



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF- M'SILA
FACULTÉ DES SCIENCES & SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

MEMOIRE

PRÉSENTÉ PAR

MEDDAH Mustapha

Pour l'obtention du diplôme de

MAGISTER

EN GENIE MECANIQUE

OPTION : CONSTRUCTION MECANIQUE

THEME

**ANALYSE DES PLAQUES MINCES SOUS DIFFERENTES
CONDITIONS AUX LIMITES**

Soutenu le /...../.....

Membres de jury:

M ^f : MEZIANI S.	Président	Pr. Université de Constantine
M ^f : NECIB B.	Rapporteur	Pr. Université de Constantine
M ^f : BOUCHOUCHA A.	Examineur	Pr. Université de M'sila
M ^f : FARSI C.	Examineur	Dr. Université de M'sila

RESUME

La méthode des éléments finis est un outil numérique puissant utilisé dans le calcul des structures compliquée par une discrétisation en éléments finis, dans notre cas rectangulaires.

Le travail présenté consiste à analyser aux état statique et dynamique des plaques minces en état plan de contrainte sous déférentes conditions aux limites. Le programme élaboré en langage PASCAL permet de calculer les déplacements des nœuds, les réactions et les contraintes dans le milieu de chaque élément dans le cas statique et les fréquences propres et les modes propres en cas dynamique. Les résultats obtenus sont comparé à ceux du logiciel Sap2000.

SUMMARY

The finite element method is a powerful numerical tool used in the calculation of complicated structures by a discretization into finite elements; right-angled element in our case

Work presented consists in analyzing in static and dynamic states thin sections in plane state of stress under different boundary conditions. The program is labored in PASCAL language which allows calculating the displacements of nodes, the reactions and the stresses in the medium of each element in the static state and the own frequencies and the own modes in dynamic state. The results obtained are compared by Sap2000 software.

الخلاصة

طريقة العناصر المنتهية هي أداة عددية قوية تستعمل في حساب الإنشاءات المعقدة عن طريق التجزئة الى عناصر منتهية؛ في حالتنا هذه مستطيلة العمل المعروف ينص على التحليل في الحالتين السكونية والحركية لصفحة رقيقة في إجهاد مستوى تحت مختلف الشروط الحدية. البرنامج المنجز بلغة الباسكال يسمح بحساب الا انتقالات في العروات، ردود الأفعال، الاجهادات وسط كل عنصر في الحالة السكونية، التوترات الخاصة والأنماط الخاصة في الحالة الحركية. النتائج المحصل عليها قورنت بنتائج البرنامج Sap2000.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE

CHAPITRE I

INTRODUCTION A LA THEORIE D'ELASTICITE

I-1 Introduction	1
I-2 Définitions du vecteur de contrainte	1
I-2-1 Etat de contrainte tridimensionnelle	2
I-2-2 Tenseur des contraintes	2
I-2-3 Contraintes principales et directions principales des contraintes	3
I-3 Etat Déformations	4
I-3-1 Vecteur déplacement	5
I-3-2 Tenseur de déformation	6
I-3-2-1 Allongement unitaire ou dilatation	6
I-3-2-2 Glissement ou déformation angulaire	7
I-3-3 Déformations principales	8
I-4 Variation de volume	9
I-5 Equation de compatibilité	9
I-6 Equations d'équilibre	10
I-6-1 Equation de la résultante des forces	11
I-6-2 Equilibre des moments	12
I-7 Conditions aux limites (conditions à la surface)	13
I-8 Loi de comportement de l'élasticité	14
I-9 Interprétation physique de E et n	17
I-10 Conservation de la masse	19
I-11 Etude de la théorie d'élasticité plane	19
I-11-1 Etat plan de déformation	19
I-11-2 Etat plan de contraintes	20
I-11-2-1 Energie de déformation de l'état plan de contrainte	22

CHAPITRE II

INTRODUCTION A LA THEORIE DES ELEMENT FINIS

II-1 Introduction	23
II-2 Principe des puissances virtuelles, formulation faible de l'équilibre	24
II-3 Forme variationnelle de la cinématique	25

II-3-1	Interprétation physique de la forme variationnelle de l'équilibre	
	principe des déplacements virtuels (ou des travaux virtuels) -----	26
II-3-2	Interprétation physique de la forme variationnelle cinématique Principe	
	des forces virtuelles (ou des travaux virtuels complémentaires)-----	28
II-4	Discrétisation -----	28
II-4-1	Principe de discrétisation -----	28
II-5	Méthode de Galerkin -----	29
II-6	Eléments et leur espace de fonction d'interpolation -----	30
II-6-1	Choix des fonctions de base-----	30
II-6-2	Maillage -----	31
II-6-3	Fonctions -----	31
II-7	Application de la M.E.F à Elément rectangulaire de l'état plan de contrainte	
	et l'état plan de déformation -----	31
II-7-1	Fonction de déplacement -----	32
II-7-2	Relation entre les déformations et les déplacements -----	34
II-7-3	Relation entre les contraintes et les déformation -----	35
II-7-4	dérivation de matrice de rigidité par la méthode d'énergie -----	35
II-7-5	Equation de matrice de rigidité d'un élément -----	37
II-8	L'assemblage dans la méthode de Galerkin -----	39
II-9	Traitement des charges réparties -----	40
II-9-1	Charge réparties sur un volume -----	40
II-9-2	Charges réparties sur une surface -----	41
II-10	Influence de la largeur de bande d'une matrice -----	41

CHAPITRE III

ANALYSE DYNAMIQUE DES STRUCTURES ELASTIQUES

III-1	Introduction -----	43
III-2	Système à un degré de liberté -----	43
III-2-1	Oscillation libre -----	43
III-2-2	Oscillations forcées -----	46
III-2-3	Excitation harmonique -----	46
III-2-4	Excitation périodique -----	47
III-3	Système à n degré de liberté -----	48
III-3-1	Equations de Lagrange -----	49
III-3-2	Solution générale-----	50

III-3-4 Méthode de la base modale -----	51
III-3-5 Système avec amortissement visqueux -----	54
III-3-6 Réponses forcées -----	55
III-4 Fréquences et modes propre des structures -----	56
III-4-1 Définition des problème aux valeurs propres généralisés -----	56
III-5 Calcul par élément finis -----	59
III-5-1 Modélisation des masses par éléments finis -----	59
III-5-3 Application de la M.E.F à Elément rectangulaire de l'état plan de contrainte et l'état plan de déformation -----	59
III-5-4 Equation de matrice de masse -----	60

CHAPITRE IV

EXEMPLES D'APPLICATIONS ET COMPARAISON DES RESULTATS

IV-1 Introduction -----	62
IV-2 Développement du programme de l'état statique-----	62
IV-3 Critère d'acceptabilité-----	64
IV-4 Développement du programme de calcul à l'état dynamique -----	65
IV-5Modélisation d'une plaque rectangulaire par la méthode des éléments finies ---	66
IV-6 Analyse statique d'une plaque rectangulaire-----	67
IV-6-1 Exemples d'applications-----	67
IV-6-1-1 Exemple N °1 -----	67
IV-6-1-2 Exemple N°2-----	72
IV-6-1-3 Exemple N°3-----	76
IV-6-1-4 Exemple N°4-----	80
IV-6-1- 5Exemple N°5-----	84
IV-6-1-6 Exemple N°6-----	88
IV-7 Analyse dynamique d'une plaque rectangulaire -----	92
IV-7-1 calcul des fréquences propres et des modes propres des exemples N°1 ;2 et3 -	92
IV-7-1 calcul des fréquences propres et des modes propres de exemple N°4 -----	96
IV-7-1 calcul des fréquences propres et des modes propres de exemple N°5 -----	100
Discussion des résultats -----	104

CONCLUSION GENERALE

ANNEXE

BIBLIOGRAPHIE

DISCUSSION DES RESULTATS :

La méthode des éléments finis est un outil de résolution numérique approchée des problèmes de structures et, plus généralement, des problèmes physiques et mécanique.....etc. Elle permet la détermination des déplacements à n'importe quel nœud de la structure de la plaque. L'objet essentiel de calcul pour notre cas est de déterminer les déplacements, les réactions, ainsi que les contraintes dans n'importe quel élément de la structure.

Selon les résultats trouvés pour les différents exemples qu'on a traité, on peut faire les constatation suivantes :

a) Pour le cas statique :

Les résultats obtenus par notre programme développé (statique),

- 1- Les déplacements des nœuds suivant les axes x et y, se rapprochent aux résultats du logiciel Sap2000 à des erreurs près
- 2- Pour les valeurs des réactions nous constatons que les résultats sont tout à fait équivalents a ceux de Sap2000.
- 3- Concernant les contraintes moyennes maximales au milieu de chaque élément :

Pour l'exemple N°1, s_{mMax} au milieu de l'élément 4 est 411510727.9 N/m². L'exemple N°2, s_{mMax} au milieu de l'élément 2 est -273946111.9 N/m². L'exemple N°3, s_{mMax} au milieu de l'élément 1 est -9511563485 N/m². L'exemple N°4, s_{mMax} au milieu de l'élément 8 et 12 est -1778254876 N/m². L'exemple N°5, s_{mMax} au milieu de l'élément 1 est -5288566218 N/m². L'exemple N°6, s_{mMax} au milieu de l'élément 1, 4, 13, 16 est 2031619992 N/m²

La contrainte est faible dans les éléments des exemples. Pour l'exemple N°1, $s_{m:Min}$ au milieu de l'élément 13 est -46190107.7 N/m². L'exemple N°2, $s_{m:Min}$ au milieu de l'élément 11 est 8881866.67 N/m². L'exemple N°3, $s_{m:Min}$ au milieu de l'élément 11 est -8215023.491 N/m². L'exemple N° 4, $s_{m:Min}$ au milieu de l'élément 5 et 9 est 43380414.89 N/m². L'exemple N°5 $s_{m:Min}$ au milieu de l'élément 10 est 93231919.41 N/m². L'exemple N°6, $s_{m:Min}$ au milieu de l'élément 5, 8, 9 et 12 est 1218380008 N/m²

b) Pour le cas dynamique:

Le programme de calcul à l'état dynamique donne les fréquences propres et les modes propres. Pour les modes propres, nous signalons que les basses fréquences du premier mode sont : pour l'exemple N°1 est de 1505.1HZ, l'exemple N°4 est de 5116.04 ,et l'exemple N°5 est de 2045.4HZ. Il est a noté que la plus importante fréquence de vibration est celle de l'exemple (IV.4) (encastrement des deux coté). Ce qui veut dire que cette plaque subit de plus des vibrations.

NOTATION

S	Système des contraintes $[N/m^2]$
e	Les déformations internes de la structure
S_{ij}	Tenseur de contrainte
e_{ij}	Tenseur de déformation
∂	Dérivée partielle
E	Module de «Young» $[N/m^2]$
n	Coefficient de poisson
r	Densité du matériau
ds	Surface différentielle $[m^2]$
dv	Volume différentiel $[m^3]$
\vec{n}	Normale
u_1 et u_2	Déplacements nodaux $[m]$
$f_i(x)$	Fonctions de forme
$f_i'(x)$	Dérivée première de la fonction de forme
U	Énergie de déformation $[N.m]$
T_i	Vecteur de contrainte
$[F]$	Vecteur de force
$F(m)$	Force de volume
$f(p)$	Force de surface
$[K]$	Matrice de rigidité
K_{ij}	Coefficients de la matrice de rigidité
$[M]$	Matrice de masse
m_{ij}	Coefficients de la matrice de masse
W	Le travail des forces volumiques et surfaciques
$\{ \}^T$	Transposé d'un vecteur
$tr\{S\}$	Trace S
$\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$	Vecteurs unitaires
a	Dimension de la plaque suivant l'axe x $[m]$
b	Dimension de la plaque suivant l'axe y $[m]$
t	Épaisseur de la plaque $[m]$
$F_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}$	Forces généralisées $[N]$
q_i	Déplacements généralisés $[m]$
$f_i''(x), f_j''(x)$	Dérivées secondes des fonctions de forme
F_{x_i}, F_{y_j}	Forces aux nœuds pour chaque élément $[N]$
ν	La fréquence $[rad/s]$
$\{x\}$	Vecteur des déplacements aux nœuds
$\{\ddot{x}\}$	Vecteur des accélérations aux nœuds
$\{F(t)\}$	vecteur des forces aux nœuds

LISTES DES FIGURES

Numéro INTITULE	Pages
Figure I.1 corps de volume V , facette ds et normale n -----	1
Figure I.2 composante d'un vecteur de contrainte -----	1
Figure I.3 Vecteur de contrainte sur trois facettes orthogonales -----	2
Figure I.4 Composantes des tenseur de contraintes-----	3
Figure I.5 Déplacement d'un point de solide-----	5
Figure I. 6 Déplacement d'un point de solide -----	7
Figure I.7 Déformation angulaire-----	7
Figure I.8 Parallélépipède en équilibre -----	11
Figure I.9 partie libre S_T et partie appuyée S_x de la surface -----	14
Figure I.10 cas de l'état plan de déformation-----	19
Figure 1.11 cas de l'état plan de contrainte-----	20
Figure II.1 Approximation de domaine du couverture -----	31
Figure II.2 Elément rectangulaire de huit degré de liberté de l'état plan de contrainte ou l'état plan de déformation-----	32
Figure II.3 Forme du rectangle après la déformation	34
Figure II.4 largeur de bande d'une matrice	42
Figure II.5 Numérotation des nœuds	42
Figure III.1 système à un degré de liberté	43
Figure III.2 Fonction créneau	48
Figure III.3 Elément rectangulaire de huit degrés de liberté de l'état plan de contrainte ou l'état plan de déformation	59
Figure IV.1 Discrétisation de la plaque	66
Figure IV.2 Maillage de la plaque de l'exemple N°1	68
Figure IV.3 Maillage de la plaque de l'exemple N°2	72
Figure IV.4 Maillage de la plaque de l'exemple N°3	76
Figure IV.5 Maillage de la plaque de l'exemple N°4	.80
Figure IV.6 Maillage de la plaque de l'exemple N°5	84
Figure IV.7 Maillage de la plaque de l'exemple N°6	88
Figure IV.8 les 6 premiers Mode des exemples N°1,2,3	95
Figure IV.9 les 6 premiers Mode des exemples N°4	99
Figure IV.10 les 6 premiers Mode des exemples N°5	103

LISTES DES TABLEAUX

Numéro	intitulé	Page
	<i>Tableau N 1 : Comparaisons des déplacements de l'exemple N</i> -----	69
	<i>Tableau N 2 : Comparaisons des réactions de l'exemple N 1</i>	69
	<i>Tableau N 3 : Comparaisons des contrainte au milieu de l'élément l'exemple N1</i>	71
	<i>Tableau N 4 : Comparaisons des déplacements de l'exemple N 2</i>	73
	<i>Tableau N 5 : Comparaisons des réactions de l'exemple N 2</i>	73
	<i>Tableau N 6 : Comparaisons des contrainte au milieu de l'élément l'exemple N2</i>	75
	<i>Tableau N 7 : Comparaisons des déplacements de l'exemple N 3</i>	77
	<i>Tableau N 8 : Comparaisons des réactions de l'exemple N 3</i>	77
	<i>Tableau N 9 : Comparaisons des contrainte au milieu de l'élément l'exemple N3</i>	79
	<i>Tableau N 10 : Comparaisons des déplacements de l'exemple N 4</i>	81
	<i>Tableau N 11: Comparaisons des réactions de l'exemple N 4</i>	81
	<i>Tableau N 12: Comparaisons des contrainte au milieu de l'élément l'exemple N4</i>	83
	<i>Tableau N 13: Comparaisons des déplacements de l'exemple N 5</i>	85
	<i>Tableau N 14: Comparaisons des réactions de l'exemple N 5</i>	85
	<i>Tableau N 15: Comparaisons des contrainte au milieu de l'élément l'exemple N</i>	87
	<i>Tableau N 16: Comparaisons des déplacements de l'exemple N 6</i>	89
	<i>Tableau N 17: Comparaisons des réactions de l'exemple N 6</i>	89
	<i>Tableau N 18: Comparaisons des contrainte au milieu de l'élément l'exemple N6</i>	91
	<i>Tableau N 19: déplacement des nœuds de chaque mode de 1 à 6 l'exemple N</i>	95
	<i>Tableau N 20: déplacement des nœuds de chaque mode de 1 à 6 de l'exemple N4</i>	99
	<i>Tableau N 21: déplacement des nœuds de chaque mode de 1 à 6 de l'exemple N5</i>	103

I.1 Introduction :

L'utilisation de la méthode des éléments finis pour l'analyse des problèmes statique et dynamique nécessite la connaissance des équations de base de la théorie de l'élasticité linéaire. Dans ce chapitre, on présente les relations entre contraintes et les déformations dans le cas tridimensionnel. De ce cas général, dérive le cas particulier de l'élasticité plane (état plan de contrainte et état plan de déformation).

I-2 Définitions du vecteur de contrainte

Considérons un corps de volume V où sont appliquées des efforts extérieurs (\vec{T}), en chaque point M d'un solide, il existe des forces intérieures que l'on met en évidence en effectuant une coupure du solide, suivant la surface S, en deux parties A et B (figure I.1).

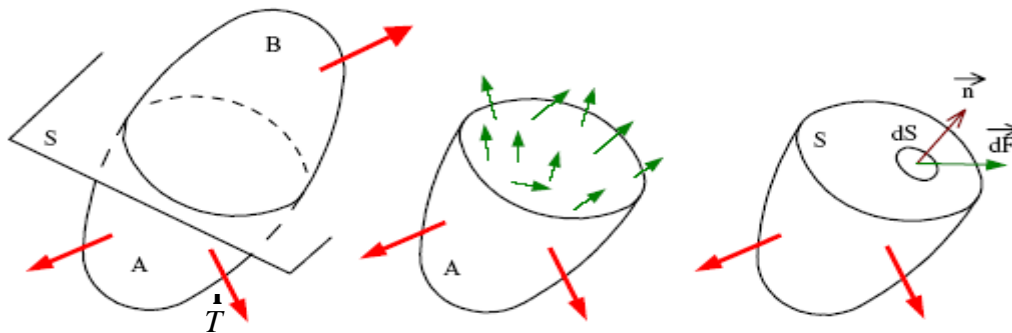


Fig.I.1 Corps de volume V , facette ds et normale \vec{n}

La partie A du corps, est en équilibre sous l'action des forces extérieures (T) qui lui sont directement appliquées et des forces intérieures réparties sur la coupure.[4]

Soit dS un élément infinitésimal de la surface S, entourant un point M et \vec{n} le vecteur unitaire, perpendiculaire à dS et dirigé vers l'extérieur de la partie A c'est-à-dire la facette \vec{n} en M de cet élément de surface aussi, Soit $d\vec{F}$ la force qui s'exerce sur cette facette. On appelle $\vec{S}(M, \vec{n})$ le vecteur de contrainte en M et dans la direction \vec{n} , définit par :

$$\vec{S}(M, \vec{n}) = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}}{dS} \quad (I.1)$$

Ce vecteur contrainte peut être décomposé en une composante suivant \vec{n} et une projection sur la facette figure (I.2) :

$$\vec{S}(M, \vec{n}) = S\vec{n} + \vec{t} \quad (I.2)$$

Où S est la contrainte normale et \vec{t} est le vecteur cisaillement.

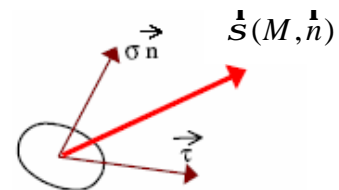


Figure (I.2) :composante d'une vecteur de contrainte

Il est à noter que quand S est une valeur algébrique positive c'est traction et quand elle a une valeur négative c'est une compression.

I-2-1 Etat de contrainte tridimensionnelle

Les vecteurs unitaires $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$ associés au repère orthonormé $\{O, x y z\}$ définissent en un point M du solide trois facettes perpendiculaires entre elles figure (I.3).[4]

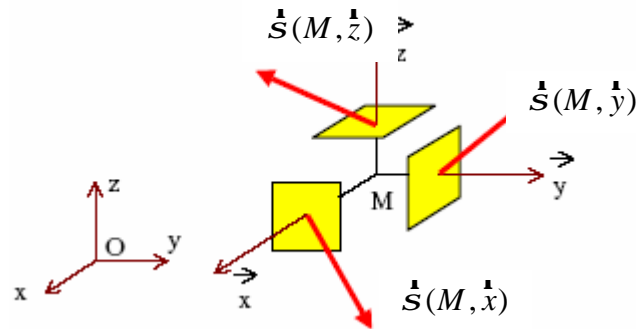
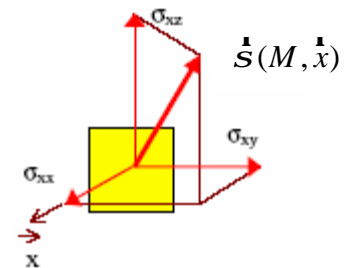


Figure (I.3) : vecteur de contraintes sur trois facettes orthogonales

Les contraintes qui s'exercent sur chacune de ces faces sont définies par leurs composantes dans le repère $\{O, x y z\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{facette } \hat{X} : \mathbf{r}(M, \hat{X}) = s_{xx} \hat{X} + s_{xy} \hat{Y} + s_{xz} \hat{Z} \\ \text{facette } \hat{Y} : \mathbf{r}(M, \hat{Y}) = s_{yx} \hat{X} + s_{yy} \hat{Y} + s_{yz} \hat{Z} \\ \text{facette } \hat{Z} : \mathbf{r}(M, \hat{Z}) = s_{zx} \hat{X} + s_{zy} \hat{Y} + s_{zz} \hat{Z} \end{array} \right. \quad (I.3)$$



Remarque : sur la facette \hat{X} , la contrainte normale est égale à :

$$s = \hat{X} \cdot \mathbf{r}(M, \hat{X}) = s_{xx} \quad (I.4)$$

le vecteur de cisaillement est égal à :

$$\mathbf{t} = s_{xy} \hat{Y} + s_{xz} \hat{Z} \quad (I.5)$$

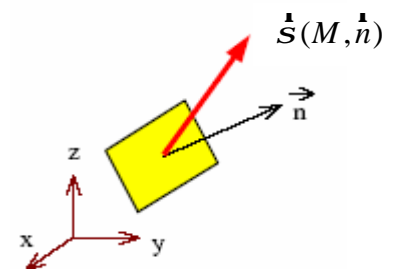
I-2-2 Tenseur des contraintes

Considérons la facette \hat{n} en M. Soit a, b et c les cosinus directeurs de \hat{n} . [4]

La contrainte sur la facette \hat{n} est égale à :

$$\mathbf{r}(M, \hat{n}) = a \mathbf{r}(M, \hat{X}) + b \mathbf{r}(M, \hat{Y}) + c \mathbf{r}(M, \hat{Z}) = \mathbf{s}(M) \hat{n} \quad (I.6)$$

$$\text{Sous forme matricielle : } [\mathbf{r}(M, \hat{n})] = [\mathbf{s}(M)] [\hat{n}] \quad (I.7)$$



où $[S(M)]$, appelé tenseur des contraintes en M, a pour expression :

$$[S(M)] = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix} \quad (I.8)$$

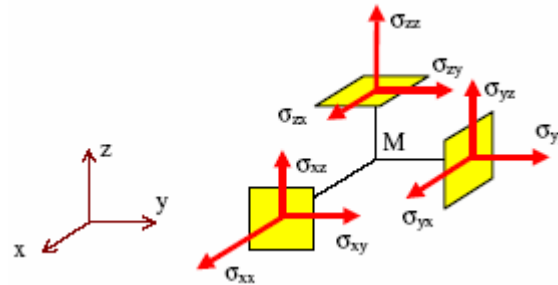


Figure (I.4): Composantes du tenseur des contraintes

I-2-3 Contraintes principales et directions principales des contraintes:

Soit S_{ij} tenseur contraintes en un point, il permet de déterminer les vecteurs de contraintes pour toutes les facettes, de normale unitaire extérieure \hat{n} , passant par ce point, par la relation.

$$T_{ij} = S_{ij} X_j \quad (I.9)$$

On obtient également les contraintes normales pour toutes les facettes [4]:

$$S = \hat{T} \hat{n} = T_i X_i = S_{ij} X_j X_j \quad (I.10)$$

Avec $X_j X_j = \text{cosinus directeur}$.

s'il existe des vecteurs \hat{n} , tels que leur produit par un tenseur $[S]$ leur soient colinéaires c'est-à-dire tels que l'on ait :

$$S_{ij} x_j = I x_i \quad \text{et } I : \text{valeur scalaire} \quad (I.11)$$

On peut donc rechercher s'il existe des facettes soumises à des contraintes purement normales, c'est-à-dire telle que :

$$T_i = S_{ij} X_j = I X_j \quad (I.12)$$

A l'aide de la règle de substitution d'un indice attaché au symbole de Kronecker, on peut mettre les inconnues X_i en évidence; on a d'abord.

$$S_{ij} x_i - I d_{ij} x_i = 0 \quad (I.13)$$

$$(S_{ij} - I d_{ij}) x_i = 0 \quad (I.14)$$

Ces conditions sont trois équations linéaires et homogènes

$$\begin{cases} (s_{11}-I)x_1+(s_{12}-I)x_2+(s_{13}-I)x_3=0 \\ (s_{21}-I)x_1+(s_{22}-I)x_2+(s_{23}-I)x_3=0 \\ (s_{31}-I)x_1+(s_{32}-I)x_2+(s_{33}-I)x_3=0 \end{cases} \quad (I.15)$$

la solution non triviale est obtenue en résolvant l'équation caractéristique du degré 3 $\det [s - I I]$

L'équation caractéristique d'un tenseur d'ordre 2 est une équation cubique en λ , qu'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad (I.16)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} I_1 = \text{Tr}(s) \\ I_2 = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{22} & s_{13} \\ s_{23} & s_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{11} & s_{13} \\ s_{31} & s_{33} \end{vmatrix} \\ I_2 = \frac{1}{2} (s_{ii} s_{jj} - s_{ij} s_{ji}) \\ I_2 = \frac{1}{2} [(\text{Tr} s)^2 - \text{Tr}(s^2)] \\ I_3 = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix} = \det[s] \end{cases} \quad (I.17)$$

Dont les solutions sont les trois contraintes principales s_1, s_2, s_3 et les coefficients

I_1, I_2, I_3 les invariants élémentaires du tenseur s . Où (s_{ij}) représente les composantes du tenseur dans une base R orthonormé mais non nécessairement principale, le symbole s désigne le tenseur du seconde ordre s . [4]

En remplaçant I par s_i dans (I.15), on obtient un système homogène permettant de trouver les trois composantes x_i de la première direction principale à un facteur près. Ce facteur se détermine ensuite par la condition suivante :

$$x_{I_i} x_{I_i} = x_{I_1}^2 + x_{I_2}^2 + x_{I_3}^2 \quad (I.18)$$

On procède de même avec s_{II}, s_{III}

I-3 Etat Déformations

Sous l'action des forces extérieures, le solide se déforme. Il en résulte pour tous les points du solide un déplacement que nous supposons petit.

I-3-1 Vecteur déplacement

Soient $\{O, x, y, z\}$ un repère orthonormé et M un point du solide. Au cours de la mise en charge, le point M vient en M' figure (I.5). On appelle vecteur déplacement du point M le vecteur $d\overline{OM} = \overline{MM'}$. (I.19)

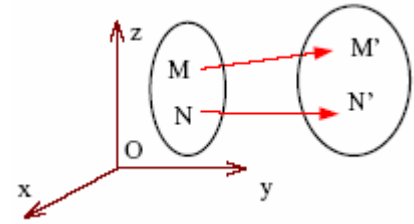


Figure (I.5) déplacement d'un point du solide

Nous noterons ses composantes :

$$\begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (I.20)$$

Soient N un point du solide voisin de M:

$$\mathbf{r}_{MN} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} \quad (I.21)$$

Au cours de la mise en charge N vient en N'.

Le déplacement du point N est égal à :

$$\begin{aligned} d\overline{ON} = \overline{NN'} &= \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z \\ \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \Delta z \\ \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = d\overline{OM} + [D]\overline{MN} \end{aligned} \quad (I.22)$$

n décomposant la matrice [D] en sa partie symétrique

$$[E] = \frac{1}{2}([D] + [D]^T) \quad (I.23)$$

et sa partie Antisymétrique

$$[\Omega] = \frac{1}{2}([D] - [D]^T) \quad (I.24)$$

on peut écrire :

$$d\overline{ON} = d\overline{OM} + [\Omega]\overline{MN} + [E]\overline{MN} \quad (I.26)$$

avec

$$[E] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (I.25)$$

où l'on a posé :

$$e_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_3 = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (I.26)$$

$$e_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad e_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad e_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (I.27)$$

$$w_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad w_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad w_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (I.28)$$

Le déplacement du point N

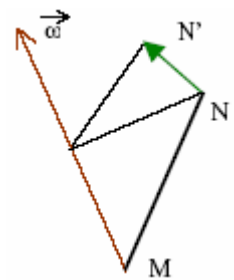
$$d\overrightarrow{ON} = d\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{MN} + [E]\overrightarrow{MN} \quad (I.29)$$

s'écrit finalement, Si $[\Omega]$ et $[E]$ sont nuls, le déplacement de N se réduit à : $d\overrightarrow{ON} = d\overrightarrow{OM}$ et tous les points situés au voisinage de M subissent la même translation.

Si $d\overrightarrow{OM}$ et $[E]$ sont nuls le déplacement de N se réduit à : $d\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{MN}$

Si de plus $w = \|\overrightarrow{w}\|$ est petit (les dérivées du vecteur déplacement sont petites), tous les points situés au voisinage de M subissent une rotation

$\overrightarrow{w} = \frac{1}{2} \text{rot}(d\overrightarrow{OM})$ d'intensité w autour de l'axe dont l'origine est situé en M.



La matrice $[E]$ qui représente les déformations du solide en M est appelée tenseur des déformations.

I-3-2 Tenseur de déformation

I-3-2-1 Allongement unitaire ou dilatation

Considérons deux points M et N du solide voisins l'un de l'autre. Au cours de la mise en charge, le point M vient en M' et le point N en N' figure (I.6). Soit \hat{n} le vecteur unitaire lié à la direction MN. On appelle allongement unitaire en M dans la direction \hat{n} la quantité

$$e(M, \hat{n}) = \lim_{N \rightarrow M} \frac{M'N' - MN}{MN} \quad (I.30)$$

Soient a, b, c les composantes de \hat{n} et l la longueur de la fibre MN d'où :

$$\overrightarrow{MN} = l\hat{n} = l \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = l[n]$$

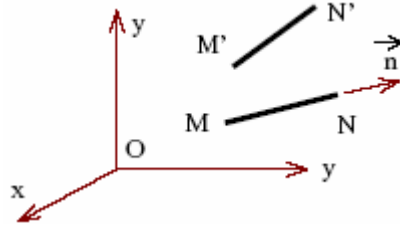


Figure (I.6) déplacement d'un point du solide

Evaluons la quantité dMN^2 :

$$\begin{aligned} dMN^2 &= d(\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MN}) \\ &= 2\overrightarrow{MN} \cdot d\overrightarrow{MN} = 2l^2 [n]^T [E] [n] \end{aligned} \quad (I.31)$$

D'autre part:
$$dMN^2 = dl^2 = 2ldl = 2l^2 e(M, \vec{n}) \quad (I.32)$$

On obtient finalement :

$$e(M, \vec{n}) = [n]^T [E] [n] = a^2 e_1 + b^2 e_2 + c^2 e_3 + 2abe_{12} + 2ace_{13} + 2bce_{23} \quad (I.33)$$

Remarque : si $\vec{n} = \vec{X}$, on obtient : $e(M, \vec{X}) = e_1$. De même : $e(M, \vec{Y}) = e_2$ Et $e(M, \vec{Z}) = e_3$.

Les quantités e_1, e_2, e_3 représentent donc respectivement l'allongement unitaire en M dans les directions \vec{X}, \vec{Y} et \vec{Z} .

I-3-2-2 Glissement (déformation angulaire)

Soient deux points N_1 et N_2 voisins de M et tels que les directions MN_1 et MN_2 soient orthogonales. Soient \vec{n}_1 et \vec{n}_2 les vecteurs unitaires associés à ces deux directions.

Au cours de la mise en charge les points M, N_1 et N_2 viennent respectivement en M', N'_1 et N'_2 . Soit α l'angle que font entre eux les deux vecteurs MN'_1 et MN'_2 . fig (I.7)

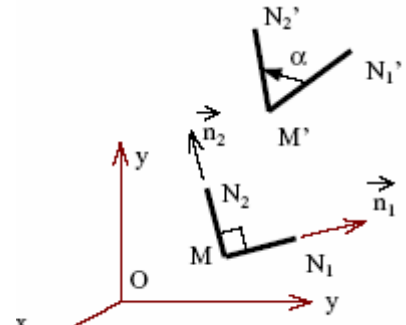


Figure (I.7) : déformation angulaire

On appelle glissement en M dans les directions \vec{n}_1 et \vec{n}_2 , la quantité :

$$g(M, \vec{n}_1, \vec{n}_2) = \lim_{\substack{N_1 \rightarrow N \\ N_2 \rightarrow N}} \left(\frac{\rho}{2} - a \right) \quad (I.34)$$

Posons : $MN_1=l_1, MN_2=l_2, \vec{n}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}, \vec{n}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (I.35)$

$$\text{On a donc : } \overrightarrow{MN_1} = l_1 \vec{n}_1 = l_1 \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{MN_2} = l_2 \vec{n}_2 = l_2 \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (\text{I.36})$$

Soit j l'angle que font entre eux les vecteurs $\overrightarrow{MN_1}$ et $\overrightarrow{MN_2}$.

