

# Université Mohamed Boudiaf - M'sila

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Numéro de série : .....

Numéro d'inscription :

## Thèse

Présentée pour l'obtention du diplôme de

**DOCTORAT SCIENCES**

**Spécialité : Mathématiques**

**Option : EDP**

THEME

## CONTRIBUTION A L'ETUDE DE QUELQUES PROBLEMES DE CONTACT EN VISCOELASTICITE

Présentée par

**OURAHMOUN Abbas**

Soutenu le : 28 / 10 / 2021

Devant le jury composé de:

<b>B. BENABDERRAHMANE</b>	Professeur	Université de M'sila	Président
<b>BOUDERAH Brahim</b>	Professeur	Université de M'sila	Encadreur
<b>LEBRI Nemira</b>	Professeur	Université de Setif 1	Co-encadreur
<b>DJABI Seddik</b>	Professeur	Université de Setif 1	Examineur
<b>GAGUI Bachir</b>	MCA	Université de M'sila	Examineur
<b>SERRAR Touffik</b>	Professeur	Université de Setif 1	Examineur

Année Universitaire 2020-2021

# Remerciements

---

*Ce travail est le résultat d'efforts et de recherches cumulés que je n'aurais pu réaliser sans l'appui de mon directeur de thèse le Pr. Bouderah Brahim dont je tiens spécialement à souligner l'importance de sa contribution, la confiance qu'il m'a accordée l'opportunité qu'il m'a offerte et son assistance riche de recommandations pour manager avec efficience ce projet de thèse.*

*Je souhaiterai ensuite remercier le Pr. Benyattou Benabderrahmane de l'université de M'sila de l'honneur qu'il m'incombe en acceptant de présider le jury de cette thèse.*

*Comme je ne saurai gratifier les honorables membres de jury de leur disponibilité et de leur consultation d'experts en occurrence:*

- B. Benyattou , professeur de l'université de Mohamed BOUDIAF de M'sila
- B. Gagui , MCA de l'université Mohamed BOUDIAF de M'sila
- T. Serrar , professeur de l'université FARHAT Abbas de Sétif
- S. Djabi, professeur de l'université FARHAT Abbas de Sétif.

*Pour ses efforts et ses encouragements à mon égard, un grand merci sincère au Pr. H. BENSIRIDI, vice-doyen de la faculté des sciences de l'université FARHAT Abbas de Sétif.*

*Enfin, je tiens à présenter mes sincères remerciements à Mme S. BOUTECHBAK , Professeur à l'université FARHAT Abbas de Sétif , pour sa gentillesse et toute l'aide qu'elle m'a procuré.*

*Pour tous ceux qui n'ont pas été cités et qui ont sûrement contribué à la concrétisation de ce projet de thèse, j'adresse un énorme hommage et gratitude.*

*A. Ourahmoun*

---

# Dédicace

---

*Je dédie ce travail à la mémoire de mes chers parents.*

*Tout particulièrement, mes sincères et authentiques*

*reconnaisances et remerciements vont à ma très*

chère femme

et mes enfants :

Oussama, Islam et Anas.

*A. Ourahmoun*

---

# Table des matières

Notations	2
<b>I Introduction</b>	<b>3</b>
1 Modélisation	10
<b>Modélisation</b>	<b>10</b>
1.1 <b>Cadre physique</b> . . . . .	10
1.1.1 Modèle . . . . .	10
1.1.2 Le problème mécanique . . . . .	12
1.2 <b>Les lois de comportement</b> . . . . .	13
1.2.1 Lois de comportement élastique . . . . .	13
1.2.2 Lois de comportement viscoélastique . . . . .	14
1.3 <b>Types de contact</b> . . . . .	16
1.3.1 Le contact unilatéral . . . . .	16
1.3.2 Le contact avec compliance normale . . . . .	16
1.3.3 Le contact avec réponse normale instantanée . . . . .	17
1.3.4 Le contact avec compliance normale et contrainte unilatérale . . . . .	17
1.4 <b>Types de frottement</b> . . . . .	17
1.4.1 Absence de frottement . . . . .	18
1.4.2 Le frottement de Tresca . . . . .	18
1.4.3 Frottement de Coulomb . . . . .	19

1.4.4	Le frottement non monotone . . . . .	19
1.4.5	Contact avec usure . . . . .	20
1.4.6	<b>Quelques types d'usure</b> . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Analyse fonctionnelle</b>	<b>24</b>
	<b>Analyse fonctionnelle</b>	<b>24</b>
2.1	<b>Espaces fonctionnels</b> . . . . .	24
2.1.1	Espaces $C^m(\bar{\Omega})$ . . . . .	24
2.1.2	Espaces $L^p$ . . . . .	25
2.1.3	Espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ . . . . .	25
2.1.4	Espaces fonctionnels en mécanique . . . . .	26
2.2	<b>Analyse non linéaire</b> . . . . .	28
2.2.1	Opérateurs non linéaires . . . . .	28
2.2.2	Opérateurs à mémoire longue . . . . .	29
2.2.3	Les inégalités variationnelles . . . . .	30
2.2.4	Lemme de Grönwall. . . . .	32
<b>II</b>	<b>Analyse mathématique de quelques problèmes de contact</b>	<b>33</b>
<b>3</b>	<b>Etude d'un problème de contact statique élastique avec compliance normale</b>	<b>35</b>
		<b>35</b>
3.1	<b>Position du problème</b> . . . . .	35
3.2	<b>Hypothèses</b> . . . . .	36
3.3	<b>Formulation Variationnelle</b> . . . . .	38
3.4	<b>Existence et unicité</b> . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Etude d'un problème de contact quasistatique viscoélastique avec mémoire longue et réponse normale instantanée</b>	<b>45</b>

	<b>45</b>
4.1 Position du problème . . . . .	45
4.2 Hypothèses . . . . .	46
4.3 Formulation Variationnelle . . . . .	48
4.4 Existence et unicité . . . . .	51
<b>5 Etude d'un problème de contact élastique quasistatique avec usure et contrainte unilatérale</b>	<b>56</b>
	<b>56</b>
5.1 Position du problème . . . . .	57
5.2 Hypothèses . . . . .	59
5.3 Formulation Variationnelle . . . . .	60
5.4 Existence et unicité de la solution . . . . .	62

# Notation

Si  $\Omega$  est un domaine de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ), on note par

