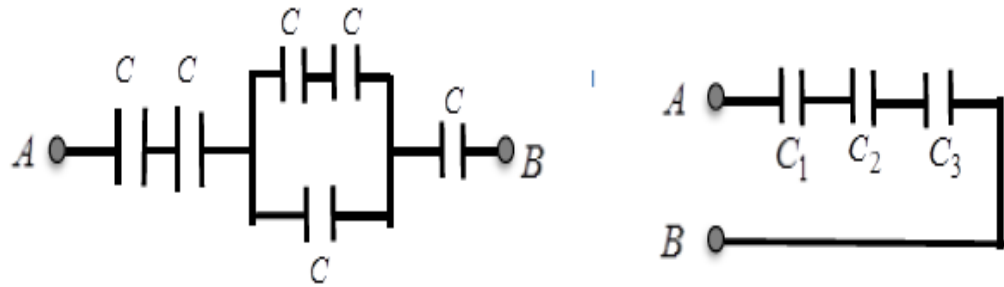
Exercice n° 04 :

Basé sur les résultats du théorème de Gauss, calculer la capacité d'un condensateur constitué de deux électrodes en forme de disque de rayon a , La distance entre eux est d , ils ont respectivement des distributions de charges σ et $-\sigma$, et en négligeant d devant a .



Exercice n° 05 :

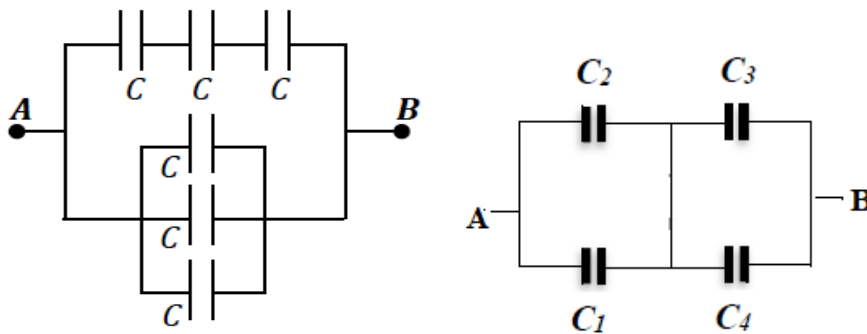
Calculer la capacité équivalente entre A et B



Exercice n°06:

Calculez la capacité équivalente dans les deux figures ci-dessous. On donne :

$C = 2 \mu\text{F}$, $C_1 = 5 \mu\text{F}$, $C_2 = 6 \mu\text{F}$, $C_3 = 3 \mu\text{F}$ et $C_4 = 5 \mu\text{F}$.

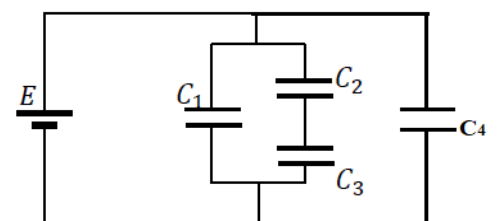


Exercice n°07:

Un générateur de tension continue et quatre condensateurs sont assemblés comme indiqué sur la figure ci-dessous.

- 1- Calculer la capacité équivalente.
- 2- Quelles sont les charges Q_1 , Q_2 , Q_3 et Q_4 que portent chaque condensateurs.
- 3- Calculer la tension aux bornes de chaque condensateur.

On donne : $E = 120 \text{ V}$, $C_1 = 1 \mu\text{F}$, $C_2 = 6 \mu\text{F}$, $C_3 = 3 \mu\text{F}$ et $C_4 = 2 \mu\text{F}$.



CORRIGÉ DE LA SÉRIE DE TD N° 04

Exercice n°01:

1- La capacité $C_1 = \frac{Q_1}{V_1} = \frac{Q_1}{\frac{KQ_1}{R_1}} = \frac{R_1}{K} = \frac{6 \times 10^{-2}}{9 \times 10^9} = 6,66 \times 10^{-12} \text{ F}$

- Le potentiel $V_1: V_1 = \frac{KQ_1}{R_1} = \frac{9 \times 10^9 \times 10^{-6}}{6 \times 10^{-2}} = 1,5 \times 10^5 \text{ V}$

- La densité de charge σ :

$$\sigma = \frac{Q_1}{S} = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2} = \frac{10^{-6}}{4 \times 3.14 (6 \times 10^{-2})^2} = 2.21 \times 10^{-5} \text{ C.m}^{-2}$$

2- La charge portée par chaque sphère:

Le système est isolé, alors la charge totale se conserve d'où :

$$Q_1 = Q'_1 + Q'_2$$

On va avoir un nouveau état d'équilibre du système (S_1, S_2) pour lequel la charge totale Q_1 se répartie sur les deux sphères S_1 et S_2 qui possèdent le même potentiel :

$$V'_1 = V'_2 .$$

$$V'_1 = V'_2 \Rightarrow \frac{KQ'_1}{R_1} = \frac{KQ'_2}{R_2}$$

$$\text{donc : } \frac{Q'_1}{R_1} = \frac{Q'_2}{R_2}$$

Les nouvelles charges sont :

$$Q'_1 = \frac{R_1 Q_1}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad Q'_2 = \frac{R_2 Q_1}{R_1 + R_2}$$

3- les densités surfaciques de charges pour les deux sphères :

$$\sigma_1 = \frac{Q'_1}{S_1} = \frac{Q'_1}{4\pi R_1^2} = \frac{R_1 Q_1}{(R_1 + R_2)4\pi R_1^2} = \frac{Q_1}{(R_1 + R_2)4\pi R_1}$$

$$\sigma_2 = \frac{Q'_2}{S_2} = \frac{Q'_2}{4\pi R_2^2} = \frac{R_2 Q_1}{(R_1 + R_2)4\pi R_2^2} = \frac{Q_1}{(R_1 + R_2)4\pi R_2}$$

4- le rapport des deux densités :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

5- le champ électrique au voisinage de chaque sphère :

$$E_1 = \frac{K Q'_1}{R_1^2} = \frac{K Q_1}{(R_1 + R_2) R_1}$$

et

$$E_2 = \frac{K Q'_2}{R_2^2} = \frac{K Q_2}{(R_1 + R_2) R_2}$$

Exercice n°02:

1- La charge Q_1 :

Le potentiel V_1 de la sphère conductrice S_1 est :

$$V_1 = \frac{K Q_1}{R_1} \Rightarrow Q_1 = \frac{V_1 R_1}{K} = \frac{9 \times 10^9 \times 10^{-2}}{9 \times 10^9} = 10^{-10} \text{ C}$$

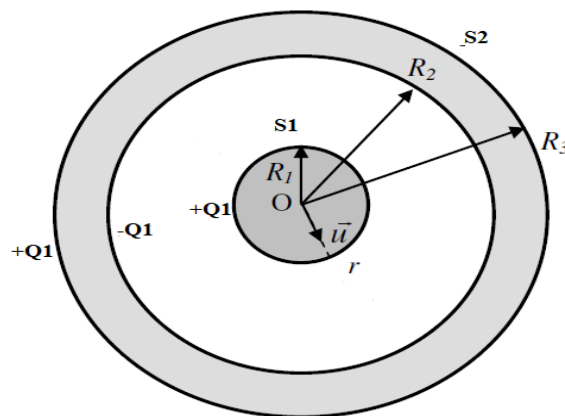
2- La distribution de charges

Les conducteurs S_1 et S_2 sont en influence totale :

$$Q_{S_2}^{int} = -Q_1$$

La sphère conductrice S_2 est neutre et isolée $\Rightarrow$ Conservation de la charge électrique totale :

$$Q_{S_2}^{int} + Q_{S_2}^{ext} = 0 \\ \Rightarrow -Q_{S_2}^{int} = Q_{S_2}^{ext} \Rightarrow Q_{S_2}^{ext} = Q_1$$



3- Calculons les potentiels V_{S1} et V_{S2} des deux sphères :

Le potentiel de la sphère conductrice S_1 change, il devient:

$$V_{S_1} = \sum \frac{K q_i}{r_i} = K \left(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_{S_2}^{int}}{R_2} + \frac{Q_{S_2}^{ext}}{R_3} \right) = K \left(\frac{Q_1}{R_1} - \frac{Q_1}{R_2} + \frac{Q_1}{R_3} \right)$$

$$= K Q_1 \left(\frac{R_2 R_3 - R_1 R_3 + R_2 R_1}{R_1 R_2 R_3} \right) = 7.5 \text{ V}$$

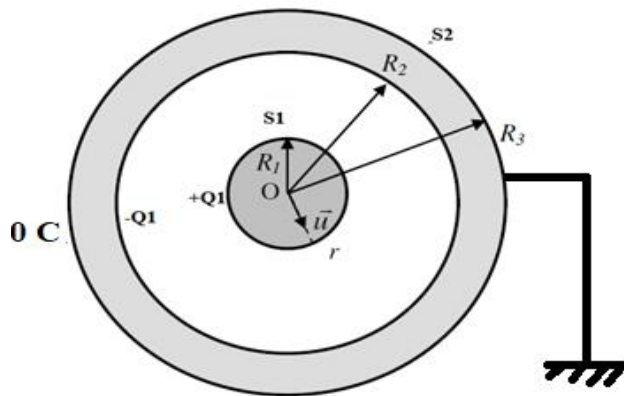
Le potentiel de la sphère conductrice S_2 devient:

$$V_{S_2} = \sum \frac{K q_i}{r_i} = K \left(\frac{Q_{S_2}^{ext}}{R_3} \right) = K \left(\frac{Q_1}{R_3} \right) = 3 \text{ V}$$

- La capacité :

$$C = \frac{Q_1}{|\Delta V|} = \frac{Q_1}{V_{S_1} - V_{S_2}} = \frac{10^{-10}}{4.5} = \mathbf{22,22 \text{ pF}}$$

- 4- La mise à la terre de la sphère creuse se traduit par la décharge de sa surface externe, pendant que sa surface interne porte la charge $-Q_1$, le potentiel de cette cavité est nul.