Evaluons la quantité $d(\overrightarrow{MN_1}, \overrightarrow{MN_2})$:

$$\begin{aligned} d(\overrightarrow{MN_1}, \overrightarrow{MN_2}) &= d(l_1 l_2 \cos \varphi) \\ &= d(l_1 l_2) \cos \varphi - l_1 l_2 \sin \varphi d\varphi = -l_1 l_2 \gamma(M, \vec{n}_1, \vec{n}_2) \quad \text{car } \varphi = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (\text{I.37})$$

$$\text{D'autre part : } d(\overrightarrow{MN_1}, \overrightarrow{MN_2}) = d\overrightarrow{MN_1} \cdot \overrightarrow{MN_2} + \overrightarrow{MN_1} \cdot d\overrightarrow{MN_2} = 2l_1 l_2 [n_1]^T [E][n_2] \quad (\text{I.38})$$

$$\text{On déduit } \gamma(M, \vec{n}_1, \vec{n}_2) = 2[n_1]^T [E][n_2] \quad (\text{I.39})$$

soit :

$$g(M, \vec{n}_1, \vec{n}_2) = 2[a_1 a_2 e_1 + b_1 b_2 e_2 + c_1 c_2 e_3 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) e_{12} + (a_2 b_3 + a_3 b_2) e_{23} + (a_3 b_1 + a_1 b_3) e_{13}] \quad (\text{I.40})$$

Remarque: si $n_1 = \vec{X}$ et $n_2 = \vec{Y}$, l'expression ci-dessus se réduit à : $g(M, \vec{X}, \vec{Y}) = g_{12} = 2e_{12}$.

De même : $g(M, \vec{X}, \vec{Z}) = g_{13} = 2e_{13}$ et $g(M, \vec{Y}, \vec{Z}) = g_{23} = 2e_{23}$.

Les quantités g_{12} , g_{13} et g_{23} représentent donc respectivement le glissement en M dans les directions (\vec{X}, \vec{Y}) , (\vec{X}, \vec{Z}) et (\vec{Y}, \vec{Z}) .

I-3-3 Déformations principales :

L'analyse faite sur le tenseur des contraintes pour déterminer les contraintes principales peut être faite de façon analogue pour déterminer les déformations principales. Le tenseur $[e_{ij}]$ étant un tenseur symétrique du second ordre, il a trois déformations principales dans le repère principale, le tenseur des déformations principales s'écrit simplement [5]:

$$[e] = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix} \quad (\text{I.41})$$

D'après la signification dégagée plus haut des composantes $[e]$, il ressort que

- les déformations principales représentent les dilatations linéaires dans les directions principales.
- les directions principales ne subissent aucune distorsion, les plans principaux restent orthogonaux après déformation.

I-4 Variation de volume :

On se place dans le repère principal; Considérons un parallélépipède élémentaire construit sur 3 vecteurs élémentaires parallèles aux axes propres. Après déformation on obtient :

$$\begin{aligned} dx'_1 &= (1 + e_1)dx_1 \\ dx'_2 &= (1 + e_2)dx_2 \\ dx'_3 &= (1 + e_3)dx_3 \end{aligned} \quad (I.42)$$

Le nouveau volume dV' après déformation est donné par:

$$dV' = dx'_1 dx'_2 dx'_3$$

la variation relative de volume est :

$$q = \frac{dV' - dV}{dV} = \frac{(1 + e_1)(1 + e_2)(1 + e_3)dx_1 dx_2 dx_3 - dx_1 dx_2 dx_3}{dx_1 dx_2 dx_3} \quad (I.43)$$

$$q = (1 + e_1)(1 + e_2)(1 + e_3) - 1 \quad (I.44)$$

En ne tenant compte que des termes du premier ordre :

$$\begin{aligned} q &= e_1 + e_2 + e_3 = \text{Trace} = \text{div } \dot{\mathbf{U}} \\ q &= e_{kk} = \text{div } \dot{\mathbf{U}} \end{aligned} \quad (I.45)$$

Rapportée à des axes quelconques, la dilatation est donnée par:

$$q = e_1 + e_2 + e_3 = e_{ii} = \text{div } \dot{\mathbf{U}}$$

Il est clair que ce résultat est indépendant de la forme de l'élément de volume considéré, de même que du système d'axes choisi :

La trace de tenseur e_{ii} se conserve lors d'un changement d'axes.

I-5 Equation de compatibilité :

En général, Il n'est pas possible, d'imposer à un solide déformable, un champ de déformation arbitraire, fut-il continu et indéfiniment dérivable, sans détruire la cohésion de la matière (vides et recouvrements). Pour que cette cohésion soit respectée (c-à-d pour que les volumes élémentaires ; auxquels ont été appliquées les déformations e_{ij} , continuent de rester accolés), il faut que le champ de déformation $e_{ij}(M)$ dérive d'un champ de déplacement $u_i(M)$, continûment dérivable, tel que e_{ij} puisse s'écrire s'écrire :

$$\begin{cases} e_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} u_j \\ e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} u_j \right) \end{cases} \quad (I.46)$$

Donc, connaissant le champ de déplacement $u_i(M)$, on en déduit par (I.46) le champ de déformation $e_{ij}(M)$.

Réciproquement, si on connaît le champ des déformations $e_{ij}(M)$, peut-on calculer le champ de déplacements $u_i(M)$. Le premier problème est celui de la compatibilité des déformations, le second celui de l'intégration d'un champ de déplacement.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} e_{ii} &= \frac{\partial^3}{\partial x_j^2 \partial x_i} u_i \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} e_{jj} &= \frac{\partial^3}{\partial x_i^2 \partial x_j} u_j \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} e_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j^2} u_i + \frac{\partial^3}{\partial x_i^2 \partial x_j} u_j \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} e_{ii} + \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} e_{jj} = 2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} e_{ij} \quad (I.47)$$

Il y'a 3 équations, avec: $(i, j = 1, 2, 3 \text{ et } i \neq j)$.

$$\begin{aligned} e_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} u_j &\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} e_{ii} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} u_i \\ e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} u_j \right) &\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} u_i + \frac{\partial^3}{\partial x_i^2 \partial x_k} u_j \right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} e_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} u_i + \frac{\partial^3}{\partial x_i^2 \partial x_j} u_k \right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} e_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_k^2} u_j + \frac{\partial^3}{\partial x_i^2 \partial x_j} u_k \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} e_{ii} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} e_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} e_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i} e_{jk} \right] \end{aligned} \quad (I.48)$$

En définitif, il y a 6 équations de Saint Venant. Si le champ de déformation n'obéit pas à ces équations de compatibilité, alors le matériau va réagir (apparition de fissures dans le domaine plastique...).

I-6 Equations d'équilibre

Considérons que les contraintes varient d'un point à un autre, les forces à appliquer sur chaque face du cube pour le maintenir déformé et immobile ont une résultantes nulle et un moment résultant nul.

I-6-1 Equation de la résultante des forces

Pour simplifier l'écriture (et les calculs), faisant passer les axes par le point M figure (I.8)

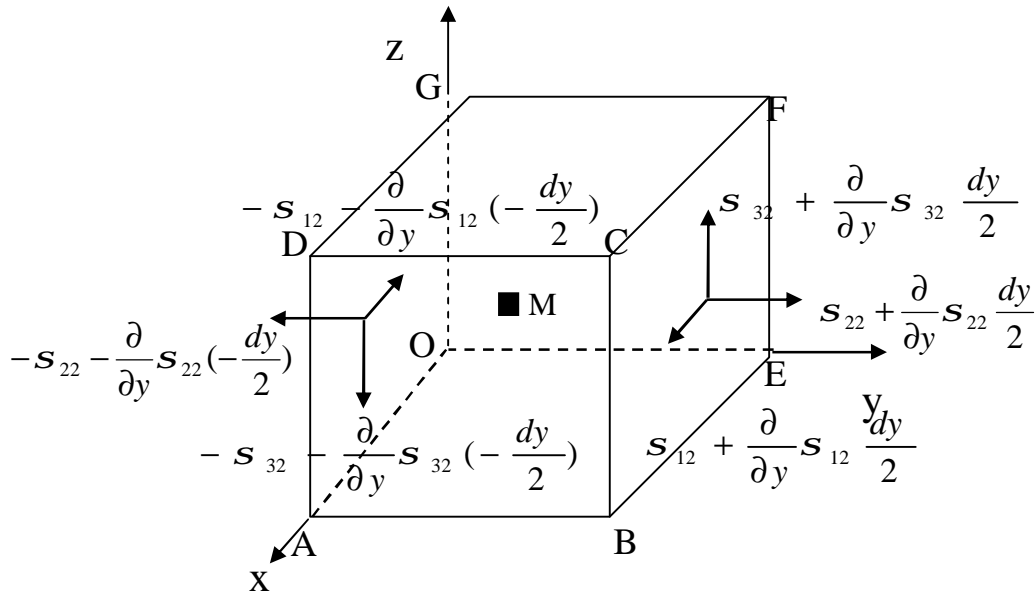


Figure (I.8) parallélépipède en équilibre

Les forces qui s'exercent sur les faces du cube ABCDOEFG sont les suivantes

Les deux faces perpendiculaires à OX

$$\text{ABCD} \begin{cases} \left(s_{21} + \frac{\partial}{\partial x} s_{21} \frac{dx}{2} \right) dydz \\ \left(s_{11} + \frac{\partial}{\partial x} s_{11} \frac{dx}{2} \right) dydz \\ \left(s_{31} + \frac{\partial}{\partial x} s_{31} \frac{dx}{2} \right) dydz \end{cases} \quad \text{OEFG} \begin{cases} \left(-s_{21} - \frac{\partial}{\partial x} s_{21} \left(-\frac{dx}{2}\right) \right) dydz \\ \left(-s_{11} - \frac{\partial}{\partial x} s_{11} \left(-\frac{dx}{2}\right) \right) dydz \\ \left(-s_{31} - \frac{\partial}{\partial x} s_{31} \left(-\frac{dx}{2}\right) \right) dydz \end{cases}$$

Les deux faces perpendiculaires à OY

$$\text{BCEF} \begin{cases} \left(s_{12} + \frac{\partial}{\partial y} s_{12} \frac{dy}{2} \right) dx dz \\ \left(s_{22} + \frac{\partial}{\partial y} s_{22} \frac{dy}{2} \right) dx dz \\ \left(s_{32} + \frac{\partial}{\partial y} s_{32} \frac{dy}{2} \right) dx dz \end{cases} \quad \text{OADG} \begin{cases} \left(-s_{12} - \frac{\partial}{\partial y} s_{12} \left(-\frac{dy}{2}\right) \right) dx dz \\ \left(-s_{22} - \frac{\partial}{\partial y} s_{22} \left(-\frac{dy}{2}\right) \right) dx dz \\ \left(-s_{32} - \frac{\partial}{\partial y} s_{32} \left(-\frac{dy}{2}\right) \right) dx dz \end{cases}$$

Les deux faces perpendiculaires à OZ

$$\text{CDFG} \begin{cases} \left(s_{13} + \frac{\partial}{\partial z} s_{13} \frac{dz}{2} \right) dx dy \\ \left(s_{33} + \frac{\partial}{\partial z} s_{33} \frac{dz}{2} \right) dx dy \\ \left(s_{23} + \frac{\partial}{\partial z} s_{23} \frac{dz}{2} \right) dx dy \end{cases} \quad \text{OABE} \begin{cases} \left(-s_{13} - \frac{\partial}{\partial z} s_{13} \left(-\frac{dz}{2} \right) \right) dx dy \\ \left(-s_{33} - \frac{\partial}{\partial z} s_{33} \left(-\frac{dz}{2} \right) \right) dx dy \\ \left(-s_{23} - \frac{\partial}{\partial z} s_{23} \left(-\frac{dz}{2} \right) \right) dx dy \end{cases}$$

Les équations d'équilibre sont donc, sur chaque axe

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} s_{11} + \frac{\partial}{\partial y} s_{12} + \frac{\partial}{\partial z} s_{13} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} s_{21} + \frac{\partial}{\partial y} s_{22} + \frac{\partial}{\partial z} s_{23} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} s_{31} + \frac{\partial}{\partial y} s_{32} + \frac{\partial}{\partial z} s_{33} = 0 \end{cases} \quad \text{Avec } dx dy dz \neq 0 \quad (\text{I.49})$$

En posant $x=x_1, y=x_2, z=x_3$ on peut généraliser en écrivant la condition d'équilibre :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} s_{ij} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{I.50})$$

En faisant intervenir : -Les forces de volume $\overset{\bullet}{F} dx dy dz$.

-Les forces d'inertie $- r \overset{\bullet}{g} dx dy dz$

Avec $\overset{\bullet}{g}$: Accélération

r : Masse volumique.

$$\frac{\partial}{\partial x_j} s_{ij} + F_i - r g_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{I.51})$$

C'est l'équation fondamentale qui relie les variantes spatiales des contraintes dans un corps aux accélérations des éléments de volume. Dans le cas où le corps est en équilibre statique, l'équation (I.51) prend la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} s_{ij} + F_i = 0 \quad (\text{I.52})$$

I-6-2 Equilibre des moments

On ne tient compte, dans l'équilibre des moments que des termes d'ordre 3. Donc, on peut négliger les forces de volume et d'inertie. [4]

Nous supposons que la résultante des forces normales aux faces passe exactement par le milieu des faces, ce qui nous permet de ne pas tenir compte des composantes normales s_{22} et s_{33} .

Les axes passant toujours par le point M, écrivons les équations du mouvement dans le cas d'une rotation de l'élément autour de M_x . Le couple dû aux composantes de cisaillement des contraintes sur les faces perpendiculaires à M_y et M_z est :

$$\begin{aligned} \text{Surface BCEF} & \left(s_{32} + \frac{\partial}{\partial y} s_{32} \frac{dy}{2} \right) dx dz \frac{dy}{2} \\ \text{Surface AOGD} & \left(s_{32} - \frac{\partial}{\partial y} s_{32} \left(-\frac{dy}{2} \right) \right) dx dz \frac{dy}{2} \\ \text{Surface CDFG} & - \left(\sigma_{23} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{23} \frac{dz}{2} \right) dx dy \frac{dz}{2} \\ \text{Surface OABE} & - \left(s_{23} + \frac{\partial}{\partial z} s_{23} \left(-\frac{dz}{2} \right) \right) dx dy \frac{dz}{2} \end{aligned}$$

On obtient alors simplement, la composante du moment résultant :

- Suivant M_x : $(s_{32} dx dz) dy - (s_{23} dy dx) dz = 0$
- Suivant M_y : $(s_{13} dx dy) dz - (s_{31} dy dz) dx = 0$
- Suivant M_z : $(s_{21} dy dz) dx - (s_{12} dx dz) dy = 0$

Soit:

$$\begin{cases} s_{32} = s_{23} \\ s_{13} = s_{31} \\ s_{21} = s_{12} \end{cases} \quad \text{Où } s_{ij} = s_{ji} \quad \forall i \text{ et } j \quad (\text{I.53})$$

Par conséquent, le tenseur des contraintes est un tenseur symétrique du 2^{ème} ordre (en l'absence de champs moments, par exemple : pas d'action magnétique). Dans le cas contraire, le tenseur des contraintes n'est pas symétrique.

$$\text{Conditions d'équilibre} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} s_{ij} + f_i = 0 \\ s_{ij} = s_{ji} \end{cases} \quad (\text{I.54})$$

I-7 Conditions aux limites (conditions à la surface) :

La surface limitant le solide étudié peut généralement être divisée en deux parties, une partie S_T dite libre, où agissent les tractions de surface, et l'autre S_x dite appuyée, où agissent les déplacements imposés figure (I.9). [10]

Sur la section S_T les tractions de surface T_d sont équivalentes aux forces internes on a donc :

$$s(x).n(x) = T_d(x) \quad (x \in S_T) \quad (\text{I.55})$$

Ces équations expriment les conditions statiques de la surface ; ce sont en fait les conditions aux limites. de caractère statique (c'est-à-dire relatif aux forces et contraintes) .

Les conditions cinématiques à la surface portent ordinairement sur les déplacements et non sur les déformations. Elles correspondent aux conditions d'appui usuelles sur S_x . Si les quantités $\mathbf{x}_d(x)$ sont imposées (donc connues), ces conditions s'énoncent simplement comme suite :

$$\mathbf{x}(x) = \mathbf{x}_d(x) \quad (x \in S_x) \quad (I.56)$$

pour lesquelles il est nécessaire que les surface S_x et S_T forment une partition de ∂V :

$$S_\xi \cup S_T = \partial V, S_\xi \cap S_T = \Phi$$

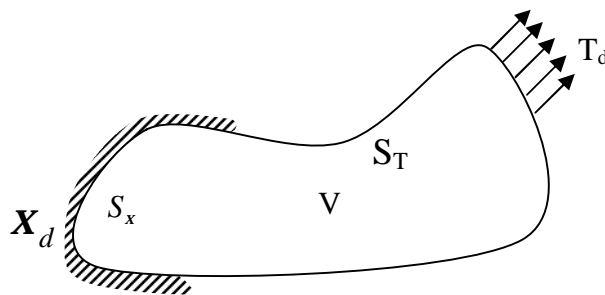


Figure (I.9) partie libre S_T et partie appuyée S_x de la surface S

I-8 loi de comportement de l'élasticité :

Les équations générales introduites jusqu'à présent qui sont (équations d'équilibre pour les contraintes, équations de compatibilité pour les déformations, conditions aux limites) ne suffisent pas pour résoudre un problème particulier de mécanique de milieux continus, il reste encore a caractériser le comportement mécanique du matériau étudié, par des relations physiques entre contraintes et déformations (ou des quantités qui leur sont dérivées).[5]

Nous nous limiterons, à titre d'exemple, d'établir les équations de comportement de l'élasticité « linéaire » en « petites déformations) pour un milieu isotrope, et à partir d'un état initial naturel.

On considère comme solide isotope, un échantillon métallique à grains fins et orientés dans toutes les directions avec la même probabilité. Donc dans un solide isotope, toutes les directions sont propres et après une déformation, les directions propres sont les mêmes pour les contraintes et les déformations.

Supposons qu'à partir d'un état initial naturel ait été imposée une certaine déformation $[e]$. L'isotropie initiale est détruite, mais toutes les grandeurs physiques liées à la déformation ont maintenant même plans de symétrie que les déformations. C'est en particulier le cas de contraintes $[s]$ qui ont les même directions principales que les déformations.

La relation entre les contraintes principales et les déformations principales étant, d'après la loi de Hooke, linéaire et homogène, soit :

$$s_i = I_{ij} e_j \quad \text{avec } i=j=1,2,3. \quad (\text{I.56})$$

A cause de l'isotropie initiale, il faut que les termes diagonaux de cette matrice I_{ij} soit égaux, et également que les termes non diagonaux soient égaux entre eux. Par suite I_{ij} à la forme :

$$[I_{ij}] = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$$

Où a et b sont des coefficients d'élasticité, caractéristique du matériau étudié, Homogènes à des contraintes.

$$\begin{cases} s_1 = ae_1 + b(e_2 + e_3) = (a - b)e_1 + b(e_1 + e_2 + e_3) \\ s_2 = ae_2 + b(e_1 + e_3) = (a - b)e_2 + b(e_1 + e_2 + e_3) \\ s_3 = ae_3 + b(e_1 + e_2) = (a - b)e_3 + b(e_1 + e_2 + e_3) \end{cases} \quad (\text{I.57})$$

On a vu que

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 + e_3 &= q \\ e_1 + e_2 + e_3 &= 3e_m \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned} b &= l \\ a - b &= 2m \end{aligned}$$

l et m sont appelés coefficient d'élasticité de LAME. il vient

$$\begin{aligned} s_1 &= lq + 2me_1 = 3le_m + 2me_1 \\ s_2 &= lq + 2me_2 = 3le_m + 2me_2 \\ s_3 &= lq + 2me_3 = 3le_m + 2me_3 \end{aligned} \quad (\text{I.58})$$

pour parvenir à une relation entre $[s]$ et $[e]$ dans un repère quelconque, il suffit de remarquer que la contrainte moyenne (invariante) est donnée par :

$$\begin{aligned} s_m &= \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3) \\ \sigma_m &= \frac{1}{3}[(3 \times 3\lambda \varepsilon_m) + (3 \times 2\mu \varepsilon_m)] \\ s_m &= (3l + 2m)e_m \end{aligned} \quad (\text{I.59})$$

où e_m est également invariante.

Les valeurs propres des déviateurs sont donc :

$$s_1 = S_1 - S_m$$

$$\begin{aligned}
 &= (2m e_1 + 3l e_m) - (e_m [3l + 2m]) \\
 &= 2m e_1 - 2m e_m \\
 &= 2m (e_1 - e_m) \\
 &= 2m e_1
 \end{aligned}$$

De la même manière on trouve :

$$\begin{cases} s_1 = 2m e_1 \\ s_2 = 2m e_2 \\ s_3 = 2m e_3 \end{cases} \quad (I.60)$$

Puisque $[s]$ et $[e]$ ont même directions propres, on peut les écrire sous forme tensorielle :

$$[s] = 2m [e] \quad (I.61)$$

ou pour les composantes

$$s_{ij} = 2m e_{ij} \quad (I.62)$$

les relations entre s_m et e_m et entre $[s]$ et $[e]$ peuvent alors être combinées :

$$\begin{aligned}
 [s] &= [s] + s_m [d] \\
 &= 2m [e] + (3l + 2m) e_m [d] \\
 &= 2l e_m [d] + 2m \{ [e] + e_m [d] \}
 \end{aligned}$$

$$\text{or : } [e] = [e] + e_m [d]$$

$$\text{donc } [s] = 3l e_m [d] + 2m [e]$$

$$\text{ou bien } [s] = l q [d] + 2m [e]$$

ou pour les composantes :

$$s_{ij} = l q d_{ij} + 2m e_{ij} \quad (I.63)$$

$$\text{soit encore } s_{ij} = l e_{kk} d_{ij} + 2m e_{ij} \quad (I.64)$$

On peut également définir :

- Le module de compressibilité isotherme :

$$K = -v \left(\frac{\partial}{\partial v} p \right)_r$$

pour une pression initiale nulle :

$$K = -\frac{p}{\Delta v} = \frac{s_m}{q} = \frac{s_m}{3e_m} = \frac{s_m}{s_{kk}} = \frac{3l + 2m}{3} \quad (I.65)$$

$$K = l + \frac{2}{3} m$$

- Le coefficient de compressibilité isotherme :

$$\begin{aligned}
 c &= -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial}{\partial p} v \right)_T \\
 c &= \frac{1}{p} \frac{\Delta v}{v} = \frac{3e_m}{s_m} \\
 c &= \frac{3}{3l + 2m}
 \end{aligned}
 \tag{I.66}$$

Des considérations précédentes peuvent être tirées les relations donnant $[e]$ en fonction de $[s]$:

$$\begin{aligned}
 [e] &= [e] + e_m [d] \\
 &= \frac{1}{2m} [s] + \frac{s_m}{3l + 2m} [d] \\
 &= \frac{1}{2m} \{ [s] - s_m [d] \} + \frac{s_m}{3l + 2m} [d] \\
 [e] &= \frac{1}{2m} [s] + \frac{l}{2m(3l + 2m)} s_{kk} [d]
 \end{aligned}
 \tag{I.67}$$

ou pour les composantes :

$$2m e_{ij} = s_{ij} - \frac{l}{3l + 2m} s_{kk} d_{ij}
 \tag{I.68}$$

Il est commode d'introduire d'autres coefficients tels que : E (module de Young) et v (coefficient de Poisson, sans dimension) que l'on peut mesurer directement lors d'une expérience.

La formule (I.68) sera
$$e_{ij} = \frac{1+n}{E} s_{ij} - \frac{n}{E} s_{kk} d_{ij}
 \tag{I.69}$$

I-9 Interprétation physique de E et n

En élasticité , on préfère utiliser le module d'Young E et le coefficient de poisson à la place des coefficients de Lamé l et m proposés en mécanique des milieux continus, car ils ont une interprétation physique dans l'essai de traction. [34]

Supposons que la température du matériau soit la même à l'état initial et à l'état final.

On a donc $T - T_0 = 0$

Dans la zone centrale d'une éprouvette en traction, le tenseur des contraintes est sensiblement uniaxial et uniforme, c'est à dire que :

$$\mathbf{S} = s \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}
 \tag{I.70}$$

Où \mathbf{u} est un vecteur unitaire dans la direction de la traction, et s un scalaire constant dans la zone centrale.

Dans une base orthonormée dont le premier vecteur de base est \mathbf{u} , les composantes de \mathbf{S} sont :

$$[\mathbf{s}] = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La contrainte dans la direction u est $C_u = \overline{\mathbf{s}} \otimes \overline{u} = su$. Elle est colinéaire à u , Il s'agit donc d'une contrainte uniquement normale. La contrainte normale dans la direction u est donc :

$$u \otimes \overline{C_u} = u \otimes \overline{\mathbf{s}} \otimes \overline{u} = s \quad (\text{I.71})$$

Le tenseur des petites déformation est obtenu avec la loi de comportement :

$$\mathbf{e} = \frac{1+n}{E} su \otimes u - \frac{n}{E} s \quad (\text{I.72})$$

Les composantes de \mathbf{e} dans la même base sont donc :

$$[\mathbf{e}] = \begin{bmatrix} \frac{s}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -n \frac{s}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -n \frac{s}{E} \end{bmatrix}$$

L'allongement relatif dans la direction u est : $u \otimes \overline{\mathbf{e}} \otimes \overline{u} = \frac{s}{E}$

L'allongement relatif dans toute direction v orthogonale à u est : $v \otimes \overline{\mathbf{e}} \otimes \overline{v} = -n \frac{s}{E}$, Le module de

Young E est donc le coefficient de proportionnalité entre la contrainte normale dans la direction u et l'allongement relatif dans cette même direction.

$$u \otimes \overline{\mathbf{s}} \otimes \overline{u} = Eu \otimes \overline{\mathbf{e}} \otimes \overline{u} \quad (\text{I.73})$$

Le coefficient de poisson ν traduit le rapport entre l'allongement relatif transversal (direction v) et l'allongement relatif longitudinal (dans la direction u) :

$$\nu \otimes \overline{\mathbf{e}} \otimes \overline{v} = -n u \otimes \overline{\mathbf{e}} \otimes \overline{u}$$

On verra plus loin que le coefficient de poisson n est positif. Si l'allongement relatif dans la direction u est > 0 (extension), alors l'allongement relatif dans la direction v est < 0 (Contraction) ; est inversement.

Dans un essai de traction, $s = F/S$ où F est l'effort de traction (indiqué par un dynamomètre sur la machine) et S est la section de l'éprouvette. On connaît donc facilement la contrainte s . Les allongements relatifs dans les directions u et v sont mesurés avec des extensomètres placés dans les bonnes directions.

I-10 Conservation de la masse :

La masse d'une particule de masse dm ne change pas. On a donc :

$$r_0 dv_0 = r_i dv_i = 1 + Tr e \quad (I.74)$$

Cette équation donne la variation de la masse volumique en fonction du tenseur des petites déformations. Elle est de peu d'intérêt pratique en élasticité, car la variation de la masse volumique d'un solide déformable est une information secondaire.

I-11 Etude de la théorie d'élasticité plane

I-11-1 Etat plan de déformation

On peut dire qu'on est en présence d'un problème de déformation plane lorsqu'on a un corps dont l'une des dimensions est très importante par rapport aux deux autres (Figure(I.9)).[9]

Un tel problème est défini par :

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y) \\ J &= J(x, y) \\ w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (I.75)$$

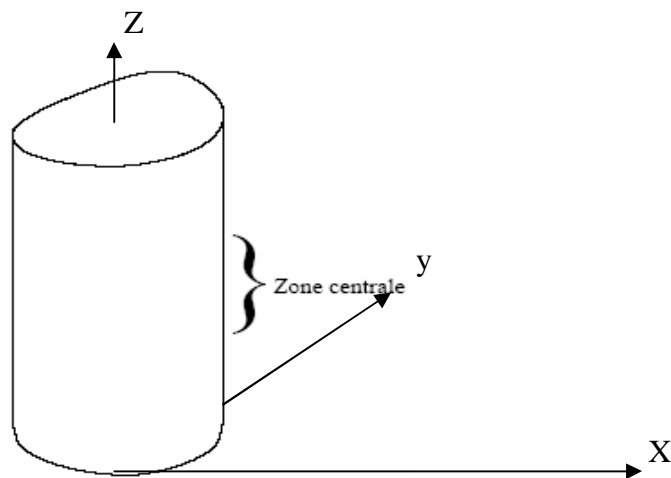


Figure (I.9) cas de l'état plan de déformation

Les relations entre les déformations et les déplacements sont :

$$\left. \begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ e_y &= \frac{\partial J}{\partial y} \\ g_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial J}{\partial x} \\ e_x &= e_{xz} = e_{yz} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (I.76)$$

Les contraintes agissant sur un tel corps sont obtenues à partir des équations (I.69).

$$\left. \begin{aligned} s_x &= 2G.e_x + l(e_x + e_y) \\ s_y &= 2G.e_y + l(e_x + e_y) \\ s_z &= l(e_x + e_y) \\ t_{xy} &= G.g_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (I.77)$$

Et les équations d'équilibre seront :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + x &= 0 \\ \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + y &= 0 \\ \frac{\partial s_x}{\partial z} + z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (I.78)$$

I-11-2 Etat plan de contraintes

Contrairement à la condition de déformation plane, qui stipule que la dimension longitudinale dans la direction z est importante par rapport aux dimensions suivant x et y ; la condition de contrainte plane est caractérisée par le fait que la dimension suivant la direction z est très petite par rapport aux deux autres (figure(I.7)).

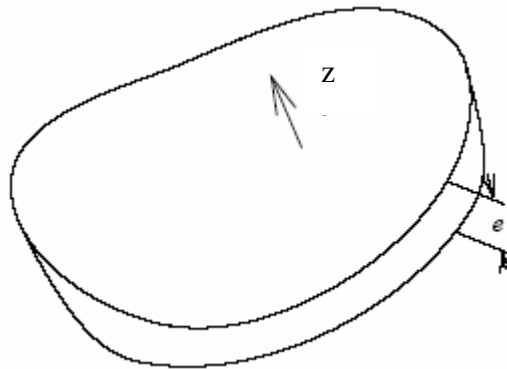


Figure (I.7) cas de l'état plan de contrainte

Dans ce cas les contraintes sont de la forme :

$$\begin{aligned} s_x &= s_x(x, y) \\ s_y &= s_y(x, y) \\ s_z &= s_z(x, y) \\ s_z = t_{xz} = t_{yz} &= 0 \end{aligned}$$

Les équations d'équilibre sont alors :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + x &= 0 \\ \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (I.79)$$

D'autre part les relations entre les déformations et les contraintes seront :

$$\left. \begin{aligned} e_x &= \frac{1}{E}(s_x - n.s_y) \\ e_y &= \frac{1}{E}(s_y - n.s_x) \\ e_x &= -\frac{n}{E}(s_x + s_y) \\ g_{xy} &= \frac{1}{G}g_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (I.80)$$

et

$$\left. \begin{aligned} s_x &= \frac{E}{1-n^2}(e_x + n.e_y) \\ s_y &= \frac{E}{1-n^2}(e_y + n.e_x) \\ t_{xy} &= G.g_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (I.81)$$

Cependant les relations entre les déplacements et les déformations seront :

$$\left. \begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ e_y &= \frac{\partial J}{\partial y} \\ g_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial J}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (I.82)$$

En substituant les équations (I.82) dans les relations (I.81) on obtiendra :

$$\left. \begin{aligned} s_x &= \frac{E}{1-n^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + n \cdot \frac{\partial J}{\partial y} \right) \\ s_y &= \frac{E}{1-n^2} \left(\frac{\partial J}{\partial y} + n \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ t_{xy} &= G \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial J}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (I.83)$$

I-11-2-1 L'énergie de déformation de l'état plan de contrainte

L'expression de l'énergie de déformation dans l'état de contrainte tridimensionnel peut être écrite sous la forme.

$$U = \frac{1}{2} \int_v \{e\}^t \{s\} dv \quad (I.84)$$

où s est le vecteur pour les six composants de contrainte et e contient les six composants correspondants de déformation.

de loi de Hooke l'équation (I.83) l'énergie de déformation peut être exprimée en fonction de contrainte

$$U = \int_v \left[\frac{1}{2E} (s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) - \frac{n}{E} (s_x s_y + s_y s_z + s_z s_x) + \frac{1}{2G} (t_{xy}^2 + t_{yz}^2 + t_{zx}^2) \right] dv \quad (I.85)$$

dans le cas de l'état plan de contrainte on a : $s_z = t_{xz} = t_{yz} = 0$ l'équation (I.85) devient

$$U = \int_v \left[\frac{1}{2E} (s_x^2 + s_y^2) - \frac{n}{E} (s_x s_y) + \frac{1}{2G} (t_{xy}^2) \right] dv \quad (I.86)$$

En utilisant l'équation contrainte-déformation (I.83) et puis employer l'équation déformation - déplacement (I.82) donne

$$U = \frac{E}{2(1-n^2)} \int_A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2n \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1-n}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] t dA \quad (I.87)$$

ce qui peut aisément être employé pour la dérivation de la matrice de rigidité pour le modèle d'élément fini de déplacement de l'état plan de contrainte. comme sera expliqué dans la matrice de rigidité de l'état plan de contrainte est simplement convertible en matrice rigidité de l'état plan de déformation.