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de $\Omega$ ,
$\Gamma$	la frontière de $\Omega$ supposée régulière,
$\text{meas } \Gamma_1$	la mesure de Lebesgue $(d - 1)$ dimensionnelle de $\Gamma_1$ ,
$\Gamma_i (i = \overline{1, 3})$	une partie mesurable de $\Gamma$ ,
$\nu$	la normale unitaire sortante à $\Gamma$ ,
$v_\nu, v_\tau$	les composantes normales et tangentielles du champ vectoriel $v$
$\sigma_\nu, \sigma_\tau$	les composantes normales et tangentielles du champ tensoriel $\sigma$

Quelques espaces utiles

$C^1(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\Omega$
$H$	l'espace $\mathbb{L}^2(\Omega)^d$ ,
$H_1$	l'espace $H^1(\Omega)^d$ ,
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur $\Gamma$ ,
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ,
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si  $X$  est un espace de Hilbert réel, on utilise les notations suivantes

$(\cdot, \cdot)_X$	le produit scalaire de $X$ ,
$(\cdot, \cdot)_{X' \times X}$	le produit de dualité entre $X'$ et $X$ ,
$ \cdot _X$	la norme de $X$ ,
$x_n \rightharpoonup x$	la convergence faible de la suite $(x_n)$ vers l'élément $x$ dans $X$
$x_n \rightarrow x$	la convergence forte de la suite $(x_n)$ vers l'élément $x$ dans $X$ .

Si de plus  $[0, T]$  est un intervalle de temps,  $k \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq p \leq +\infty$ , on note par

$C([0, T]; H)$	l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans $H$
$C^1([0, T]; H)$	l'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans $H$
$ \cdot _{\mathbb{L}^p(0, T; H)}$	la norme de $\mathbb{L}^p(0, T; H)$ ,
$W^{k, p}(0, T; H)$	l'espace de Sobolev où $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty[$
$ \cdot _{W^{k, p}(0, T; H)}$	la norme de $W^{k, p}(0, T; H)$ ,

Pour une fonction  $f$  ; on note par :

$\dot{f}$ , $\ddot{f}$	la dérivée première et seconde de $f$ par rapport au temps
$\text{dom } f$	le domaine de $f$ ;
$\text{supp } f$	le support de $f$ ,
$\partial_i f$ , $f_{,i}$	la dérivée partielle de $f$ par rapport à la $i$ ème composante $x_i$ ,
$\nabla f$	le gradient de $f$ ,
$\text{Div } \sigma$	la divergence de tenseur $\sigma$ ,
$\text{div } f$	la divergence $f$ .

Autre notations

$\liminf$	la limite inférieure,
$\limsup$	la limite supérieure,
$D(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact
$D(\Omega)^d$	$\{\varphi = (\varphi_i), \varphi_i \in D(\Omega), i = 1, \dots, d\}$
$C_0^\infty(\Omega)^d$	$\{f \in C^\infty(\Omega)^d, f = 0 \text{ sur } \Gamma\}$
$\mathbb{S}^d$	espace des tenseurs d'ordre deux symétriques sur $\mathbb{R}^d$ .
"."	le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$ ,
$ \cdot $	la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$ ,
$C$	une constante générique strictement positive,
$p.p$	presque partout,

# Première partie

## Introduction

# Introduction

*Le contact entre corps déformables est un phénomène fréquemment rencontré dans l'industrie et dans la vie quotidienne. Le contact des patins de freinage avec la roue, du pneu avec la route, du piston avec la chemise et du train d'atterrissage avec le sol ne sont que des exemples quotidiens simples. En raison de l'importance de ces processus, la modélisation et les simulations numériques ont fait l'objet d'un effort considérable. La littérature en ingénierie sur ce sujet est vaste [14 – 21]. Dans la littérature en mathématiques appliquées, les modèles généraux pour les processus de contact dynamiques ou quasi-statiques sont récents. Les phénomènes de contact sont modélisés par des problèmes non linéaires difficiles, ce qui explique la lenteur des progrès de leur analyse mathématique. Lorsque deux surfaces entrent en contact, il se produit un réarrangement des aspérités de surface [30]. Les aspérités de surface deviennent plus souples et le glissement devient plus lisse. Clairement, ces changements affectent le processus des frottements. Par conséquent, lorsque nous décrivons le cadre physique, il est nécessaire de prendre en considération le changement ou l'évolution des conditions aux limites de contact qui en résultent [1].*

***A. Coulomb** à partir d'expériences multiples, confirme les lois d'**Amonton**. Il pose le problème de la dépendance de la rugosité à l'adhésion. **H. Tresca** (1814-1885) ingénieur en mécanique, aboutit dans ces travaux sur la résistance des matériaux à un critère maximal de résistance d'un matériau aux efforts de cisaillement connu sous le nom de critère de Tresca. Toutefois à la fin du 18<sup>ème</sup> siècle, on s'intéresse peu à peu au problème de contact, il faut attendre **Hertz** vers 1880 qui énonce des résultats sur les déformations induites par le contact élastique. **A. Signorini** en 1933 pose le problème général de l'équilibre d'un corps élastique en contact sans frottement avec une fondation rigide [7, 11]. La théorie de l'analyse variationnelle des problèmes de contact qui inclut l'existence et l'unicité de la*

solution des différents problèmes à l'aide des inéquations variationnelles a été fortement développée vers 1970. **H.Bresiz** a notamment obtenu des résultats faisant intervenir des méthodes de dualité convexe et la théorie des sous-différentiels. **G.Duvaut** et **J.Lions** dans la continuité de l'étude des problèmes aux limites de contact avec frottement ont utilisé la minimisation de la fonctionnelle de l'énergie [31, 32].

Receemment **M.Sofonea**, **F.Patrulescu** et **Y.Souleiman**, dans leur article "Analysis of contact problem with wear and unilateral constraint" [29] ont considéré un problème de contact avec usure et contrainte unilatérale où ils ont étudiés le problème de l'existence et l'unicité de la solution faible. Dans la continuité de leurs travaux nous avons considéré un problème de contact similaire où nous avons changé les lois de frottement avec compliance normale et contrainte unilatérale avec usure, où nous avons donné des résultats concernant l'existence et l'unicité de la solution faible en utilisant des arguments des inéquations variationnelles

Cette thèse se compose de deux parties. La première partie est composée de deux chapitres. Le premier chapitre se penche sur les outils nécessaires pour une bonne compréhension des problèmes traités, tels que la présentation du cadre physique et le modèle mathématique utilisé. Le deuxième chapitre est consacré aux espaces fonctionnels et aux principales notations utilisées, nous rappelons quelques résultats fondamentaux d'analyse non linéaire, tels que les espaces de Sobolev et quelques types d'inéquations variationnelles utilisés pour les démonstrations de l'existence et l'unicité de la solution [1,8]. La deuxième partie concerne l'analyse mathématique de quelques problèmes de contact et est composée de trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré à l'étude d'un problème de contact statique avec **compliance normale et contrainte unilatérale**. Le problème mécanique est formulé comme suit :