Exercice n°03 :

- 1- Le type d'influence :

L'influence est totale

- 2- La distribution de charges :

Les conducteurs A et B sont en influence totale :

$$Q_A^{int} = +Q$$

Le cylindre conducteur B est neutre et isolée $\Rightarrow$ Conservation de la charge électrique totale :

$$Q_B^{int} + Q_B^{ext} = 0 \Rightarrow -Q_B^{int} = Q_B^{ext} \Rightarrow Q_B^{ext} = -Q$$

- le champ se dirige de $B \rightarrow A$ d'où la charge de A est (-) et de B est (+) (influence totale)

- L'expression du champ électrique entre A et B :

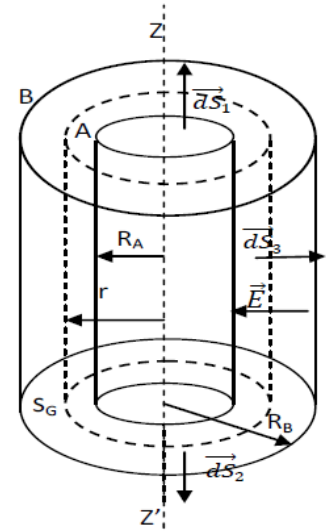
La symétrie cylindrique impose au champ d'être radial.

Puisque $\vec{E}$ et $d\vec{S}$ sont perpendiculaires sur les deux bases des cylindres alors $\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ Par l'application du théorème de

Gauss entre A et B sur la surface Latérale (S_3) on a :

$$\oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -E(2\pi r h) = \frac{\sum q}{\epsilon_0} = \frac{-Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r h}$$



- 3- la différence de potentiel entre les deux cylindres :

$$\int_{R_A}^{R_B} dV = - \int_{R_A}^{R_B} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{R_A}^{R_B} -E dr = \int_{R_A}^{R_B} \frac{Q dr}{2\pi\epsilon_0 r h}$$

$$V(R_B) - V(R_A) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln\left(\frac{R_B}{R_A}\right)$$

- 4- La capacité du conducteur :

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_B}{R_A}\right)}$$

Exercice n° 04 :

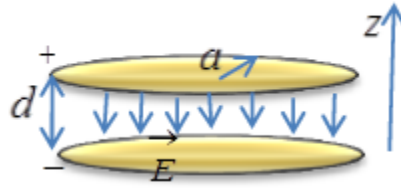
Pour calculer la capacité d'un condensateur, on utilise la relation suivante :

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|}$$

Tel que $\Delta V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{z}$

Basé sur les résultats de l'exercice 5 (la série de TD n° 03), nous avons trouvé que :

$$\vec{E} = - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{k} \begin{cases} \text{le signe } (-) \text{ vient du sens de champ } \vec{E} \\ \text{on a la somme de deux champ ; l'un celui de disque de} \\ \text{distribution de} \\ \text{charges } \sigma \text{ et l'autre de distribution de charges } -\sigma \end{cases}$$



$$\Delta V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{z} = - \int - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{k} dz \vec{k} = \int_0^d \frac{\sigma}{\epsilon_0} dz$$

$$\text{Et donc : } \Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

Pour la charge Q ; on a une distribution surfacique de charge, donc :

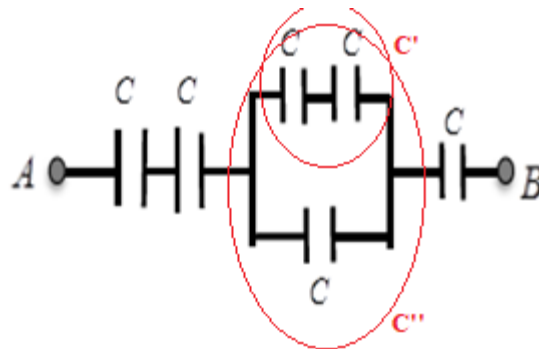
$$Q = \sigma S = \sigma(\pi a^2)$$

$$\Rightarrow C = \frac{\sigma(\pi a^2)}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} d}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{d} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

Exercice n°05:

- La capacité équivalente entre A et B : (Le montage A)



D'après la figure ci-dessus, on peut voir que C' est la composition de deux condensateurs en série, qui veut dire que :

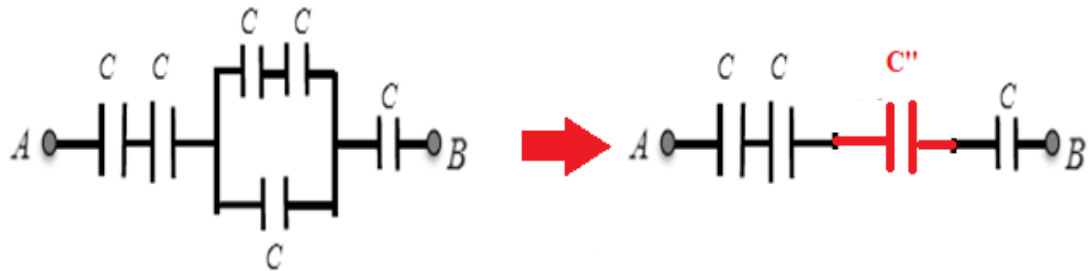
$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{2}{C} \Rightarrow C' = \frac{C}{2}$$

C' et C sont en parallèle, et on peut les remplacer par C'' qui vaut :

$$C'' = C' + C = \frac{C}{2} + C$$

$$C'' = \frac{3C}{2}$$

- La capacité équivalente entre A et B (pour la figure ci-dessous) :



C'' et C sont tous en série :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} + \frac{1}{C''} + \frac{1}{C} = \frac{C'' + C'' + C + C''}{CC''}$$

$$C_{eq} = \frac{CC''}{C'' + C'' + C + C''}$$

- La capacité équivalente entre A et B : (Le montage B)

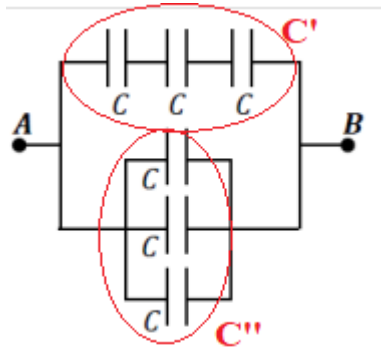
C_1 , C_2 et C_3 sont tous en série :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{C_3C_2 + C_1C_3 + C_1C_2}{C_1C_2C_3}$$

$$C_{eq} = \frac{C_1C_2C_3}{C_3C_2 + C_1C_3 + C_1C_2}$$

Exercice n°06:

- La capacité équivalente entre A et B :

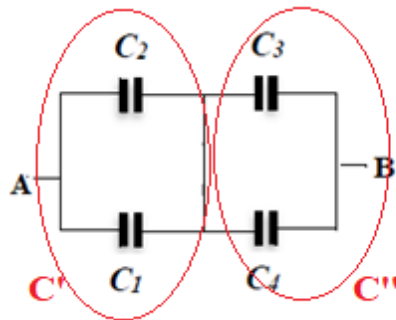


$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{3}{C} \Rightarrow C' = \frac{C}{3}$$

$$C'' = C + C + C = 3C$$

$$C_{eq} = C' + C'' = \frac{C}{3} + 3C = \frac{10C}{3}$$

$$C_{eq} = \frac{10C}{3} = \frac{10 \times 2}{3} = 6.66 \mu F$$



- La capacité équivalente entre A et B (pour la figure) :

C_1 et C_2 sont en parallèle :

$$C' = C_1 + C_2 = 5 + 6 = 11 \mu F$$

C_3 et C_4 sont en parallèle :

$$C'' = C_3 + C_4 = 3 + 5 = 8 \mu F$$

Or C' et C'' sont en série :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C'} + \frac{1}{C''} = \frac{1}{11} + \frac{1}{8} = \frac{19}{88}$$

$$C_{eq} = 4.63 \mu F$$

Exercice n°07:

- La capacité équivalente entre A et B (pour la figure) :

C_2 et C_3 sont en série :