II-1 Introduction :

La méthode des éléments finis est une méthode mathématique d'intégration des équations aux dérivées partielles mise sous forme variationnelle. La méthode consiste à rechercher une solution approchée de la solution exacte sous la forme d'un champ $F(M,t)$ défini par morceaux sur des sous domaine de V . Les n sous domaines V_i doivent être tels que

$$\bigcup_{i=1}^n V_i = V \text{ et } \tilde{V}_i \cap \tilde{V}_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

Où \tilde{V}_i désigne l'intérieur de V_i . Autrement dit, les V_i sont une partition de V . [12]

Les champs $f_i(M,t)$, définis sur chaque sous domaines sont des champs choisis parmi une famille arbitraire de champs (généralement polynomiaux). La famille de champs locaux est appelée espace des fonctions d'interpolation de l'élément. La famille de champ globaux $\hat{F}(M,t)$, obtenus par juxtaposition des champs locaux est appelée espace des fonctions d'interpolation du domaine V

Pour résoudre un problème par la méthode des éléments fins, on procède donc par étapes successives :

- 1) On se pose un problème physique sous la forme d'une équation différentielle ou aux dérivés partielles à satisfaire en tout point d'un domaine V , avec des conditions aux limites sur le bord ∂V .
- 2) On construit une formulation intégrale du système différentiel à résoudre et de ses conditions aux limites : c'est la formulation variationnelle du problème.
- 3) On divise V en sous domaines : c'est le maillage, les sous domaines sont appelés mailles
- 4) On choisit la famille de champ locaux, c'est-à-dire à la fois la position des nœuds dans les sous domaine et le polynôme d'interpolation (ou autre fonctions) qui définissent le champ local en fonction des valeurs aux nœud (et éventuellement des dérivées). La maille complétée par ces informations est alors appelée élément.
- 5) On ramène le problème à un problème discret : c'est la discrétisation. En effet, toute solution approchée est complètement déterminée par les valeurs aux nœuds des éléments. Il suffit donc de trouver les valeurs à attribuer aux nœuds pour décrire une solution approchée. Le problème fondamental de la méthode des éléments peut se résumer en deux questions :
 - i) Comment choisir le problème discret dont la solution est (proche) de la solution exacte
 - ii) Quelle signification donner au mot proche
- 6) On résout le problème discret : c'est la résolution
- 7) On peut alors construire la solution approchée à partir des valeurs trouvées aux nœuds.

Le travail de ces différentes étapes est assisté par les logiciels (programme). Il reste que pour maîtriser leur utilisation, il est indispensable de comprendre les fondements de la méthode des éléments finis,

II.2 Principe des puissances virtuelles, formulation faible de l'équilibre

L'équation locale d'équilibre (I.52) peut être exprimée sous une forme intégrale équivalente par dualisation, c'est-à-dire multiplication par un champ j arbitraire et intégration sur V , on obtient le problème équivalent, ainsi la *forme faible* de l'équation locale d'équilibre [28]

$$\int_V s e [j] dV = \int_V r f \cdot j dV + \int_{\partial\Omega} [s \cdot n] j ds \quad (\text{II.1})$$

où $s = 2me + I TreG$ et $e = \frac{1}{2} (grad^x + grad^y x)$

l'équation (II.1) correspond en fait au principe des puissances virtuelles (PPV) appliqué au cas de l'équilibre (les membres de gauche et de droite de l'égalité (II.1) correspondant respectivement aux puissances dans la vitesse virtuelle j des efforts intérieurs – avec changement de signe – et des efforts extérieurs). Bien noter que l'intégrale de surface représente alors la puissance virtuelle de *tous* les efforts de contact subis par la frontière du solide analysé, sans distinction liée aux conditions aux limites.

On peut alors incorporer dans l'identité (II.1) du principe des puissances virtuelles la relation combinant la compatibilité locale (voire l'équation (I.84)) et le comportement élastique:

$$s = [A] e(x) \quad (\text{II.2})$$

Tenant par ailleurs compte de la condition aux limites, le principe des puissances virtuelles

On prend la forme suivante :

$$\int_V e(x) [A] e(j) dV = \int_V r f \cdot j dV + \int_{S_x} [s \cdot n] j ds + \int_{S_r} T_d f ds \quad \forall f \quad (\text{II.3})$$

Cette identité présente notamment les caractéristiques suivantes :

- 1) elle ne fait pas référence aux données cinématiques (I.56),
- 2) elle fait intervenir le vecteur de contrainte $\overset{\mathbf{I}}{T} = s \overset{\mathbf{r}}{n}$ sur S_x , a priori inconnu et représentant les réactions associées à l'imposition de déplacements sur S_x .

Compte tenu de ces remarques, on peut formuler le problème d'équilibre de deux manières à partir des équations (II.3), selon qu'on choisit d'éliminer la réaction ou de faire figurer explicitement la donnée cinématique (I.56).

Première variante : formulation faible obtenue par élimination de la réaction. Pour que la réaction T ne figure pas dans la formulation finale, il suffit de restreindre l'équation (II.3) aux champs

virtuels cinématiquement admissibles à zéro. La donnée cinématique (I.56) vérifiée par $\underline{\xi}$ doit alors être prise en compte dans la définition de l'espace dans lequel $\underline{\xi}$ est cherché. On obtient ainsi la *formulation faible* suivante pour le problème d'équilibre élastique (I.52) et (I.56) :

trouver $\underline{x} \in C(\underline{x}^d)$ tel que

$$\int_V \mathbf{e}(\underline{x})[\mathbf{A}]\mathbf{e}(\underline{j}) dV = \int_V \mathbf{r}\mathbf{f}\cdot\mathbf{j} dV + \int_{S_T} T^d \mathbf{f} dS \quad \forall \mathbf{f} \in C(0) \quad (\text{II.4})$$

Deuxième variante : formulation faible obtenue par ajout de la donnée cinématique. On peut choisir de conserver la réaction T dans la formulation faible finale. L'équation (II.3) est alors complétée par la condition (I.56) écrite sous forme faible à l'aide d'un «vecteur contrainte virtuel» T' pouvant prendre des valeurs arbitraires sur S_x , pour obtenir la formulation faible

trouver $(\underline{x}, \underline{T}) \in CXC'[S_x]$ tel que

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{e}(\underline{x})[\mathbf{A}]\mathbf{e}(\underline{j}) dV - \int_{S_x} \underline{T}\mathbf{f} ds &= \int_V \mathbf{r}\mathbf{f}\cdot\mathbf{j} dV + \int_{S_T} T_d \mathbf{f} dS \quad \forall \mathbf{f} \in C \\ \int_{S_T} \underline{x}T' ds &= \int_{S_T} \underline{x}_d T_d ds \quad \forall T' \in C'[S_x] \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

dans laquelle $C'[S_x]$ est l'ensemble des champs de vecteurs contrainte sur S_x définis par dualité par rapport aux éléments de C, c'est-à-dire tels que les intégrales sur S_x dans (II.5) sont définies pour tout champ \mathbf{f} ou \underline{x} de C.

La méthode consistant à établir une formulation faible par introduction des équations locales de compatibilité et de comportement dans la forme intégrale de l'équation d'équilibre (puissances virtuelles) est très générale. Elle est en particulier applicable en dynamique, comme on le verra respectivement aux chapitres 3 (analyse dynamique des structures élastiques).

II-3 forme variationnelle de la cinématique :

Soit $\mathbf{y}_{ij}(x, y, z)$, on transforme la forme différentielle $\mathbf{e}_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$ et (I.56) en

forme intégrale par l'expression

$$\int_V \left[\mathbf{e}_{ij} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \mathbf{y}_{ij} dV = 0 \quad (\text{II.6})$$

où $\mathbf{y}_{ij}(x, y, z)$ est un champ tensoriel quelconque, mais symétrique ($\mathbf{y}_{ij} = \mathbf{y}_{ji}$), continu et dérivable. En intégrant par partie et il vient

$$\int_V \mathbf{e}_{ij} \mathbf{y}_{ij} dV = \int_V \left(-\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) u_i dV + \int_S (n_j \mathbf{y}_{ij}) u_i dS \quad (\text{II.7})$$

qui est la forme d'intégrale de la cinématique, contenant tant les lois cinématique (I.46) (implicitement contenues dans la dernière intégrale).

II-3-1 Interprétation physique de la forme variationnelle de l'équilibre principe des déplacements virtuels (ou des travaux virtuels) :

Le champ vectoriel y_i doit être continu et dérivable mais, au reste, il peut être quelconque interprétons-le comme un champ de déplacement virtuel du_i . On remarque que, dans le terme gauche de (I.1), apparaissent les déformations virtuelles $d e_{ij}$ [10]

$$d e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial du_i}{\partial x_j} + \frac{\partial du_j}{\partial x_i} \right) \quad (II.8)$$

l'équilibre d'intégrale peut alors s'écrire

$$\int_V s_{ij} d e_{ij} dV = \int_v f_i du_i dV + \int_s t_i du_i ds \quad (II.9)$$

expression qui traduit le principe des déplacements ou travaux virtuels. En effet, le terme de droite

$$d w_{ext} = \int_V f_i du_i dV + \int_s t_i du_i ds \quad (II.10)$$

s'appelle le travail virtuel des forces extérieures par ce qu'il représente le travail des forces $f_i dV$ et $t_i ds$ sur les déplacements fictifs du_i

Le terme de gauche de (II.9)

$$d w_{int} = \int_V s_{ij} d e_{ij} dV \quad (II.11)$$

appelé travail virtuel intérieur, est susceptible d'une interprétation de même nature figure (II.2) sur la facette $dx_2 dx_3$ d'une brique élémentaire, agit la force normale $s_{11} dx_2 dx_3$, dont le déplacement associé est $d e_{11} dx_1$; ces deux termes fournissent le travail élémentaire

$$(s_{11} dx_2 dx_3)(d e_{11} dx_1) = s_{11} d e_{11} dV$$

En procédant de même avec les autres composantes et en intégrant sur le volume entier, on trouve l'expression (II.11). Le travail de l'accroissement $(\partial s_{11} / \partial x_1) dx_1$ donne une contribution négligeable (infiniment petit d'ordre supérieur). *En conclusion, l'égalité suivante $d w_{int} = d w_{ext}$*

Principe des déplacements virtuels ou des travaux virtuels : un solide déformable est en équilibre si le travail extérieur est égal au travail virtuel intérieur pour tout champ de déplacement virtuel compatible.

L'égalité des travaux garantit l'équilibre du solide. Le principe exprime l'équilibre et fournit des équations d'équilibre.

La démonstration ne fait aucunement appel à la nature du matériau ; le principe n'a donc rien à voir avec le principe de conservation de l'énergie ; il s'applique même s'il y a dissipation d'énergie, en plasticité par exemple.

Si, comme c'est ordinairement le cas, le champ virtuel est compatible avec les appuis, alors l'intégrale de surface dans (II.9) devient

$$\int_s \bar{t}_i du_i ds = \int_{S_t} \bar{t}_i du_i ds + \int_{S_d} t_i d\bar{u}_i ds = \int_{S_f} \bar{t}_i du_i ds \quad (\text{II.12})$$

(avec \bar{t}_i et \bar{u} sont des conditions aux limites imposées) par ce que $d\bar{u}_i = 0$ sur S_x en vertu (I.46), ce qui signifie, simplement, que les réactions d'appui ne travaillent pas. Le principe des déplacements virtuels s'écrit donc dans ce cas

$$\int_V \mathbf{s}_{ij} d\mathbf{e}_{ij} dV = \int_V \bar{f}_i du_i dV + \int_{S_f} \bar{t}_i du_i ds \quad (\text{II.13})$$

II-3-2 Interprétation physique de la forme variationnelle cinématique Principe des forces virtuelles (ou des travaux virtuels complémentaires) :

Interprétons cette fois le champ tensoriel \mathbf{s}_{ij} comme un champ de contrainte virtuel $d\mathbf{s}_{ij}$. Remarquons alors que, dans le terme de droite (II.9), apparaissent les quantités $-\partial d\mathbf{s}_{ij} / \partial x_j$ et $n_j d\mathbf{s}_{ij}$ qu'on peut lier, via les équations d'équilibre (I.54) et (I.55), aux forces de volume et tractions de surface virtuelles df_i et dt_i [10]

$$-\frac{\partial d\mathbf{s}_{ij}}{\partial x_j} = df_i \quad n_j d\mathbf{s}_{ij} = dt_i \quad (\text{II.14})$$

Alors la cinématique intégrale (I.12) s'écrit

$$\int_V d\mathbf{s}_{ij} \mathbf{e}_{ij} dV = \int_V df_i u_i dV + \int_{S_f} dt_i u_i ds \quad (\text{II.15})$$

équation qui traduit *le principe des forces virtuelles ou des travaux virtuels complémentaires*.

L'interprétation physique des deux termes est identique à celle faite précédemment avec simple inversion des grandeurs vraies et virtuelles (tableau II.1)

Tableau (II.1) : les grandeurs vraies et virtuelles

Principe	cinématique	statique
Déplacements virtuels	Virtuelle	réelle
Forces virtuelles	réelle	virtuelle

Le premier terme s'appelle travail virtuel complémentaire intérieur dW_{int}^* : le second est le travail virtuel complémentaire des forces extérieures dW_{ext}^* .

L'égalité $dW_{int} = dW_{ext}$ Traduit alors le principe suivant :

Principe des forces virtuelles ou principe des travaux virtuels complémentaires : les déplacements et déformation d'un solide déformable sont compatibles si les travaux virtuels complémentaires extérieurs et intérieurs sont égaux, pour tout champ de contrainte virtuelle en équilibre.

II-4 Discrétisation :

Que le problème à résoudre soit formulé sous forme différentielle ou sous forme intégrale, sa solution exacte est toujours inaccessible. L'objet de cette étude est de montrer comment choisir une solution approchée de fonction construite par les opérations de maillage et de choix d'élément. On rappelle que chaque fonction $F(M)$ de F peut s'écrire : [28]

$$F(M) = \sum_{j=1}^{N_{ddl}} u^{(j)} F^{(j)}(M) \quad (\text{II.16})$$

Et que les fonctions de base $F^{(i)}(M)$ de l'espace F sont des fonctions de forme, ne sont pas polynomiales en général, sauf si l'interpolation géométrique, ils sont nulles partout, sauf dans les éléments qui contiennent le nœud j .

II-4-1 Principe de discrétisation :

On a vu dans le paragraphe de la formulation variationnelle exacte d'un problème peut se mettre sous la forme

- trouver $u(M)$ tel que

$$A(y, u) = B(y) \quad \forall y(M) \text{ défini dans } V$$

Avec les conditions aux limites $C'(u) = 0$

Si on cherche une solution appartenant à l'espace F , on obtient le problème approché suivant :

Trouver $F(M)$ tel que :

$$A(y, F) = B(y) \quad \forall y(M) \text{ défini dans } V \quad (\text{II.17})$$

Avec les conditions aux limites : $C'(F) = 0$

Ce problème n'a en général pas de solution, On va donc remplacer les conditions $\forall y(M)$ par une condition moins contraignante :

On ne cherche à satisfaire l'équation (II.17) que pour certains $y(M)$. [13]

D'autre par, il faut respecter les conditions aux limites $C'(F)=0$ si elles existent. On restreint donc l'espace F aux seules fonctions qui respectent ces conditions. On appelle F_{ad} L'espace des

Chapitre II : Introduction à la théorie des éléments finis

fonctions admissibles, c'est à dire l'espace des fonctions qui satisfont aux conditions aux limites $C'(F) = 0$.

F_{ad} est un sous espace de F . En effet, imposer les conditions aux limites $C'(F) = 0$ revient imposer N_c relations sur les valeurs des $u^{(i)}$. La dimension de l'espace des fonctions admissibles est donc $N_{inc} = N_{ddl} - N_c$.

Pour déterminer une fonction $F(M) \in F_{ad}$ il faut déterminer un N_{inc} -uplet de valeur :

$\{u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(i)}, \dots, u^{(N_{inc})}\}$ si on a choisi correctement N_{inc} fonctions $y^{(i)}(M)$, pour chacune d'elle, l'équation va fournir une équation scalaire :

$$A(y^{(i)}, F) - B(y^{(i)}) = 0 \quad \text{où} \quad F = \sum_{j=1}^{N_{ddl}} u^{(j)} F^{(j)} \quad (\text{II.18})$$

La construction de ce système d'équations s'appelle l'assemblage. Les fonctions $y^{(i)}$ choisies sont souvent appelées fonction teste. Pour trouver une solution approchée, on a donc un système de N_{inc} équation à N_{inc} inconnues $\{u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(i)}, \dots, u^{(N_{inc})}\}$ à résoudre.

-Si $A(y, u)$ est une application linéaire en u , les termes $A(y^{(i)}, F)$ conduisent à un système linéaire en $u^{(i)}$. Cette classe de problèmes est appelée problème linéaire.

Tout le problème réside donc dans le choix judicieux des fonctions $y^{(i)}(M)$:

- Une condition impérative est que choix de $y^{(i)}(M)$ doit être tel que le système d'équations (II.18) soit régulier. En particulier, le choix des $y^{(i)}(M)$ et le choix de l'espace des fonctions d'interpolation $F(M)$ ne sont pas indépendants du choix de la formulation variationnelle: En effet, à chaque transformation d'intégrale sur V , on diminue l'ordre de dérivation de u et on augmente l'ordre de dérivation de Ψ . Il faut donc que les fonctions F et Ψ aient des dérivées d'un ordre suffisant non nulles partout pour que le système soit régulier.

On dispose d'algorithmes efficaces pour la résolution de système linéaires symétriques. On préférera donc un choix de $y^{(i)}(M)$ qui conduit à un système symétrique.

Il existe plusieurs méthodes pour choisir les fonctions $y^{(i)}(M)$. Elles peuvent conduire à des systèmes symétriques ou non, et la précision de la solution est plus ou moins sensible au choix des Ψ . On ne développe ici que la méthode la plus utilisée dans les logiciels d'éléments finis : la méthode de Galerkin.

II-5 Méthode de Galerkin :

On choisit comme fonction $y^{(i)}$ les fonctions de base de l'espace F_{ad} . Ce choix a les conséquences suivant : [12]

Le nombre de fonction $y^{(i)}$ (et donc le nombre d'équations scalaires) est automatiquement égal au nombre d'inconnues N_{inc} . On montre en analyse numérique que le système d'équations (II.18) obtenu pour ce choix de $y^{(i)}$ est nécessairement régulier pour une classe de problèmes appelés problèmes elliptique : dans ce cas $A(y, u)$ et $B(y)$ doivent être linéaires en u et en

$$A(y^{(i)}, F) = A(F^{(i)}, \sum_{j=1}^{N_{adj}} u^{(j)} F^{(j)}) \quad (II.19)$$

Et $A(F^{(i)}, \sum_{j=1}^{N_{adj}} u^{(j)} F^{(j)})$ doit être une forme quadratique définie positive en $F^{(j)}$. Pour les autres problèmes, soit le système d'équations n'est pas linéaire en $u^{(j)}$, soit il est linéaire mais non garanti régulier, et la méthode de Galerkin peut se révéler inadéquate. Le fait de choisir des fonctions appartenant à F_{ad} peut simplifier certaines intégrales de bord. La méthode de Galerkin impose une contrainte sur le choix de la forme variationnelle: les fonctions $j^i(M)$ et les fonctions d'interpolation $F(M)$ appartenant au même espace de fonction, il faut choisir une forme variationnelle dans laquelle les dérivées de fonctions Ψ et u soient d'un ordre tel qu'elles ne s'annulent pas partout.

La recherche de la solution approchée se ramène donc à la résolution du système d'équations :

$$A(F^{(i)}, \sum_{j=1}^{N_{adj}} u^{(j)} F^{(j)}) - B(F^{(i)}) = 0 \quad (II.20)$$

Les $u^{(j)}$ trouvés déterminent la solution approchée de F . Ce système est linéaire et régulier pour les problèmes elliptiques.

II-6 Les éléments et leur espace de fonction d'interpolation :

Les solutions approchées trouvées par la méthode des éléments finis sont une juxtaposition F de champs locaux f_i définis dans chaque maille. Maintenant on montre comment on définit dans les mailles une famille de champs locaux dans laquelle la méthode des éléments finis pourra choisir pour s'approcher au mieux de la solution.

II-6-1 Choix des fonctions de base

Les fonctions de base utilisées par la MEF sont locales autour de points particuliers. Le domaine V est représenté par un ensemble de points (les nœuds). Chaque fonction est associée à un nœud.

II-6-2 Maillage

En fait le domaine est représenté par un nombre finis d'éléments de forme simple. Les nœuds sont les sommets des éléments. Les éléments assurent la couverture du domaine avec un recouvrement maximal de manière à ce que :

Il s'agit là d'une deuxième approximation de la méthode car la couverture du domaine peut être incomplète (figure II.3).[32]

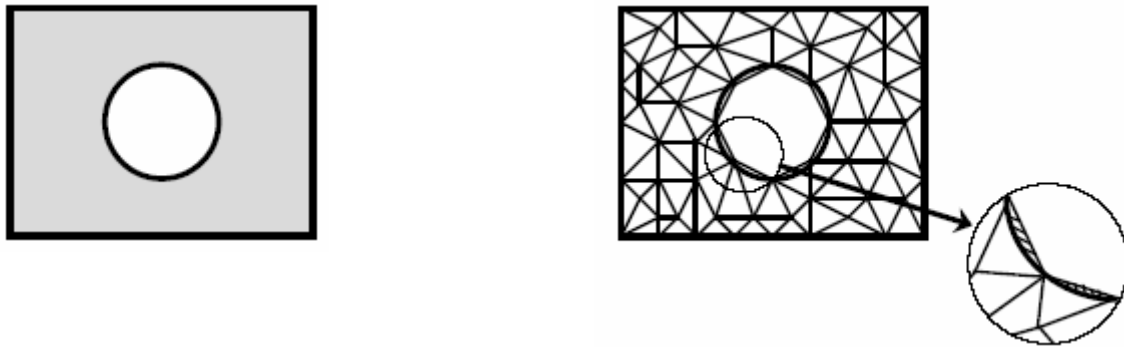


Figure (II.1) Approximation de domaine du couverture

II-6-3 Fonctions

La description analytique la plus simple d'un champ de comportement d'un élément s'effectue à l'aide d'un polynôme, dont les coefficients constituent des variables généralisés c_i . (Même si on utilise des fonctions de déformée pour constituer le champ, on peut souvent exprimer ces fonctions comme des transformations d'un champ polynomial).

Les fonctions de base sont choisies de telle manière que : $j_i = 1$ au nœud i et $j_i = 0$ au nœud $i \neq j$. Et la fonction j_i est non nulle sur les éléments dont le nœud i est un sommet. Ainsi lorsque

$$f_a(M) = c_i j_i(M) \quad i = 1 \dots N$$

c_i est directement la valeur de $f_a(M)$ au nœud i . En pratique les fonctions j_i sont simples (polynomiales de bas degré) et la richesse de l'approximation est donnée par la taille des éléments du maillage (finesse du maillage). La simplicité de forme des éléments permettra l'intégration des fonctions sur le domaine V .

II-7 Application de la M.E.F à un élément rectangulaire en état plan de contrainte et état plan de déformation :

On s'intéresse dans ce paragraphe à un problème de résistance des matériaux ; c'est le cas d'état plan de contrainte que subit une plaque mince élastique. [2]

L'élément fini de l'état plan le plus simple est l'élément rectangulaire schématisé sur la figure (II.1). L'élément a une longueur a , largeur b , et épaisseur constante t , chacun des quatre

coins possède deux degrés de liberté: Les déplacements u et v respectivement dans les directions x et y . Les quatre coins s'appellent habituellement les points nodaux. Ainsi cet élément possède huit forces nodales (quatre paires de F_x et F_y) et huit déplacements nodaux ou degrés de liberté nodaux (quatre paires de u et v). Dans la formulation de la matrice de déplacement pour un élément fini, une étape importante est d'assumer les fonctions d'interpolation de déplacement convenable, habituellement sous la forme polynomiale.

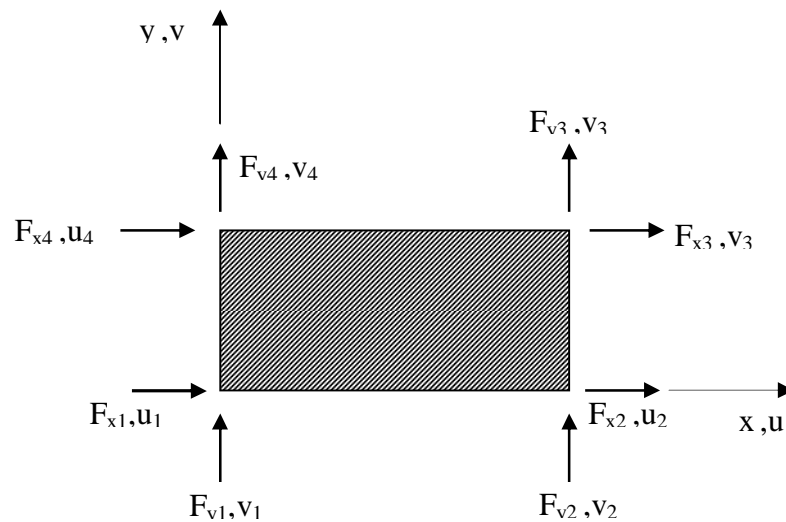


Figure (II.2) : Élément rectangulaire de huit degré de liberté de l'état plan de contrainte ou l'état plan de déformation

II-7-1 Fonctions de déplacement :

Pour représenter la déformation de l'élément rectangulaire à n'importe quel point défini par (x, y) sur la plaque, on choisit une simple fonction polynomiale pour définir les fonctions de déplacement comme suite.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= c_1 + c_2x + c_3y + c_4xy \\ v(x, y) &= c_1 + c_2x + c_3y + c_4xy \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

une des raisons d'assumer une telle fonction de déplacement est que les huit constantes c_i peuvent être déterminées uniquement en employant les huit conditions nodaux de déplacement

$$\begin{aligned} u &= u_1 \text{ et } v = v_1 \text{ au } (0,0) \\ u &= u_2 \text{ et } v = v_2 \text{ au } (a,0) \\ u &= u_3 \text{ et } v = v_3 \text{ au } (a,b) \\ u &= u_4 \text{ et } v = v_4 \text{ au } (0,b) \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

chacune des fonctions de déplacement résulte en tenant compte des hypothèses suivantes :

- 1) Les lignes de frontière de chaque élément demeurent droites après déformation.

- 2) La distribution de déplacement est représenté par une surface de second degré, où pour des valeurs constantes de x (ou y) la variation du déplacement dans la direction de y (ou x) est linéaire.
- 3) La déformation e_x (ou e_y) est indépendant de x (ou y) mais change linéairement avec x (ou y). La déformation de cisaillement e_{xy} change linéairement avec x et y .
- 4) Les contraintes de l'élément peuvent être remplacées par équivalent statiquement ou résultantes de contrainte équivalente du travail qui agissent aux coins de l'élément (forces nodales)

En substituant les huit conditions nodales de point de l'équation(II.22) dans l'équation (II.21),les huit constantes c peuvent être résolue en termes de dimensions d'élément a, b et les huit déplacements nodaux. Alors la substitution des huit constantes précédentes dans les fonctions de déplacement (II.21) et réarrangement des termes donne :

$$\begin{aligned}u(x, y) &= f_1(x, y)u_1 + f_2(x, y)u_2 + f_3(x, y)u_3 + f_4(x, y)u_4 \\v(x, y) &= f_1(x, y)v_1 + f_2(x, y)v_2 + f_3(x, y)v_3 + f_4(x, y)v_4\end{aligned}\tag{II.23}$$

où les quatre fonctions $f(x, y)$ peuvent s'appeler les fonctions de forme et sont obtenues comme :

$$\begin{aligned}f_1(x, y) &= \left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\f_2(x, y) &= \frac{x}{a}\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\f_3(x, y) &= \frac{xy}{ab} \\f_4(x, y) &= \left(1 - \frac{x}{a}\right)\frac{y}{b}\end{aligned}\tag{II.23a}$$

Examen des équations (II.23) et (II.23a) indique que la distribution des déplacements de u et v le long de n'importe quel bord est linéaire et qu'elle dépend seulement des déplacements aux points nodaux des deux coins reliés par la frontière. Ainsi ces fonctions de déplacement assurent que la compatibilité des déplacements sur les frontières des éléments adjacents est satisfaite. (la limite de l'élément -la ligne du rectangle- après déformation reste linéaire, mais l'élément n'est pas toujours rectangulaire figure(II.5)) [30]

Les équations (II.23) fournissent les valeurs de déplacement à un point quelconque (x, y) dans l'élément. Ceci est fait en substituant simplement les huit valeurs nodales de déplacement aux quatre coins et aux coordonnées (x, y) du point d'intérêt dans équation.(II.23).Si les dérivés des fonctions u et v (II.23) respectivement à x et y sont exécutés après l'équation (I.46), les déformation pour n'importe quel point dans l'élément peuvent également être obtenues.

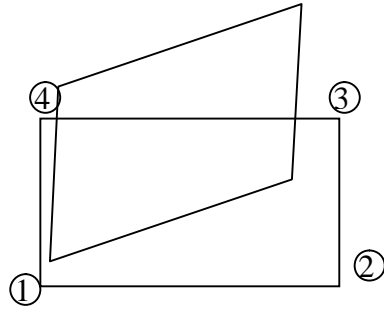


Figure (II.3) Forme du rectangle après la déformation

II-7-2 Relations Déformations-Déplacements :

Dans l'état plan de contrainte, nous avons trois composantes de déformation. Elles peuvent être écrites en termes de dérivées de déplacement sous la forme suivante : [2]

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$e_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$g_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

En substitution les équations de déplacement (II.23) dans les équations déformation-déplacement (I.46) on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a}\left(1-\frac{y}{b}\right) & 0 & \frac{1}{a}\left(1-\frac{y}{b}\right) & 0 & \frac{y}{ab} & 0 & -\frac{y}{ab} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b}\left(1-\frac{x}{a}\right) & 0 & -\frac{x}{ab} & 0 & \frac{x}{ab} & 0 & \frac{1}{b}\left(1-\frac{x}{a}\right) \\ -\frac{1}{b}\left(1-\frac{x}{a}\right) & -\frac{1}{a}\left(1-\frac{y}{b}\right) & -\frac{x}{ab} & \frac{1}{a}\left(1-\frac{y}{b}\right) & \frac{x}{ab} & \frac{y}{ab} & \frac{1}{b}\left(1-\frac{x}{a}\right) & -\frac{y}{ab} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.25})$$

Ou sous la forme matricielle :

$$\{\epsilon\} = [A] \{q\} \quad (\text{II.25a})$$

On est remarqué dans les équations.(II.25) que les déformations e_x sont constantes dans la direction de x et changent linéairement dans la direction de y. Les déformations de cisaillement γ_{xy} changent linéairement avec les coordonnées de x et de y.

II-7-3 Relations Contrainte-Déformation :

Un avantage important de la méthode d'élément fini dans l'élasticité bidimensionnelle est que des structures avec les propriétés matérielles orthotropique ou anisotropique peuvent être considérées. En général, les relations contrainte - déformation sont de la forme:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{S}_x \\ \mathbf{S}_y \\ \mathbf{t}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{g}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.26})$$

pour le cas du matériau isotrope, les relations contrainte-déformation dans l'état plan de contrainte (voire chapitre I) sont de la forme :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{S}_x \\ \mathbf{S}_y \\ \mathbf{t}_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-n^2)} \begin{bmatrix} 1 & n & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-n}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{g}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.26a})$$

Ou, en état plan de déformation :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{S}_x \\ \mathbf{S}_y \\ \mathbf{t}_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-n)(1-2n)} \begin{bmatrix} 1-n & n & 0 \\ n & 1-n & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2n}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{g}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.26b})$$

Si E et v dans l'équation de l'état plan de contrainte (II.26a) sont remplacés par E/(1-v²) et v/(1-v), respectivement, les équations (II.26a) deviennent exactement de la même forme que les équations de l'état plan de déformation (II.26b). Symboliquement, les équations (II.26a) ou (II.26b) peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\{\mathbf{S}\} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{e}\} \quad (\text{II.27})$$

II-7-4 Dérivation de matrice de rigidité par la méthode d'énergie

La matrice de rigidité **élémentaire** peut être dérivée en formulant d'abord l'énergie de déformation pour l'élément et en effectuant ensuite la différentiation partielle de l'énergie de déformation par rapport à chaque degré de liberté suivant le théorème de Castigliano.

L'énergie de déformation dans l'élément fini est de la forme suivante

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_0^t \{\mathbf{e}\}^T \{\mathbf{S}\} dz dy dx \quad (\text{II.28})$$

ou

$$\{\mathbf{e}\} = \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ g_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\mathbf{s}\} = \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.28.a})$$

Transposition des équations déformation- déplacement (II.25a) donne

$$\{\mathbf{e}\}^T = \{\mathbf{q}\}^T [\mathbf{A}]^T \quad (\text{II.29})$$

Des équations (II.27) et (II.25a),

$$\{\mathbf{s}\} = [\mathbf{C}]\{\mathbf{e}\} = [\mathbf{C}][\mathbf{A}]\{\mathbf{q}\} \quad (\text{II.30})$$

Substituant les équations (II.29) et (II.30) dans l'équation (II.28) en supposant que l'épaisseur t est constante, nous avons :

$$U = \frac{t}{2} \{\mathbf{q}\}^T \left[\int_0^b \int_0^a [\mathbf{A}][\mathbf{C}][\mathbf{A}] dx dy \right] \{\mathbf{q}\} \quad (\text{II.31})$$

En appliquant le premier théorème de Castigliano

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (\text{II.32})$$

Par différentiation partielle de l'énergie de déformation par rapport à chacun des huit degrés de liberté de l'élément fini, nous obtenons finalement:

$$\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} \quad (\text{II.32})$$

Où

$$[\mathbf{F}] = [F_{x1} \quad F_{y1} \quad F_{x2} \quad F_{y2} \quad F_{x3} \quad F_{y3} \quad F_{x4} \quad F_{y4}]$$

$$[\mathbf{q}] = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4]$$

et

$$[\mathbf{K}] = t \iint_{\text{aire}} [\mathbf{A}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{A}] dx dy \quad (\text{II.33})$$

L'équation (II.33) est sous une forme populaire appropriée à la dérivation de la matrice de rigidité pour les éléments finis avec des fonctions de déplacement correctement assumées.