*Problème 1.* Trouver un champ de déplacements  $u : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$  et un champ de contraintes  $\sigma : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow S^d$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma = \mathcal{F}_\varepsilon(u) & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{Div} \sigma + f_0 = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \sigma \nu = f_2 & \text{sur } \Gamma_2 \\ \left. \begin{array}{l} u_\nu \leq g, \sigma_\nu + p(u_\nu) \leq 0 \\ (u_\nu - g)(\sigma_\nu + p(u_\nu)) = 0 \end{array} \right\} & \text{sur } \Gamma_3 \\ \left. \begin{array}{l} \|\sigma_\tau\| \leq \mu(\|u_\tau\|) p(u_\nu) \\ -\sigma_\tau = \mu(\|u_\tau\|) p(u_\nu) \frac{u_\tau}{\|u_\tau\|} \quad \text{si } u_\tau \neq 0 \end{array} \right\} & \text{sur } \Gamma_3 \end{array} \right.$$

Dans ce problème le contact est statique modélisant l'interaction entre un corps de type élastique et une fondation déformable. Le contact suit une loi de complianse normale couplée aux conditions de Signorini, le frottement quand à lui est supposé non monotone. Dans la première section de ce chapitre on propose une formulation forte du problème, puis dans la deuxième section on cite quelques hypothèses sur les données. Dans la troisième section, nous donnons une formulation faible et enfin dans la quatrième section nous abordons la question d'existence et d'unicité de la solution faible. La démonstration est basée sur un résultat général des inéquations variationnelles [31].

Le deuxième chapitre est dédié à l'étude d'un problème de contact quasi statique viscoélastique avec mémoire longue et réponse normale instantanée. Le problème mécanique est décrit par :

*Problème 2.* Trouver un champ de déplacements  $u : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$  et un champ de contraintes  $\sigma : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow S^d$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t \theta(t-s)\varepsilon(\dot{u}(t))ds \quad \text{dans } \Omega \\ \operatorname{Div}(\sigma(t)) + f_0(t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \\ \sigma(t)\nu = f_2(t) \quad \text{sur } \Gamma_2 \\ \left. \begin{array}{l} \dot{u}_\nu(t) \leq g \quad , \quad \sigma_\nu(t) + p(\dot{u}_\nu(t)) \leq 0 \\ (\dot{u}_\nu(t) - g)(\sigma_\nu(t) + p(\dot{u}_\nu(t))) = 0 \end{array} \right\} \text{sur } \Gamma_3 \\ \left. \begin{array}{l} \|\sigma_\tau(t)\| \leq \mu p(\dot{u}_\nu(t)) \\ -\sigma_\tau(t) = \mu p(\dot{u}_\nu(t)) \frac{\dot{u}_\tau(t)}{\|\dot{u}_\tau(t)\|} \quad \text{si } \dot{u}_\tau(t) \neq 0 \end{array} \right\} \text{sur } \Gamma_3 \\ u(0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Dans ce problème le contact est quasi statique modélisant le contact entre un corps viscoélastique avec mémoire longue et un obstacle faisant figure de fondation. Le contact cette fois est en compliance normale mais formulée en vitesse avec les conditions de réponse normale instantanée. Dans la première section du chapitre nous présentons la formulation forte du problème mécanique considéré, puis dans la deuxième section nous formulons quelques hypothèses nécessaires à l'obtention d'une formulation variationnelle. Dans la section 3 nous donnons la formulation variationnelle du problème considéré. Enfin dans la section 4, nous abordons la question de l'existence et l'unicité de la solution faible. La démonstration est basée sur un résultat général des inéquations variationnelles perturbées [31].

Le troisième chapitre traite **un problème de contact avec usure et contrainte unilatérale** qui a été sanctionné par une publication [23].

**Problème3.** Trouver un champ de déplacements  $u : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$  et un champ de contraintes  $\sigma : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow S^d$  et la fonction d'usure  $w : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(t) = \mathcal{F}_\varepsilon(u(t)) \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ \text{Div}(\sigma) + f_0(t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ u(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \\ \sigma(t)v = f_2(t) \quad \text{sur } \Gamma_2 \times \mathbb{R}_+ \\ \left\{ \begin{array}{l} u_v(t) \leq g, \sigma_v(t) + p(u_v(t) - w(t)) \leq 0 \\ (u_v(t) - g)(\sigma_v(t) + p(u_v(t) - w(t))) = 0 \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \\ \sigma_\tau(t) = \mu p(u_v(t) - w(t))n^*(t) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \\ \dot{w}(t) = \alpha(t)p(u_v(t) - w(t)) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \\ w(0) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \end{array} \right.$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Dans ce chapitre nous abordons un problème de contact glissant entre un corps de loi constitutive non linéaire élastique et une fondation déformable. La différence réside dans le fait que dans ce cas nous prenons en compte l'usure de la surface de contact. Ceci revient à introduire la fonction d'usure comme une nouvelle variable qui satisfait la loi d'Archardet de ce fait le processus est quasistatique. Dans la première section de ce chapitre nous écrivons le problème mécanique, puis dans la deuxième section nous formulons les hypothèses nécessaires. Dans la troisième section nous obtenons la formulation faible du problème. Enfin dans la quatrième section nous démontrons notre résultat principal d'existence et d'unicité de la solution faible. La démonstration est faite en deux étapes où on utilise un résultat général des inéquations variationnelles pour les déplacements et le théorème de point fixe pour la fonction d'usure [4, 6, 9].

Nous terminons ce manuscrit par une conclusion concernant les différents travaux effectués et quelques perspectives.



# Chapitre 1

## Modélisation

### 1.1 Cadre physique

#### 1.1.1 Modèle

Dans ce premier chapitre, on va introduire le cadre physique et quelques notions de la mécanique des milieux continus.

Soit un corps matériel occupant une partie  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ) munie d'une frontière Lipschitzienne  $\Gamma$  subdivisée en trois parties mesurables  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  telles que  $mes(\Gamma_1) > 0$ . Le corps est en équilibre sous l'action de forces volumiques de densité  $f_0$ . Des forces de tractions de densité  $f_2$  agissent sur  $\Gamma_2$ . Le corps est encastré sur  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$  désigne la partie de contact entre le corps et la fondation.