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6}$$

$$C' = 2 \mu F$$

C_1 , C' et C_4 sont en parallèle :

$$C_{eq} = C_1 + C' + C_4 = 1 + 2 + 2 = 5 \mu F$$

La capacité équivalente est égale à **5 μF**

- 2- Calcul des charges Q_1 , Q_2 , Q_3 et Q_4 que portent chaque condensateurs :

$$Q_{Tot} = C_{eq} E = 120 \times 5 = 600 \mu C$$

$$Q_{Tot} = Q_4 + Q' \text{ et } Q' = Q_1 + Q_2 = Q_1 + Q_3$$

Et on a aussi :

$$Q_2 = Q_3$$

On a aussi pour les tensions :

$$V_1 = V_2 + V_3 \dots \dots \dots (1)$$

$$V_4 = E = 120 V$$

Alors :

$$Q_4 = C_4 V_4 = 120 \times 2 = 240 \mu C$$

$$Q' = Q_{Tot} - Q_4 = 600 - 240 = 360 \mu C$$

$$Q_1 + Q_2 = 360 \mu C \dots \dots \dots (2)$$

On peut écrire l'équation (1) comme :

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} \quad \text{et } Q_2 = Q_3$$

$$\frac{Q_1}{C_1} = Q_2 \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) = Q_2 \left(\frac{C_3 + C_2}{C_2 C_3} \right)$$

En remplaçons les valeurs des capacités :

$$Q_1 = \frac{1}{2} Q_2 = \frac{1}{2} Q_3 \dots \dots \dots (3)$$

D'après les équations (2) et (3) :

$$\frac{1}{2} Q_2 + Q_2 = 360 \mu\text{C}$$

$$\Rightarrow Q_2 = 240 \mu\text{C}$$

$$Q_2 = Q_3 = 240 \mu\text{C}$$

$$\text{et } Q_1 = \frac{1}{2} Q_2 = 120 \mu\text{C}$$

$$Q_4 = 240 \mu\text{C}$$

3- la tension aux bornes de chaque condensateur :

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{120}{1} = 120 \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{240}{6} = 40 \text{ V}$$

$$V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{240}{3} = 80 \text{ V}$$

$$V_4 = \frac{Q_4}{C_4} = E = 120 \text{ V}$$

Chapitre IV :

Electrocinétique

RESUME DE COURS : Electrocinétique

L'électrocinétique est l'étude de mouvement des charges électriques (le courant électrique) dans les conducteurs. Autrement dit, c'est l'étude des circuits et des réseaux électriques.

Intensité du courant

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

L'intensité I est exprimée en ampères (A).

Par convention, le sens du courant est contraire au sens de circulation des électrons dans les conducteurs.

$$I = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

L'intensité du courant électrique apparaît comme le flux du vecteur $\vec{j}$ à travers la surface S . La grandeur vectorielle $\vec{j}$ est appelée densité de courant, elle est mesurée en ampères par mètre carré (A/m²).

Loi d'OHM

Certains conducteurs ont la propriété de s'opposer aux mouvements des charges (le courant électrique) ce qui se traduit par une chute de tension dans ces éléments conducteurs. On les appelle les conducteurs ohmiques ou les résistances.

- Loi d'Ohm à l'échelle macroscopique

Le rapport, entre la différence de potentiel V entre deux points d'un conducteur métallique et le courant qui le traverse, est constant,

$$V = R.I$$

C'est la loi d'Ohm. La constante R est la résistance électrique du conducteur, elle est exprimée en ohms (Ω).

Effet Joule :

Lorsqu'un conducteur ohmique est parcouru par un courant I pendant un temps t on remarque qu'une chaleur Q est dégagée et la température du conducteur augmente au fur et à mesure que le courant continue sa circulation dans le conducteur ohmique. La

chaleur dégagée n'est autre que la transformation d'une quantité de l'énergie électrique en une énergie calorifique dû à l'agitation thermique du conducteur.

L'équivalent de cette énergie calorifique est :

$$E = P \cdot t = U \cdot I \cdot t$$

avec :

$P = U \cdot I$ est la puissance consommée par le conducteur.

U est la tension aux bornes du conducteur.

I est l'intensité du courant qui traverse le conducteur.

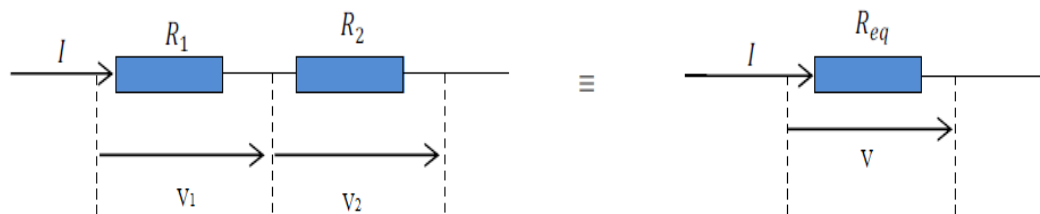
t est le temps de circulation du courant dans le conducteur.

L'énergie dégagée par l'effet de Joule dans la résistance R s'écrit aussi sous la forme :

$$E = \frac{U^2}{R} \cdot t$$

Groupement de résistances

A- Groupement en série :



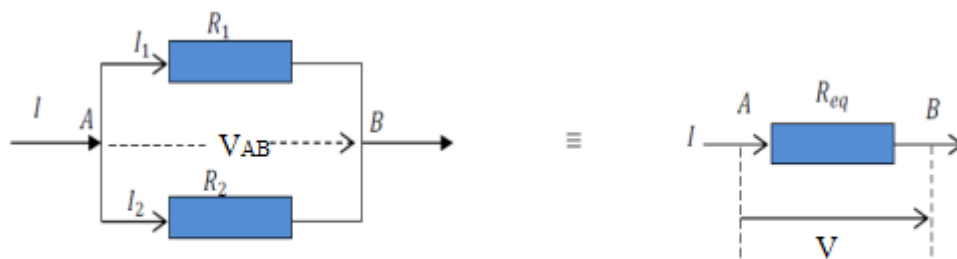
$$V_A - V_B = (V_A - V_M) + (V_M - V_N) + (V_N - V_P) + (V_P - V_B)$$

$$V_A - V_B = R_1 I + R_2 I + R_3 I + R_n I = R_{eq} I$$

$$\text{Alors : } R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i$$

La résistance équivalente est égale à la somme des résistances.

B- Groupement en parallèle :



A présent la même différence de potentiel $V = V_A - V_B$ est appliquée aux bornes des résistances, par conséquent :

$$V_A - V_B = R_1 I = R_2 I = R_n I = R_{eq} I$$

et

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n \quad \text{Donc:}$$

$$\frac{V_A - V_B}{R_{eq}} = \frac{V_A - V_B}{R_1} + \frac{V_A - V_B}{R_2} + \dots + \frac{V_A - V_B}{R_n}$$

D'où la résistance équivalente égale :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

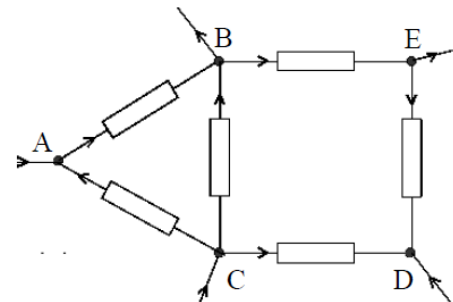
Analyse d'un réseau électrique :

Réseau: est un circuit complexe constitué d'un ensemble de dipôles (résistances, générateurs, récepteurs...) reliés entre eux.

Nœud: on appelle nœud, un point tel que A, qui représente un point commun entre plus de deux branches.

Branche: une branche est une portion du réseau telle que AB, comprise entre deux nœuds.

Maille: une maille du réseau est constituée par un ensemble de branches, formant un circuit fermé tel que ABC.



Lois de Kirchhoff

Lois de Kirchhoff expriment la conservation de l'énergie et de la charge dans un circuit électrique.

1. Lois des nœuds

La somme des intensités des courants qui arrivent à un nœud est égale à la somme des intensités des courants qui en ressortent.

C'est la première loi de Kirchhoff, Cette loi peut être traduite mathématiquement par l'expression :

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0$$

où I_i désigne la valeur algébrique du i ème courant. Cette valeur est affectée du signe (+) si le courant arrive au nœud considéré et du signe (-) s'il s'en éloigne.

2. Loi des mailles

Elle constitue une généralisation de la loi d'Ohm :

$$\sum_{i=1}^n e - RI = 0$$

On procède de la manière suivante:

On choisit, sur chaque branche, un sens du courant arbitraire. On choisit un sens de parcours de la maille arbitraire. Chaque terme RI est affecté d'un signe (+) si le sens du parcours choisi coïncide avec le sens du courant. Sinon on l'affecte du signe (-).

La f.é.m. (ou f.c.é.m) e est affectée du signe du pôle par lequel on sort du générateur (ou du récepteur).

Série de TD N° 05

Exercice n°01:

Deux résistances R_1 et R_2 sont montées en parallèle avec un générateur idéal dont la tension entre ses bornes est U .