Alternativement, les coefficients de rigidité pour un élément en état plan de contrainte peuvent être obtenus en utilisant l'équation de l'énergie de déformation (II.21), les fonctions de déplacement, et le premier théorème de Castigliano,

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \left(\frac{b}{3a} + \frac{1-n}{6} \frac{a}{b} \right) \frac{Et}{1-n^2} \\
 C_2 &= \left(\frac{n}{4} + \frac{1-n}{8} \right) \frac{Et}{1-n^2} \\
 C_3 &= \left(\frac{a}{3b} + \frac{1-n}{6} \frac{b}{a} \right) \frac{Et}{1-n^2} \\
 C_4 &= \left(-\frac{b}{3a} + \frac{1-n}{12} \frac{a}{b} \right) \frac{Et}{1-n^2} \\
 C_5 &= \left(\frac{n}{4} - \frac{1-n}{8} \right) \frac{Et}{1-n^2} \\
 C_6 &= \left(\frac{a}{6b} + \frac{1-n}{6} \frac{b}{a} \right) \frac{Et}{1-n^2} \\
 C_7 &= \left(\frac{b}{6a} + \frac{1-n}{6} \frac{a}{b} \right) \frac{Et}{1-n^2} \\
 C_8 &= \left(-\frac{a}{3b} + \frac{1-n}{12} \frac{b}{a} \right) \frac{Et}{1-n^2}
 \end{aligned} \tag{II.36.a}$$

Pour démontrer comment dériver cette matrice de rigidité , laissant dériver le coefficient de rigidité K_{84} qui est définie comme la valeur de la force Fy_1 produite par un déplacement v_2 d'unité. Ce coefficient peut être obtenu en substituant les huitième et quatrième colonnes dans [A] de l'équation (II.25), et matrice [C] de l'équation. (II.26a) dans l'équation (II.33) pour $[A]^T, [A]$, et $[C]$, respectivement :

$$\begin{aligned}
 K_{84} &= t \int_0^b \int_0^a \left[0 \quad \frac{1}{b} \left(1 - \frac{x}{a} \right) \quad -\frac{y}{ab} \right] \frac{E}{(1-n^2)} \begin{bmatrix} 1 & n & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-n}{2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ -\frac{x}{ab} \\ \frac{1}{a} \left(1 - \frac{y}{b} \right) \end{array} \right\} dx dy \\
 &= -\frac{Et}{1-n^2} \left(\frac{a}{6b} + \frac{1-n}{12} \frac{b}{a} \right)
 \end{aligned} \tag{II.47}$$

alternativement, Eq.(II.35) peut être employé :

$$\begin{aligned}
 K_{84} &= (K_{vv})_{42} \\
 &= \frac{E}{1-n^2} \int_A \left[\frac{\partial f_4}{\partial x} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \right) + \frac{1-n}{2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} \right) \frac{\partial f_4}{\partial y} \right] t dx dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_A \left[\left(\frac{1}{b} - \frac{x}{ab} \right) \frac{-x}{ab} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{-y}{ab} \right) \left(\frac{1}{a} - \frac{y}{b} \right) \right] t \, dx \, dy \\
 &= -\frac{Et}{1-\nu^2} \left(\frac{a}{6b} + \frac{1-\nu}{12} \frac{b}{a} \right)
 \end{aligned} \tag{II.38}$$

Ce qui est identique à celui obtenu en équation (9.37).

Si l'équation (II.26b) au lieu d'équation (II.26a) est employé pour la matrice contrainte-déformation [C] comme contenue en équation (II.33), les équations de rigidité pour la déformation plane peuvent être obtenues. Ainsi les équations(II.36) deviennent valident pour la déformation plane si E et ν sont remplacés par $E/(1-\nu^2)$ et $\nu/(1-\nu)$, respectivement .

II-8 Assemblage dans la méthode de Galerkin :

L'assemblage est l'opération qui consiste à construire le système d'équation à résoudre. Le fait de choisir comme fonction Ψ les fonctions de base de l'espace F_{ad} simplifie beaucoup le calcul des intégrales. L'équation relative à la fonction de base $F^{(i)}$ ne fait intervenir en fait que les intégrales sur les mailles qui contiennent le nœud i. On en déduit une méthode pour construire la matrice [K] du système à résoudre :[12]

$$[K] \begin{bmatrix} u^{(1)} \\ \mathbf{M} \\ u^{(N_{inc})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^{(1)} \\ \mathbf{M} \\ b^{(N_{inc})} \end{bmatrix}$$

pour chaque maille, on calcule les intégrales de la formulation. Pour chaque $F^{(i)}$ dans la maille, on porte le coefficient de $u^{(i)}$ en ligne i colonne j de [K] en l'ajoutant à ce qui s'y trouve déjà, et on porte en ligne i de [b] le résultat des intégrales seconde membre toujours en l'ajoutant à ce qui s'y trouve déjà,

Informatiquement, on améliore encore cette méthode en utilisant les particularités de la matrice [K]:

Si la matrice [K] est symétrique, il suffit de n'en calculer que le triangle supérieur(ou inférieur)

- La matrice [K] est creuse : sur la ligne i n'interviennent que les nœud des mailles contenant le nœud i. on utilise différentes méthodes de stockage pour éviter de remplir la mémoire avec des zéros principalement, on trouve :
 - Le stockage (morse) :on ne stocke que les termes non nuls ainsi que leur place dans [K], c'est à dire la ligne et la colonne.
 - Le stockage (ligne de ciel) : On ne stocke que la partie de ligne de la matrice, depuis la diagonale jusqu'au dernier terme non nul.

- Le stockage (bande): On ne stocke que les diagonales non nulles du triangle supérieur (ou inférieur). Le nombre de diagonales est appelé largeur de bande. Il existe des algorithmes de renumérotation des nœuds pour réduire la largeur de bande ou la longueur de ligne de ciel. Le plus utilisé est l'algorithme de gibbs. Il consiste à renuméroter les nœuds pour que les différences de numéros entre deux nœuds voisins soient aussi petites que possible. Les termes non nuls de [K] sont donc groupés autour de la diagonale principale. Cette disposition améliore très sensiblement le temps de résolution du système linéaire pour certains solveurs.

Ces choix d'option (type de stockage, renumérotation et algorithme de résolution) étant souvent proposées dans les logiciels, il est indispensable de les comprendre pour les choisir à bon escient

II-9 Traitement des charges réparties

Dans la méthode des éléments finis nous avons supposé que les charges agissantes sur la structure étaient ponctuelles. Néanmoins il existe plusieurs cas où les structures soumises à des charges réparties. Pour pouvoir utiliser dans ce cas la technique des éléments finis, on doit remplacer ces charges réparties par des charges ponctuelles équivalentes appliquées aux nœuds. Pour cela il faut que les travaux virtuels des charges réparties et des charges ponctuelles soient égaux.[9]

Deux formes de charges réparties sont possibles :

- Ceux réparties sur le volume
- Et ceux réparties sur la surface.
-

II-9-1 Charge réparties sur un volume

Soit une charge $q(x,y,z)$ répartie sur le volume ayant comme composante x, y, z .

Le travail virtuel de la charge répartie est

$$\begin{aligned}
 Q_{c,r} &= \int_v (du.x + dv.y + dw.z).dv \\
 &= \int_v \left\{ \begin{matrix} du \\ dv \\ dw \end{matrix} \right\}^T q(x, y, z) dv \\
 &= \int_v df \{x, y, z\}^T \{q(x, y, z)\} dv
 \end{aligned} \tag{II.38}$$

or la fonction de déplacement (fonction de forme)

$$\{f(x, y, z)\} = [\phi(x, y, z)] \{C_1\} \tag{II.39}$$

et $\{C_1\} = [A_1]^{-1} \{\delta\}$ pour déterminer la matrice $[A_1]$ et $\{d\}$ voir l'annexe

donc
$$\{f(x, y, z)\} = [\phi(x, y, z)] [A_1]^{-1} \{\delta\} \tag{II.40}$$

$$Q_{C,r} = \{d\delta\}^T [A_1^{-1}]^T \int_v [\Phi(x, y, z)]^T \{q(x, y, z)\} dv$$

(II.41)

le travail virtuel des forces ponctuelles équivalentes $\{F\}$ est :

$$Q_{C,r} = \{dd\}^T \{F\}$$

En égalisant les deux travaux obtenus on aura :

$$\{F\} = [A_1^{-1}]^T \int_v [\Phi(x, y, z)]^T \{q(x, y, z)\} dv \quad (\text{II.42})$$

II-9-2 Charges réparties sur une surface

Dans le cas des forces réparties sur une surface d'un élément tridimensionnel; trois composantes sont possible x,y et z . Si elles sont représentées par un vecteur $q(x,y,z)$ leur travail dû à un déplacement virtuel sera :

$$Q_{C,r} = \int_v (du.x + dv.y + dw.z) ds$$

L'intégration dans ce cas étant prise sur la surface où la force est répartie[9]

$$Q_{C,r} = \int_s \begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix}^T q(x, y, z) ds$$

le travail virtuel des forces ponctuelles équivalentes $\{F\}$ est :

$$Q_{C,r} = \{dd\}^T \{F\}$$

En égalisant les deux travaux obtenus on aura :

$$\{F\} = [A_1^{-1}]^T \int_s [\Phi(x, y, z)]^T \{q(x, y, z)\} ds \quad (\text{II.43})$$

Le vecteur forces généralisées global peut être construit comme un assemblage de vecteurs forces généralisées relatives à chacun des éléments. Ils sont appelés vecteurs forces généralisées élémentaires.

II-10 Influence de la largeur de bande d'une matrice :

La méthode des éléments finis aboutit à la résolution d'importants systèmes d'équations linéaires. La méthode la plus commode est la méthode d'élimination de Gauss. Elle consiste à transformer une matrice carrée en matrice triangulaire qui donne directement les inconnues.[18]

En outre, les matrices de raideur sont très généralement symétriques et comportent de nombreux zéros. Par exemple, sur la figure (II.6), seule la partie hachurée de cette matrice $N \times N$ comporte des éléments non nuls. On note $2B$ la largeur de bande de la matrice, B est la demi-

Chapitre II : Introduction à la théorie des éléments finis

bande de la matrice. La largeur de bande du système final d'équations est fonction des dimensions de la matrice des raideurs de chaque élément et du système de notation des nœuds. S'il est possible de réduire la largeur de la bande, on réduit en même temps le temps de résolution et la place occupée dans la mémoire de l'ordinateur par la matrice générale des raideurs.

Une des méthodes consiste à adopter une subdivision systématique et un système approprié de numérotation des nœuds. Si ces numéros forment la base de la numérotation des déplacements nodaux, la largeur de bande de la matrice générale dépend de la plus grande différence entre deux numéros des nœuds externes pour un seul élément.

Soit D la différence maximale constatée pour tous les éléments de l'assemblage. La demi-largeur de bande B est alors donnée par :

$$B = (D + 1) f$$

avec f nombre de degrés de liberté à chaque nœud.

Cette équation montre que le système de numérotation doit minimaliser D . Elle fait aussi ressortir l'importance d'une variation aussi faible que possible des numéros des nœuds d'élément à élément.

Un exemple est donné figure (II.7).

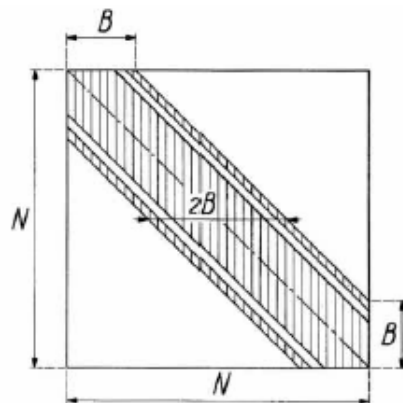


Figure (II.4) largeur de bande d'une matrice

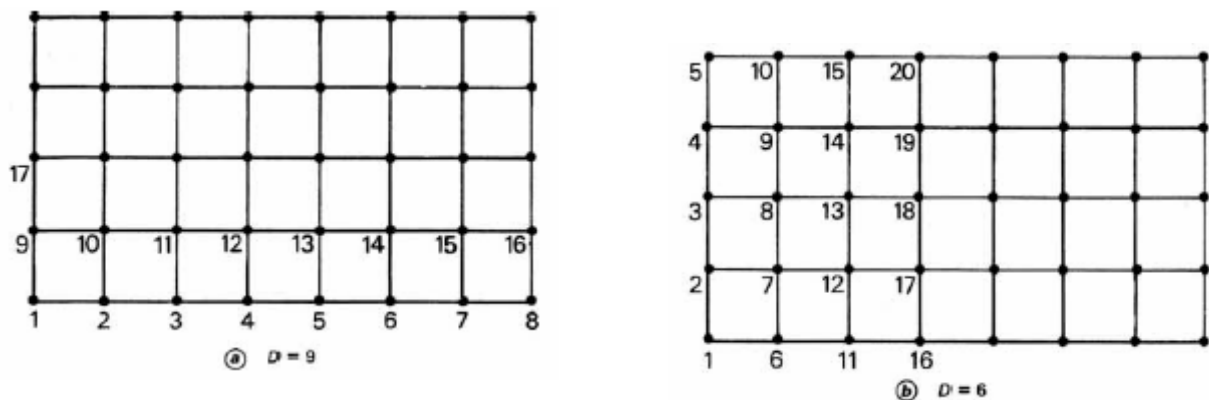


Figure (II.5) Numérotation des nœuds

III-1 Introduction :

Le calcul des modes propres des systèmes continus devenait très vite complexe au-delà du deuxième mode pour les vibrations de poutres, même en se plaçant dans les cas les plus simples, à savoir: matériaux isotropes restant dans le domaine élastique, dimensions transversales constantes, faibles déformations, conditions aux limites restreintes, etc.

La méthode la plus courante pour aller plus en avant dans le domaine des calculs tant en statique qu'en dynamique est la méthode des éléments finis qui permet le calcul de structures (présence ou non de discontinuités) isotropes ou non (matériaux composites) travaillant dans les domaines élastiques, plastiques ou élastoplastiques, pouvant subir de grandes déformations et permet aussi de faire intervenir des interactions fluide-structures, de prendre en considération des effets thermiques, etc.

Cette méthode très générale a permis au calcul dynamique des structures de faire des pas de géant lors de la dernière décennie, tout en étant encore en pleine expansion théorique, technique et commerciale.

Ce paragraphe aborde donc cette méthode sous l'aspect le plus simple de la dynamique des structures, c'est-à-dire limité au domaine élastique, aux matériaux isotropes, aux faibles déformations et en l'absence de tout amortissement.

III-2 Système à un degré de liberté :

L'étude des systèmes à un degré de liberté est une bonne initiation à l'étude des phénomènes élémentaires intervenant en mécanique des vibrations : fréquence de résonance, amortissement, réponse à une excitation. Elle facilite la compréhension du comportement de systèmes complexes possédant un nombre important de degré de liberté.

III-2-1 Oscillation libre :

Les systèmes à un degré de liberté sont illustrés simplement par le système de la figure (III.1) supposé dans un plan vertical. Soit x_1 le déplacement de la masse m à partir de la position d'équilibre. [23]

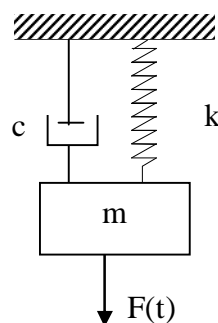


Figure (III.1) système à un degré de liberté

L'équation de son mouvement est

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = F(t) \quad (\text{III.1})$$

En supposant une dépendance en temps de la forme e^{rt} , on peut écrire, l'équation caractéristique associée à cette équation du mouvement :

$$mr^2 + cr + k = 0 \quad (\text{III.2})$$

les solutions de l'équation caractéristique sont :

$$r_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4km}}{2m} \quad (\text{III.3})$$

les expressions de r_1 et r_2 vont être présentées sous une forme différente mettant en évidence des paramètres faciles à mesurer. Définissons en effet w_0 et a tels que :

$$\begin{aligned} w_0^2 &= \frac{k}{m} \\ a &= \frac{c}{c_c} \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

où w est la pulsation naturelle en rad/s et a le facteur d'amortissement visqueux. Le coefficient d'amortissement critique c_c est défini par l'annulation du discriminant de (III.3)

$$\left(\frac{c_c^2}{m} \right) - \frac{4k}{m} = 0 \quad (\text{III.5})$$

d'où
$$c_c = 2\sqrt{km} = 2mw_0 \quad (\text{III.6})$$

alors

$$a = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2mw_0} \quad (\text{III.7})$$

$$c = 2a\sqrt{km} = 2a m w_0 \quad (\text{III.8})$$

En utilisant les relations et s'écrit :

$$r_{1,2} = -aw_0 \pm w_0\sqrt{a^2 - 1} \quad (\text{III.9})$$

Il apparaît clairement que le comportement de système est caractérisé par a et w_0 . La forme de solutions des solutions de l'équation différentielle (III.1) change évidemment suivant la valeur de a . On peut alors ré-écrire l'équation du mouvement sous la forme :

$$x'' + 2w_0ax' + w_0^2x = 0 \quad (\text{III.10})$$

La solution générale de cette équation différentielle linéaire, homogène, à coefficients constants s'écrit :

$$x = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad (\text{III.11})$$

Où A et B sont des constantes arbitraires déterminées d'après les conditions initiales.

3 cas sont observés suivant le signe de $\Delta = c^2 - 4km$

$$1^{\text{er}} \text{ cas : } \Delta > 0, a > 1, r_{1,2} = -aw_0 \pm w_0 \sqrt{a^2 - 1} \quad (\text{III.12})$$

L'oscillateur est dit sur amorti, la solution générale s'écrit :

$$x(t) = c_1 e^{-r_1 t} + c_2 e^{-r_2 t} \quad (\text{III.13})$$

2^{ème} cas : si $\Delta = 0$; $a = 1$, $r_{1,2} = -aw_0 = -w_0$ l'amortissement est critique.

Ce cas ne se rencontre que très rarement dans les systèmes mécaniques. Le mouvement est apériodique avec amortissement critique et la solution s'écrit :

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-aw_0 t} \quad (\text{III.14})$$

3^{ème} cas : Si $\Delta < 0$, $a < 1$

Il s'agit du cas le plus Important en pratique. Devient :

$$r_{1,2} = -aw_0 \pm jw_0 \sqrt{1 - a^2} \quad ; \quad j^2 = -1 \quad (\text{III.15})$$

l'oscillateur est dit sous amorti. C'est le cas de la plupart des oscillateurs mécanique courants.

la solution générale (III.1) s'écrit :

$$x = A_1 e^{(-aw_0 + jw_0 \sqrt{1-a^2})t} + A_2 e^{(-aw_0 - jw_0 \sqrt{1-a^2})t} \quad (\text{III.16})$$

qui peut aussi se mettre sous la forme :

$$x = A_1 e^{-az w_0 t} \sin(w_0 \sqrt{1-a^2} t + j) \quad (\text{III.17})$$

$$x = A_1 e^{-az wt} \sin(wt + j) \quad (\text{III.18})$$

Ce dernier résultat est celui d'un régime pseudo-périodique dont on remarque que la pseudo

pulsation $w_p = w_0 \sqrt{1-a^2}$ diffère de la pulsation naturelle non amortie w_0 par le terme

$\sqrt{1-a^2}$ lui même fonction de l'amortissement a ; $w_p \leq w_0$

On définit la fréquence naturelle f exprimée en Hertz (Hz) et reliée à w par :

$$w_0 = 2\pi f$$

quand à la période

$$T = 1/f$$

quand le système masse ressort est soumis à une force d'excitation, l'équation de mouvement devient :

$$mx''(t) + kx(t) = F(t) \quad (\text{III.19})$$

dans notre chapitre, les équations de mouvements de l'élément plaque (ou poutre, barre,...) sont formulées d'une manière similaire à l'équation (III.19), mais seulement avec plusieurs degrés de libertés. Pour formuler ceci on fait appelle au matrice, l'équation (III.19) devient [30]:

$$[m]\{x''\} + [k]\{x\} = \{F(t)\} \quad (\text{III.20})$$

où [k] : matrice de rigidité

[m] : matrice masse

{x} : vecteur des déplacements aux nœuds

{x''} : vecteur des accélérations aux nœuds

{F(t)} : vecteur des forces aux nœuds

En réalité , dans un système, on n'a pas de ressort, mais la rigidité du système joue un rôle d'un ressort, du mouvement qu'elle définit l'élasticité du système.

III-2-2 Oscillation forcées :

L'existence de frottements même faibles conduit irrémédiablement à l'extinction du mouvement oscillatoire par dissipation d'énergie (interne ou externe). Il est nécessaire, pour entretenir le mouvement, de faire un apport d'énergie externe sous la forme d'une force motrice dite excitatrice. On admettra que le système (résonateur) ne réagit pas sur l'excitateur.

III-2-2-1 Excitation harmonique :

L'équation de mouvement pour un oscillateur harmonique amorti soumis à une force extérieure F(t) s'écrit :

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = F(t) \quad (\text{III.21})$$

le cas le plus simple est celui d'une force harmonique, $F(t) = F \cos(\omega t + \varphi)$.

La solution générale de l'équation du mouvement est alors une combinaison linéaire de la solution générale de l'équation sans second membre (régime des oscillations libre), et d'une solution particulière de l'équation avec second membre. Comme précédemment, on peut re-écrire (III.21) comme suite:

$$x''(t) + 2aw_0x'(t) + w_0^2x(t) = \frac{F(t)}{m} \quad (\text{III.22})$$

et passé en notation complexe : $F(t) = F_0 \cos(\omega t + \varphi)$ soit en notation complexe $\hat{F}(t) = \mathbf{F} e^{j\omega t}$,

$F(t) = \text{Re} \left| \hat{F}(t) \right|$: (les grandeurs en gras représentent des grandeurs complexe)

On considère une solution particulière sous la forme :

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi + f) \quad (\text{III.23})$$

soit en notation complexe $\hat{x}(t) = \mathbf{X} e^{j\omega t}$, $X(t) = \text{Re} \left| \hat{X}(t) \right|$

L'équation s'écrit alors en notation complexe :

$$(-\omega^2 + j2a\omega\omega_0 + \omega_0^2) \mathbf{X} e^{j\omega t} = \frac{\mathbf{F}}{m} e^{j\omega t} \quad (\text{III.24})$$

A partir de cette dernière notation, l'amplitude complexe \mathbf{X} de la solution particulière s'obtient facilement :

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{F} / m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2a\omega_0\omega} \quad (\text{III.25})$$

On peut exprimer le module et la phase du déplacement $x(t)$ comme :

$$\mathbf{X} = \frac{|\mathbf{F}| / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2a\omega_0\omega)^2}} = A \quad (\text{III.26})$$

$$f = \arctan \frac{2a\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (\text{III.27})$$

On peut d'ores et déjà exprimer la fonction de transfert

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\omega) &= \frac{\mathbf{X}}{\mathbf{F}} = \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + j2a\omega\omega_0)} \\ &= \frac{1}{(k - m\omega^2) + jc\omega} \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

Cette fonction de transfert peut être représentée suivant son amplitude et sa phase ou suivant ses parties réelle et imaginaire.

III-2-2-2 Excitation périodique :

Lorsque la force d'excitation est quelconque mais périodique, période T , elle peut s'écrire sous la forme d'une série de Fourier. si la pulsation est $\omega = 2\pi / T$:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} [a_p \cos n\omega t + b_p \sin n\omega t]$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(n\omega t) dt & n = 1, 2, \dots \\
 b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(n\omega t) dt
 \end{aligned}
 \tag{III.29}$$

En régime permanent on calcule la réponse correspondant à chaque harmonique et on construit la réponse du système par superposition.

Considérons par exemple un système masse-ressort, soumis à la force représentée sur figure (II.2)

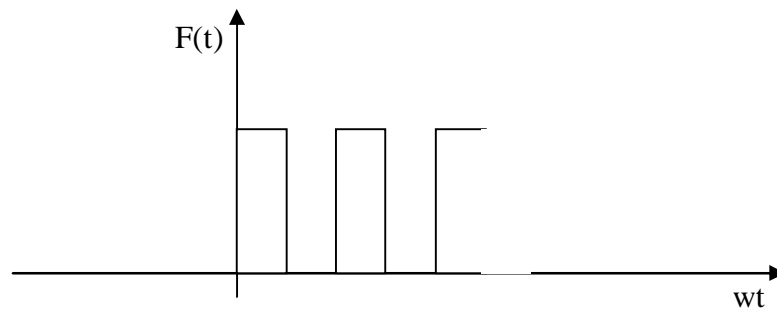


Figure (II.2) Fonction créneau

A partir de l'équations (III.29) on trouve la force $F(t)$ comme suite :

$$F(t) = \frac{F_0}{2} + \frac{2F_0}{p} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin n\omega t}{n}
 \tag{III.30}$$

l'équation de système est alors :

$$m\ddot{x} + kx = \frac{F_0}{2} + \frac{2F_0}{p} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin n\omega t}{n}
 \tag{III.31}$$

la solution de cette équation est obtenue pour chaque terme de $F(t)$ de la même manière que pour le système défini en (III.21).

III-3 Système à n degré de liberté :

On considère un système mécanique possédant n degrés de liberté, et tel que chacun de ses oscillateurs peut vibrer autour d'une position d'équilibre en réagissant avec les oscillateurs voisins. On doit définir un nombre de variables de position égale au nombre de degrés de liberté du système. En général, les oscillations libres de ce système ne sont pas harmoniques. Cependant, dans certaines conditions, les masses peuvent exécuter des oscillations harmoniques à la même fréquence, les masses étant en phase ou en opposition par rapport à l'une d'entre elles prise comme une référence. On dit alors que l'on a affaire à un *mode propre* du système, et la fréquence

d'oscillation est une *fréquence propre*. Si le système vibre suivant un mode propre, on dit qu'on le *normalise* en posant l'amplitude de l'un des oscillateurs égale à l'unité. Il y a autant de modes (et de fréquences) propres du système que de degrés de liberté.[16]

Dans le cas général, le mouvement du système est une combinaison linéaire des mouvements correspondant à chaque mode propre.

III-3-1 Equations de Lagrange :

Si l'on choisit q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) comme coordonnée généralisée, on peut définir pour un système linéaire à n degrés de liberté

— **l'énergie potentielle :**

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} x_i x_j \quad (\text{III.32.a})$$

avec $K_{ij} = K_{ji}$

— **l'énergie cinétique :**

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j \quad (\text{III.32.b})$$

Avec $m_{ij} = m_{ji}$

$$\dot{x}_i = dx_i / dt$$

— **l'énergie dissipative:**

$$E_d = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j \quad (\text{III.32.c})$$

Avec $C_{ij} = C_{ji}$

Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial x_i} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial E_p}{\partial x_i} = f_i \quad (\text{III.33})$$

Les f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) représentent les forces généralisées autres que celles dérivant du potentiel E_p , et telles que le travail global des forces extérieures s'écrit :

$$dw = \sum_{i=1}^n f_i dx_i \quad \text{soit} \quad \frac{dw}{wt} = \sum f_i \dot{x}_i$$

Dans le calcul de $\frac{\partial E_c}{\partial x_i^0}$ et $\frac{\partial E_c}{\partial x_i}$, on considère les x_i^0 et x_i comme des variables absolument

indépendantes entre elles et qui ne sont pas fonction du temps. Par contre, pour le calcul de

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial x_i^0} \right)$ les fonctions x_i^0 et x_i doivent être considérées comme des fonctions du temps

Pour un système conservatif, tel que les forces extérieures soient nulles à l'exception de la pesanteur, on se trouve dans le cas des oscillations libres et les équations de Lagrange deviennent :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial x_i^0} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial x_i} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0 \quad (\text{III.34})$$

Le plus souvent, E_c est une forme quadratique des x_i^0 et :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial x_i^0} \right) + \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0 \quad (\text{III.35})$$

Pour un système libre dissipatif :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial x_i^0} \right) + \frac{\partial E_d}{\partial x_i^0} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0 \quad (\text{III.36})$$

III-3-2 Solution générale :

En appliquant les équations de Lagrange, on obtient n équations linéaires caractérisant l'état vibratoire du système :

$$\sum_{j=1}^n (m_{ij} x_j^{00} + C_{ij} x_j^0 + k_{ij} x) = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{III.37})$$

Pour un système libre conservatif (système libre) ($f_i = 0, \lambda_{ij} = 0$)

$$\sum_{j=1}^n (m_{ij} x_j^{00} + k_{ij} x) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{III.38})$$

On cherche des solutions de la forme

$$x_i = a_i \exp(j\omega t) \quad (\text{III.44})$$

permettant de transformer le système en n équations algébriques linéaires et homogènes par rapport aux a_i :

$$\sum_{j=1}^n (-m_{ij} \omega^2 + k_{ij}) a_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{III.39})$$

Il ne peut exister de solution différente de $a_i = 0$ que si le déterminant est nul, c'est-à-dire :

$$\left| -m_{ij} \omega^2 + K_{ij} \right| = 0 \quad (\text{III.40})$$

C'est une équation de degré n en ω^2 . On l'appelle l'équation caractéristique du système. Elle permet de calculer les différentes pulsations propres, $\omega^{(\alpha)}, \omega^{(\beta)}, \dots, \omega^{(\eta)}$ du système. Les oscillations correspondant à ces différentes pulsations sont les modes propres, encore appelés fondamentaux, du système. Il est possible de se fixer arbitrairement une amplitude a_j^α ; les $(n - 1)$ autres équations permettent d'obtenir les rapports des amplitudes par référence à a_j^α .

$$x_j = a_j^\alpha \sin(\omega_\alpha t - \varphi_\alpha) = \lambda_j^\alpha a_j^\alpha \sin(\omega_\alpha t - \varphi_\alpha) \quad (\text{III.41})$$

La solution générale des équations du mouvement est :

$$x_j = \sum_{\alpha=1}^n I_j^\alpha a_j^\alpha \sin(\omega_\alpha t - \varphi_\alpha) \quad (\text{III.42})$$

qui contient $2n$ constantes d'intégration λ_j^α et a_j^α .

III-3-3 Méthode de la base modale :

Une des méthodes élégantes de résolution d'un système à n degré de liberté est la méthode de la base modale qui consiste à ramener le problème de n degré de libertés couplés, à un ensemble de système à un ddl découplés. [31]

En normalisant l'équation de mouvement par rapport à la masse.

En réalisant une transformation de coordonnées par se placer dans la base modale où les équations du mouvement sont découplées.

Soit le système à n degrés de liberté écrit sous la forme matricielle :

$$M \ddot{x}^o(t) + kx^o(t) = 0 \quad (\text{III.43})$$

dont on veut déterminer la réponse libre pour les conditions initiales :

$x(0)$ vecteur des déplacements initiaux à $t = 0$

$\dot{x}^o(0)$ vecteur des vitesses initiales à $t = 0$

-La première étape consiste à normaliser la matrice masse. En utilisant le changement de variable

$x = M^{-\frac{1}{2}} q$ et en multipliant le système d'équations du mouvement par $M^{-\frac{1}{2}}$:

$$M^{-\frac{1}{2}} M M^{-\frac{1}{2}} \ddot{q}^o(t) + M^{-\frac{1}{2}} K M^{-\frac{1}{2}} q(t) = 0 \quad (\text{III.44})$$

On remarque alors que :

$$M^{-\frac{1}{2}} M M^{-\frac{1}{2}} = I \text{ matrice unitaire / identité}$$

$$M^{-\frac{1}{2}} K M^{-\frac{1}{2}} = \tilde{K}$$

Finalement, le système peut s'écrire :

$$I \ddot{q}^{\text{oo}}(t) + \tilde{K} q(t) = 0 \quad (\text{III.45})$$

les conditions initiales se re-écrivent :

$$q(0) = M^{-\frac{1}{2}} x(0) \quad \text{et} \quad \dot{q}(0) = M^{-\frac{1}{2}} \dot{x}(0)$$

- La deuxième étape est le calcul des valeurs et vecteurs propres. En cherchant une solution de la forme $x(t) = w e^{j\omega t}$ soit $q(t) = v e^{j\omega t}$ le système devient

$$(w^2 I + \tilde{K}) v e^{j\omega t} = 0 \quad (\text{III.46})$$

En posant $\lambda = w^2$ et en dehors de la solution triviale ($v = 0$), on remarque qu'on se ramène à un problème typique de recherche de valeurs propres :

$$\tilde{K} v = \lambda v \quad (\text{III.47})$$

les n valeurs propres sont obtenues en cherchant les solutions λ de l'équation caractéristique :

$$\det(\lambda I + \tilde{K}) = 0 \quad (\text{III.48})$$

les n valeurs propres sont les solutions de n équations associées à chaque valeur propre

$$(\lambda_i I + \tilde{K}) v_i = 0$$

Les vecteurs propres v forment un ensemble de vecteurs linéairement indépendant (orthogonaux, c'est ce qui implique la relation d'orthogonalité entre les vecteurs propres).

Ils ne sont pas, à priori, normés. On note u_i le vecteur s normé de v_i . Les vecteurs u sont donc orthonormaux et on peut définir une matrice orthogonale P telle que :

$$P = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]$$

D'après les propriétés des vecteurs u , on montre que :

$$P^T P = I \quad P^T \tilde{K} P = \text{diag}(\lambda)$$

- La projection dans la base modale constitue la troisième étape :

On opère le dernier changement de variable suivant :

$$q(t) = P r(t)$$

et on multiplie le système d'équations de mouvement par P^T

$$P^T \ddot{P r}^{\text{oo}}(t) + P^T \tilde{K} P r(t) = 0 \quad (\text{III.49})$$

En tenant compte des propriétés énoncées plus haut et on considère $\lambda_i = w_i^2$, cette transformation conduit à :

$$I r^{\text{oo}}(t) + \text{diag}(w_i^2) r(t) = 0 \quad \text{(III.50)}$$

qui représente un système de n équations indépendantes (découplées) :

$$\begin{aligned} r^{\text{oo}}(t) + w_1^2 r(t) &= 0 \\ r^{\text{oo}}(t) + w_1^2 r(t) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad \text{(III.51)}$$

Les conditions initiales s'expriment dans la base modale comme :

$$\begin{aligned} q(t) = P r(t) &\Rightarrow r(t) = P^{-1} q(t) = P^T q(t) \\ r(0) = P^T q(0) &\text{ et } r^{\text{oo}}(0) = P^T q^{\text{oo}}(0) \end{aligned}$$

La solution pour $r_i(t)$ est celle d'un système à un degré de liberté que l'on peut mettre sous la forme :

$$r_i(t) = \frac{\sqrt{w_i^2 r_{i0}^2 + r_{i0}^{\text{oo}}}}{w_i} \sin(w_i t + \arctan \frac{w_i r_{i0}^{\text{oo}}}{r_{i0}}) \quad \text{(III.52)}$$

en déterminant les constantes amplitude et phase à partir des conditions initiales.