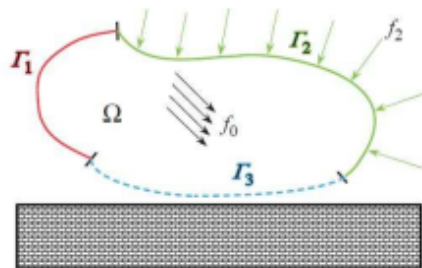


Figure1 :Cadre physique

**Notations.** L'ensemble  $\mathcal{S}^d$  représente l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur  $\mathbb{R}^d$ . On note le produit scalaire et la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathcal{S}^d$  par

$$u \cdot v = u_i \cdot v_i \quad ; \quad |v| = (v, v)^{\frac{1}{2}}, \forall u, v \in \mathbb{R}^d$$

$$\sigma \cdot \tau = \sigma_{ij} \cdot \tau_{ij} \quad ; \quad |\tau| = (\tau, \tau)^{\frac{1}{2}}, \forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}_d$$

Pour un vecteur  $v$  nous désignerons par  $v_\nu$  et  $v_\tau$  les composantes normale et tangentielle à la frontière.

$$v_\nu = v \cdot \nu, v_\tau = v - v_\nu \nu \tag{1.1}$$

Nous notons par  $\sigma$  le champ des contraintes,  $u$  le champ des déplacements et par  $\varepsilon(u)$  le champ des déformations linéarisés.

Pour le champ des contraintes  $\sigma$  nous dénotons par  $\sigma_\nu$ ,  $\sigma_\tau$  les composantes normale et tangentielle à la frontière, à savoir

$$\sigma_\nu = (\sigma \nu) \cdot \nu \quad ; \quad \sigma_\tau = \sigma \nu - \sigma_\nu \nu \tag{1.2}$$

En utilisant 1.1 et 1.2

$$(\sigma \nu) \cdot v = \sigma_\nu \cdot v_\nu + \sigma_\tau \cdot v_\tau \tag{1.3}$$

qui va intervenir tout au long de ce mémoire, dans l'établissement des formulations variationnelles des problèmes mécaniques de contact.

En outre les points au-dessus des fonctions représentent la dérivée par rapport au temps,

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} \quad , \quad \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

où  $\dot{u}$  désigne le champ des vitesses et  $\ddot{u}$  désigne le champ des accélérations et  $\dot{u}_\nu$  et  $\dot{u}_\tau$  désignent respectivement la vitesse normale et tangentielle à la frontière  $\Gamma$  telles que

$$\dot{u}_\nu = \dot{u} \cdot \nu \quad , \quad \dot{u}_\tau = \dot{u} - \dot{u}_\nu \cdot \nu \tag{14}$$

Nous rappelons maintenant la relation déformation-déplacement dans l'hypothèse des petites déformations :

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)) , \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), 1 \leq i, j \leq d \quad (1.5)$$

### 1.1.2 Le problème mécanique

Nous proposons dans ce qui suit l'étude mathématique qui décrit le mouvement d'un corps déformable en contact avec une fondation. On cherche à déterminer le champ de déplacements  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  et le champ de contraintes  $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathcal{S}^d, T > 0$ . Le problème est défini par l'équation du mouvement de Cauchy qui est dans le cas dynamique comme suit

$$Div\sigma + f_0 = \rho\ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times [0, T]. \quad (1.6)$$

$f_0$  décrit les forces volumiques appliquées au corps  $\Omega$  et  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  étant la densité de masse. Si le processus est quasistatique, l'équation (1.6) devient

$$Div\sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T]. \quad (1.7)$$

L'équation (1.7) est une équation d'équilibre, dans le cas statique, elle est valable dans  $\Omega$ .

Puisque le corps est fixé en  $\Gamma_1$ , le champ des déplacements est donc dans ce cas nul,

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0, T]. \quad (1.8)$$

La condition aux limites en traction du corp peut s'écrire sous la forme suivante

$$\sigma\nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times [0, T], \quad (1.9)$$

où  $f_2$  désigne les forces de traction surfacique sur  $\Gamma_2$ .

Plaçons nous dans le cas où  $d = 3$ . En faisant un bilan des équations scalaires disponibles et des inconnues scalaires à déterminer (Tableau ), il est facile de voir que :

Inconnues scalaires à déterminer	Equations scalaires disponibles
Déplacement : 3	Equation d'équilibre : 3
Déformation : 6	Relations déplacement/déformation : 6
Contraintes : 6	
Inconnues : 15	Equations : 9

Tableau : bilan des équations scalaires disponibles et des inconnues scalaires à déterminer.

Le problème tel qu'il est posé souffre d'un déficit de 6 équations par rapport aux inconnus. C'est la raison pour laquelle nous devons les compléter par des lois de comportement.

## 1.2 Les lois de comportement

Une loi de comportement, ou une loi constitutive, établit une relation entre le champ des contraintes  $\sigma$  et le champ des déformations  $\varepsilon$ . De telles lois proviennent de résultats expérimentaux au cours desquels il est réalisé toute une série d'essais.

Dans ce qui suit, nous allons définir quelques lois de comportement que nous utilisons dans les chapitres à venir.

### 1.2.1 Lois de comportement élastique

Un milieu homogène est dit élastique s'il existe un état de référence sans contrainte et si le tenseur des contraintes ne dépend que du tenseur des déformations infinitésimal  $\varepsilon$  calculé à partir de cet état de référence, i.e :

$$\sigma = \mathcal{F}(\varepsilon) \tag{1.10}$$

Où  $\mathcal{F}$  est une fonction pouvant être linéaire ou non linéaire. Si le milieu est élastique linéaire, il y a alors une relation linéaire entre le tenseur des contraintes  $\sigma$  et le tenseur des déformations infinitésimales  $\varepsilon$  dont il est possible de caractériser le comportement par la loi de Hooke qui, dans le cas tridimensionnel est donnée comme suit

$$\sigma = \mathcal{E}\varepsilon(u) \tag{1.11}$$

où  $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl})$  est le tenseur d'élasticité d'ordre 4.

$$\mathcal{E}_{ijkl} = \mathcal{E}_{jikl} = \mathcal{E}_{ijlk}$$

Nous donnons un exemple de loi définissant un comportement élastique non linéaire comme suit

$$\sigma = \mathcal{F}(\varepsilon) = \begin{cases} E\varepsilon + \beta(\varepsilon + \varepsilon_0) & \text{si } \varepsilon < \varepsilon_0 \\ E\varepsilon & \text{si } |\varepsilon| \leq \varepsilon_0 \\ E\varepsilon + \beta(\varepsilon - \varepsilon_0) & \text{si } \varepsilon > \varepsilon_0 \end{cases} \quad (1.12)$$

où  $\beta$  est une constante positive et  $E$  est le module Young.