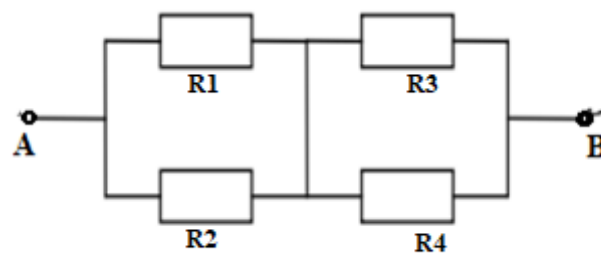
- Montrer que les intensités du courant qui traversent ces résistances sont respectivement :

$$I_1 = I \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \text{ et}$$

$$I_2 = I \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)$$

Exercice n°02:

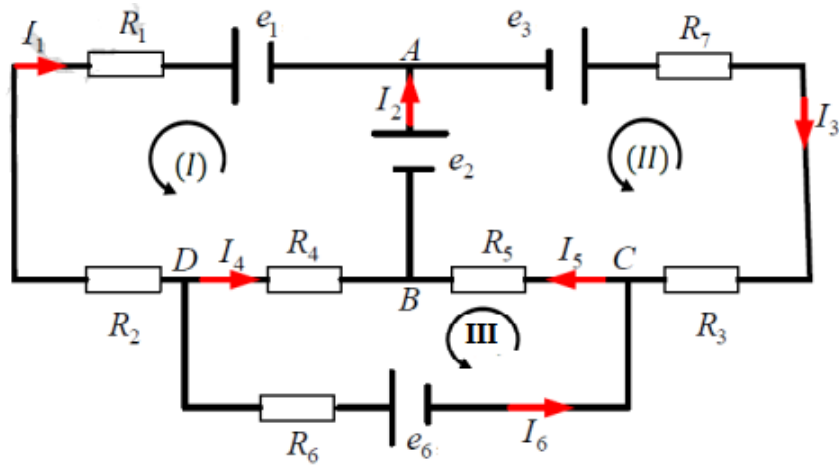
Calculer la résistance équivalente de l'ensemble des résistances montrées sur la figure suivante.



A.N: $R_1 = 10 \, \Omega$, $R_2 = 8 \, \Omega$, $R_3 = 15 \, \Omega$ et $R_4 = 5 \, \Omega$.

Exercice n°03:

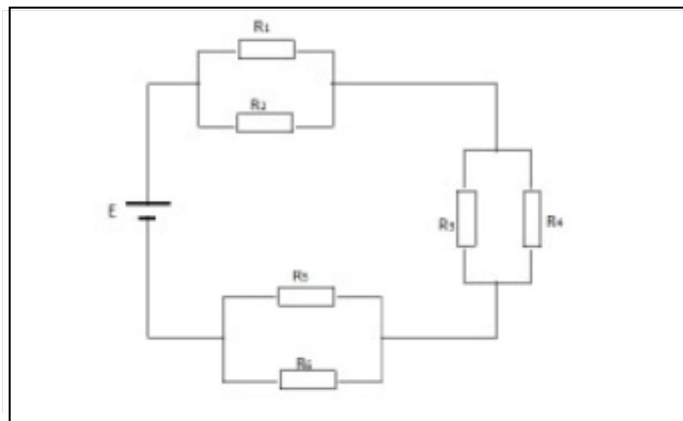
Soit le circuit représenté sur la figure ci-dessous. En appliquant les deux lois de Kirchhoff écrire toutes les équations correspondant aux nœuds et aux mailles.



Exercice n°04:

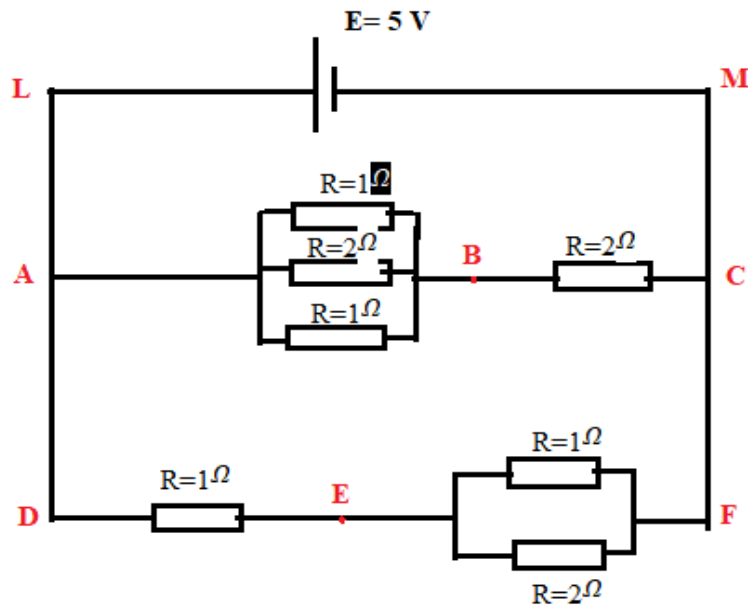
Dans le circuit suivant, les résistances ont les valeurs suivantes : $R_1 = 20 \, \Omega$, $R_2 = 40 \, \Omega$, $R_3 = 100 \, \Omega$, $R_4 = 70 \, \Omega$, $R_5 = 15 \, \Omega$, $R_6 = 60 \, \Omega$, le courant traversant la résistance R_1 est égale à $0.90 \, \text{A}$.

-Calculer la résistance équivalente du circuit, déduire la f.e.m E de la batterie.



Exercice n°05:

On considère le circuit suivant. Déterminer les courants des mailles 1 et 2. Déterminer les ddp: V_{AB} , V_{BC} , V_{DE} , V_{EF} et V_{LM} . En déduire les courants qui traversent les résistances AB et EF.

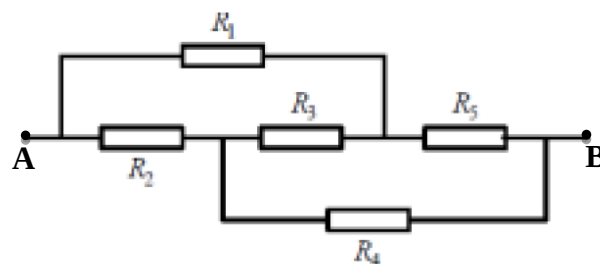
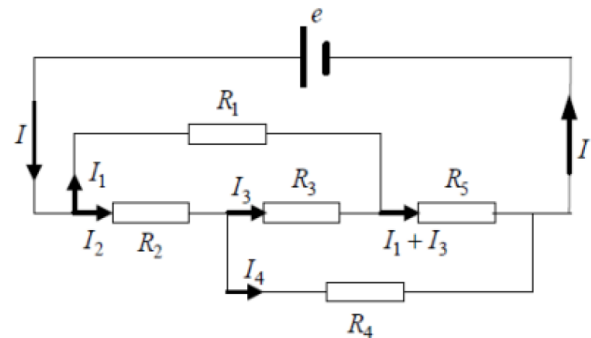


Exercice n°06:

Soit le montage représenté sur la figure ci-contre.

1°/ Déterminer les intensités des courants qui traversent chaque résistances.

2°/ Calculer la résistance équivalente de l'ensemble des résistances montrées sur la figure suivante.



A.N: $R_1 = R_4 = 12 \, \Omega$, $R_2 = R_3 = R_5 = 6 \, \Omega$ et $e = 18 \, V$.

Exercice n°07:

Soit le circuit représenté sur la figure ci-dessous.

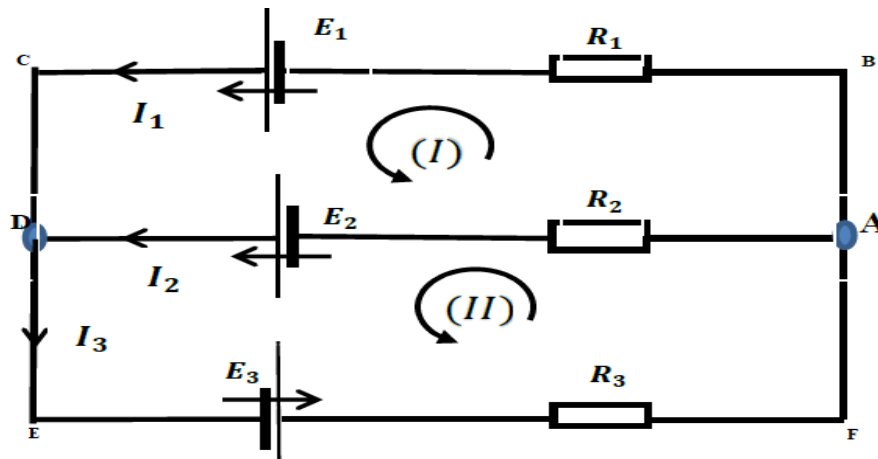
1°/ Identifier les nœuds, les branches et les mailles.

2°/ Ecrire les lois des nœuds et les lois des mailles.

3°/ Déterminer les intensités des courants I_1 , I_2 et I_3 qui traversent les résistances R_1 , R_2 et R_3 .

4°/ Calculer les tensions aux bornes de chaque résistance.

A.N: On donne $E_1 = 16\text{ V}$, $E_2 = 4\text{ V}$, $E_3 = 10\text{ V}$, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 8\ \Omega$ et $R_3 = 2\ \Omega$.