- La quatrième étape est la transformation inverse.

En utilisant les équations précédentes, il est possible de calculer le vecteur des déplacements x à partir des solutions dans la base modale r :

$$x = M^{-1/2} q = M^{-1/2} P r = S r$$

La matrice $S = M^{-1/2} P$ est constituée de vecteurs colonnes notés φ :

$$S = [\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n]$$

tel que $\varphi_i = M^{-1/2} u_i$.

φ_i est le vecteur de la déformé modale du mode i , ie le vecteur des déplacements unitaires $(\varphi_i)_j$ de chaque masse j .

les déplacements peuvent s'écrire :

$$x(t) = S r(t) = \sum_{i=1}^n r_i(t) \varphi_i \quad \text{(III.53)}$$

soit pour une masse j :

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^n r_i(t) (\varphi_i)_j = \sum_{i=1}^n A_i \sin(w_i t + \theta_i) (\varphi_i)_j \quad \text{(III.54)}$$

avec :

$$A_i = \frac{\sqrt{w_i^2 r_{i0}^2 + r_{i0}^0}}{w_i} \quad \text{et} \quad \theta_i = \frac{w_i r_{i0}}{r_{i0}^0}$$

III-3-4 Système avec amortissement visqueux :

Les systèmes réels sont amortis mais on ne connaît pas bien, dans la plupart des cas, le modèle d'amortissement. Souvent, le modèle d'amortissement visqueux est utilisé pour des raisons de simplicité. La méthode consiste à considérer un amortissement modal $\alpha_i < 1$ inclus dans les équations découplées de la base modale: [32]

$$r_i^{00} + 2w_i \alpha_i r_i^0 + w_i^2 r_i = 0 \quad (\text{III.55})$$

dont les solutions sont :

$$r_i(t) = A_i e^{-\alpha_i w_i t} \sin(w_{pi} + \theta_i) \quad \text{avec} \quad w_{pi} = w_i \sqrt{1 - \alpha_i^2} \quad (\text{III.56})$$

L'amortissement modal α_i devra être soit déterminé expérimentalement, soit identifié à partir de la matrice des coefficients d'amortissement C qui entre dans le système d'équation du mouvement :

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = 0 \quad (\text{III.57})$$

En règle générale, il n'est pas possible de diagonaliser en même temps les 3 matrices M, C, K par décomposition sur la base modale, des méthodes numériques sont alors utilisées. Cependant, il existe un cas permettant de découpler les n équations : si la matrice C peut être approchée par une combinaison linéaire des matrices masse et raideur :

$$C = gM + bK \quad \text{g et b sont des constantes}$$

Cette forme d'amortissement est appelée amortissement visqueux proportionnel.

Le système d'équations du mouvement s'écrit alors

$$M\ddot{x}(t) + [\gamma M + \beta K] \dot{x}(t) + Kx(t) = 0 \quad (\text{III.58})$$

en utilisant les mêmes changements de variables que dans le cas non amorti: $x = M^{\frac{1}{2}} q$, $q = Pr$ et en multipliant le système par, successivement, $M^{-1/2}$ et P^T , on obtient :

$$\begin{aligned} I\ddot{q}(t) + [\gamma I + \beta \tilde{K}] \dot{q}(t) + \tilde{K}q(t) &= 0 \\ I\ddot{r}(t) + [\gamma I + \beta \text{diag}(w_i^2)] \dot{r}(t) + \text{diag}(w_i^2)r(t) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.59})$$

Cette dernière équation ne comporte que des matrices diagonales, donc correspond à n équations modales découplées :

$$r_i^{\text{oo}} + [\gamma + \beta w_i^2] r_i^{\text{o}} + w_i^2 r_i = 0$$

En rapprochant cette équation de celle utilisant l'amortissement modal α_i (III.55), on obtient l'équivalence $2\alpha_i w_i = \alpha + \beta w_i^2$ d'où

$$\alpha_i = \frac{\alpha}{2w_i} + \frac{\beta w_i}{2}$$

III-3-5 Réponses forcées :

Le système forcé se met sous la forme :

$$Mx^{\text{oo}}(t) + Cx^{\text{o}}(t) + Kx(t) = F(t) \quad \text{(III.60)}$$

où F(t) est le vecteur des forces appliquées à chaque masse :

$$F = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_n]^T$$

En suivant toujours la même démarche : on pose $x = M^{-1/2}q$ et on multiplie le système par $M^{1/2}$:

$$Iq^{\text{oo}}(t) + \tilde{C}q^{\text{o}}(t) + \tilde{K}q(t) = M^{-1/2}F(t) \quad \text{(III.61)}$$

avec $\tilde{C} = M^{-1/2}CM^{-1/2}$, puis en posant $q(t) = Pr(t)$ et en multipliant par R^T :

$$Ir^{\text{oo}}(t) + \text{diag}(2\alpha_i w_i)r^{\text{o}}(t) + \text{diag}(w_i^2)r(t) = P^T M^{-1/2}F(t) \quad \text{(III.62)}$$

où α_i est obtenu de la méthode d'amortissement proportionnel.

$f(t) = P^T M^{-1/2}F(t)$ est le vecteur des forces modales dont les éléments $f_i(t)$ sont des combinaisons linéaires des forces $F_i(t)$. Finalement, l'équation modale découplée est de la forme :

$$r_i^{\text{oo}} + 2\alpha_i w_i r_i^{\text{o}} + w_i^2 r_i = f_i \quad \text{(III.63)}$$

dont la solution est celle du système à 1ddl de déplacement $r_i(t)$:

$$\begin{aligned} r_i(t) &= A_i e^{-\alpha_i w_i t} \sin(w_{pi} t + q_i) + f_i * h_i(t) \\ &= A_i e^{-\alpha_i w_i t} \sin(w_{pi} t + q_i) + \frac{1}{w_{pi}} e^{-\alpha_i w_i t} \int_0^t f_i(t) e^{-\alpha_i w_i t} \sin[w_{pi}(t-t)] dt \end{aligned} \quad \text{(III.64)}$$

Les coefficients A_i et θ_i de la solution générale sont déterminés en utilisant les conditions initiales. En régime stationnaire (harmonique permanent), la solution particulière pour $F_i(t) = F_{i0} \cos(\omega t)$ est :

$$r_i(t) = \frac{f_{i0}}{\sqrt{(w_i^2 - w^2)^2 + (2\alpha_i w_i w)}} \cos(wt - \arctan \frac{2\alpha_i w_i w}{w_i^2 - w^2}) \quad (\text{III.65})$$

avec $f_0 = P^T M^{-1/2} F_0$.

Le vecteur déplacement s'écrit comme précédemment :

$$x(t) = Sr(t) = \sum_{i=1}^n r_i(t) \varphi_i(t) \quad (\text{III.66})$$

III-3 Fréquence et modes propres des structures :

Pour prévoir et comprendre le comportement d'une structure, la connaissance de ses paramètres modaux (extraction modale), à savoir ses fréquences et modes propres ainsi qu'éventuellement ses coefficients modaux d'amortissement, est essentielle. Ces informations modales sont également indispensables en identification des structures lors de la validation d'un modèle numérique par rapport au modèle expérimental équivalent.[25]

Dans de nombreux domaines industriels, l'analyse modale d'une structure ou d'un composant mécanique peut être souvent limitée à l'étude de son régime libre conservatif. Cette justification, justifiée par la faible influence des amortissements sur les pulsations propres, facilite en outre les développements mathématiques de même que les calculs numériques. Ce paragraphe sera consacré essentiellement aux propriétés des paramètres modaux des systèmes non amortis, ainsi qu'aux méthodes numériques afférentes.

III-3-1 Définition des problèmes aux valeurs propres généralisés

En admettant que le système discrétisé soit immobile (coïncidence des référentiels lié et fixe) et en négligeant les amortissements de type visqueux, l'équation matricielle associée à la forme faible discrète, on prend pour un régime libre, la forme suivante

$$M\ddot{x}(t) + Kx(t) = 0 \quad (\text{III.67})$$

Dans laquelle, selon les conventions adoptées, \mathbf{M} et \mathbf{K} désignent les matrices globales (n×n) de masse et de rigidité et \mathbf{q} représente le vecteur des n déplacements nodaux généralisés, dépend du temps t, cette équation matricielle des petites oscillations libres du système. Rappelons que les deux matrices structurelles \mathbf{M} et \mathbf{K} sont symétriques et définies positives, la première même strictement si elle est consistante au sens énergétique.

Les solutions recherchées pour l'équation (III.67) sont régies, à un facteur près, par une même loi temporelle et pour autant que la matrice de rigidité soit admise non singulière, sont de type harmonique

$$x(t) = p a \cos(wt + f) \quad (\text{III.68})$$

Où a, w et j sont des nombres réels dénotant respectivement l'amplitude de référence, la pulsation et la phase de la fonction sinusoïdale, tandis que p est un vecteur de constantes. Physiquement, la relation (III.68) traduit le fait de chaque degré de liberté de la structure suit un mouvement en phase avec tous les autres déplacements généralisés.

Compte tenu de cette expression, l'équation matricielle (III.67) associée au régime libre du système devient

$$(K - w^2 M)P = (K - IM)P = 0 \quad (\text{III.69})$$

où la variable $I \equiv w^2$, introduite par convention d'écriture, est un scalaire réel positif.

Notons que l'ensemble des matrices $K - IM$ est parfois appelé faisceau de la matrices.

Vu la nature des matrices structurelle, ce système homogène d n équation linéaire admet n solution non triviales $P_i (i=1,2,\dots,n)$ telles que soient vérifiées les équations

$$(K - w_i^2 M)P_i = (K - I_i M)P_i = 0 \quad (\text{III.70})$$

où les grandeurs $I_i = w_i^2$ sont les racines des équations algébrique

$$\det(K - w^2 M) = \det(K - IM) = 0 \quad (\text{III.71})$$

En termes de mécanique des structures, le vecteur des amplitudes relatives P_i est le vecteur modal ou la forme propre de rang i de système et w_i et la pulsation propre associée, mesurée en radians par seconde, alors que $x_i = p_i \eta_i \cos(\omega_i t + \phi_i)$ et le mode propre élastique de rang i à amplitude de référence η_i et déphasage ϕ_i . En terme d'algèbre linéaire, les paires $\{I_i, P_i\} (i=1,2,\dots,n)$ sont les valeurs et vecteurs propres correspondants au valeurs propres généralisées (III.67) .

Il est à remarquer que les pulsations propres w_i appelées également fréquences naturelles de vibration, sont étroitement liées aux fréquences propres $v_i = w_i / 2p$, mesurées en Hertz(Hz).

Relevons aussi que la plus basse pulsation propre et le mode propre correspondant sont qualifiés de fondamentaux.

Il est intéressant de noter que l'égalité (III.70), dite équations aux pulsations propres du système oscillant ou équation caractéristique ou séculaire, est de la forme

$$c_n I^n + c_{n-1} I^{n-1} + \dots + c_1 I + c_0 = 0 \quad (\text{III.72})$$

dans laquelle les valeurs $c_j (j=0,1,2,\dots,n)$ sont des constantes réelles, la première et la dernière valant respectivement [25]

$$c_0 = \det(K)$$

$$c_n = \det(M)$$

IL ainsi clair que le traitement du problème aux valeurs propres (III.68) exige une attention particulière si les matrices structurelles sont singulières. De telles situations, que nous analyserons

ultérieurement plus en détail, apparaissent notamment quand le système admet des modes des déplacements de type rigide ou éventuellement lorsque la matrice de masse n'est pas cohérente au sens variationnel .

Si les matrices symétriques M et K sont supposées toutes deux strictement positives, les valeurs propres I_i sont, comme il a été dit précédemment, toutes positives. En effet, en admettant que le vecteur propre de rang i soit complexe

$$P_i = y_i + jz_i \quad (i=1,2,\dots,n ; j = \sqrt{-1})$$

où $y_i = \Re(p_i)$ et $z_i = \Im(p_i)$ sont respectivement les parties réelles et imaginaires du vecteurs P_i , le problème aux valeurs propres (III.70) s'écrit

$$K(y_i + jz_i) = I_i M(y_i + jz_i) \quad (III.73)$$

en prémultipliant cette expression par le complexe conjugué transposé du vecteur P_i , il vient

$$y_i^T K y_i + z_i^T K z_i + j(y_i^T K z_i - z_i^T K y_i) = I_i [y_i^T M y_i + z_i^T M z_i + j(y_i^T M z_i - z_i^T M y_i)] \quad (III.74)$$

conformément aux relations découlant de la symétrie des matrices structurelles de masse et de rigidité

$$\begin{aligned} y_i^T K z_i &= (y_i^T k z_i)^T = z_i^T K y_i \\ y_i^T M z_i &= (y_i^T M z_i)^T = z_i^T M y_i \end{aligned} \quad (III.75)$$

l'expression (III.74)

prend la forme suivante

$$I_i = \frac{y_i^T K y_i + z_i^T K z_i}{y_i^T M y_i + z_i^T M z_i} \quad (III.76)$$

comme chacun des termes de ce quotient est une forme quadratique définie strictement positive, il s'ensuit que toutes les valeurs propres I_i et, par conséquent, les pulsations propres w_i sont bien réelles positives

$$0 < w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_{n-1} \leq w_n$$

Notons pour terminer qu'il est possible de transformer formellement le problème aux valeurs propres généralisé en un problème aux valeurs propres standard, afin d'obtenir une formulation classique pour laquelle de nombreuses méthodes d'extractions mode ont été développées. Une telle transformation peut être obtenue par exemple en prémultipliant l'équation (III.23) par l'inverse M^{-1} de la matrice de masse, supposée bien évidemment non singulière.

$$(M^{-1}K - II)P = (A - II)P = 0 \quad (III.77)$$

où I est une matrice-identité d'ordre n . Le produit non symétrique $A = M^{-1}K$ étant connu sous le nom de matrice de rigidité dynamique ou noyau de système [25].

III-5 Calcul par élément finis

III-5-1 Modélisation des masses par éléments finis

Soit-il est possible de concentrer arbitrairement la masse en des points particuliers en faisant appel au savoir-faire, au bon sens ou l'intuition, soit il est possible de se donner à priori des fonctions de déplacements. Cette dernière idée peut être prolongée en lui ajoutant le concept de discrétisation par élément finis. En effet, c'est bien le champ des déplacements qui est interpolé nodalement, dans un élément finis;[22] il suffit alors que les variables généralisées, ou les déplacements nodaux soit supposée dépendre du temps pour calculer l'énergie cinétique de chaque éléments. Les nœuds où les masses équivalentes sont concentrées sont évidemment les nœuds d'interpolation des éléments finis. La matrice masse obtenue de cette manière est appelée matrice des masses cohérentes ou distribuées dans la mesure où le calcul de l'énergie cinétique est alors cohérent avec celui de l'énergie de déformation.

III-5-3 Application de la M.E.F à Elément rectangulaire de l'état plan de contrainte et l'état plan de déformation :

L'élément finie de l'état plan le plus simple est un élément rectangulaire comme montré dans la figure (III.3). L'élément a une longueur a , la largeur b , et on assume que l'épaisseur constante t , chacun des quatre coins possède deux degrés de liberté: les déplacements u et v dans la direction de x et de y , respectivement les quatre coins s'appellent habituellement les points nodaux. ainsi cet élément possède huit masses nodales (quatre paires de m_x et m_y) et huit déplacements nodaux ou degrés de liberté nodaux (quatre paires de u et de v) .

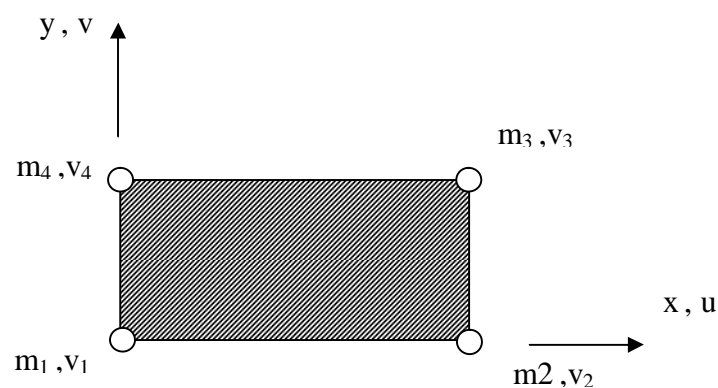


Figure (III.3) : Elément rectangulaire de huit degrés de liberté de l'état plan de contrainte ou l'état plan de déformation

III-5-4 Equation de matrice de masse

La détermination des modes propres d'une structure par la technique des éléments finis nécessite le remplace de la force d'inertie due à la masse de la structure par des forces d'inerties équivalentes appliquées aux nœuds.[9]

La forme fléchie d'une structure sujette à des vibrations en mode propre est donnée par :

$$\{f(x, y, z)\}f(t) = [\Phi(x, y, z)]\{a\}\sin w_n t \quad (\text{III.78})$$

Les forces d'inerties par unité de volume dues aux vibrations de la structure ont les composantes suivantes :

$$X = -r \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}$$

$$Y = -r \frac{\partial^2 v}{\partial^2 t}$$

$$Z = -r \frac{\partial^2 w}{\partial^2 t}$$

où r la masse volumique.

Le travail virtuel $Q_{c,r}$ de ces forces est donnée par (chapitre II), où le vecteur de charge répartie $\{q(x,y,z)\}$ sera :

$$\{q(x, y, z)\} = \begin{Bmatrix} r \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} \\ r \frac{\partial^2 v}{\partial^2 t} \\ r \frac{\partial^2 w}{\partial^2 t} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.79})$$

sachant que :

$$\{f(x, y, z)\}f(t) = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} f(t)$$

et en substituant (III.78) dans (III.79) on obtiendra :

$$\begin{aligned} \{q(x, y, z)\} &= -r \frac{\partial^2}{\partial^2 t} \{[\Phi(x, y, z)]\{a\}\sin w_n t\} \\ &= w_n^2 r [\Phi(x, y, z)]\{a\}\sin w_n t \end{aligned}$$

or $\{a\} = [A_1^{-1}]\{d\}$

Ainsi

$$\{q(x, y, z)\} = w_n^2 r [\Phi(x, y, z)][A_1^{-1}]\{d\}\sin w_n t \quad (\text{III.80})$$

substituant la relation obtenue(III.80) dans (III.78)on obtient :

$$Q_{c,r} = \{dd\}^T [A_1^{-1}]^T \cdot \int_v [\Phi(x, y, z)]^T \cdot w_n^2 r [\Phi(x, y, z)] [A_1^{-1}] \{d\} \sin w_n t dv$$

Le travail virtuel des forces d'inerties équivalentes appliquées aux nœuds est :

$$Q_p = \{dd\}^T \cdot \{N\}$$

En égalisant les deux travaux obtenus on aura :

$$\begin{aligned} \{N\} &= w_n^2 r [A_1^{-1}]^T \left[\int_v [\Phi(x, y, z)]^T \cdot [\Phi(x, y, z)] dv \right] [A_1^{-1}] \{d\} \sin w_n t \\ \{N\} &= w_n^2 [M_e] \{d\} \sin w_n t \end{aligned} \quad (III.81)$$

donc

$$[M_e] = r [A_1^{-1}]^T \left[\int_v [\Phi(x, y, z)]^T \cdot [\Phi(x, y, z)] dv \right] [A_1^{-1}] \quad (III.82)$$

$[M_e]$: représente la matrice masse de l'élément.

Avec la fonction de l'état plant de contrainte est :

$$[\Phi(x, y)] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix}$$

pour $[A_1^{-1}] [A_1^{-1}]^T$ voir annexe on obtient la matrice masse d'un'élément rectangulaire en état plan de contrainte comme suite :

$$[M_e] = r.a.b.h \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} & \frac{1}{18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

IV-1 Introduction :

Ce chapitre est consacré à résolution d'un problème d'élasticité plane par la méthode des éléments finis. Nous allons faire un programme en pascal et comparons les résultats de notre programme avec un autre logiciel (sap2000) .De plus, nous supposons le solide en état plan de contraintes et isotrope.

Un problème d'élasticité est résolu si l'on connaît le vecteur déplacement en tout point du solide et les contrainte dans chaque point de solide. Pour examiner notre programme, on va faire des exemples.

Notre problème est donc défini par un nombre infini de paramètres. Un tel système est dit continu. La méthode des éléments finis remplace le système continu par un modèle discret caractérisé par un nombre fini de paramètres.

On considère une plaque homogène qu'on discrétise en élément rectangulaires égales, (n) élément suivant l'axe x et (m) élément suivant l'axe y, pour le cas statique on calcule les déplacements nodaux (u_i, v_i) , les réactions et les contraintes dans le milieu de chaque élément, alors pour le cas dynamique, on calcule les fréquences propres et les modes propres.

Une comparaison des résultats SAP2000 et des résultats obtenus à partir de programme développé est fournie en forme de tableaux en chaque exemple.

IV-2 Développement du programme de l'état statique

Le processus de calcul dans le programme se fait comme suit :

- Discrétisant la plaque en élément finis on définit le nombre d'éléments qui est dans notre cas est égal à 16.

Définissant les caractéristiques physiques et géométriques de la plaque pour déterminer la matrice de rigidité de chaque élément (voire chapitre II).

-En suite, on fait l'assemblage des éléments pour déterminer la matrice de rigidité de la plaque (en appliquant l'assemblage par la méthode de Galerkin).

- puis en définissant les conditions aux limites.

- par la suite, Résolution du système d'équations, en utilisant la méthode de Gauss-Jordan pour déterminer les déplacements des nœuds et les réactions.

- calculant les contraintes au milieu de chaque élément.

Les structures du programme de l'analyse d'une plaque en cas statique se présentent comme suite :

Une programme (résolution.pas) principal regroupant la grande partie des opérations effectuées allant de la lecture des données dans un fichier texte dont le nom (donne.txt), et on trouve les résultats dans un fichier de Excel dont le nom (résultats.xls).

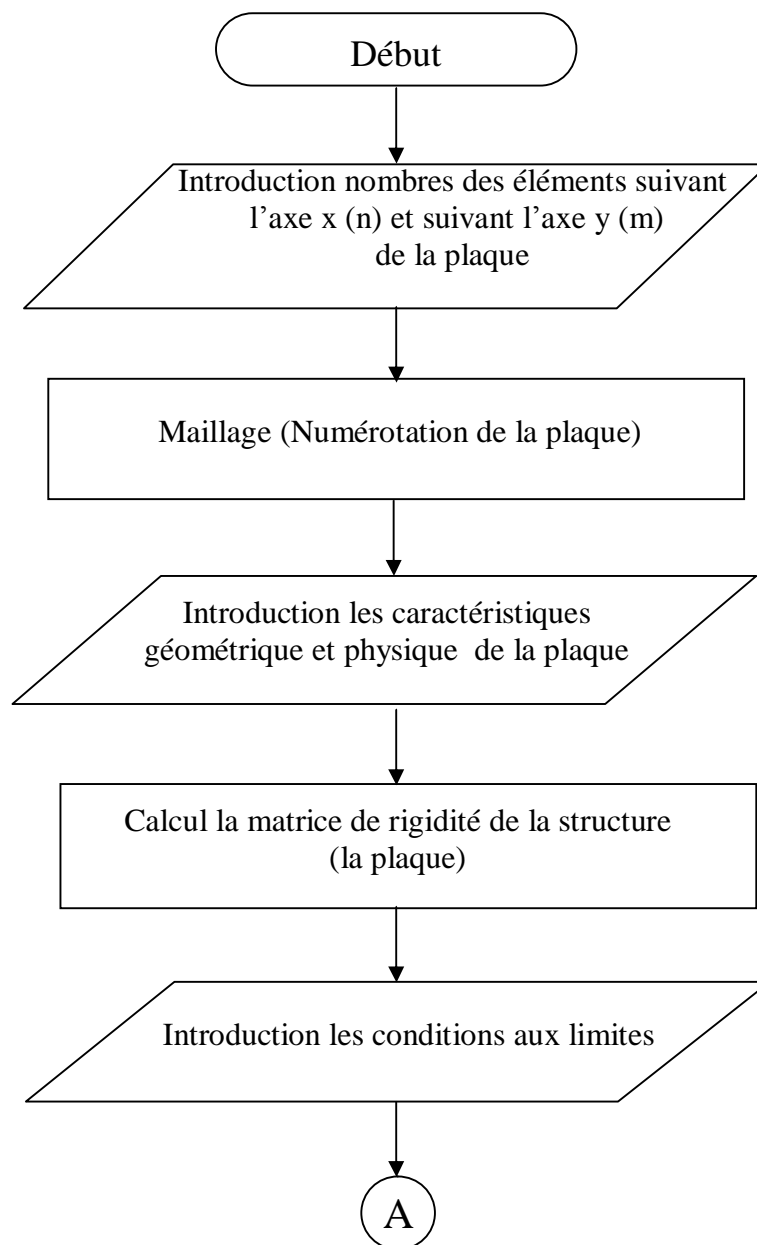
Chapitre IV : Exemples d'applications et comparaison des résultats

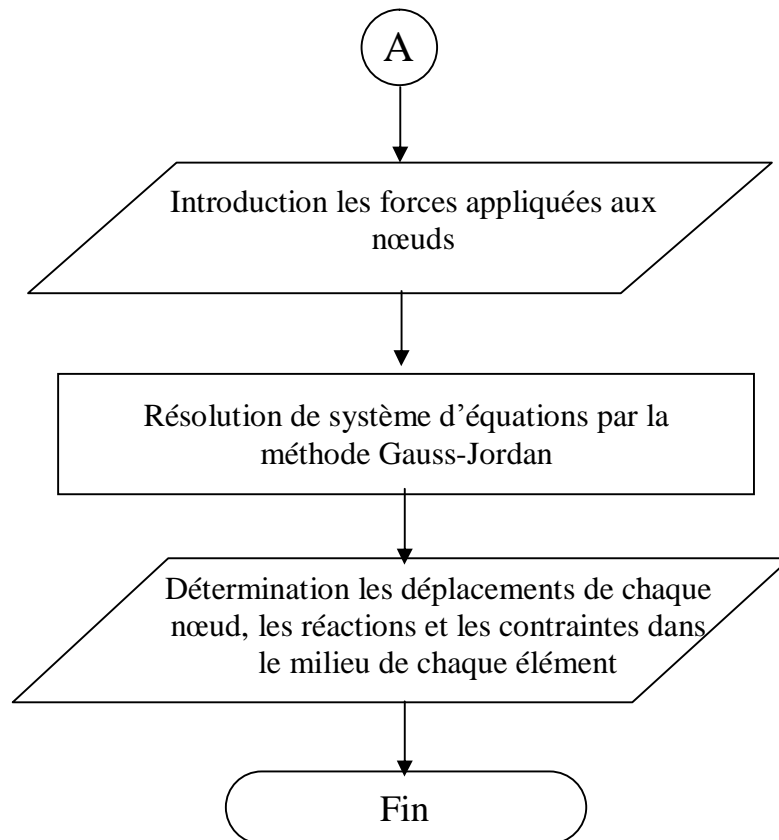
Un fichier d'introduction des données dans lequel l'utilisateur devra mettre les valeurs numériques concernant l'application voulue, et cela dans l'ordre suivant

- 1) La dimension de la plaque suivant l'axe x (a).
- 2) la dimension de la plaque suivant l'axe y (b).
- 3) l'épaisseur de la plaque (t)
- 4) Module de Young (E).
- 5) coefficient de poisson (ν)
- 6) la masse volumique ρ

Un fichier de résultat, où sont détaillés tous les résultats des calculs.

Nous présentons ici l'organigramme de l'étude statique de notre programme développé.





IV-3 Critère d'acceptabilité

La comparaison des résultats de l'exemple de la validation SAP2000 et de vérification avec les résultats d'autre programme est caractérisée dans une des deux manières suivantes. [38]

Exacte : Il n'y a aucune différence entre les résultats SAP2000 et les résultats d'autre programme dans le plus grand de l'exactitude du rendement SAP2000 typique et de l'exactitude du résultat indépendant.

Acceptable : La force, le moment et le déplacement évaluent la différence entre les résultats de SAP2000 et les résultats d'autre programme ne doivent pas dépasser à cinq pour cent (5%). Pour les valeurs de la contrainte, la différence entre les résultats de SAP2000 et les résultats d'autres programmes ne doivent pas dépasser à dix pourcent (10%).

La différence de pourcentage entre les résultats est typiquement calculée en utilisant la formule suivante:

$$\text{Erreur en } \% = 100 \left(\frac{|\text{Résultat de Sap2000} - \text{Résultat de programme développé}|}{\text{Résultat de programme développé}} \right)$$

IV-4 Développement du programme du calcul à l'état dynamique

Pour développer un programme à l'état dynamique on fait même étapes le développement de l'état statique sauf qu'on doit déterminer la matrice masse de chaque élément avec la matrice de rigidité.

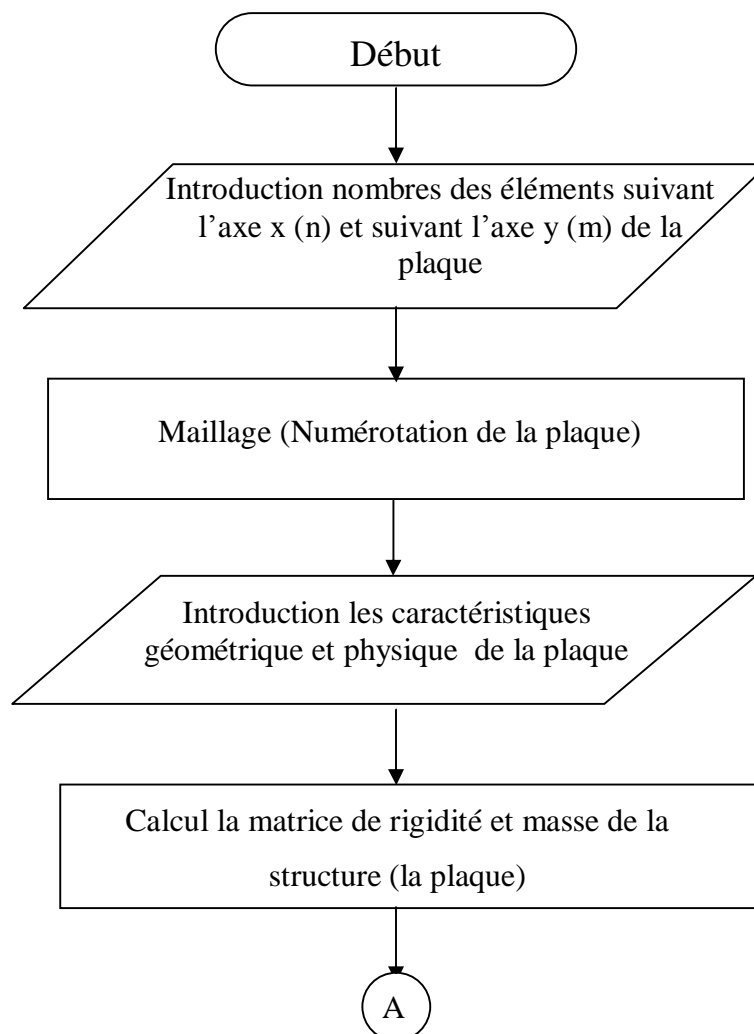
- l'assemblage des éléments pour la détermination de la matrice de rigidité et la matrice masse.
- Après l'introduction des conditions aux limites on détermine les valeurs propres (fréquence propres) par la méthode de Rutishauser.
- détermination des modes propres

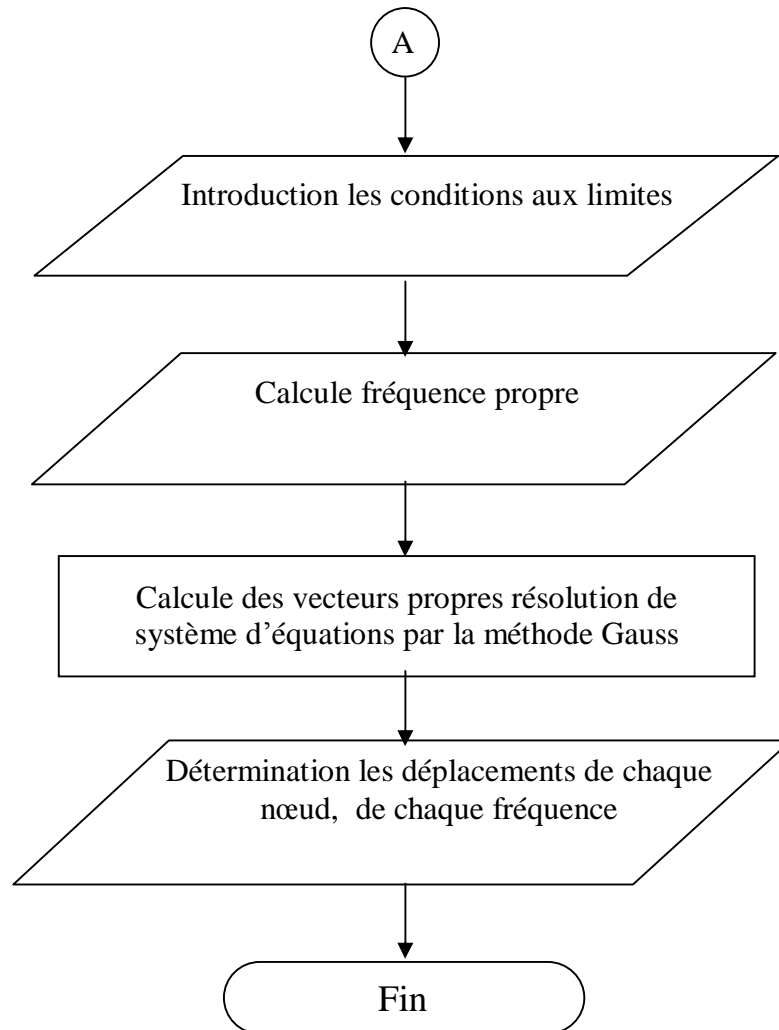
Ceci est illustré sur l'organigramme ci dessous.

Les structures du programme de l'analyse dynamique d'une plaque sont très proche de celles de l'analyse statique.