## 1.2.2 Lois de comportement viscoélastique

### a) Lois de comportement viscoélastique à mémoire courte

Dans la pratique le comportement élastique est insuffisant pour définir tous les phénomènes tels que la relaxation ou le fluage. On peut voir que si la déformation est maintenue à une valeur fixée  $\varepsilon_0$ , alors la contrainte sera également fixée à  $\sigma(\varepsilon_0)$  et ce, en toute circonstance là où certains matériaux présentent une phase transitoire. Même chose si c'est cette fois la contrainte qui est maintenue à une valeur fixée ; la déformation sera également fixée. C'est la raison pour laquelle il est nécessaire de faire intervenir d'autres types de modèles pour définir les matériaux tels que les polymères.

**Le modèle de Maxwell.** Avec les règles précédemment énoncées et après un calcul élémentaire, on constate que le modèle viscoélastique de Maxwell a pour loi constitutive

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\eta} + \frac{\dot{\sigma}}{E} \quad (1.13)$$

Il s'agit de connecter en série un piston et un ressort, comme montré ci-dessous.

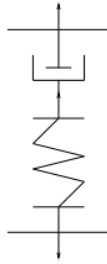


Figure 2 : modèle de Maxwell

avec  $E$  et  $\eta$ , le module de Young et le coefficient de Newton respectivement.

**Le modèle de Kelvin-Voigt** Ce modèle s'obtient en mettant en série deux ou plusieurs modèles de Kelvin-Voigt. On peut également généraliser le modèle de Kelvin-Voigt dans le cas multidimensionnel de la manière suivante :

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon} + E\varepsilon \quad (1.14)$$

Le modèle de Kelvin-Voigt généralisé est défini par

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{B}\varepsilon(u) \quad (1.15)$$

On y considère un ressort et un piston disposés en parallèle, comme montré ci dessous.

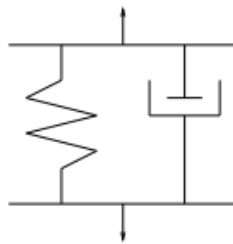


Figure 3 : modèle de Kelvin Voigt

### b) Lois de comportement viscoélastique avec mémoire longue

Une loi de comportement d'un matériau viscoélastique avec mémoire longue est définie comme suit

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\varepsilon(u(s))ds$$

où  $\mathcal{A}$  est l'opérateur d'élasticité  $\mathcal{B}$  est l'opérateur de relaxation. Dans ce cas le tenseur des contraintes  $\sigma = (\sigma_{ij})$  est donné par

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u(t)) + \int_0^t b_{ijkl}(t-s)\varepsilon_{kl}(u(s))ds$$

où  $a_{ijkl}$  et  $b_{ijkl}$  représentent respectivement les composantes du tenseur d'élasticité et de relaxation.

## 1.3 Types de contact

### 1.3.1 Le contact unilatéral

Proposée par **Signorini**, cette loi de contact est décrite par les trois conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Condition de non pénétration} & u_v \leq 0 \\ \text{Condition de compression} & \sigma_v \leq 0, \\ \text{Condition de complémentarité} & \sigma_v u_v = 0. \end{array} \right. \quad (1.16)$$

Physiquement, cela revient à considérer une fondation parfaitement rigide ; peu importe la force de compression appliquée il n'y aura aucune pénétration. La condition de complémentarité traduit simplement que :

- Si  $u_v = 0$ , il y a contact et la force normale de contact est négative ( $\sigma_v \leq 0$ ),
- Si  $u_v < 0$ , il n'y a pas contact et dans ce cas la force de contact est nulle ( $\sigma_v = 0$ ).

### 1.3.2 Le contact avec compliance normale

La contrainte normale  $\sigma_v$  satisfait la condition suivante :

$$-\sigma_v = p(u_v) \quad (117)$$

où  $p$  désigne une fonction donnée à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ . La représentation de la loi de compliance normale dépend de la fonction de compliance  $p$  choisie.

### 1.3.3 Le contact avec réponse normale instantanée

Dans ce type de contact, la contrainte normale  $\sigma_v$  obéit à la condition suivante :

$$-\sigma_v = p(\dot{u}_v) \quad (1.18)$$

où  $p$  est fonction de la vitesse normale à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ .

### 1.3.4 Le contact avec compliance normale et contrainte unilatérale

Nous allons donc considérer un cas de matériau parfaitement rigide sur lequel repose une couche d'aspérités déformables d'épaisseur  $g$ , limitant ainsi la pénétration. Une telle loi est définie par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_v \leq g, \sigma_v + p(u_v) \leq 0 \\ (u_v - g)(\sigma_v + p(u_v)) = 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

Dans ce qui suit nous pouvons faire les observations suivantes :

- Si  $0 \leq u_v \leq g$ , alors la contrainte normale  $\sigma_v$  est une fonction univoque de  $u_v$  (compliance normale).
- Si  $u_v = g$ , cela signifie que la couche d'aspérités a été complètement écrasée.
- Si on fait tendre  $g$  vers 0, la couche d'aspérités disparaît ; nous retrouvons la loi de contact unilatéral.
- Si on fait tendre  $g$  vers  $\infty$ , la fondation n'est plus constituée que d'un matériau déformable ; nous retrouvons la loi de compliance normale.

## 1.4 Types de frottement

Nous considérons à présent les conditions portant sur la frontière de contact  $\Gamma_3$  (respectivement  $\Gamma_3 \times [0, T]$  dans un cas évolutif) mettant en relation la contrainte tangentielle  $\sigma_\tau$

d'une part, et la contrainte normale  $\sigma_v$ , la vitesse tangentielle  $\dot{u}_\tau$  et le déplacement tangentiel  $u_\tau$  :

### 1.4.1 Absence de frottement

C'est la condition la plus simple qui soit dans laquelle on considère une surface idéalisée ne présentant pas de frottement, c'est à dire :

$$\sigma_\tau = 0 \tag{1.20}$$

Notons malgré tout qu'une telle approximation de la réalité reste raisonnable dans quelques situations, rendant ainsi tout à fait licite son utilisation dans de nombreux problèmes

### 1.4.2 Le frottement de Tresca

Nous supposons ici que le seuil de contrainte  $F_{tres} > 0$  est fixé. Si la contrainte tangentielle est inférieure en norme au seuil, alors il y a adhérence entre le corps et la fondation. Si parcontre ce seuil est atteint, alors le corps glisse sur la fondation tandis que la contrainte tangentielle s'oppose au mouvement

Il en existe deux versions, selon le type de processus considéré.