CORRIGÉ DE LA SÉRIE DE TD N° 05

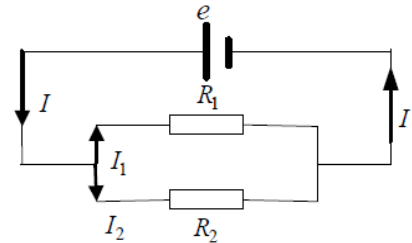
Exercice n°01:

D'après la figure ci-contre, l'intensité du courant principal I que débite le générateur, se divise entre les deux résistances, telle que :

$$I = I_1 + I_2$$

Et puisque :

$$e = R_1 I_1 = R_2 I_2$$



On peut calculer chacune des deux intensités dans chacune des deux branches :

$$I_2 = I - I_1 \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{R_1 I_1}{R_2}$$

$$R_1 I_1 = R_2 (I - I_1)$$

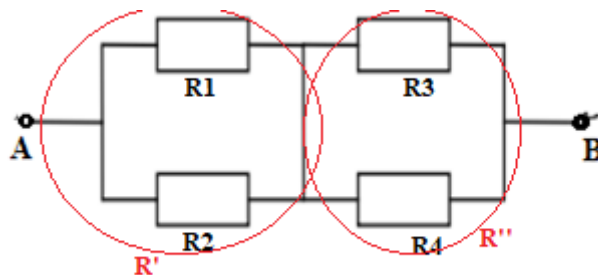
$$\Rightarrow I_1 = I \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)$$

$$I_2 = I - I_1 = I - I \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) = I \left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)$$

$$I_2 = I \left(\frac{R_1 + R_2 - R_2}{R_1 + R_2} \right)$$

$$I_2 = I \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)$$

Exercice n°2:



- les résistances R_1 et R_2 sont en parallèle : $\frac{1}{R'} = \frac{1}{10} + \frac{1}{8} = 0.225$

$$\Rightarrow \frac{1}{R'} = 0.225 \Rightarrow R' = 4.44 \Omega$$

- les résistances R_3 et R_4 sont en parallèle : $\frac{1}{R''} = \frac{1}{15} + \frac{1}{5} = \frac{4}{15}$

$$\Rightarrow \frac{1}{R''} = \frac{4}{15} \Rightarrow R'' = 3,75 \Omega$$

-les résistances R' et R'' sont en série, donc:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \Rightarrow R_{eq} = 8.19 \Omega$$

Exercice n°3 :

Application de la première loi :

Loi des nœuds : Il y a quatre nœuds aux quels correspondent quatre équations :

Au nœud A : $I_1 + I_2 = I_3$

Au nœud B : $I_4 + I_5 = I_2$

Au nœud C : $I_3 + I_6 = I_5$

Au nœud D : $I_1 + I_4 + I_6 = 0$

Application de la deuxième loi :

Loi des mailles : Il y a trois mailles

indépendantes. Après avoir choisi

les sens, comme indiqué sur la

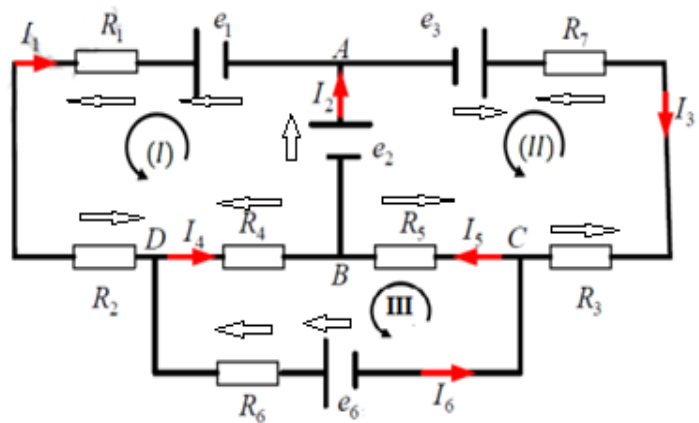
figure, on peut écrire les différentes

équations :

La maille 1 : $e_1 + e_2 + R_1 I_1 - R_4 I_4 + R_2 I_1 = 0$

La maille 2 : $-e_3 - e_2 + R_7 I_3 + R_3 I_3 + R_5 I_5 = 0$

La maille 3 : $-e_6 - R_6 I_6 + R_4 I_4 - R_5 I_5 = 0$



Exercice n°04:

Les résistances R_1 et R_2 sont en parallèles :

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_{12} = \frac{20 \times 40}{20 + 40}$$

$$\mathbf{R_{12} = 13.33 \, \Omega}$$

Les résistances R_3 et R_4 sont en parallèles :

$$\frac{1}{R_{34}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

$$R_{34} = \frac{100 \times 70}{70 + 100}$$

$$\mathbf{R_{34} = 41.18 \, \Omega}$$

Les résistances R_5 et R_6 sont en parallèles :

$$\frac{1}{R_{56}} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}$$

$$R_{56} = \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6}$$

$$R_{56} = \frac{15 \times 60}{60 + 15}$$

$$\mathbf{R_{56} = 12 \, \Omega}$$

La résistance équivalente du circuit est :

$$R_{eq} = R_{12} + R_{34} + R_{56}$$

$$R_{eq} = 13.33 + 41.18 + 12$$

$$\mathbf{R_{eq} = 66.51 \, \Omega}$$

Calcul de la f.e.m E de la batterie :

Comme R_1 et R_2 sont en parallèles alors :

$$V_1 = V_2$$

$$R_1 I_1 = R_2 I_2$$

$$I_2 = \frac{R_1 I_1}{R_2}$$

$$I_2 = \frac{20 \times 0.90}{40}$$

$$I_2 = 0.45 \text{ A}$$

D'après la loi des nœuds :

$$I = I_1 + I_2$$

$$I = 1.35 \text{ A}$$

En utilisant la loi d'Ohm :

$$E = R_{eq} I$$

$$E = 66.51 \times 1.35$$

La fem vaut :

$$E = 89.79 \text{ Volt}$$

Exercice n°05:

Tous d'abord il faut simplifier le circuit :

Les résistances entre A et B sont en parallèles :

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{2 + 1 + 2}{2}$$

$$R_{AB} = 0.4 \Omega$$

Les résistances entre E et F sont en parallèles :

$$\frac{1}{R_{EF}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{R_{EF}} = \frac{2 + 1}{2}$$

$$R_{EF} = 0.66 \Omega$$

Dans la branche AC, la résistance R_{AC} égale à :

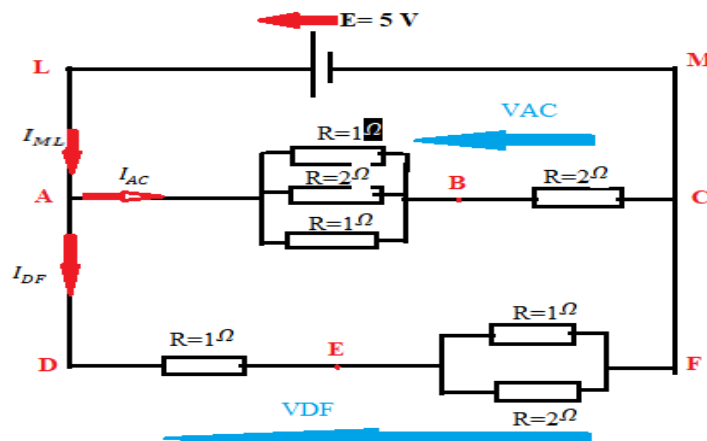
$$R_{AC} = R_{AB} + R_{BC}$$

$$R_{AC} = 2.4 \Omega$$

Dans la branche DF, la résistance R_{DF} égale à :

$$R_{DF} = R_{DE} + R_{EF}$$

$$R_{AC} = 1.66 \Omega$$



On appliquant la loi des mailles, on trouve :

$$\text{Maille (LACML): } 2.4 I_{AC} - 5 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Maille (ADFCA): } 1.66 I_{DF} - 2.4 I_{AC} = 0 \quad (2)$$

On appliquant la loi des nœuds, on trouve :

$$I_{ML} = I_{DF} + I_{AC} \quad (3)$$

$$\begin{cases} I_{AC} = 2.08 \text{ A} \\ I_{DF} = 3.01 \text{ A} \\ I_{ML} = 5.09 \text{ A} \end{cases}$$

Les tensions aux bornes chaque résistance, vaut :

$$V_{AB} = R_{AB} I_{AC}$$

$$V_{AB} = 0.4 \times 2.08$$

$$V_{AB} = 0.83 \text{ Volt}$$

$$V_{BC} = R_{BC} I_{BC}$$

$$V_{BC} = 2 \times 2.08$$

$$V_{BC} = 4.16 \text{ Volt}$$

$$V_{DE} = R_{DE} I_{DE}$$

$$V_{DE} = 1 \times 3.01$$

$$V_{DE} = 3.01 \text{ Volt}$$

$$V_{EF} = R_{EF} I_{EF}$$

$$V_{EF} = 0.66 \times 3.01$$

$$V_{EF} = 1.99 \text{ Volt}$$

$$V_{LM} = 5 \text{ Volt}$$

Les courants qui traversent les résistances AB et EF :

$$\begin{cases} V_{AB} = 1 \times I'_{AB} = 0.83 \\ V_{AB} = 2 \times I''_{AB} = 0.83 \\ V_{AB} = 1 \times I'''_{AB} = 0.83 \end{cases}$$

$$I'_{AB} = 0.83 \text{ A}$$

$$I''_{AB} = 0.41 \text{ A}$$

$$I'''_{AB} = 0.83 \text{ A}$$

Les tensions sont les mêmes dans la branche EF :