L'introduction des données se fait de la même façon, par l'intermédiaire d'un fichier d'entrée des données dans lequel en mettant toutes les caractéristiques géométriques et physiques de la plaque, sauf les points 4 et 5 concerne l'analyse statique.

Nous présentons ici l'organigramme de l'étude dynamique de notre programme développé.





IV-5 Modélisation d'une plaque rectangulaire par la méthode des éléments finies

L'étude des exemples concerne une plaque rectangulaire en état plan de contrainte sous différentes conditions aux limites, Pour analyser cette structure (plaque mince) par la méthode des éléments finis en discrétisant cette plaque en des éléments rectangulaires très petits (fig IV.1).

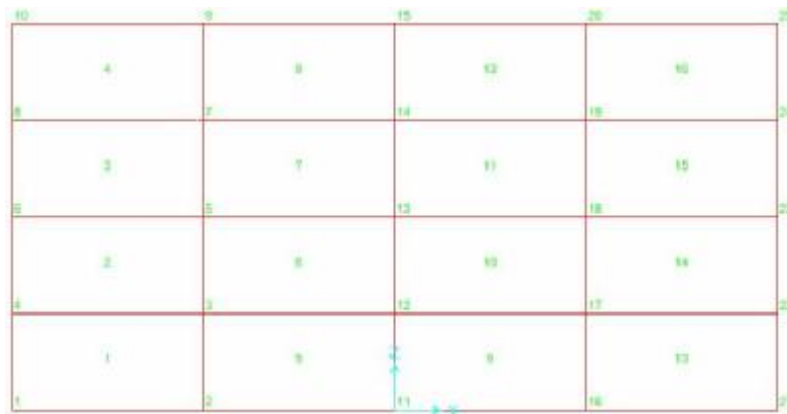


Figure (IV.1) discrétisation de la plaque (Maillage de la plaque par éléments finis) en 16 éléments

IV-6 Analyse statique d'une plaque rectangulaire :

IV-6-1 Exemples d'applications :

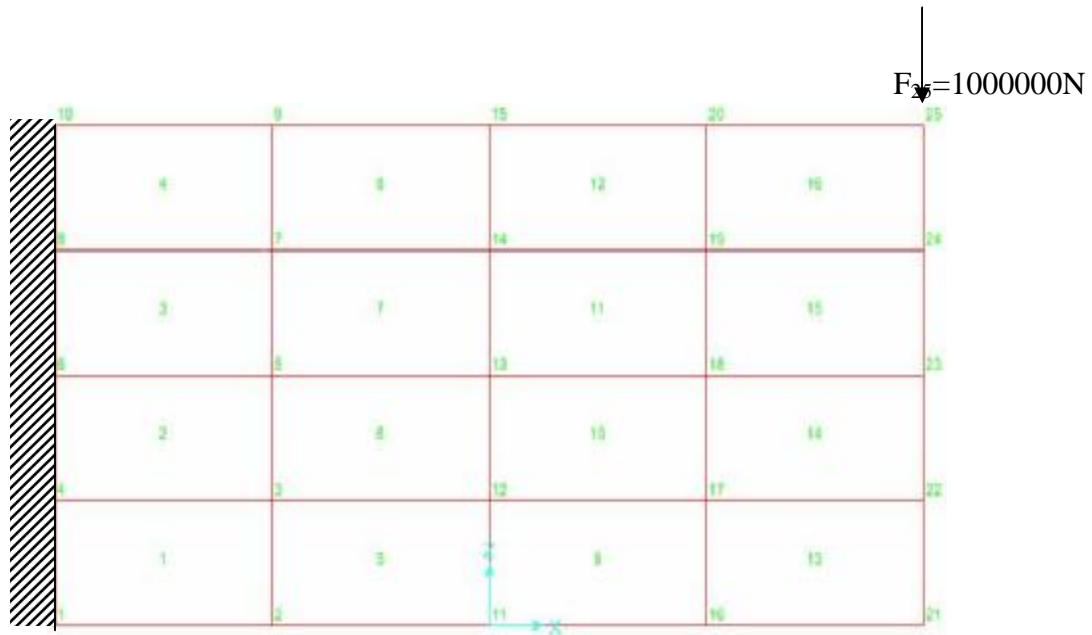
Pour chacun des exemples suivants on présentera les résultats des cas statique suivit de ceux du cas dynamique.

Par économie de place, on ne présente pas à chaque exemple les caractéristiques physiques de la plaque, puisque toujours elle sont les meme .

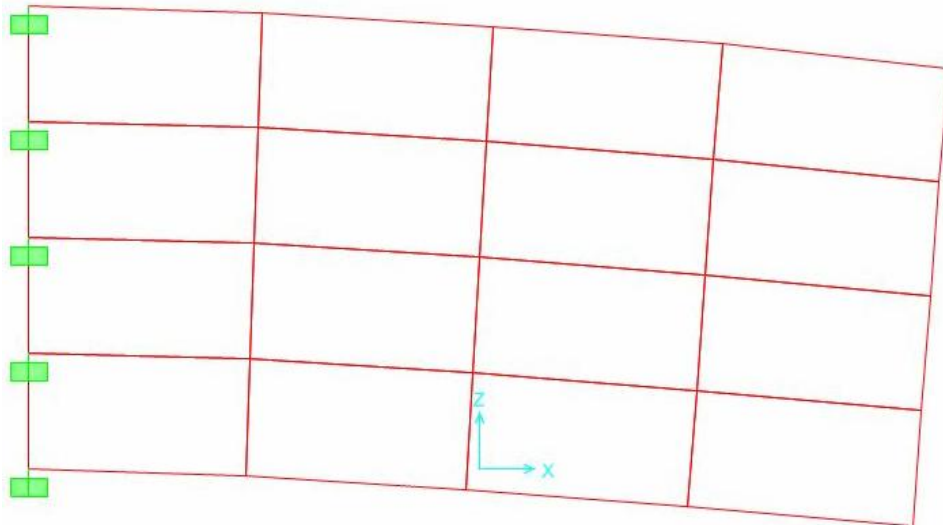
IV-6-1-2 Exemple N°1

On considère une plaque rectangulaire en état plan de contrainte , en acier de module de Young $E= 2.10^{11}$ N/m², module de poisson, masse volumique, de longueur de 2m et de largeur de 1m, encastree sur une coté et libre sur les autres cotés. On applique un charge concentrée au nœud 25 (figure IV.1(a)).

Les tableaux (VI.1) (VI.2) (VI.3) fait une comparaison des déplacements de chaque nœud, les réactions et la contraintes dans le milieu de chaque d'élément de la plaque obtenus par notre programme et le logicielle Sap 2000 .



(a)



(b)

Figure (IV.2) Maillage de la plaque rectangulaire par la méthode des éléments finis à 16 éléments
a) avant la déformation
b) après la déformation

VI-6-1-3 Comparaison des déplacements de l'exemple N°1

noeud	Les déplacement suivant l'axe x (m)			Les déplacement suivant l'axe y (m)		
	programme	Sap2000	Erreur %	programme	Sap2000	Erreur%
1	0	0		0	0	
2	-0.002391	-0.002392	0.041824	-0.002075	-0.002075	0
3	-0.001057	-0.001057	0	-0.001791	-0.001791	0
4	0	0		0	0	
5	0.00000484	0.00000484	0	-0.001712	-0.001713	0.058411
6	0	0		0	0	
7	0.001056	0.001056	0	-0.001796	-0.001796	0
8	0	0		0	0	
9	0.002382	0.002383	0.041982	-0.002075	-0.002075	0
10	0	0		0	0	
11	-0.004077	-0.004078	0.024528	-0.005867	-0.005868	0.017044
12	-0.001948	-0.001949	0.051335	-0.005718	-0.005719	0.017489
13	-0.00000718	-0.00000718	0	-0.00564	-0.005641	0.01773
14	0.001956	0.001956	0	-0.005674	-0.005675	0.017624
15	0.004059	0.004059	0	-0.005837	-0.005838	0.017132
16	-0.005011	-0.005012	0.019956	-0.011036	-0.011038	0.018123
17	-0.002456	-0.002456	0	-0.010977	-0.010979	0.01822
18	-0.000079	-0.000079	0	-0.010954	-0.010956	0.018258
19	0.002382	0.002382	0	-0.010928	-0.010931	0.027452
20	0.005188	0.005189	0.019275	-0.010884	-0.010886	0.018376
21	-0.005261	-0.005262	0.019008	-0.016543	-0.016546	0.018135
22	-0.002593	-0.002594	0.038565	-0.01657	-0.016573	0.018105
23	-0.00004	-0.00004	0	-0.016752	-0.016755	0.017908
24	0.002634	0.002634	0	-0.017192	-0.017195	0.01745
25	0.005858	0.005859	0.017071	-0.017903	-0.017907	0.022343

Tableau (IV.1) comparaison des des déplacements des noeuds

IV-6-1-4 Comparaison des réactions de l'exemple N°1

noeud	Les réactions suivant l'axe x (en N)			Les réactions suivant l'axe y (en N)		
	programme	Sap2000	Erreur %	programme	Sap2000	Erreur%
1	1423788.10	1423788.1	0	484604.79	484604.79	0
4	1151763.45	1151763.45	0	-3443.3	-3443.3	0
6	797.97	797.97	0	32894.12	32894.12	0
8	-1152038.69	-1152038.69	0	-2557.05	-2557.05	0
10	-1424310.83	-1424310.83	0	488501.44	488501.44	0

Tableau (IV.2) comparaison des des réactions

IV-6-1-5 Comparaison des contraintes de l'exemple N°1

élément	Les contraintes de programme développées en N/m ²		Les le logicielle Sap2000 en N/m ²	La contrainte moyenne S_m
1	s_x	-720328038.6	-720328039	-411474854.8
	s_y	-102621670.6	-102621670.6	
	t_{xy}	-92033193.47	-92033193.66	
2	s_x	-220802614.6	-220802614.8	-127816529.3
	s_y	-34830443.86	-34830443.86	
	t_{xy}	-106177188.4	-106177188.6	
3	s_x	222219338	222219338.2	127795068.3
	s_y	33370798.32	33370798.32	
	t_{xy}	-108091556	-108091556.1	
4	s_x	718911315.2	718911315.5	411510727.9
	s_y	104110140.2	104110140.3	
	t_{xy}	-93698061.76	-93698061.95	
5	s_x	-509338697.5	-509338697.8	-244413927
	s_y	20510843.9	20510843.8	
	t_{xy}	-60954818.32	-60954818.46	
6	s_x	-177980816.3	-177980816.5	-84418271.95
	s_y	9144272.541	9144272.548	
	t_{xy}	-142211118.6	-142211118.6	
7	s_x	179547198.9	179547199.1	93282331.36
	s_y	7017463.551	7017463.653	
	t_{xy}	-136701170.9	-136701171	
8	s_x	507772315	507772315	241682253
	s_y	-24407809.02	-24407808.93	
	t_{xy}	-60132891.94	-60132891.93	
9	s_x	-289213756.3	-289213756.3	-146276478.8
	s_y	-3339201.483	-3339201.438	
	t_{xy}	-81439823.72	-81439823.63	
10	s_x	-113910484.1	-113910484.1	-53934678.72
	s_y	6041126.585	6041126.628	
	t_{xy}	-148948104.9	-148948105	
11	s_x	76854625.54	76854625.6	48291472.26
	s_y	19728318.86	19728318.92	
	t_{xy}	-132536438.9	-132536439	
12	s_x	326269614.8	326269614.9	188393099.6
	s_y	50516584.42	50516584.34	
	t_{xy}	-37075632.28	-37075632.46	
13	s_x	-80909286.5	-80909286.75	-46190107.73

Chapitre IV : Exemples d'applications et comparaison des résultats

	s_y	-11470928.91	-11470928.71	
	t_{xy}	-50329784.05	-50329783.98	
14	s_x	-42827302.4	-42827302.36	-59707276.87
	s_y	-76587251.52	-76587251.38	
	t_{xy}	-117773898.4	-117773898.5	
15	s_x	9193182.165	9193182.11	-76867259.94
	s_y	-162927702	-162927702	
	t_{xy}	-137940738.1	-137940738	
16	s_x	114543406.7	114543406.7	-58987610.07
	s_y	-232518626.9	-232518626.8	
	t_{xy}	-93955579.37	-93955579.42	

Tableau (IV.3) comparaison des contraintes dans le milieu d'élément
(en N/m²)

IV-6-1-2 Exemple N°2

On considère même plaque, encadrée sur un côté et libre sur les autres côtés mais cette fois soumise à une charge distribuée linéairement variable figure (IV.3) $P(x) = -p_0 \left(\frac{x}{a} \right)$ avec

$P_0 = 10000000 \text{ N}$. La charge de travail-équivalent pour une charge distribuée linéairement variable $P(x) = -p_0 \left(\frac{x}{a} \right)$ comme suite:

- $F_{y9} = -125000 \text{ N}$
- $F_{y10} = -15000 \text{ N}$
- $F_{y15} = -187500 \text{ N}$
- $F_y = -250000 \text{ N}$
- $F_{y25} = -385000 \text{ N}$

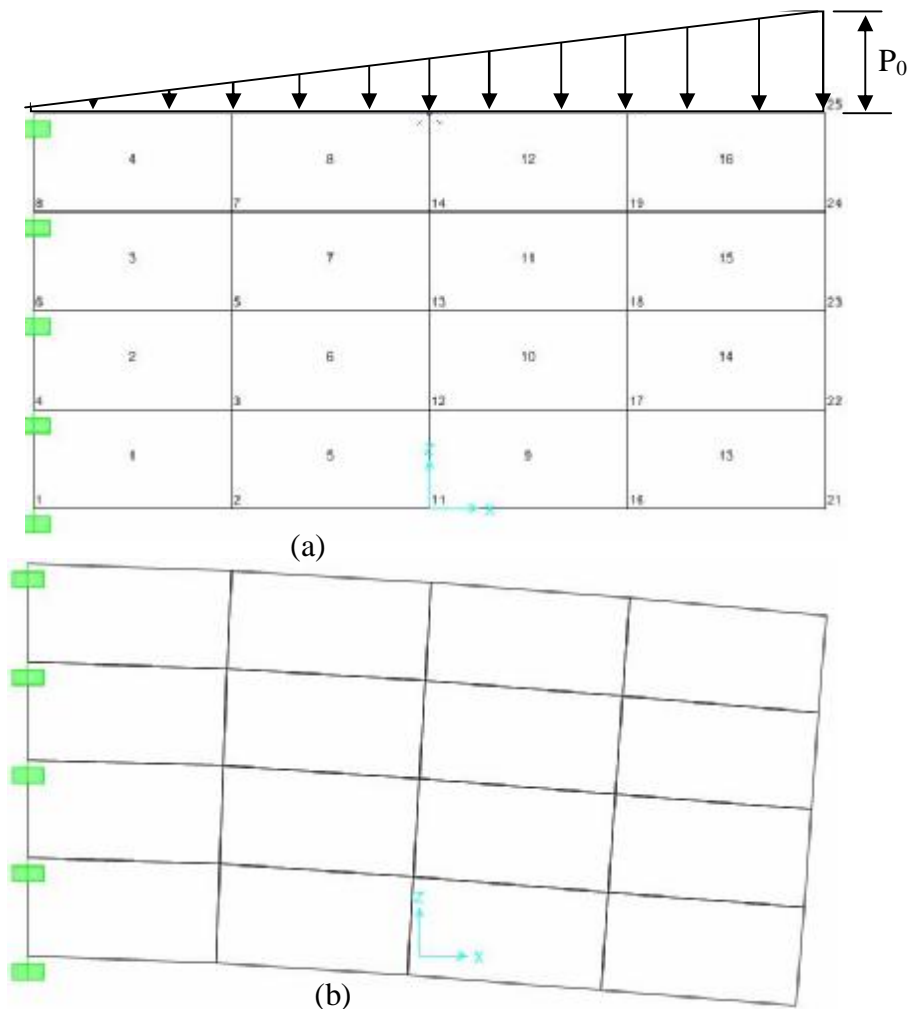


Figure (IV.3) Maillage de la plaque rectangulaire par la méthode des éléments finis à 16 éléments
 c) avant la déformation
 d) après la déformation

IV-6-1-2-1 Comparaison des déplacements de l'exemple N°2

noeud	Les déplacement suivant l'axe x (u)			Les déplacement suivant l'axe y (v)		
	programme	Sap2000	Erreur %	programme	Sap2000	Erreur %
	0	0		0	0	
2	-0.001589	-0.001589	0	-0.001541	-0.001542	0.064893
3	-0.000679	-0.000679	0	-0.001366	-0.001366	0
4	0	0		0	0	
5	0.000002	0.000002049	2.45	-0.001328	-0.001329	0.075301
6	0	0		0	0	
7	0.000685	0.000685	0	-0.001396	-0.001396	0
8	0	0		0	0	
9	0.00161	0.001611	0.062112	-0.001603	-0.001603	0
10	0	0		0	0	
11	-0.002542	-0.002542	0	-0.004069	-0.00407	0.024576
12	-0.001198	-0.001198	0	-0.003998	-0.003999	0.025013
13	0.000011	0.000011	0	-0.003977	-0.003978	0.025145
14	0.001231	0.001231	0	-0.004035	-0.004036	0.024783
15	0.00258	0.002581	0.03876	-0.004156	-0.004157	0.024062
16	-0.002986	-0.002987	0.03349	-0.007235	-0.007237	0.027643
17	-0.00144	-0.001441	0.069444	-0.007214	-0.007216	0.027724
18	0.000011	0.000011	0	-0.007227	-0.007228	0.013837
19	0.001486	0.001487	0.067295	-0.007265	-0.007267	0.027529
20	0.003104	0.003104	0	-0.007324	-0.007326	0.027307
21	-0.003087	-0.003087	0	-0.010487	-0.010489	0.019071
22	-0.001498	-0.001498	0	-0.010497	-0.010499	0.019053
23	0.000041	0.000041	0	-0.010563	-0.010565	0.018934
24	0.001613	0.001614	0.061996	-0.010723	-0.010725	0.018651
25	0.003346	0.003347	0.029886	-0.010967	-0.01097	0.027355

Tableau (IV.4) comparaison les déplacements des nœuds

IV-6-1-2-2 Comparaison des réactions de l'exemple N°2

noeud	Les réactions suivant l'axe x (u)			Les réac suivant l'axe y (v)		
	programme	Sap2000	Erreur %	programme	Sap2000	Erreur %
1	1003398.42	1003398.42	0	355784.65	355784.65	0
4	770643.77	770643.77	0	66715.31	66715.31	0
6	7802.51	7802.51	0	107852.66	107852.66	0
8	-761130.01	-761130.02	1.31E-06	73343.29	73343.29	0
10	-1020714.68	-1020714.68	0	343804.08	343804.08	0

Tableau (IV.5) comparaison des réactions

IV--6-1-2-3 Comparaison des contraintes de l'exemple N°2

élément	Les contraintes de programme développées		Les le logicielle Sap2000	
1	S_x	-475360822.5	-475360823	-273946112
	S_y	-72531401.25	-72531401	
	t_{xy}	-83734466.75	-83734466.7	
2	S_x	-143861521.1	-143861521	-85942973.3
	S_y	-28024425.67	-28024425.5	
	t_{xy}	-102424857.5	-102424857.4	
3	S_x	142040519.8	142040519.8	78742582.47
	S_y	15444645.1	15444645.11	
	t_{xy}	-104497189.9	-104497189.9	
4	S_x	477181823.8	477181824	268778012.8
	S_y	60374201.61	60374201.7	
	t_{xy}	-88343485.69	-88343485.67	
5	S_x	-290944778.4	-290944779	-139825246
	S_y	11294285.9	11294285.99	
	t_{xy}	-50214403.47	-50214403.44	
6	S_x	-104193248.6	-104193249	-55985514.9
	S_y	-7777781.16	-7777781.13	
	t_{xy}	-115325819.2	-115325819.3	
7	S_x	105286730.8	105286730.9	43188360.25
	S_y	-18910010.42	-18910010.4	
	t_{xy}	-114101679.3	-114101679.4	
8	S_x	289851296.2	289851296.3	122825306.1
	S_y	-44200684.3	-44200684.1	
	t_{xy}	-49358097.78	-49358097.7	
9	S_x	-138692897	-138692897	-71663189
	S_y	-4633480.68	-4633480.79	
	t_{xy}	-46368163.51	-46368163.48	
10	S_x	-52165081.98	-52165082	-32252675.8
	S_y	-12340269.69	-12340269.6	
	t_{xy}	-88036617.23	-88036617.5	
11	S_x	43443259.14	43443259.17	8881866.733
	S_y	-25679525.8	-25679525.7	
	t_{xy}	-83922591.92	-83922592	
12	S_x	147414719.9	147414720	59797670.08

Chapitre IV : Exemples d'applications et comparaison des résultats

	s_y	-27819379.8	-27819379.8	
	t_{xy}	-35672627.2	-35672627.37	
13	s_x	-33150830.23	-33150830.3	-19218582.5
	s_y	-5286334.74	-5286334.74	
	t_{xy}	-20362650.95	-20362650.95	
14	s_x	-16354477.33	-16354477.3	-26355997.2
	s_y	-36357517.11	-36357517.1	
	t_{xy}	-49021144.09	-49021144.03	
15	s_x	8325288.8	8325288.805	-34300172.9
	s_y	-76925634.63	-76925634.7	
	t_{xy}	-53847478.68	-53847478.83	
16	s_x	41180018.77	41180018.79	-33956651.5
	s_y	-109093321.8	-109093322	
	t_{xy}	-30768726.22	-30768726.38	

Tableau (IV.6) comparaison des contraintes dans le milieu d'élément en N/m^2

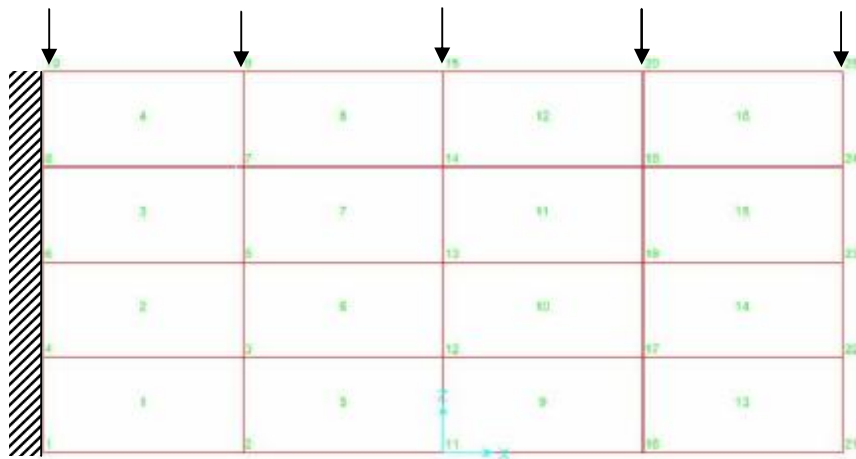
IV-6-1-3 Exemple N°3

On considère meme plaque, encastrée sur une coté et libre sur les autres cotés mais cette fois soumise à une charge uniformément réparté figure (IV.2) $P(x) = -p_0\left(\frac{x}{a}\right)$ avec $P_0 = 10000000 N$:

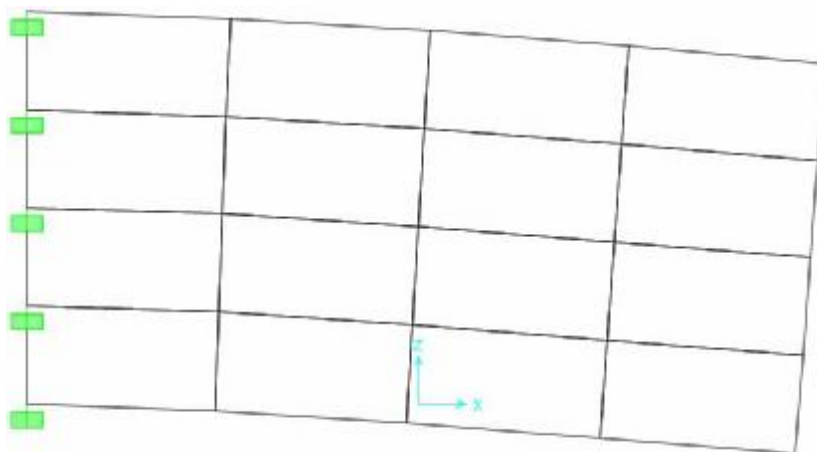
Les charges des travaille-équivalent pour une charge distribuée linéairement variable

$P(x) = -p_0\left(\frac{x}{a}\right)$ comme suite:

- $F_{y9} = -10000000N$
- $F_{y10} = -10000000N$
- $F_{y15} = -10000000N$
- $F_{y20} = -10000000N$
- $F_{y25} = -10000000N$



(a)



(b)

Figure (IV.4) Maillage de la plaque rectangulaire par la méthode des éléments finis à 16 éléments
 e) avant la déformation
 f) après la déformation

IV-6-1-3-1 Comparaison des déplacements de l'exemple N°3

noeud	Les déplacement suivant l'axe x (u)			Les déplacement suivant l'axe y (v)		
	programme	Sap2000	Erreur	programme	Sap2000	Erreur
	0	0		0	0	
2	-0.055042414	-0.055054	0.02105	-0.057138	-0.057138	0.02107
3	-0.022995584	-0.023	-0.0192	-0.05141	-0.05141	0.02121
4	0	0		0	0	
5	0.000226377	0.000226	0.16653	-0.050664	-0.050664	0.02064
6	0	0		0	0	
7	0.02356546	0.02357	0.01927	-0.053851	-0.053851	0.02192
8	0	0		0	0	
9	0.056571621	0.056584	0.02188	-0.062342	-0.062342	0.02115
10	0	0		0	0	
11	-0.08483926	-0.084857	0.02091	-0.144634	-0.144634	0.02076
12	-0.039554344	-0.039563	0.02188	-0.142645	-0.142645	0.02131
13	0.001086198	0.001086	0.01822	-0.142431	-0.142431	0.0208
14	0.041955437	0.041964	-0.0204	-0.145092	-0.145092	0.02111
15	0.08708895	0.087107	0.0207	-0.149603	-0.149603	0.02069
16	-0.097429711	-0.09745	0.0208	-0.249353	-0.249353	0.02082
17	-0.046527854	-0.046538	0.0218	-0.248834	-0.248834	0.02115
18	0.001549443	0.00155	0.03595	-0.249462	-0.249462	0.02095
19	0.050007402	0.050018	0.02119	-0.251089	-0.251089	0.02107
20	0.102130456	0.102152	0.02109	-0.25361	-0.25361	0.02086
21	-0.100023555	-0.100045	0.02144	-0.355276	-0.355276	0.02088
22	-0.048082951	-0.048093	-0.0209	-0.355504	-0.355504	0.0211
23	0.00247548	0.002476	0.02101	-0.357114	-0.357114	0.02089
24	0.053636957	0.053648	0.02059	-0.361102	-0.361102	0.021
25	0.10345869	0.10369	0.02135	-0.367061	-0.367061	0.02114

IV-6-1-3 -2 Comparaison des réactions de l'exemple N°3

noeud	Les réactions suivant l'axe x (u)			Les réac suivant l'axe y (v)		
	programme	Sap2000	Erreur %	programme	Sap2000	Erreur %
1	36080977.65	36080977.65	0	13123050	13123050	0
4	26836016.79	26836016.79	0	3998455.17	3998455.17	0
6	571187.51	571187.51	0	5984896.19	5984896.19	0
8	-25974336	-25974336	0	4809527.83	4809527.83	0
10	-37513846	-37513846	0	12084070.82	12084070.82	0

Tableau (IV.8) comparaison des réactions

IV-6-1-3-3 Comparaison des contraintes de l'exemple N°3

élément	Les contraintes de programme développées		Les le logicielle Sap2000	La contrainte moyenne S_m
1	S_x	-16395197941	-16394284459	-9511106744
	S_y	-2627929028	-2627929030	
	t_{xy}	-3417629182	-3417629184	
2	S_x	-4905661185	-4906300297	-3039895954
	S_y	-1173491611	-1173491611	
	t_{xy}	-4277380248	-4277380250	
3	S_x	4808648481	4809166923	2488781674
	S_y	168396424.1	168396424.5	
	t_{xy}	-4447052908	-4447052910	
4	S_x	16492210645	16494754520	9023370169
	S_y	1551985817	1551985818	
	t_{xy}	-3857937654	-3857937656	
5	S_x	-9170061738	-9170368917	-4417524899
	S_y	335319119.2	335319119.3	
	t_{xy}	-1848372255	-1848372256	
6	S_x	-3323715642	-3323715644	-1968666096
	S_y	-613616548.3	-613616548.4	
	t_{xy}	-4248890439	-4248890441	
7	S_x	3459696408	3459696410	1079730565
	S_y	-1300235280	-1300235280	
	t_{xy}	-4196202336	-4196202339	
8	S_x	9034080972	9031930969	3271147195
	S_y	-2489636579	-2489636579	
	t_{xy}	-1706534964	-1706534965	
9	S_x	-3968707296	-3968707299	-2077871221
	S_y	-187035143.2	-187035143.3	
	t_{xy}	-1422262166	-1422262167	
10	S_x	-1485495841	-1485495842	-1048594357
	S_y	-611692871.6	-611692871.5	
	t_{xy}	-2749053197	-2749053199	
11	S_x	1306175245	1306175245	-8215023
	S_y	-1322605292	-1322605291	
	t_{xy}	-2640539881	-2640539883	
12	S_x	4148027893	4148027896	1289954860

Chapitre IV : Exemples d'applications et comparaison des résultats

	s_y	-1568118175	-1568118175	
	t_{xy}	-1188144752	-1188144752	
13	s_x	-873236270.5	-873236270.5	-509100608.3
	s_y	-144964946.4	-144964946	
	t_{xy}	-527931922.8	-527931923	
14	s_x	-433455897.7	-433455898.2	-729477950.9
	s_y	-1025500003	-1025500004	
	t_{xy}	-1308074998	-1308074999	
15	s_x	261022029.3	261022029.4	-952907047.8
	s_y	-2166836125	-2166836125	
	t_{xy}	-1413841260	-1413841261	
16	s_x	1045670139	1045670140	-1015873381
	s_y	-3077416901	-3077416901	
	t_{xy}	-750151817.1	-750151817.5	

Tableau (IV.9) comparaison des contraintes dans le milieu d'élément en N/m^2

IV-6-1-4 Exemple N°4

On considère même plaque, encastree sur deux coté opposés mais cette fois soumise à une charge uniformément répartie $P(x) = -p_0 \left(\frac{x}{a} \right)$ avec $P_0 = 10000000 \text{ N}$ (figure IV.5)

Les charges des travails-équivalent pour une charge uniformément répartie indiqué au chapitre II:

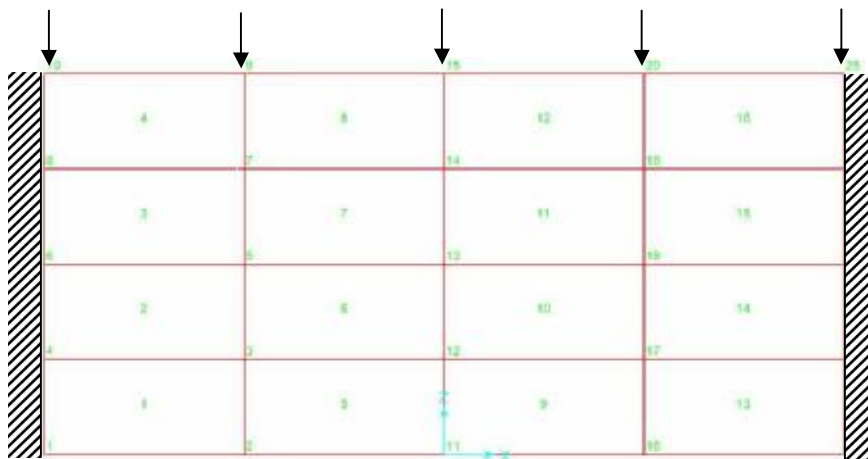
$$F_{y9} = -10000000 \text{ N}$$

$$F_{y10} = -10000000 \text{ N}$$

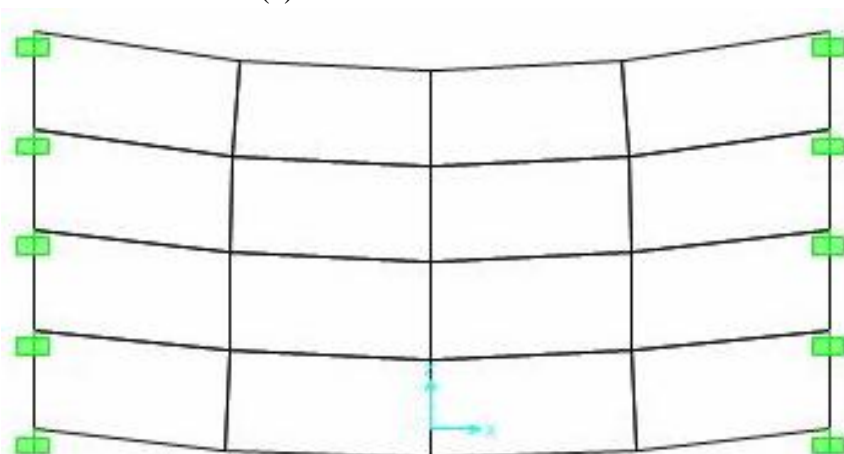
$$F_{y15} = -10000000 \text{ N}$$

$$F_{y20} = -10000000 \text{ N}$$

$$F_{y25} = -10000000 \ \text{N}$$



(a)



(b)

Figure (IV.5) Maillage de la plaque rectangulaire par la méthode des éléments finis à 16 éléments
g) avant la déformation
h) après la déformation