#### Cas statique

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq F_{tres} & \dots\text{adhérence} \\ -\sigma_\tau = F_{tres} \frac{u_\tau}{\|u_\tau\|} & \text{si } u_\tau \neq 0 \dots \text{glissement} \end{cases} \tag{1.21}$$

#### Cas évolutif

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq F_{tres} & \dots\text{adhérence} \\ -\sigma_\tau = F_{tres} \frac{\dot{u}_\tau}{\|\dot{u}_\tau\|} & \text{si } \dot{u}_\tau \neq 0 \dots \text{glissement} \end{cases} \tag{1.22}$$

### 1.4.3 Frottement de Coulomb

Il s'agit de la loi de frottement la plus utilisée dans la littérature. Dans le cas de la loi de frottement de Coulomb, à la différence de la loi de frottement de Tresca, le seuil limite n'est plus fixé et dépend à présent du coefficient de frottement  $\mu$  et de la contrainte normale de contact  $\sigma_\nu$ . La loi de frottement de Coulomb va alors mettre en concurrence, via le coefficient de frottement  $\mu$ , la contrainte tangentielle de frottement  $\sigma_\tau$  et la contrainte normale de contact  $\sigma_\nu$ . De fait, comme pour la loi de Tresca, il en existe deux versions selon le type de processus considéré.

#### Cas statique

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu |\sigma_\nu| & \dots \text{ adhérence} \\ -\sigma_\tau = \mu |\sigma_\nu| \frac{u_\tau}{\|u_\tau\|} & \text{si } u_\tau \neq 0 \text{ glissement} \end{cases} \quad (1.23)$$

#### Cas évolutif

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu |\sigma_\nu| & , \dots \text{ adhérence} \\ -\sigma_\tau = \mu |\sigma_\nu| \frac{\dot{u}_\tau}{\|\dot{u}_\tau\|} & , \text{si } \dot{u}_\tau \neq 0 \text{ glissement} \end{cases} \quad (1.24)$$

### 1.4.4 Le frottement non monotone

Cette loi de frottement est caractérisée par un contact de type compliance normale, elle est définie comme suit

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu (\|u_\tau\|) p(u_\nu) \\ -\sigma_\tau = \mu (\|u_\tau\|) p(u_\nu) \frac{u_\tau}{\|u_\tau\|} & \text{si } u_\tau \neq 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

Cette loi de frottement est caractérisée par un seuil de glissement  $\mu (\|u_\tau\|) p(u_\nu)$  qui dépend à présent du coefficient de frottement  $\mu$  et de la contrainte normale de contact définie par la fonction de compliance normale.

1. Dans un cas statique la non monotonie du coefficient de frottement  $\mu$  peut alors être caractérisée par une dépendance en fonction de la norme du déplacement tangentiel  $\|u_\tau\|$  qui peut prendre la forme suivante :

$$\mu(r) = (a - b)e^{-\alpha r} + b$$

avec  $a, b, \alpha$  des nombres positifs.

2. Dans le cas où nous considérons un contact de type compliance normale avec contraintes unilatérales (1.26), nous pouvons proposer pour un processus évolutif une loi de frottement légèrement différente de la précédente sous la forme

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu(u_\nu)\sigma_\nu \\ -\sigma_\tau = \mu(u_\nu)\sigma_\nu \frac{\dot{u}_\tau}{\|\dot{u}_\tau\|} \end{cases} \quad \text{si } \dot{u}_\tau \neq 0 \quad (1.26)$$

pour laquelle le coefficient de frottement  $\mu$  est à présent une fonction du déplacement normal  $u_\nu$ .

### 1.4.5 Contact avec usure

L'expérience primaire montre que lorsque deux surfaces se trouvent en contact glissant leur usure se produit. Dans la littérature, la prise en compte de ce phénomène se fait à l'aide d'une variable de surface, la fonction d'usure, ci-après notée  $w$ .

La condition de contact avec compliance normale, contrainte unilatérale et usure se formule de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_\nu \leq g, \sigma_\nu + p(u_\nu - w) \leq 0 \\ (u_\nu - g)(\sigma_\nu + p(u_\nu - w)) = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \quad (1.27)$$

En supposant maintenant que la contrainte normale satisfait une loi de compliance normale avec usure :

$$-\sigma_\nu = p(u_\nu - w) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \quad (1.28)$$

**Loi d'Archard** : l'évolution de la fonction d'usure est décrite dans la littérature par la loi d'Archard suivante :

$$\dot{w} = k |\sigma_\nu| \|v\| \quad \text{sur } \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \quad (1.29)$$

Ici  $k$  représente le coefficient d'usure. Dans le cas d'un contact glissant, la loi (1.29), devient

$$\dot{w} = k |\sigma_\nu| \|\dot{u}_\tau - v^*\| \quad \text{sur } \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \quad (1.30)$$

où  $v^*$  représente la vitesse de la fondation.

### 1.4.6 Quelques types d'usure

L'usure tribologique et la biotribo-corrosion définissent l'usure comme un phénomène complexe subséquent à de nombreux processus mécaniques ou chimiques. Ainsi, cinq notions sont à définir.

**Usure de deux corps** microscopique, aucune surface n'est totalement lisse, ainsi, les aspérités de chacune se rencontrent. Durant les mouvements, les surfaces vont se déformer ou se fracturer l'une, l'autre. Si les deux surfaces sont fragiles, il y aura une fracture des aspérités.

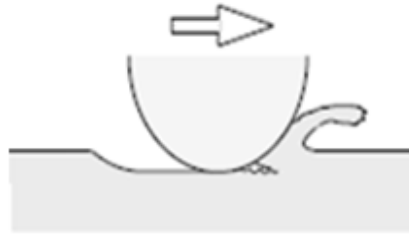


Figure 2. Usure abrasive.

**Usure de trois corps** Dans ce type d'abrasion, les deux surfaces ne sont plus en contact direct, un troisième matériau s'interpose entre elles. En bouche, ce type d'usure se manifeste lors de la mastication. Le troisième matériau est alors le bol alimentaire. Le phénomène d'usure dépend alors du potentiel abrasif de l'alimentation.

**Usure par fatigue** Certains mouvements des molécules de surface sont transférés en subsurface entraînant une rupture des liaisons intermoléculaires et une zone de fragilité en subsurface. Ces zones de fragilité peuvent se rejoindre, on peut alors observer une perte de fragment de matériau, c'est l'usure par fatigue.