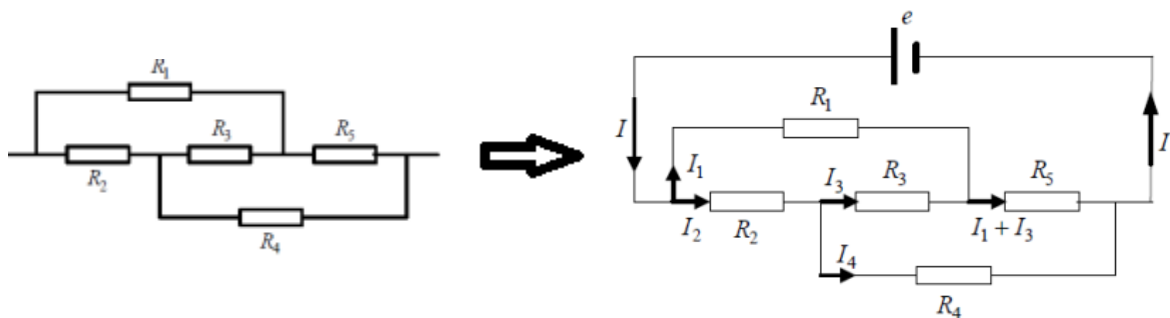
$$\begin{cases} V_{EF} = 1 \times I'_{EF} = 1.99 \\ V_{EF} = 2 \times I''_{EF} = 1.99 \end{cases}$$

$$I'_{EF} = 1.99 \text{ A}$$

$$I''_{EF} = 0.99 \text{ A}$$

Exercice n°6:

1- les intensités des courants qui traversent chaque résistance :



On a :

$$e = R_1 I_1 + R_5 I_5$$

$$e = R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_5 I_5$$

$$e = R_2 I_2 + R_4 I_4$$

Et puisque :

$I_2 = I_3 + I_4$ et $I_5 = I_3 + I_1$, on écrit :

$$\begin{aligned} e &= R_1 I_1 + R_5 (I_3 + I_1) \\ e &= R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_5 (I_3 + I_1) \\ e &= R_2 I_2 + R_4 (I_2 - I_3) \end{aligned}$$

on remplace les valeurs des résistances et de "e", on trouve :

$$\begin{aligned} 3I_1 + I_3 - 3 &= 0 \dots \dots (1) \\ I_1 + I_2 + 2I_3 - 3 &= 0 \dots \dots (2) \\ 3I_2 - 2I_3 - 3 &= 0 \dots \dots (3) \\ (1) \Rightarrow I_3 &= 3 - 3I_1 \\ (3) \Rightarrow I_2 &= \frac{2I_3 + 3}{3} = \frac{6 - 6I_1 + 3}{3} = 3 - 2I_1 \\ (2) \Rightarrow I_1 + (3 - 2I_1) + 2(3 - 3I_1) - 3 &= 0 \\ \Rightarrow I_1 &= \frac{6}{7} \text{ A} \\ \Rightarrow I_2 &= \frac{9}{7} \text{ A} \\ \Rightarrow I_3 &= \frac{3}{7} \text{ A} \\ I_4 = I_2 - I_3 &= \frac{6}{7} \text{ A} \\ I_5 = I_3 + I_1 &= \frac{9}{7} \text{ A} \end{aligned}$$

2- la résistance équivalente :

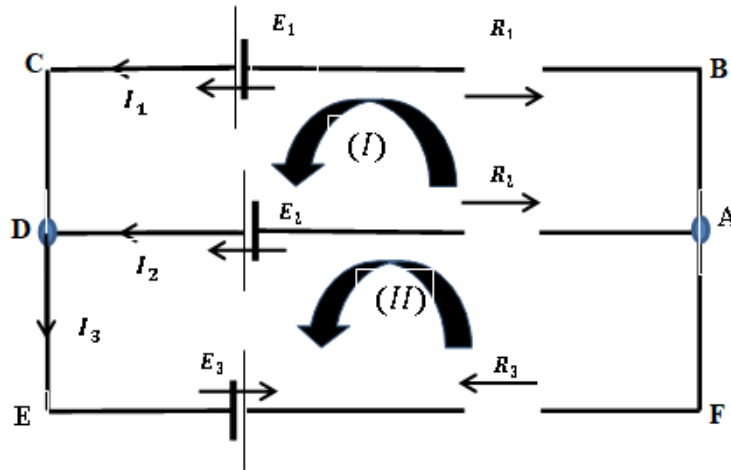
$$R_{eq} = \frac{e}{I} = \frac{e}{I_1 + I_2} = \frac{e}{I_4 + I_5} = \frac{18}{\frac{15}{7}}$$

$$R_{eq} = 8.4 \Omega$$

Exercice n°7:

1°/ Identifions le nombre des noeuds, branches et mailles.

- Noeuds n : $n = 2$ (A et D).
- Branches b : $b = 3$ ($ABCD$, AD et $AFED$).
- Mailles m : $m = b - (n - 1) = 2 \rightarrow$ existe deux mailles indépendantes



2°/ Ecrivons les lois de Kirchhoff :

✓ **Première loi**: loi des nœuds

En un nœud d'un circuit, la somme algébrique des courants est nulle.

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0 \leftrightarrow \sum I_{entrants} = \sum I_{sortants}$$

$$I_1 + I_2 = I_3 \quad (01)$$

✓ **Deuxième loi**: loi des mailles

Pour une maille d'un circuit, la somme algébrique des f.é.m. est égale à la somme algébrique des produits **RI**.

$$\sum_{k=1}^n E_k - \sum_{k=1}^n R_k I_k = 0$$

$$\text{Maille (ABCD)}: E_1 - E_2 + R_2 I_2 - R_1 I_1 = 0 \quad (02)$$

$$\text{Maille (ADEF)}: E_2 + E_3 - R_3 I_3 - R_2 I_2 = 0 \quad (03)$$

3°/ les intensités des courants **I₁**, **I₂** et **I₃**

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 & (01) \\ 12 + 8I_2 - 10I_1 = 0 & (02) \\ 14 - 2I_3 - 8I_2 = 0 & (03) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 2 \text{ A} \\ I_2 = 1 \text{ A} \\ I_3 = 3 \text{ A} \end{cases}$$

4°/ les tensions aux bornes de chaque résistance.

$$\begin{cases} U_1 = R_1 I_1 = 20 \text{ V} \\ U_2 = R_2 I_2 = 8 \text{ V} \\ U_3 = R_3 I_3 = 6 \text{ V} \end{cases}$$

Chapitre V :

Magnétisme

RESUME DE COURS : Magnétisme

Champ magnétique et force de Lorentz

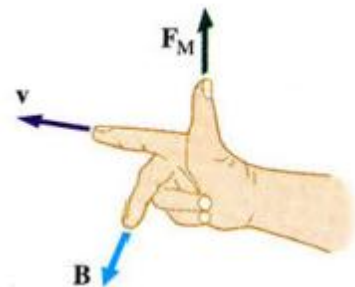
La force magnétique est décrite par : $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

Et la force de Lorentz : $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

avec $\vec{F}$ la force de Lorentz (N), q la charge qui subit la force (C), $\vec{E}$ le champ électrique (V.m^{-1}), $\vec{v}$ la vitesse de la particule (m.s^{-1}) et $\vec{B}$ le champ magnétique (Tesla (T)).

Les caractéristiques de la force de Lorentz sont :

- Pour module : $\|\vec{F}\| = q\|\vec{v}\|\|\vec{B}\|\sin(\vec{v}, \vec{B})$
- La direction de la force est perpendiculaire au plan $(\vec{v}, \vec{B})$ ce qui conduit à dire que $\vec{F}_m \perp \vec{v}$ et $\vec{F}_m \perp \vec{B}$.
- Son sens dans le cas d'une charge positive, les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{B}$ et $\vec{F}_m$ forment un trièdre direct (la règle de la main droite) (figure ci-contre).
Lorsque la charge est négative la force change de sens.



Loi de Laplace

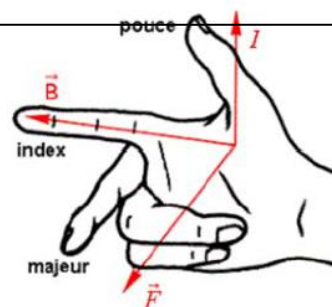
Lorsqu'un fil conducteur, parcouru par un courant I , est placé dans un champ magnétique $\vec{B}$, chaque élément $d\vec{l}$ du fil subit une force: $d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$

Cette force est perpendiculaire au plan formé par le champ $\vec{B}$ et l'élément de courant considéré. Son sens est donné par la règle de la main droite.

Pouce $\rightarrow$ sens de I

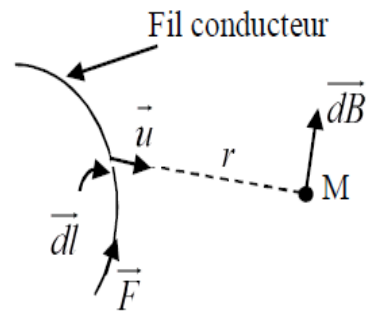
Index $\rightarrow$ sens du champ magnétique

Majeur $\rightarrow$ sens de la force de Laplace



Loi de Biot et Savart

En 1820, les physiciens Biot et Savart sont énoncés une loi qui permet de calculer le champ magnétique créé par un conducteur traversé par un courant électrique dans un point quelconque de l'espace. Le champ magnétique élémentaire créé en M est donné par l'expression :



$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

Cette formule est connue sous le nom de loi de Biot et Savart, tel que (μ_0 est la perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$).