IV -6-1-4-1 Comparaison de déplacements de l'exemple 4

noeud	Les déplacement suivant l'axe x (u)			Les déplacement suivant l'axe y (v)		
	programme	Sap2000	Erreur %	programme	Sap2000	Erreur %
1	0	0		0	0	
2	-0.003765208	-0.003766	-0.02103	-0.010229691	-0.010232	-0.02257
3	-0.000941033	-0.000941	0.003507	-0.01040619	-0.010408	-0.01739
4	0	0		0	0	
5	-0.000371546	-0.000372	-0.12219	-0.011233074	-0.011235	-0.01715
6	0	0		0	0	
7	0.000382826	0.000383	-0.04545	-0.012643767	-0.012646	-0.01766
8	0	0		0	0	
9	0.004165637	0.004167	-0.03272	-0.015069837	-0.015073	-0.02099
10	0	0		0	0	
11	0	0		-0.014938099	-0.014941	-0.01942
12	0	0		-0.015650032	-0.015653	-0.01896
13	0	0		-0.016566574	-0.01657	-0.02068
14	0	0		-0.018277789	-0.018282	-0.02304
15	0	0		-0.019801691	-0.019806	-0.02176
16	0.003765208	0.003766	-0.02103	-0.010229691	-0.010232	-0.02257
17	0.000941033	0.000941	0.003507	-0.01040619	-0.010408	-0.01739
18	0.000371546	0.000372	-0.12219	-0.011233074	-0.011235	-0.01715
19	-0.000382826	-0.000383	-0.04545	-0.012643767	-0.012646	-0.01766
20	-0.004165637	-0.004167	-0.03272	-0.015069837	-0.015073	-0.02099
21	0	0		0	0	
22	0	0		0	0	
23	0	0		0	0	
24	0	0		0	0	
25	0	0		0	0	

Tableau (IV.10) comparaison des déplacements

IV-6-1-4-2 Comparaison de réactions de l'exemple N°4

noeud	Les réactions suivant l'axe x (u)			Les réac suivant l'axe y (v)		
	Programme	Sap2000	Erreur %	programme	Sap2000	Erreur %
1	4824690.87	4824690.87	0	2340392.26	2340392.26	0
4	2383405.64	2383405.64	0	3308356.74	3308356.74	0
6	1126102.57	1126102.57	0	4312513.13	4312513.13	0
8	-381578.41	-381578.41	0	4051317.03	4051317.03	0
10	-5555396.97	-5555396.97	0	987420.84	987420.84	0
21	-4824690.87	-4824690.87	0	2340392.26	2340392.26	0
22	-2383405.64	-2383405.64	0	3308356.74	3308356.74	0
23	-1126102.57	-1126102.57	0	4312513.13	4312513.13	0
24	381578.41	381578.41	0	4051317.03	4051317.03	0
25	5555396.97	5555396.97	0	987420.84	987420.84	0

Tableau (IV.11) comparaison des réactions

IV-6-1-4 –3 Comparaison des contraintes de l'exemple N°4

élément	Les contraintes de programme développées		Les le logicielle Sap2000	La contrainte moyenne S_x
1	S_x	-1057560493	-1057560492	-722712389.2
	S_y	-387864285.8	-387864286.3	
	t_{xy}	-1152829414	-1152829414	
2	S_x	-397498619	-397498618	-423742605.6
	S_y	-449986593.2	-449986593.1	
	t_{xy}	-1576866448	-1576866448	
3	S_x	-183537107.5	-183537106	-401423541.1
	S_y	-619309975.2	-619309975.8	
	t_{xy}	-1720536944	-1720536944	
4	S_x	679706742.6	679706742	-43380415.07
	S_y	-766467572.4	-766467572.4	
	t_{xy}	-1549767194	-1549767194	
5	S_x	917136957	917136956	418461394.9
	S_y	-80214166.66	-80214166.53	
	t_{xy}	-331052683.8	-331052683.2	
6	S_x	58573679.13	58573679.1	-310594764
	S_y	-679763206.5	-679763207	
	t_{xy}	-725991857.6	-725991858	
7	S_x	-414138620.5	-414138621	-893540536.5
	S_y	-1372942451	-1372942452	
	t_{xy}	-727562088.8	-727562090	
8	S_x	-1520461492	-1520461492	-1778254876
	S_y	-2036048260	-2036048260	
	t_{xy}	-215393369.7	-215393369.8	
9	S_x	917136957	917136956	418461394.9
	S_y	-80214166.66	-80214166.53	
	t_{xy}	331052683.8	331052684.2	
10	S_x	58573679.13	58573679.1	-310594764
	S_y	-679763206.5	-679763207	
	t_{xy}	725991857.6	725991857.6	
11	S_x	-414138620.5	-414138621	-893540536.5
	S_y	-1372942451	-1372942452	
	t_{xy}	727562088.8	727562089	
12	S_x	-1520461492	-1520461492	-1778254876
	S_y	-2036048260	-2036048260	
	t_{xy}	215393369.7	215393370	
13	S_x	-1057560493	-1057560492	-722712389.2
	S_y	-387864285.8	-387864286.3	

Chapitre IV : Exemples d'applications et comparaison des résultats

	t_{xy}	1152829414	1152829414	
14	s_x	-397498619	-397498618	-423742605.6
	s_y	-449986593.2	-449986593.1	
	t_{xy}	1576866448	1576866448	
15	s_x	-183537107.5	-183537106	-401423541.1
	s_y	-619309975.2	-619309975.8	
	t_{xy}	1720536944	1720536944	
16	s_x	679706742.6	679706742	-43380415.07
	s_y	-766467572.4	-766467572.4	
	t_{xy}	1549767194	1549767194	

Tableau (IV.12) comparaison des contraintes dans le milieu d'élément en N/m^2

IV-6-1-5 Exemple N°5

On considère même plaque, la condition aux limites est encastree sur un coté et l'autre coté opposé est simplement appui, et soumise à une charge uniformément répartie figure (IV.6)

$$P(x) = -p_0 \left(\frac{x}{a} \right) \text{ avec } P_0 = 10000000 \text{ N}$$

La charges de travail-équivalent pour une charge uniformément répartie indiqué au chapitre II

$$\begin{aligned} F_{y9} &= -10000000 \text{ N} \\ F_{y10} &= -10000000 \text{ N} \\ F_{y11} &= -10000000 \text{ N} \\ F_{y15} &= -10000000 \text{ N} \\ F_{y25} &= -10000000 \text{ N} \end{aligned}$$

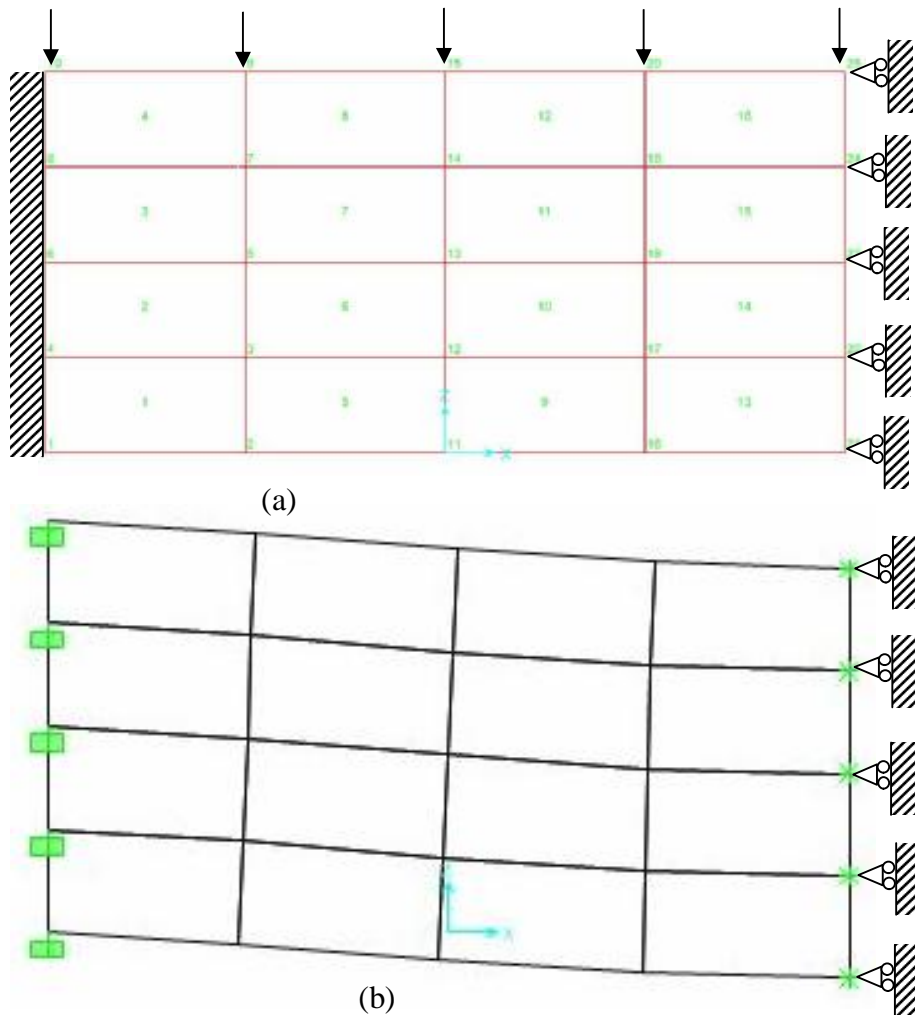


Figure (IV.6) Maillage de la plaque rectangulaire par la méthode des éléments finis à 16 éléments
 i) avant la déformation
 j) après la déformation

IV-6-1-5 –1 Comparaison de déplacements de l'exemple N°5

noeud	Les déplacement suivant l'axe x (u)			Les déplacement suivant l'axe y (v)		
	programme	Sap2000	Erreur %	programme	Sap2000	Erreur %
	0	0		0	0	-0.02013
2	-0.030411	-0.030418	-0.0221	-0.04178	-0.041788	-0.02033
3	-0.011334	-0.011336	-0.01989	-0.039418	-0.039426	
4	0	0		0	0	-0.02106
5	-0.0005	-0.0005	-0.09048	-0.03965	-0.039658	
6	0	0		0	0	-0.02195
7	0.0104484	0.010451	-0.02517	-0.041619	-0.041628	
8	0	0		0	0	-0.02188
9	0.0304027	0.030409	-0.02062	-0.046486	-0.046496	
10	0	0		0	0	-0.02077
11	-0.035003	-0.035011	-0.02216	-0.091372	-0.091391	-0.02077
12	-0.015329	-0.015332	-0.0193	-0.092128	-0.092147	-0.02137
13	-0.000446	-0.000446	-0.10369	-0.092837	-0.092857	-0.02088
14	0.0146965	0.0147	-0.02362	-0.094359	-0.094379	-0.02059
15	0.0343231	0.03433	-0.02012	-0.095906	-0.095926	-0.02065
16	-0.022487	-0.022492	-0.02043	-0.131636	-0.131663	-0.02102
17	-0.010104	-0.010106	-0.0234	-0.133869	-0.133897	-0.02094
18	-0.000564	-0.000564	0.019854	-0.135387	-0.135415	-0.02109
19	0.0090723	0.009074	-0.01884	-0.136275	-0.136304	-0.02134
20	0.0225184	0.022523	-0.0205	-0.135899	-0.135928	-0.02091
21	0	0		-0.147241	-0.147272	-0.02073
22	0	0		-0.150248	-0.150279	-0.02089
23	0	0		-0.152569	-0.152601	-0.02132
24	0	0		-0.155077	-0.15511	-0.02127
25	0	0		-0.157581	-0.157615	-0.02013

Tableau (IV.13) comparaison des déplacements

IV-6-1-5 –2 Comparaison de réactions de l'exemple N°5

noeud	Les réactions suivant l'axe x (u)			Les réac suivant l'axe y (v)		
	programme	Sap2000	Erreur %	programme	Sap2000	Erreur %
1	23548230.36	23548230.36	0	9364861.79	9364861.79	0
4	15316650.69	15316650.69	0	6543741.88	6543741.88	0
6	1284931.17	1284931.17	0	8854407.46	8854407.46	0
8	-12998458.9	-12998458.9	0	7279010.16	7279010.16	0
10	-24073409.7	-24073409.7	0	7957978.7	7957978.7	0
21	12198849.07	12198849.07	0	0	0	0
22	11159343.87	11159343.87	0	0	0	0
23	-149434.94	-149434.94	0	0	0	0
24	-11688835	-11688835	0	0	0	0
25	-14597866.7	-14597866.7	0	0	0	0

Tableau (IV.14) comparaison des réactions

IV-6-1-5 –3 Comparaison des contraintes de l'exemple N°5

élément	Les contraintes de programme développées		Les contraintes de logicielle Sap2000	La contrainte moyenne s_m
1	s_x	-8862866977	-8862866979	-5288566219
	s_y	-1714265458	-1714265458	
	t_{xy}	-3310796855	-3310796856	
2	s_x	-2631141590	-2631141591	-1756572661
	s_y	-882003730.8	-882003731	
	t_{xy}	-4415105289	-4415105290	
3	s_x	1926781307	1926781308	858584505
	s_y	-209612297.9	-209612298	
	t_{xy}	-4566900734	-4566900736	
4	s_x	8336049793	8336049796	4445088041
	s_y	554126286.9	554126286	
	t_{xy}	-3707197118	-3707197120	
5	s_x	-1675477459	-1675477460	-767924448
	s_y	139628565.7	139628565	
	t_{xy}	-1907507985	-1907507986	
6	s_x	-990250220.2	-990250220.2	-831845954
	s_y	-673441687.2	-673441687.2	
	t_{xy}	-4189174142	-4189174142	
7	s_x	485109774	485109774	-382913423
	s_y	-1250936620	-1250936620	
	t_{xy}	-4134252685	-4134252687	
8	s_x	949440436.6	949440437	-665583554
	s_y	-2280607545	-2280607544	
	t_{xy}	-1769065184	-1769065185	
9	s_x	3504859203	3504859205	1680410102
	s_y	-144039001.4	-144039001	
	t_{xy}	-1375996876	-1375996877	
10	s_x	828657363.5	828657364	93231919.1
	s_y	-642193524.7	-642193526	
	t_{xy}	-2726358374	-2726358375	
11	s_x	-1579977593	-1579977594	-1509109990
	s_y	-1438242385	-1438242386	
	t_{xy}	-2685136045	-2685136046	
12	s_x	-3984716442	-3984716443	-2824192851

Chapitre IV : Exemples d'applications et comparaison des résultats

	s_y	-1663669258	-1663669258	
	t_{xy}	-1212508703	-1212508703	
13	s_x	6471593525	6471593528	3158648532
	s_y	-154296463.5	-154296464	
	t_{xy}	-555114166.8	-555114167	
14	s_x	1838218227	1838218228	427068218
	s_y	-984081791.9	-984081792	
	t_{xy}	-1113976989	-1113976990	
15	s_x	-2317694155	-2317694155	-2185752540
	s_y	-2053810924	-2053810924	
	t_{xy}	-1285424577	-1285424577	
16	s_x	-7223295065	-7223295067	-5120774406
	s_y	-3018253745	-3018253744	
	t_{xy}	-1045484266	-1045484266	

Tableau (IV.15) comparaison des contraintes dans le milieu d'élément en N/m^2

IV-6-1-6 Exemple N°6

On considère même plaque, la condition aux limites est simplement appuyée sur les deux côtés opposés, et soumise à une charge uniformément répartie figure (IV.7) ; $P(x) = -p_0 \left(\frac{x}{a} \right)$ avec

$$P_0 = 10000000 \text{ N}$$

La charge de travail-équivalent pour une charge uniformément répartie indiquée au chapitre II:

$$\begin{aligned} F_{y9} &= 10000000\text{N} & F_{y1} &= -10000000\text{N} \\ F_{y10} &= 10000000\text{N} & F_{y2} &= -10000000\text{N} \\ F_{y15} &= 10000000\text{N} & F_{y11} &= -10000000\text{N} \\ F_{y20} &= 10000000\text{N} & F_{y16} &= -10000000\text{N} \\ F_{y25} &= 10000000\text{N} & F_{y21} &= -10000000\text{N} \end{aligned}$$

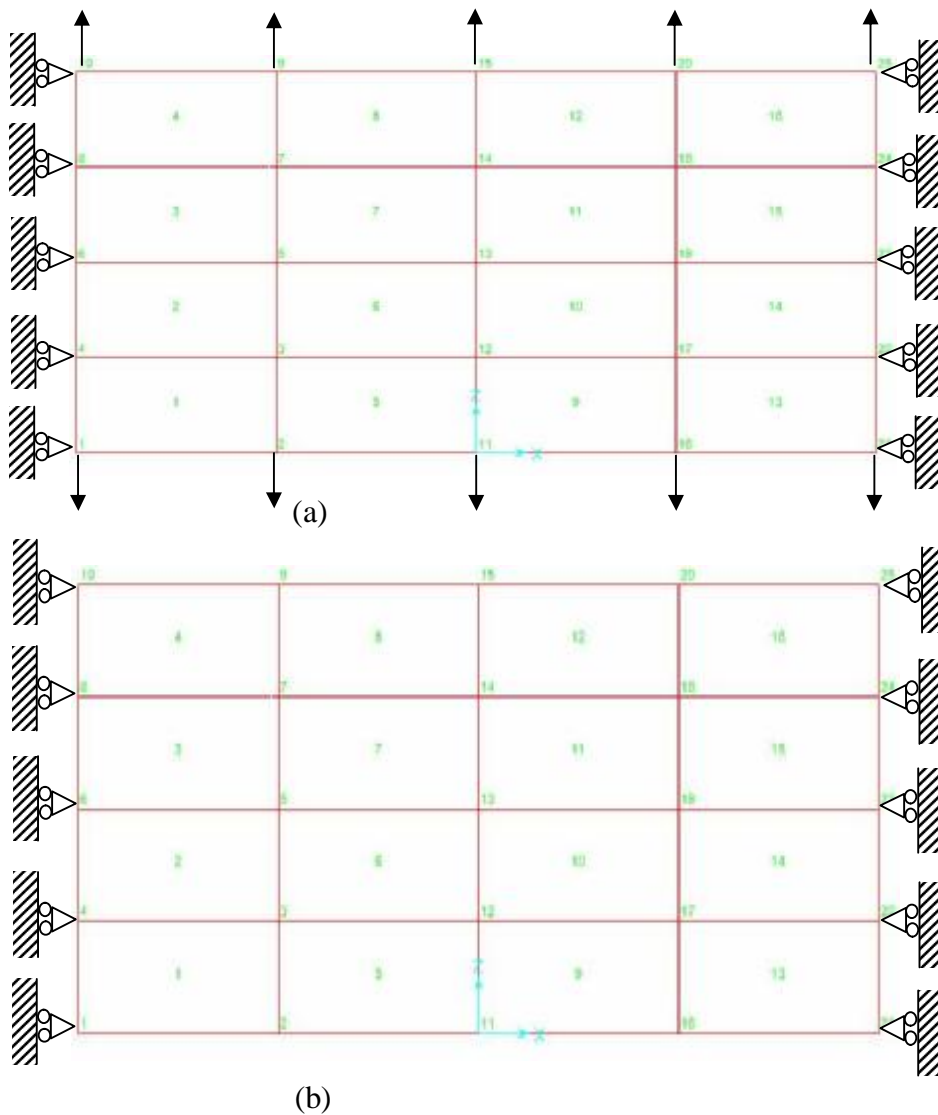


Figure (IV.7) Maillage de la plaque rectangulaire par la méthode des éléments finis à 16 éléments
 k) avant la déformation
 l) après la déformation

IV-6-1-6-1 Comparaison de déplacements de l'exemple N°6

noeud	Les déplacement suivant l'axe x (u)			Les déplacement suivant l'axe y (v)		
	programme	Sap2000	Erreur %	programme	Sap2000	Erreur %
1ss	0	0		-0.01135	-0.01135	0
2	0.000434	0.000434	0	-0.00521	-0.00521	0
3	-0.0007	-0.000696	0.02126	-0.00345	-0.00345	0
4	0	0		-0.00587	-0.00587	0
5	-0.00086	-0.000862	-0.03006	-0.00108	-0.00108	0
6	0	0		-0.00108	-0.00108	0
7	-0.0007	-0.000696	0.02126	0.001292	0.001292	0
8	0	0		0.003721	0.003721	0
9	0.000434	0.000434	0	0.003057	0.003057	0
10	0	0		0.009198	0.009198	0
11	0	0		-0.00529	-0.00529	0
12	0	0		-0.00292	-0.00292	0
13	0	0		-0.00108	-0.00108	0
14	0	0		0.000764	0.000764	0
15	0	0		0.003133	0.003133	0
16	-0.00043	-0.000434	0.092771	-0.00521	-0.00521	0
17	0.000696	0.000696	0	-0.00345	-0.00345	0
18	0.000862	0.000862	0	-0.00108	-0.00108	0
19	0.000696	0.000696	0	0.001292	0.001292	0
20	-0.00043	-0.000434	0.092771	0.003057	0.003057	0
21	0	0		-0.01135	-0.01135	0
22	0	0		-0.00587	-0.00587	0
23	0	0		-0.00108	-0.00108	0
24	0	0		0.003721	0.003721	0
25	0	0		0.009198	0.009198	0

Tableau (IV.16) comparaison des des déplacements des noeuds

IV-6-1-6-2 Comparaison de réactions de l'exemple N°6

noeud	Les réactions suivant l'axe x (u)			Les réac suivant l'axe y (v)		
	programme	Sap2000	Erreur %	programme	Sap2000	Erreur %
1	-2583291.62	-2583291.62	0			
4	-853141.01	-853141.01	0			
6	-627134.74	-627134.74	0			
8	-853141.01	-853141.01	0			
10	-2583291.62	-2583291.62	0			
21	2583291.62	2583291.62	0			
22	853141.01	853141.01	0			
23	627134.74	627134.74	0			
24	853141.01	853141.01	0			
25	2583291.62	2583291.62	0			

Tableau (IV.17) comparaison des réactions

IV-6-1-6-3 Comparaison des contraintes de l'exemple N°6

élément	Les résultats de programme développé		Les résultats de logicielle Sap2000	La contrainte moyenne S_m
1	S_x	897404241	897404241	2031619991
	S_y	3165835742	3165835742	
	t_{xy}	485230430.7	485230430.7	
2	S_x	602595759	602595759	1824894532
	S_y	3047193304	3047193304	
	t_{xy}	161314040.6	161314040.6	
3	S_x	602595759	602595759	1824894532
	S_y	3047193304	3047193304	
	t_{xy}	-161314040.6	-161314040.6	
4	S_x	897404241	897404241	2031619991
	S_y	3165835742	3165835742	
	t_{xy}	-485230430.7	-485230430.7	
5	S_x	602595759	602595759	1218380008
	S_y	1834164258	1834164258	
	t_{xy}	-139057994.4	-139057994.4	
6	S_x	897404241	897404241	1425105468
	S_y	1952806696	1952806696	
	t_{xy}	15203983.65	15203983.65	
7	S_x	897404241	897404241	1425105468
	S_y	1952806696	1952806696	
	t_{xy}	-15203983.64	-15203983.64	
8	S_x	602595759	602595759	1218380008
	S_y	1834164258	1834164258	
	t_{xy}	139057994.4	139057994.4	
9	S_x	602595759	602595759	1218380008
	S_y	1834164258	1834164258	
	t_{xy}	139057994.4	139057994.4	
10	S_x	897404241	897404241	1218380008
	S_y	1952806696	1952806696	
	t_{xy}	-15203983.64	-15203983.64	
11	S_x	897404241	897404241	1425105468
	S_y	1952806696	1952806696	
	t_{xy}	15203983.65	15203983.65	
12	S_x	602595759	602595759	1425105468

	S_y	1834164258	1834164258	
	t_{xy}	-139057994.4	-139057994.4	
13	S_x	897404241	897404241	1218380008
	S_y	3165835742	3165835742	
	t_{xy}	-485230430.7	-485230430.7	
14	S_x	602595759	602595759	1824894532
	S_y	3047193304	3047193304	
	t_{xy}	-161314040.6	-161314040.6	
15	S_x	602595759	602595759	1824894532
	S_y	3047193304	3047193304	
	t_{xy}	161314040.6	161314040.6	
16	S_x	897404241	897404241	2031619991
	S_y	3165835742	3165835742	
	t_{xy}	485230430.7	485230430.7	

Tableau (IV.18) comparaison des contraintes dans le milieu d'élément en N/m^2

IV-7 Analyse dynamique d'une plaque rectangulaire :

Vu les conditions aux limites ,seules les modes propres pour les plaques représentées sur les figures (IV.2) (IV.5) (IV.6) seront déterminées et représentées sur les figures (IV.8), (IV.9), (IV.10),

IV-7-1 calcul les fréquences propres et les modes propres des exemples N°1, 2 et 3

nœuds	Les déplacements des nœuds suivant l'axe x			Les déplacements des nœuds suivant l'axe y		
	Mode N :1 W ₁ =1505.13HZ	Mode N :2 W ₂ =5505.86HZ	Mode N :3 W ₃ =9153.09HZ	Mode N :1	Mode N :2	Mode N :3
1	0	0	0	0	0	0
2	-0.007354	0.019429	-0.006662	-0.006602	0.045567	-0.008779
3	-0.003546	0.011863	-0.005577	-0.005732	0.044895	-0.007649
4	0	0	0	0	0	0
5	-0.000722	0.015789	-0.004139	-0.00541	0.043706	-0.006171
6	0	0	0	0	0	0
7	0.002086	0.01941	-0.003438	-0.005488	0.040926	-0.005364
8	0	0	0	0	0	0
9	0.005799	0.012095	-0.003558	-0.006093	0.03686	-0.004832
10	0	0	0	0	0	0
11	-0.011897	-0.005946	-0.005695	-0.016993	0.046466	-0.000431
12	-0.0064	0.009627	-0.007731	-0.016586	0.049952	0.000266
13	-0.001445	0.026029	-0.004623	-0.016324	0.050475	0.001812
14	0.003506	0.041644	-0.002346	-0.016336	0.049733	0.002687
15	0.009036	0.054143	-0.005172	-0.016537	0.045708	0.002352
16	-0.014144	-0.038973	-0.011422	-0.029754	-0.0097	0.007222
17	-0.007891	-0.003936	-0.008708	-0.029567	-0.006196	0.00855
18	-0.001975	0.026985	-0.003089	-0.029443	-0.003501	0.010435
19	0.00396	0.056883	0.001895	-0.029401	-0.002059	0.012102
20	0.010269	0.089616	0.002902	-0.029451	-0.003303	0.011903
21	-0.014754	-0.053907	-0.017259	-0.042715	-0.09322	-0.002772
22	-0.008383	-0.012518	-0.010527	-0.042624	-0.08991	-0.001255
23	-0.002186	0.024414	-0.003589	-0.042528	-0.085914	0.001279
24	0.004035	0.061018	0.003213	-0.04253	-0.083818	0.00397
25	0.010464	0.10135	0.008684	-0.042553	-0.083755	0.004794

Chapitre IV : Exemples d'applications et comparaison des résultats

nœuds	Les déplacements des nœuds suivant l'axe x			Les déplacements des nœuds suivant l'axe y		
	Mode N :4 W ₁ =11685.29HZ	Mode N :5 W ₂ =13776.92HZ	Mode N :6 W ₃ =16382.02HZ	Mode N :4	Mode N :5	Mode N :6
1	0	0	0	0	0	0
2	0.010655	0.027349	0.000654	0.009039	0.01631	0.000347
3	0.0065	-0.03645	0.000449	0.006074	0.006797	0.000002
4	0	0	0	0	0	0
5	0.00063	-0.073716	-0.00042	0.001593	0.012249	-0.000525
6	0	0	0	0	0	0
7	-0.003812	-0.04076	0.000255	-0.001436	0.04291	-0.000258
8	0	0	0	0	0	0
9	-0.003612	-0.012306	0.000752	-0.001861	0.061187	0.000065
10	0	0	0	0	0	0
11	0.00636	-0.003259	-0.000038	0.00297	0.084827	-0.000822
12	0.007445	-0.02147	0.000125	0.002403	0.065032	-0.000401
13	0.002972	-0.064737	-0.000003	-0.001386	0.019783	0.000109
14	-0.003931	-0.039969	-0.000665	-0.006232	-0.002935	0.000388
15	-0.006807	0.016729	0.000158	-0.008373	-0.007005	0.000889
16	-0.00068	-0.002787	0.000143	-0.00403	-0.034529	0.000729
17	0.002712	0.000473	-0.001298	-0.002665	-0.035535	0.000679
18	0.004831	-0.003778	0.000351	-0.001647	-0.030714	0.001137
19	0.000347	0.032777	0.000317	-0.003158	-0.026851	-0.000126
20	-0.007804	0.054061	-0.000518	-0.005033	-0.029203	-0.00137
21	-0.004889	0.066036	0.001638	-0.007766	0.03092	0.001309
22	-0.001421	0.007671	-0.000909	-0.004838	0.005281	-0.000685
23	0.002963	0.014755	0.000319	0.00188	-0.013689	-0.001488
24	0.001435	0.06757	0.001713	0.008316	-0.006359	-0.000602
25	-0.007787	0.081564	-0.000808	0.01012	-0.000013	-0.000548

Tableau (IV.19) déplacements des nœuds de chaque mode de 1 à 6

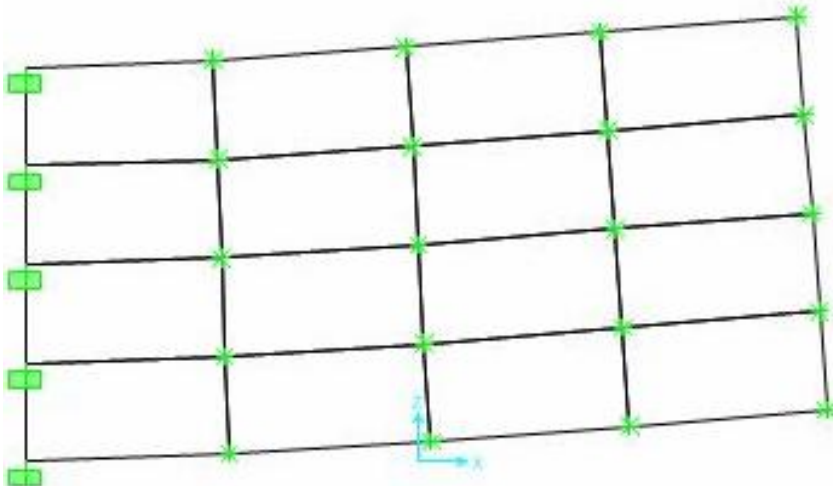


Figure (IV.8a) mode N°1 de fréquence propre $\omega = 1505.13\text{HZ}$

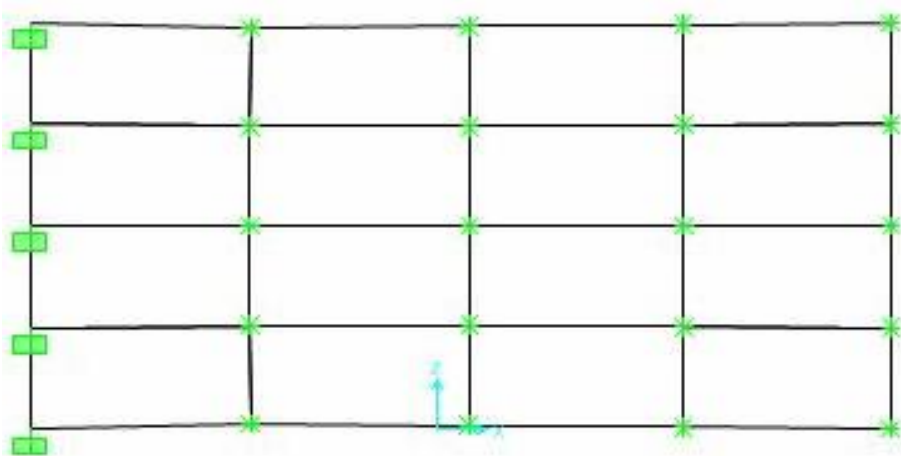


Figure (IV.8b) mode N°2 de fréquence propre $\omega = 5505.86\text{HZ}$

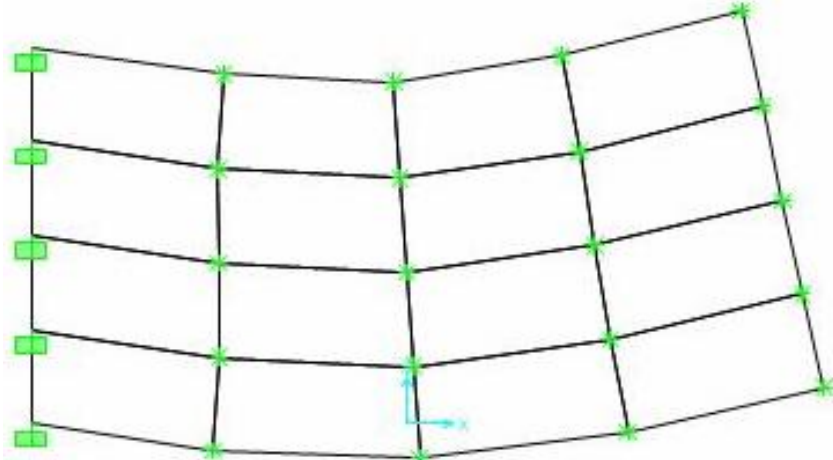


Figure (IV.8c) mode N°3 de fréquence propre $\omega = 9153.09\text{HZ}$

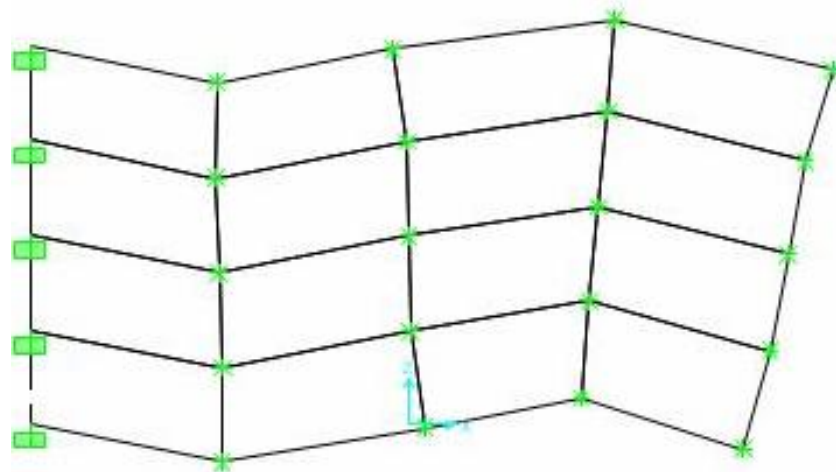


Figure (IV.8d) mode N°4 de fréquence propre $\omega = 11685.29\text{HZ}$

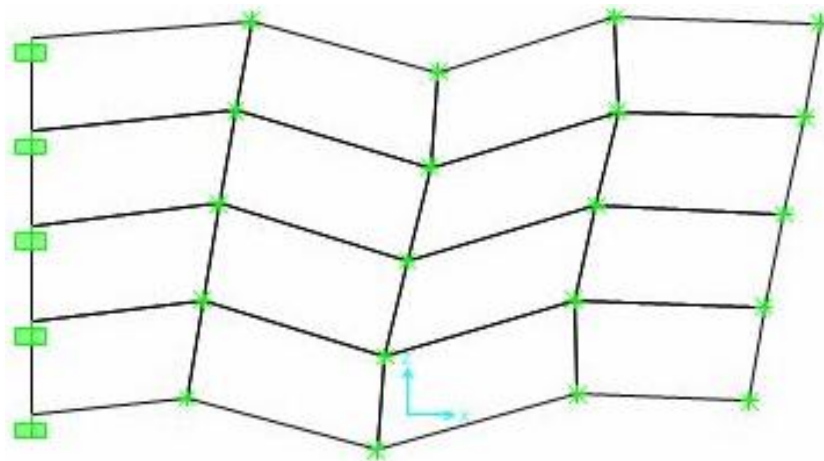


Figure (IV.8e) mode N°5 de fréquence propre $\omega = 13776.92\text{HZ}$

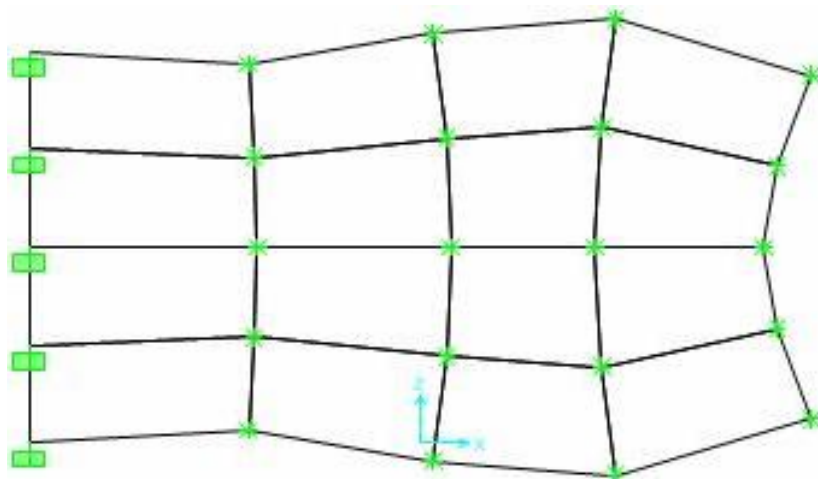


Figure (IV.8f) mode N°6 de fréquence propre $\omega = 16382.02\text{HZ}$

Figure (IV.8) les 6 premiers modes propres des exemple 1, 2 et 3

IV-7-2 Calcul les fréquences propres et les modes propres de l'exemple N°4

nœuds	Les déplacements des nœuds suivant l'axe x			Les déplacements des nœuds suivant l'axe y		
	Mode N :1 W ₁ = 5116.04HZ	Mode N :2 W ₂ =10463.43HZ	Mode N :3 W ₃ =13813.49HZ	Mode N :1	Mode N :2	Mode N :3
1	0	0	0	0	0	0
2	-0.007354	0.019429	-0.006662	-0.012681	0.006809	0.021123
3	-0.003779	0.011036	-0.00016	-0.01213	0.001728	0.021642
4	0	0	0	0	0	0
5	-0.002892	-0.001771	-0.001167	-0.011737	-0.005136	0.016475
6	0	0	0	0	0	0
7	-0.001937	-0.011037	-0.009476	-0.011281	-0.008967	0.009657
8	0	0	0	0	0	0
9	0.001629	-0.011867	-0.009622	-0.010931	-0.008427	0.008481
10	0	0	0	0	0	0
11	-0.003868	0.022305	-0.018571	-0.017704	0.012729	-0.014142
12	-0.004217	0.016274	-0.008401	-0.018172	0.010258	-0.010514
13	-0.004264	0.000378	-0.001252	-0.018077	0.002076	-0.007146
14	-0.004217	-0.014969	-0.007789	-0.018172	-0.005974	-0.009976
15	-0.003868	-0.021134	-0.017626	-0.017704	-0.008647	-0.013373
16	0.001629	0.010562	-0.009848	-0.010931	0.008204	0.008795
17	-0.001937	0.010165	-0.009742	-0.011281	0.008877	0.009895
18	-0.002892	0.00173	-0.001412	-0.011737	0.00601	0.016635
19	-0.003779	-0.009238	0.000198	-0.01213	0.000666	0.022035
20	-0.007354	-0.015086	-0.00521	-0.012681	-0.003216	0.021961
21	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0

