

UNIVERSITÉ DE MOHAMED BOUDIAF-M'SILA

MÉMOIRE

Présenté à la Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de master

Spécialité: Mathématiques Fondamentales

Option: Analyse Fonctionnelle

Par:

Maiza Noura

Intitulée:

Sur la dualité des espaces et opérateurs (p, q)-sommants

Soutenue publiquement le : 10/06/2015, devant le jury :

Achour Dahmane
Dahia Elhadj
Alouani Ahlem

Prof. Université de Mohamed Boudiaf- M'sila
M.C.B. Université de Mohamed Boudiaf- M'sila
M.C.A. Université de Mohamed Boudiaf -M'sila

Président
Rapporteur
Examinateur

Promotion 2014/2015

0.1 Remerciements

Je remercie en premier lieu Dieu Tout-puissant de m'avoir accordé la puissance et la volonté pour achever ce travail.

Je remercie mon directeur de thèse, Monsieur Dahmane, pour ses conseils, ses remarques précieuses et ses discussions qui m'ont beaucoup aidé en cours de mes recherches.

0.1	Remerciements	2
0.2	Résumé	3
0.3	Introduction	4
1	Notations et préliminaires	5
1.1	Opérateurs linéaires bornés	6
1.2	Les espaces de Banach classique $C(K)$, L^p et $\ell_p(1 \leq p \leq \infty)$	8
1.3	Idéal des opérateurs linéaires	10
2	Les espaces des suites	13
2.1	Les suites p -sommables	14
2.1.1	Dualité des espaces $c_0(X)$ et $\ell_p(X)$	18
2.2	L'espace de suites faiblement p -sommables	23
3	L'idéal des opérateurs (p, q)-sommants	27
3.1	Définitions et propriétés	28
3.2	Bi-adjoint d'un opérateur (p, q) -sommant	34

0.2 Résumé

Dans ce mémoire, on étudiera la dualité des espaces $c_0(X)$, $\ell_1(X)$ et $\ell_p(X)$ selon une méthode introduite par Matos. On étudiera de même la classe des opérateurs (p, q) -sommants en tant qu'opérateurs qui transforment les suites faiblement q -sommables en suites p -sommables.

Mots clés : Espaces de suites, dualité, opérateurs (p, q) -sommants.

Il était, donc, naturel d'étudier le problème de dualité des espaces de suites. Plusieurs articles ont traité ce problème, entre [1]. Dans notre mémoire, nous présentons l'espace dual de $c_0(X)$, $\ell_1(X)$ et $\ell_p(X)$ selon la méthode de Matos dans son livre [4].

Notre travail se subdivise en 3 chapitres. Le premier est essentiellement un rappel sur les espaces de Banach classiques et les niveaux d'opérateurs linéaires. Le deuxième sera consacré à l'étude du dual des espaces $c_0(X)$, $\ell_1(X)$ et $\ell_p(X)$. Enfin, dans le chapitre 3 nous donnerons une étude des opérateurs (p, q) -sommants.

0.3 Introduction

Les suites à valeurs dans un espace de Banach jouent un rôle fondamentale dans la théorie des opérateurs. A titre d'exemple : l'opérateur compact est l'opérateur qui transforme toute suite bornée en une suite qui admet une sous-suite convergente. De même un opérateur p -sommant est l'opérateur qui transforme toute suite faiblement p -sommable en suite p -sommable.

Il serait, donc, naturel d'étudier le problème de dualité des espaces de suites. Plusieurs articles ont traité ce problème, entre [1]. Dans notre mémoire, nous présentons l'espace dual de $c_0(X)$, $\ell_1(X)$ et $\ell_p(X)$ selon la méthode de Matos dans son livre [4]

Notre travail se subdivise en 3 chapitres. Le premier est essentiellement un rappel sur les espaces de Banach classiques et les idéaux d'opérateurs linéaires. Le deuxième sera consacré à l'étude du dual des espaces $c_0(X)$, $\ell_1(X)$ et $\ell_p(X)$. Enfin, dans le chapitre 3 nous donnerons une étude des opérateurs (p, q) -sommants.

Bibliographie

- [1] H. Apiola, *Duality between spaces of p -summable sequences, (p, q) -summing operators and characterizations of nuclearity*, *Math. Ann.* **219** (1976), 53–64.
- [2] G. Botelho, *Ideals of polynomials generated by weakly compact operators*, *Note Mat.* **25** (2005/2006), 69–102.
- [3] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, MASSON Paris, New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987.
- [4] Matos, M. C. : *Absolutely Summing Mappings, Nuclear Mappings and Convolution Equations*. IMECC-UNICAMP (2007), http://www.ime.unicamp.br/rel_pesq/2007/pdf/rp03-07.pdf
- [5] A. Pietsch, *Operator ideals*. Deutsch. Verlag Wiss., Berlin, 1978; North-Holland, Amsterdam-London-New York-Tokyo, 1980.
- [6] S. Simons, *Local Reflexivity and $(p; q)$ -Summing Maps*, *Math. Ann.* **198** (1972), 335–344.