Loi de Faraday

La variation temporelle du flux magnétique à travers un circuit fermé y engendre une f.é.m induite :

$$U = - \frac{d\phi}{dt} \text{ avec } \phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS}$$

Le signe négatif détermine le sens du courant induit dans le circuit. Il est régi par la loi de Lenz qui énonce que le sens du courant induit est tel qu'il s'oppose par ses effets magnétiques à la cause qui a produit le courant.

Théorème d'Ampère

La circulation du champ magnétique $\vec{B}$ le long d'un parcours fermé est égale au produit de μ_0 par la somme des courants qui traversent le parcours fermé :

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \sum I$$

Série de TD N° 06

Exercice 01 :

Un proton a une vitesse $\vec{v} = (2 \vec{k}) \times 10^6$ m/s entre dans un champ magnétique, subit l'action d'une force $\vec{F} = 2 \times 10^{-13} \vec{i}$ N.

1°- Déterminer le champ magnétique $\vec{B}$.

Quand sa vitesse est suivant $\mathbf{Oz}$ il subit une force suivant $\mathbf{Oy}$, Déterminer la direction du champ magnétique $\vec{B}$ dans ce cas.

Exercice 02 :

Soit une spire de rayon R parcourue par un courant d'intensité I .

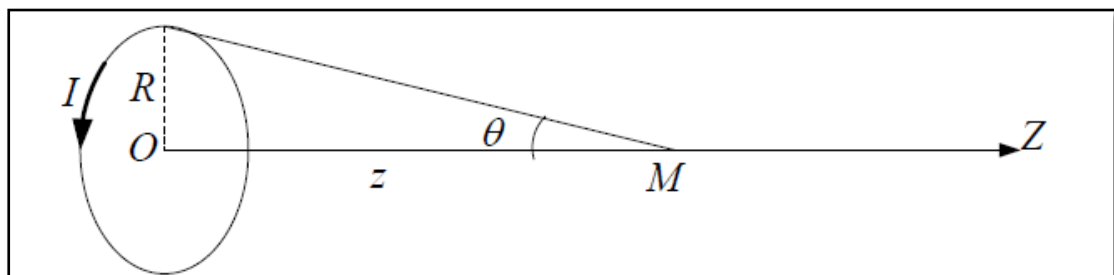
1/ Calculer le champ magnétique crée le long de l'axe OZ , à une distance z du centre O , en fonction de l'angle θ sous lequel on voit la spire (figure ci-dessous).

2/ Retrouver l'expression : $B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$

3/ Que devient ce champ magnétique B_z à grandes distances de l'axe OZ ?

4/ Exprimer le champ magnétique B_z en fonction du moment magnétique M .

5/ En déduire le champ B_O crée au centre O de la spire.

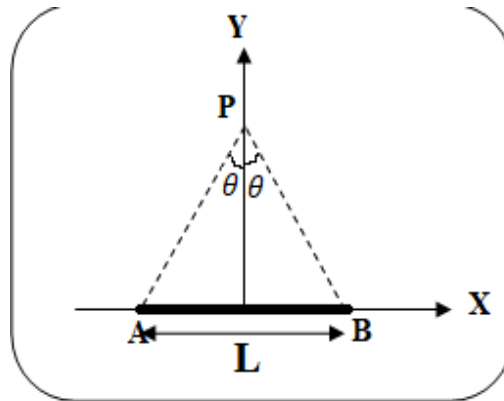


Exercice 03 :

Un fil conducteur $\mathbf{AB}$ prolongé dans l'axe Ox et parcourue par un courant $\mathbf{I}$ (figure ci-dessous).

En appliquant la loi de Biot-Savart :

1°/ - Déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ créée au point P sur la médiane



Exercice 04 :

On considère une spire carrée, de côté a , placée dans le plan Oxy et parcourue par un courant d'intensité I constant.

1°/ Montrer que le champ magnétique en un point M de l'axe a pour expression :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{a^2}{(a^2/4 + z^2)(a^2/2 + z^2)^{1/2}} \vec{u}_z$$

Exercice 05 :

On considère un cylindre de rayon R parcouru par un courant I .

En utilisant le théorème d'Ampère :

1°/ - Déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ créée en tout point de l'espace.

2°/ - Représenter le champ en fonction de r distance comptée à partir de l'axe.

CORRIGÉ DE LA SÉRIE DE TD N° 06

Exercice n° 01 :

Le proton est de charge positive égale à : $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$. Puisque il est en mouvement, il subit une force de Lorentz égale : $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

$$\Rightarrow \vec{F} = 2 \times 10^{-13} \vec{i} = 1.6 \times 10^{-19} (2 \times 10^6 \vec{k} \wedge \vec{B})$$

D'après la règle de la main droite : $\vec{i} = \vec{k} \wedge \vec{B}$

Le champ magnétique B est orienté suivant la direction : $-\vec{j}$

$$\vec{B} = -B\vec{j}$$

$$\vec{F} = 2 \times 10^{-13} \vec{i} = 1.6 \times 10^{-19} (2 \times 10^6 \vec{k} \wedge -B\vec{j})$$

$$2 \times 10^{-13} \vec{i} = -1.6 \times 10^{-19} (2 \times 10^6 \vec{k} \wedge B\vec{j}) \Rightarrow B = 0.62 \text{ Tesla}$$

$$\vec{B} = -B\vec{j} = -0.62 \vec{j}$$

- Quand sa vitesse est suivant Oz il subit une force suivant Oy , la direction du champ magnétique ($\vec{B}$) dans ce cas sera suivant : $\mathbf{Ox}$

Exercice n° 02 :

- 1- Un élément dl d'une spire, parcourue par un courant I , produit en un point M de l'axe de la spire, un champ magnétique dB . Il est perpendiculaire à dl et u , son sens est donné par la règle du bonhomme d'Ampère et son module est :

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2}$$

En raison de la symétrie du problème, toutes les composantes perpendiculaires à l'axe s'éliminent, et les composantes suivant oz s'ajoutent.

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \sin \theta$$

Le champ résultant est porté par l'axe de la spire et a pour valeur :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \theta \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \theta \times 2\pi R$$

$$B = \frac{\mu_0 I R}{2 r^2} \sin \theta$$

Puisque : $\sin \theta = \frac{R}{r}$; on peut écrire B :

$$B = \frac{\mu_0 I \sin^3 \theta}{2 R}$$

Et

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I \sin^3 \theta}{2 R} \vec{u}_z$$

2- On remplace cette fois $\sin \theta$ par $\sin \theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$

L'expression du champ sera :

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

3- à grandes distances de l'axe OZ , $z \gg R$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{z^3}$$

4- Le champ magnétique B_z en fonction du moment magnétique M :

$$M = IS = I (\pi R^2)$$

On remplace M dans l'expression de B_z : $B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$

On obtient :

$$B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{M}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

5- le champ B_O au centre O de la spire :

On remplace $z = 0$ dans B_z :

$$B_O = \frac{\mu_0 I}{2 R}$$

Exercice n° 03 :

On prend un élément dx du fil , il transporte la charge de courant $Idl = I dx$, et par l'utilisation de la loi de Biot et Savard:

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

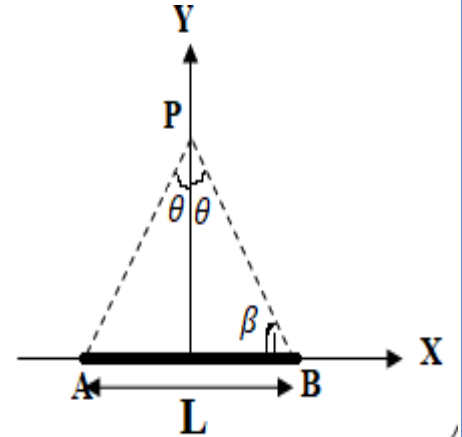
On a : $I d\vec{l} \wedge \vec{r} = I dx \vec{i} \wedge \vec{r}$

$$\vec{i} \wedge \vec{r} = \|\vec{i}\| \|\vec{r}\| \sin(\pi - \beta) \vec{k}$$

$$\vec{i} \wedge \vec{r} = r \sin(\beta) \vec{k} = r \cos(\theta) \vec{k} \text{ avec } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dx r \cos \theta}{r^3} \vec{k}$$

$$\vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dx \cos \theta}{x^2 + y^2} \vec{k}$$



Pour calculer l'intégrale, on utilise la méthode de changement de variable :