Figure3.Usure par fatigue

**Usure tribochimique( ou érosion dentaire).** Ce n'est pas un processus d'usure à proprement parler. Certains éléments en contact avec les surfaces, de par leurs compositions chimiques, peuvent fragiliser les liaisons intermoléculaires de surface, et ainsi potentialiser les autres processus d'usure.

**Usure adhésive** Ce phénomène se produit lorsqu'il y a une pression forte entre les surfaces, pouvant entraîner une « soudure à froid » entre les aspérités des différentes surfaces. Si le processus continue, les zones soudées se fracturent, mais pas au niveau de la ligne originale de fusion. On retrouve ainsi des plaques de matériaux qui se séparent d'une surface pour se « souder » à l'autre. Ce phénomène est habituellement associé aux métaux, mais se retrouve aussi sur des polyméthacrylates de méthyle

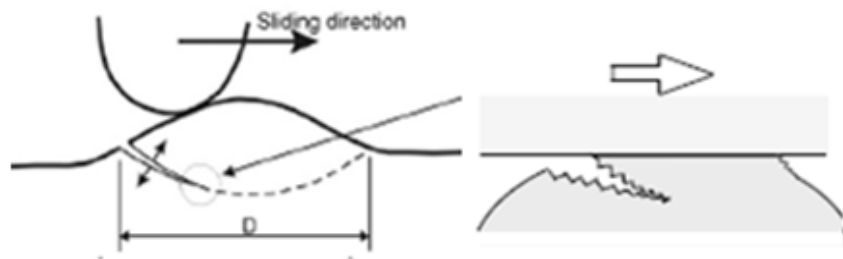


Figure4. Usure adhésive

# Chapitre 2

## Analyse fonctionnelle

*Nous allons introduire dans ce qui suit l'ensemble des espaces fonctionnels utilisés ainsi que quelques résultats d'analyse non linéaire.*

### 2.1 Espaces fonctionnels

#### 2.1.1 Espaces $C^m(\bar{\Omega})$

Soit  $C(\bar{\Omega})$  l'espace des fonctions continues sur  $\bar{\Omega}$ .  $C(\bar{\Omega})$  est un espace de Banach dont la norme est la suivante :

$$\|v\|_{C(\Omega)} = \sup\{|v(x)| : x \in \Omega\}$$

Soient  $x = (x_1, \dots, x_d)$  un élément de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  une collection d'entiers non négatifs tels que  $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ , nous posons

$$\mathcal{D}^\alpha v(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} v(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

Qui nous conduit à la définition de  $C(\bar{\Omega})$ .

$$C^m(\bar{\Omega}) = \{v \in C(\bar{\Omega}) : \mathcal{D}^\alpha v \in C(\bar{\Omega}) \text{ pour tout } \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leq m\}.$$

L'espace  $C^m(\bar{\Omega})$  est un espace de Banach dont la norme est donnée par

$$\|v\|_{C^m(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\mathcal{D}^\alpha v\|_{C(\bar{\Omega})}$$

Par ailleurs, nous définissons l'espace des fonctions infiniment différentiables par

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = \{v \in C(\bar{\Omega}) : v \in C^m(\Omega), \forall m \in \mathbb{Z}_+\}.$$

### 2.1.2 Espaces $L^p$

Pour  $p \in [1, \infty[$ ,  $L^p(\Omega)$  désigne l'espace des fonctions mesurables au sens de Lebesgue définies sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telles que

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

C'est un espace de Banach muni de la norme  $\|v\|_{L^p(\Omega)}$ .

L'espace  $L^\infty(\Omega)$  est l'espace des fonctions mesurables et essentiellement bornées définies sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , muni de la norme

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |v(x)| < \infty$$

il est également de Banach.

### Inégalité de Hölder.

Soient  $u \in L^p(\Omega)$  et  $v \in L^q(\Omega)$ , avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , alors

$$\int_{\Omega} |u(x) \cdot v(x)| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

### 2.1.3 Espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$

Soient  $k \in \mathbb{N}$  et soit  $p \in [1, \infty]$ . Nous définissons les espaces de Sobolev par

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \text{ tel que } \mathcal{D}^\alpha(u) \in L^p(\Omega) \text{ avec } 0 \leq |\alpha| \leq k \}$$

Dans le sens des distributions, qui sont des espaces de Banach où la norme sur  $W^{k,p}(\Omega)$  est définie par :

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \right)^p & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|\mathcal{D}^\alpha(u)\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

Ici,  $W^{k,2}(\Omega)$  sera noté par  $H^k(\Omega)$ , qui est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est donné par

$$(u, v)_k = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} \mathcal{D}^\alpha u(x) \cdot \mathcal{D}^\alpha v(x) dx \quad , \forall u, v \in H^k(\Omega)$$

### 2.1.4 Espaces fonctionnels en mécanique

Dans l'étude des différents problèmes de contact dans cette thèse nous définissons les espaces suivants

$$Q = \{ \sigma = (\sigma_{ij}) : \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega) \}$$

$$H_1 = \{ u = (u_i) : \varepsilon(u) \in Q \}$$

$$Q_1 = \{ \sigma \in Q : Div(\sigma) \in L^2(\Omega)^d \}$$

$$V = \{ v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \}$$

$$Q_\infty = \{ \mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl}) : \mathcal{E}_{ijkl} = \mathcal{E}_{jikl} = \mathcal{E}_{klij} \in L^\infty(\Omega), 1 \leq i, j, k, l \leq d \} \quad (2.1)$$

Les espaces  $Q$ ,  $H_1$ ,  $Q_1$  et  $V$  sont des espaces de Hilbert réels dotés des produits scalaires respectifs suivants

$$(\sigma, \tau)_Q = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx$$

$$(u, v)_{H_1} = (u, v)_{L^2(\Omega)^d} + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q$$

$$(\sigma, \tau)_{Q_1} = (\sigma, \tau)_Q + (Div(\sigma), Div(\tau))_{L^2(\Omega)^d}$$

$$(u, v)_V = \int_{\Omega} \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(v) dx$$

où  $\varepsilon$  et  $Div$  sont respectivement l'opérateur de déformation linéarisé et l'opérateur de divergence.

On désigne les normes associées par  $\|\cdot\|_Q$ ,  $\|\cdot\|_{H_1}$ ,  $\|\cdot\|_{Q_1}$  et  $\|\cdot\|_V$  respectivement.