Chapitre IV : Exemples d'applications et comparaison des résultats

nœuds	Les déplacements des nœuds suivant l'axe x			Les déplacements des nœuds suivant l'axe y		
	Mode N :4 W ₄ =15960.49HZ	Mode N :5 W ₅ =16624.98HZ	Mode N :6 W ₆ =18312.87HZ	Mode N :1	Mode N :2	Mode N :3
1	0	0	0	0	0	0
2	0.010655	0.027349	0.000654	0.001457	0.071836	-0.000376
3	0.004955	-0.108816	0.000249	-0.002333	0.030948	-0.000378
4	0	0	0	0	0	0
5	-0.000457	-0.021181	0.000026	-0.005169	0.008717	-0.000052
6	0	0	0	0	0	0
7	0.004859	-0.015236	-0.000426	-0.003485	-0.038807	0.000372
8	0	0	0	0	0	0
9	0.006951	0.116913	-0.000579	-0.002783	-0.02362	0.000731
10	0	0	0	0	0	0
11	0.003254	-0.057296	0.000284	-0.004211	0.018006	-0.000488
12	0.000796	-0.000753	0.00031	-0.002213	-0.00188	-0.000407
13	-0.001521	0.081051	0.000086	-0.000947	0.007904	-0.000038
14	-0.00094	0.019118	-0.000246	0.001285	0.000108	0.00039
15	0.000484	-0.051726	-0.000452	0.004377	0.013248	0.000416
16	-0.006518	0.065188	0.000487	0.002352	-0.020981	-0.000568
17	-0.005672	0.018999	0.000337	0.002992	-0.018583	-0.00025
18	-0.001463	-0.04573	-0.000065	0.004478	0.001743	0.000092
19	-0.004752	-0.090931	-0.000231	0.002522	0.029324	0.000179
20	-0.004177	0.005659	-0.000155	0.001227	0.058974	0.000148
21	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0

Tableau (IV.20) déplacement des nœuds de chaque mode de 1 à 6

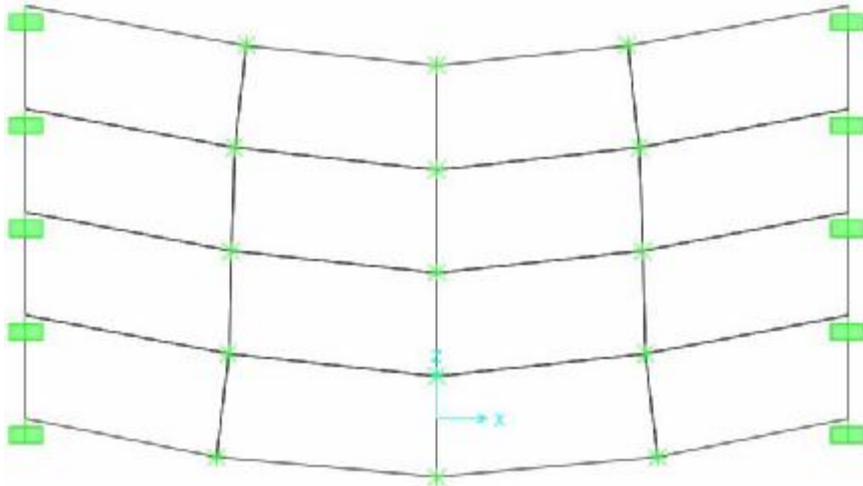


Figure (IV.9a) mode N°1 de fréquence propre $W = 5116.04\text{HZ}$

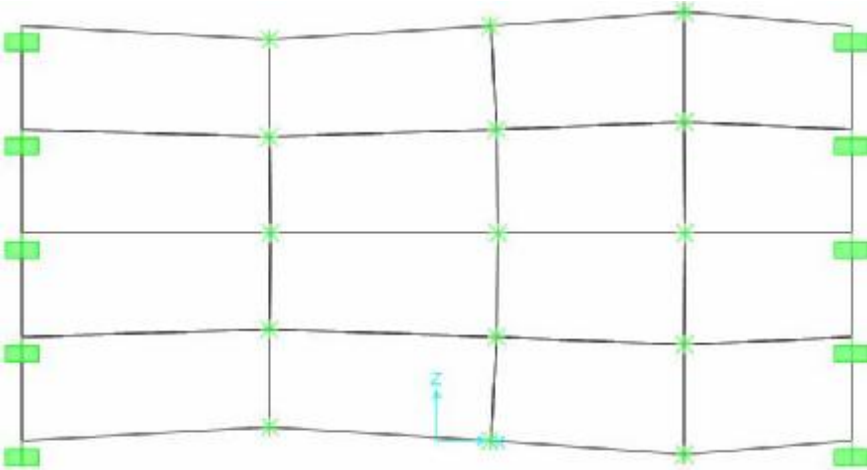


Figure (IV.9b) mode N°2 de fréquence propre $W=10463.43\text{HZ}$

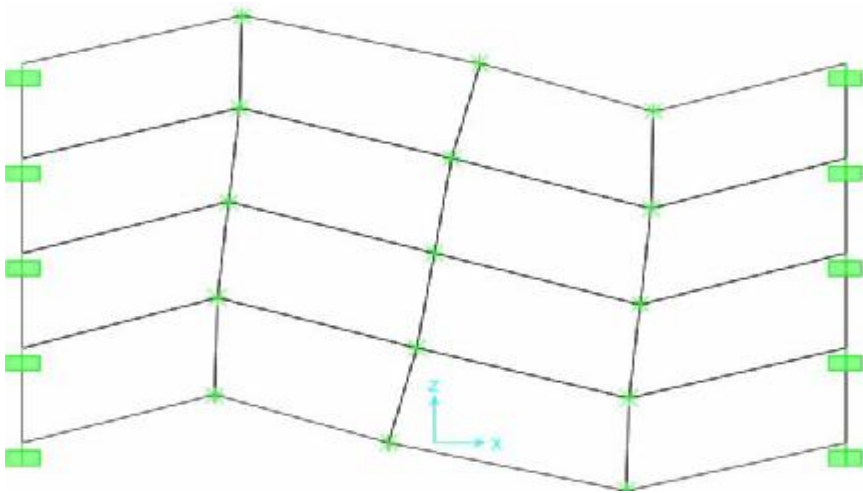


Figure (IV.9c) mode N°3 de fréquence propre $W=13813.49\text{HZ}$

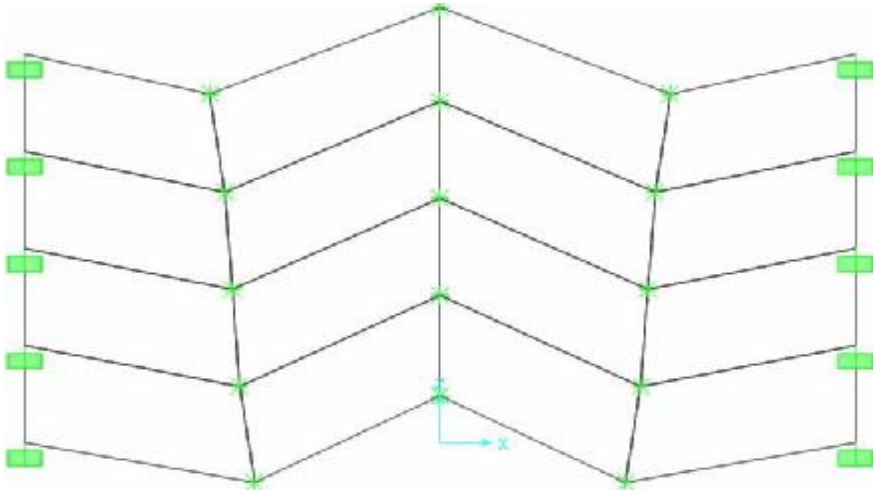


Figure (IV.9d) mode N°4 de fréquence propre $W=15960.49\text{HZ}$

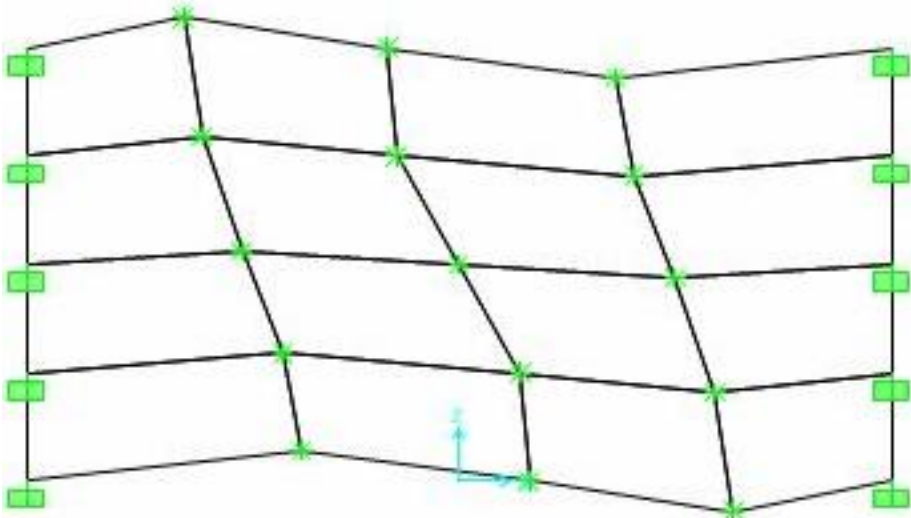


Figure (IV.9e) modes N°5 de fréquence propre $W=16624.98\text{HZ}$

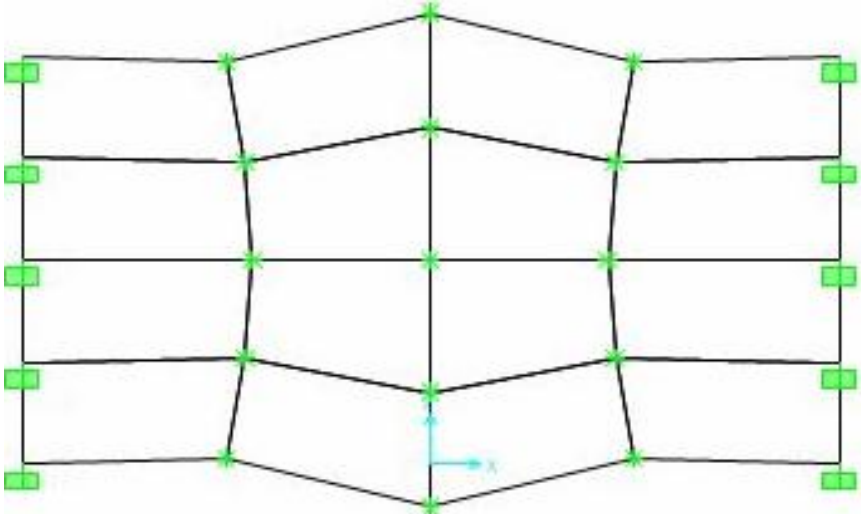


Figure (IV.9f) mode N°6 de fréquence propre $W=18312.87\text{HZ}$

Figure (IV.9) les 6 premiers modes propres de l'exemple 4

IV-7-3 Calcul les fréquences propres et les modes propres de l'exemple N°5

nœuds	Les déplacements des nœuds suivant l'axe x			Les déplacements des nœuds suivant l'axe y		
	Mode N :1 $W_1=2045.41\text{HZ}$	Mode N:2 $W_2=7132.37\text{HZ}$	Mode N:3 $W_3=13186.3\text{HZ}$	Mode N :1	Mode N :2	Mode N :3
1	0	0	0	0	0	0
2	-0.007354	0.019429	-0.006662	-0.009154	0.057522	-0.003704
3	-0.003022	0.011947	-0.006874	-0.008463	0.057283	-0.00192
4	0	0	0	0	0	0
5	-0.000483	0.016534	-0.004897	-0.008247	0.056437	0.000972
6	0	0	0	0	0	0
7	0.002054	0.020507	-0.003044	-0.008282	0.054446	0.003259
8	0	0	0	0	0	0
9	0.006341	0.011875	-0.004844	-0.008795	0.050765	0.004186
10	0	0	0	0	0	0
11	-0.00886	-0.014619	-0.007366	-0.020449	0.042572	0.005808
12	-0.004303	0.006157	-0.009593	-0.020513	0.046345	0.006103
13	-0.000831	0.01975	-0.008065	-0.020427	0.048072	0.007725
14	0.002663	0.032639	-0.004369	-0.020395	0.050475	0.010243
15	0.007327	0.049855	-0.002283	-0.020259	0.049979	0.011129
16	-0.005875	-0.031099	-0.00658	-0.029708	-0.029065	0.007213
17	-0.003004	-0.0055	-0.006183	-0.0302	-0.028315	0.006101
18	-0.000731	0.008959	-0.006481	-0.030371	-0.025226	0.004527
19	0.001578	0.023023	-0.003963	-0.030297	-0.021498	0.003895
20	0.004577	0.048455	0.001913	-0.029912	-0.017089	0.004076
21	0	0	0	-0.033192	-0.069242	0.002982
22	0	0	0	-0.033882	-0.07169	0.001247
23	0	0	0	-0.034144	-0.069691	-0.001507
24	0	0	0	-0.034106	-0.066365	-0.004206
25	0	0	0	-0.033642	-0.060002	-0.004827

Chapitre IV : Exemples d'applications et comparaison des résultats

Nœuds	Les déplacements des nœuds suivant l'axe x			Les déplacements des nœuds suivant l'axe y		
	Mode N:4 W4=14067.89HZ	Mode N :5 W5=15632.62HZ	Mode N :6 W6=17218.97HZ	Mode N :4	Mode N :5	Mode N :6
1	0	0	0	0	0	0
2	0.010655	0.027349	0.000654	0.005248	-0.024399	-0.000199
3	0.002092	0.01632	0.000213	0.001338	-0.024831	-0.000265
4	0	0	0	0	0	0
5	-0.006059	0.02837	0.000272	-0.001996	-0.009425	-0.000095
6	0	0	0	0	0	0
7	-0.001699	0.024563	-0.000056	-0.000607	-0.001885	0.000106
8	0	0	0	0	0	0
9	0.002709	0.015595	-0.000045	0.000277	-0.001719	0.000225
10	0	0	0	0	0	0
11	0.006653	0.029742	-0.000485	0.001629	0.008339	-0.000158
12	0.00146	-0.002704	-0.000062	-0.000135	0.003016	0.000065
13	-0.006748	-0.002733	-0.00032	-0.003345	0.001795	0.000082
14	0.000778	-0.002152	0.000005	-0.001811	0.000006	-0.000002
15	0.006715	-0.028397	-0.000198	-0.000478	-0.005254	-0.00022
16	0.002398	-0.015585	0.000073	-0.002212	0.001411	0.000158
17	-0.00193	-0.027267	0.000047	-0.002404	0.00132	0.000093
18	-0.004935	-0.026489	0.000266	-0.002229	0.00716	-0.00006
19	0.003313	-0.010196	0.000273	0.001231	0.018547	-0.000174
20	0.009232	-0.024872	0.00043	0.003976	0.016757	-0.000199
21	0	0	0	0.002669	0.008583	0.000122
22	0	0	0	0.001671	0.002294	-0.000003
23	0	0	0	-0.000193	0.001921	-0.00013
24	0	0	0	0.000675	0.011778	-0.000223
25	0	0	0	0.003315	0.014855	-0.00012

Tableau (IV.21) déplacement des nœuds de chaque mode de 1 à 6

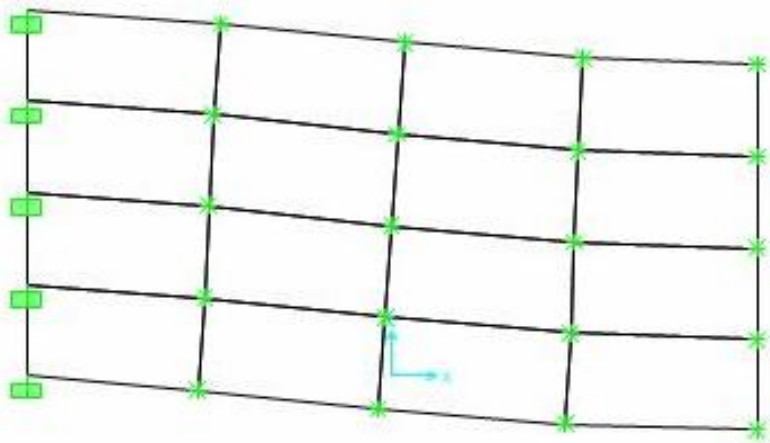


Figure (IV.10a) mode propre N°1 de fréquence propre $\omega = 2045.41\text{HZ}$

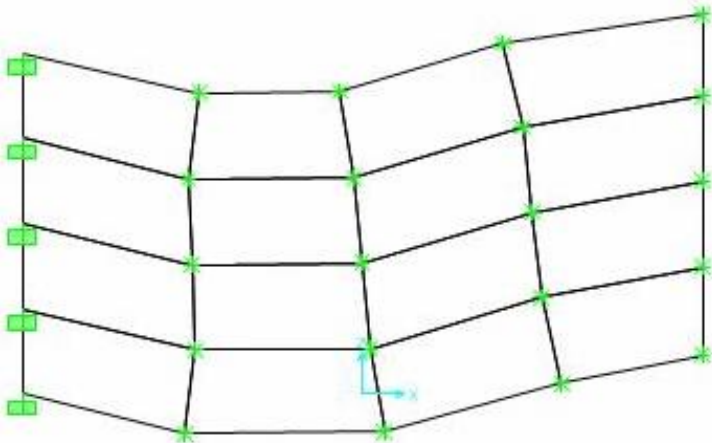


Figure (IV.10b) mode propre N°2 de fréquence $\omega = 7132.37\text{HZ}$

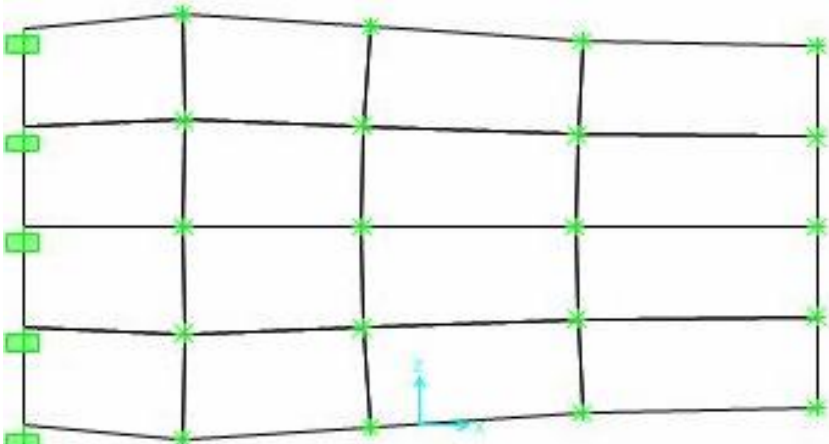


Figure (IV.10c) mode propre N°3 de fréquence $\omega = 13186.3\text{HZ}$

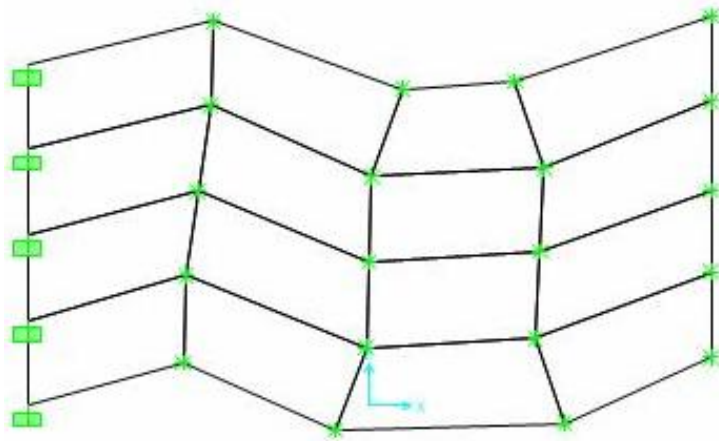


Figure (IV.10d) mode propre N°4 de fréquence $w= 14067.89\text{HZ}$

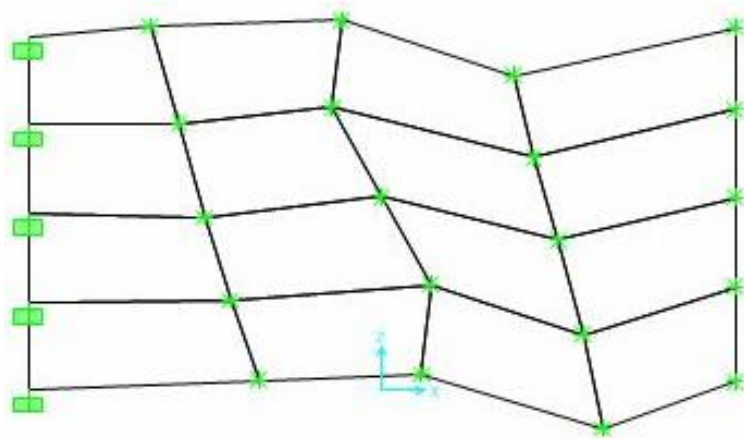


Figure (IV.10e) mode propre N°4 de fréquence $w= 15632.62\text{HZ}$

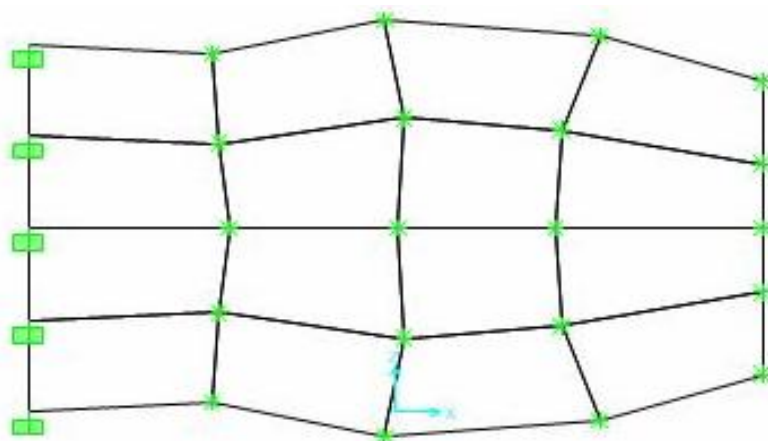


Figure (IV.10f) mode propre N° 4 de fréquence $w= 17218.97\text{HZ}$

Figure (IV.10) les 6 premiers modes propres de l'exemple 5

Conclusion générale

CONCLUSION :

La simulation est un moyen de conception et d'analyse indispensable dans la plupart des secteurs industriels. Par exemple, elle est employée dans la mécanique des automobiles, la conception ferroviaire, génie civil, aérospatial. Elle est ainsi devenue un outil pour la formation des compétences de l'ingénieur.

La simulation numérique des systèmes mécaniques ou physiques s'appuie sur plusieurs types de méthodes : en particulier les éléments finis (principes variationnels), les éléments de frontière (équations de champ linéaires mises sous forme d'équations intégrales), les différences finies (approximations de dérivées dans des équations différentielles ou aux dérivées partielles) et les volumes finis (forme intégrale des équations de conservation).

Le choix parmi ces approches dépend des particularités des équations constituant le modèle mathématique du système à simuler. On les utilise parfois de façon combinée : dissociation des variables d'espace et de temps, ou encore situations présentant des couplages multiphysiques.

La simulation du comportement mécanique des solides déformables et des systèmes composés de tels solides, cadre général de ce mémoire, repose le plus souvent sur la méthode des éléments finis.

La modélisation ne cesse d'occuper une place distinguée dans l'industrie du fait qu'il est moins onéreux de simuler un phénomène que de faire l'expérimentation.

Ce travail s'inscrit dans l'optique de mettre au point un programme en pascal permettant le calcul statique et dynamique des plaques minces en état plan de contrainte sous différentes conditions aux limites, voire la détermination en analyse statique des déplacements de chaque nœud, réactions, contraintes dans quelques points de l'élément et la détermination de la fréquence et des modes propres en analyse dynamique.

La comparaison des résultats obtenus avec ceux de logiciel SAP2000 montre une très bonne concordance.

Le cas des contraintes planes s'applique à de nombreux exemples comme les structures à parois minces, les structures comportant des voiles de raidissement, les poutres en caisson et les parfois les coques (les ponts, les réservoirs, les navires).

Enfin, en espérant que le programme établi sera développé pour faire le calcul des contraintes au voisinage de la fissure d'une plaque composite en mode I. et le calcul du taux de restitution d'énergie non linéaire qui caractérise la ténacité des matériaux dont le comportement est non linéaire

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUE

- [1] **R.Gallagher**, " Introduction aux éléments finis " , édition PLURALIS (1976).
- [2] **Yang.T.Y** " Finite element structural analysis" , Prentice-Hall (1986).
- [3] **J. Coirier**, "Mécanique des milieux continus " , Dunod, paris, édition (1997).
- [4] **Yves DEBARD** "RDM Compléments théoriques Bibliographie" I.U.T(2001)
- [5] **Soliman BELKAHLA** "Cours d'élasticité-plasticité" Publications de l'université Badji Mokhtar-Annaba ;
- [6] **F. Frey**, " Analyse des structures et milieux continus (mécanique des solides) " , Presses polytechniques Volume2 , édition (1999).
- [7] **François. Frey**, " Analyse des structures et milieux continus (Statique appliquée) " , Presses polytechniques, volume 1, édition (1990).
- [8] **J.Carrigues**, " Statiques des solides élastiques en petites déformations " , Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille, édition novembre (2001).
- [9] **O.Rahmani, et S.Kabdani**, " Introduction à la méthode des éléments finis pour les ingénieurs" , , office des publications universitaires, édition (1994)
- [10] **François. Frey**, " Analyse des structures et milieux continus (Mécanique des solides) " , volume3 Presses polytechniques, édition (1999).
- [11] **S.Laroze**, " Mécanique des structures" , Tome 3, édition (1992).
- [12] **Jean GARRIGUES** " La méthode des éléments finis" école Supérieure de Mécanique de Marseille, édition 2002
- [13] **B.Tie**, " Eléments finis en élasticité linéaire " , édition septembre (2000).
- [14] **François. Frey, et Jarostove. Jirousek**, " Analyse des structures et milieu continu par la méthode des éléments finis " , volume 6, Presses polytechniques, édition (2001)
- [15] **Paul RAPIN** " Méthode des éléments finis" Article, technique de l'ingénieur [A 656]
- [16] **Pierre SPITERI** " Présentation générale de la méthode des éléments finis" Article, technique de l'ingénieur [AF 505]
- [17] **R.Lalaonina**, " Dynamique des solides et structures par la méthode des éléments finis" , Université de Rennes Cours 2004/2005.
- [18] **Philippe.Fichou**, " La méthode des éléments finis " , Article, (2000-2001).
- [19] **L. Champagney**, "Vibration des systèmes continus " , Article, (2003).

Bibliographie

- [20] **Jean-Jacques BARRAU et Michel SUDRE** " Modélisation des structures par éléments finis" Article, technique de l'ingénieur [BM 5 015]
- [21] **Yves DEBARD** " Résolution d'un problème d'élasticité plane par la méthode des éléments finis " I.U.T (2001)
- [22] **Ph.Trompette,** " Mécanique des structures par la méthode des éléments finis (Statique et dynamique) " , édition, (1992).
- [23] **M.Lalanne, P.Berthier, J.Der Hagobian**" Mécanique des vibrations linéaires " , MASSON édition, (1995)
- [24] **A.Picard,** " analyse des structures " , édition Beauchemin (1992).
- [25] **G.Thomas,**" dynamique des structures " , édition, presses polytechniques, Lausanne (1997).
- [26] **S.Laroze,** " Mécanique des structures " , Tome 3, édition (1992).
- [27] **D.Euvrard,** " Résolution numérique des équations aux dérivées partielles" , édition MASSON Paris Milan Barcelone (1994).
- [28] **M.Bonnet** " Analyse des structures mécaniques par la méthode des éléments finis " , Ecole polytechnique (2005).
- [29] **David Dureisseix** " Méthodes numériques appliquées à la conception par éléments finis" Ecole polytechnique (2003)
- [30] **Jean-Jacques BARRAU et Michel SUDRE** "Modélisation des structures par éléments finis" Article, technique de l'ingénieur [BM 5 015]
- [31] **B. Necib,** " Analyse dynamique des structures discrètes par éléments finis " , cours, université de Constantine (1997).
- [32] **S. MEZIANI** " vibration" Polycopier du cours (2004).
- [33] **L. CHAMPANEY** "Méthodes Numériques pour la Mécanique" Notes de cours U de Versailles St-Quentin en Yvelines
- [34] **Jean GARRIGUES** " Mécanique des milieux continus " école Supérieure de Mécanique de Marseille, (2002)
- [35] **Jean COURBON et Jean-Noël THEILLOUT** " Résistance des matériaux" Article, technique de l'ingénieur [C 2 060]
- [36] **Jean COURBON** "Déformations et contraintes dans un milieu continu" Article, technique de l'ingénieur [A 303]
- [37] **Jean COURBON** " Plaques minces élastiques "Article, technique de l'ingénieur [A 310]