On a: $x = y \tan \theta \Rightarrow dx = y(1 + \tan^2 \theta) d\theta$

$$\vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cos \theta dx}{x^2 + y^2} \vec{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{k} \int \frac{y \cos \theta (1 + \tan^2 \theta) d\theta}{y^2 (1 + \tan^2 \theta)}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi y} \vec{k} \int_{-\theta}^{+\theta} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi y} \vec{k} (\sin(-\theta) - \sin \theta)$$

$$\vec{B} = -2 \frac{\mu_0 I}{4\pi y} \sin \theta \vec{k}$$

On peut remplacer $\sin \theta$ par:

$$\sin \theta = \frac{L/2}{\sqrt{\frac{L^2}{4} + y^2}}$$

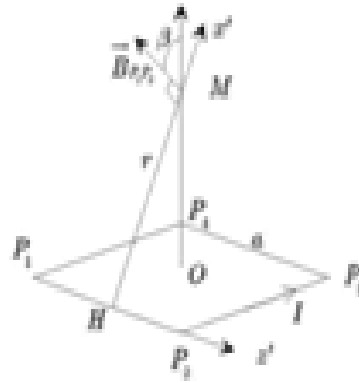
$$\vec{B} = -2 \frac{\mu_0 I}{4\pi y} \frac{L/2}{\sqrt{\frac{L^2}{4} + y^2}} \vec{k}$$

Exercice n° 04:

Le champ magnétique sur l'axe Oz d'une spire carrée, composée de quatre segment : P1 P2 P3 P4 de côté **a**, placée dans le plan xOy est la somme vectorielle des champs $\vec{B}_i$ créés par chaque segment :

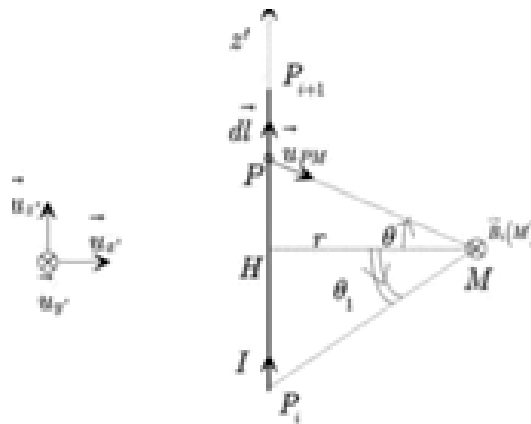
$$\vec{B}(M) = \sum \vec{B}_i$$

On cherche dans un premier temps, le champ magnétique créée par un segment de longueur **a** , en un point M de sa médiatrice. On note H le projeté de M sur le segment , $z' = HP$ et $HM = r$



$$d\vec{B}_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2}$$

$$\vec{B}_i = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{P_i}^{P_{i+1}} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{P_i}^{P_{i+1}} \frac{dz' \sin(\vec{u}_{z'}, \vec{PM})}{PM^2} \vec{u}_{y'}$$



On pose que l'angle θ est formé par les axes MH et MP :

On peut écrire que : $\sin(\vec{u}_{z'}, \vec{PM}) = \cos \theta = \frac{r}{PM}$

On a aussi :

$$\left(\frac{\cos \theta}{r}\right)^2 = \frac{1}{PM^2} \text{ et } \tan \theta = \frac{z'}{r} \Rightarrow dz' = \frac{r}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$\text{On déduit que : } \vec{B}_l = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{-\theta}^{+\theta} \cos \theta d\theta \vec{u}_{y'} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin(-\theta) - \sin \theta) \vec{u}_{y'}$$

$$\vec{B}_l = -\frac{2\mu_0 I}{4\pi r} \sin \theta \vec{u}_{y'}$$

Et que :

$$\sin \theta = \frac{a/2}{[(a/2)^2 + r^2]^{1/2}}$$

On obtient :

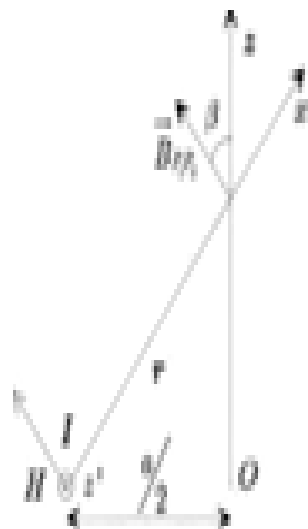
$$\vec{B}_l = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \frac{a}{[(a/2)^2 + r^2]^{1/2}} \vec{u}_{y'}$$

En M , les composantes perpendiculaires à l'axe Oz se compensent deux à deux entre segments se faisant face. Par conséquent :

$$\vec{B}(M) = 4 B_{lz} \vec{u}_z = 4 B \cos \beta \vec{u}_z$$

$$\text{Et comme : } \cos \beta = \frac{a}{2r}$$

$$\text{Et que : } r = [(a/2)^2 + z^2]^{1/2}$$



Le champ magnetique s'exprime alors sous la forme :

$$\vec{B}(M) = 4 B \cos \beta \vec{u}_z = 4 \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \frac{a}{[(a/2)^2 + r^2]^{1/2}} \frac{a}{2[(a/2)^2 + z^2]^{1/2}} \vec{u}_z$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{[(a/2)^2 + z^2]^{1/2}} \frac{a}{[(a/2)^2 + (a/2)^2 + z^2]^{1/2}} \frac{a}{[(a/2)^2 + z^2]^{1/2}} \vec{u}_z$$

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{[(a/2)^2 + z^2]^{1/2}} \frac{a^2}{[a^2/2 + z^2]^{1/2}} \vec{u}_z}$$

Exercice n° 05 :

1- On divise l'espace en deux parties :

- A l'intérieur du cylindre : $r \leq R$

Le théorème d'Ampère :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Puisque $\vec{B}$ est toujours tangentiel à la surface ($\vec{B} // d\vec{l}$) :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \int dl = B \times l = B(2\pi r) = \mu_0 I_{in}$$

I_{in} : est le courant qui traverse le cylindre de rayon r .

$$I_{in} = JS_{in} = J(\pi r^2) \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{et } I = JS = J(\pi R^2) \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{A partir des deux équations 1 et 2 : } I_{in} = \frac{I}{S} S_{in} = I \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = I \frac{r^2}{R^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I_{in}}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I \frac{r^2}{R^2}}{2\pi r}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \vec{u}_\theta}$$

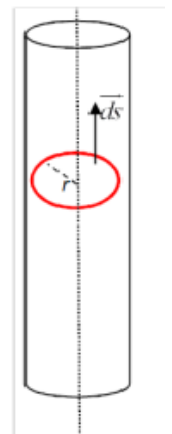
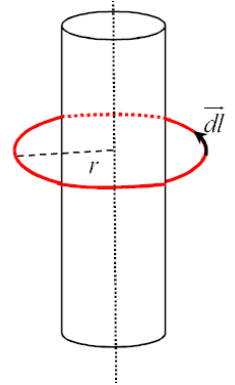
- A l'extérieur du cylindre : $r \geq R$

Selon le théorème d'Ampère :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Puisque $\vec{B}$ est toujours tangentiel à la surface et uniforme :

$$B \int dl = B \times l = B(2\pi r) = \mu_0 I$$

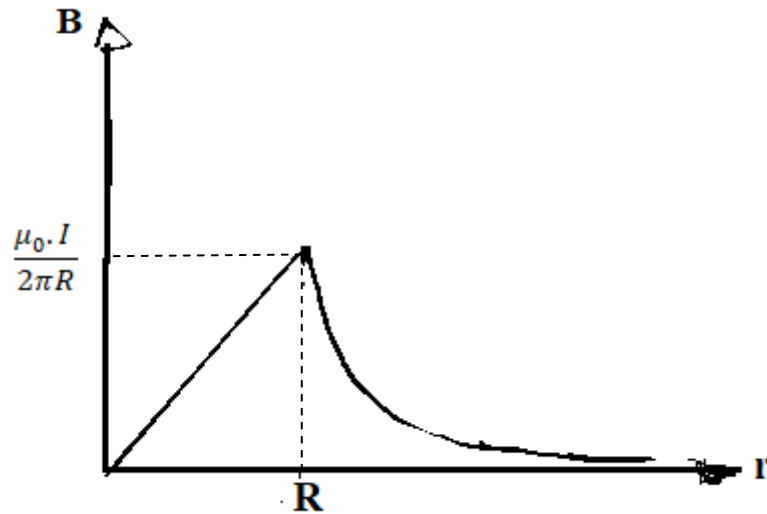


$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

2- Représentation du champ B en fonction de r :

$$r \leq R: B = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \right) r = \alpha r$$

$$r > R: B = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \right) \frac{1}{r} = \frac{\beta}{r}$$



Références bibliographiques

Références bibliographiques

1. D. Cordier, Cours de physique : électromagnétisme, Dunod, Paris, 2004.
2. É. Amzallag, J. Cipriani, J. Ben Aïm et N. Piccioli, La physique en fac : Électrostatique et Électrocinétique, Dunod, Paris, 2006.
3. Y. Granjon , Exercices et Problèmes d'Electricité , Dunod, Paris, 2003.
4. J-P. Perez , R. Carles, R. Fleckinger. Electromagnétisme - Fondements et applicatons, Ed. Masson , Paris, 2001.
5. M. Benhmida, cours électricité et magnétisme, Université de M'sila, 2015-2016.
6. A. Fizazi, Électricité et magnétisme, Université de Bechar, 2012.
7. M. Henry et A. Kassiba, Électrostatique et magnétostatique, Dunod, paris 2003.
8. M. Saint Jean, J.Bruneaux et J. Matricon , Electrostatique et magnétostatique, Berlin 2002.
9. L. Ait Gougam, M. Bendaoud, N. Douliche, F. Mekideche, Polycopié de physique 2, OPU Alger, 2012.
10. <https://www.cours-et-exercices.com/>