Notons que  $Q_{\infty}$  est un espace de Banach réel muni de la norme

$$\|\mathcal{E}\|_{Q_{\infty}} = \sum_{0 \leq i, j, k, l \leq d} \|\mathcal{E}_{i, j, k, l}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \quad (2.2)$$

Par ailleurs, un calcul élémentaire montre que

$$\|\mathcal{E}_{\tau}\|_{Q_{\infty}} \leq \|\mathcal{E}\|_{Q_{\infty}} \|\tau\|_Q \quad ; \quad \forall \mathcal{E} \in Q_{\infty}, \tau \in Q \quad (2.3)$$

Pour tout élément  $v \in H_1$ ,  $v_{\nu}$  et  $v_{\tau}$  représentent respectivement les composantes normale et tangentielle  $v$  sur  $\Gamma$  définies par

$$v_{\nu} = v \cdot \nu, v_{\tau} = v - v_{\nu} \nu.$$

La complétude de l'espace  $(V, \|\cdot\|_V)$  provient de l'hypothèse  $mes(\Gamma_1) > 0$ , rendant possible l'utilisation de l'inégalité de Korn, à savoir l'existence d'un  $c_0 > 0$  dépendant de  $\Omega$ ,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$  tel que

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_3, \mathbb{R}^d)} \leq c_0 \|v\|_V \quad ; \quad \forall v \in V \quad (2.4)$$

Cette inégalité découle du théorème de trace de Sobolev. De même, il existe  $C_K$  dépendant de  $\Omega$  et  $\Gamma_1$

$$\|\varepsilon(v)\|_Q \geq C_K \|v\|_{H_1} \quad ; \quad \forall v \in V \quad (2.5)$$

Notons en particulier que

$$\|v\|_V = \|\varepsilon(v)\|_Q \quad ; \forall v \in V \quad (2.6)$$

Par (2.5) et (2.6) les normes  $\|\cdot\|_{H_1}$  et  $\|\cdot\|_V$  sont équivalentes sur  $V$  et de ce fait l'espace  $(V, \|\cdot\|_V)$  est un espace de Hilbert réel, puisque

$$\|v\|_{H_1} = (\|v\|_H^2 + \|v\|_V^2)^{1/2} \quad , \forall v \in H_1 \quad (2.7)$$

nous obtenons

$$\|v\|_V \geq C_K \|v\|_H \quad ; \quad \forall v \in V. \quad (2.8)$$

Nous définissons la formule de Green comme suit :

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx + \int_{\Omega} \text{Div} \sigma \cdot v dx = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v da \quad , \text{ pour tout } v \in H^1(\Omega)^d, \quad (2.9)$$

formule qui s'avérera particulièrement utile pour obtenir la formulation variationnelle des problèmes de contact traités dans les Chapitres à venir.

## 2.2 Analyse non linéaire

### 2.2.1 Opérateurs non linéaires

Soit  $X$  un espace de Hilbert muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$  et de la norme  $\|\cdot\|_X$ .

**Définition.** On dit qu'un opérateur  $A : X \rightarrow X$  est :

(1) **monotone** si

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad , \forall u, v \in X \quad (2.10)$$

(2) **strictement monotone** si

$$(Au - Av, u - v)_X > 0 \quad , \forall u, v \in X \quad , u \neq v \quad (2.11)$$

(3) **fortement monotone** s'il existe  $m > 0$  tel que

$$(Au - Av, u - v)_X > m \|u - v\|_X^2, \forall u, v \in X \quad (2.12)$$

(4) **De Lipschitz** s'il existe  $M > 0$  tel que

$$\|Au - Av\|_X \leq M \|u - v\|_X, \forall u, v \in X \quad (2.13)$$

### 2.2.2 Opérateurs à mémoire longue

L'opérateur à mémoire longue est un opérateur intervenant dans l'étude des problèmes de contact évolutifs ou dynamiques.

**Définition.** On définit  $(X, \|\cdot\|_X)$  et  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  comme deux espaces vectoriels normés et un opérateur  $\mathcal{R} : C(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow C(\mathbb{R}_+, Y)$ .

On dit que l'opérateur  $\mathcal{R}$  est un opérateur de mémoire s'il vérifie

$$\begin{cases} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ il existe } r_n > 0 \\ \|\mathcal{R}u(t) - \mathcal{R}v(t)\|_X \leq r_n \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_X ds \\ \forall u, v \in C(\mathbb{R}_+; X), \forall t \in [0, n] \end{cases} \quad (2.14)$$

**Exemple1.** Soient  $(X, \|\cdot\|_X)$  un espace vectoriel normé,  $u_0 \in X$  et considérons un opérateur

$$\varphi : C(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow C(\mathbb{R}_+, X)$$

$$\varphi v(t) = \int_0^t v(s) ds + u_0, \forall v \in C(\mathbb{R}_+, X), \forall t \in \mathbb{R}_+$$

Alors, si  $u_1, u_2 \in C(\mathbb{R}_+, X)$  nous avons

$$\|\varphi u_1(t) - \varphi u_2(t)\|_X \leq \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds$$

$\varphi$  est donc un opérateur à mémoire longue.

**Exemple2.** Soient  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  deux espaces vectoriels normés et un opérateur  $\mathcal{K} \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{L}(X, Y))$ . Considérons l'opérateur de Volterra

$$\mathcal{R} : C(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow C(\mathbb{R}_+, X)$$

défini par :

$$\mathcal{R}v(t) = \int_0^t \mathcal{K}(t-s)v(s)ds ; \forall v \in C(\mathbb{R}_+, X), \forall t \in \mathbb{R}_+$$

Alors , si  $u_1, u_2 \in C(\mathbb{R}_+, X)$  , nous avons

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}u_1(t) - \mathcal{R}u_2(t)\|_X &\leq \int_0^t \|\mathcal{K}(t-s)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|u_1(t) - u_2(t)\|_X ds \\ &\leq \max_{t \in [0,n]} \|\mathcal{K}(t-s)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \int_0^t \|u_1(t) - u_2(t)\|_X ds \end{aligned}$$

Par suite , en posant  $r_n = \max_{t \in [0,n]} \|\mathcal{K}(t-s)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ , on voit que  $\mathcal{R}$  est un opérateur de mémoire.

### 2.2.3 Les inégalités variationnelles

Nous donnons maintenant un résultat qui concerne une classe d'inéquations variationnelles.

**Théorème (2.1)** . Soit  $H$  un espace de Hilbert et supposons que  $K$  est une partie convexe fermée de  $H$  telle que  $0_X \in K$ , soient  $A : H \rightarrow H$  , un opérateur continu Lipschitzien fortement monotone, et  $j : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction satisfaisant les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } \eta \in K, \text{ la fonction } v \mapsto j(\eta, v) : K \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{est convexe , } j(\eta, v) \geq 0 \text{ , pour tout } v \in K \\ j(\eta, 0_X) = 0 \end{array} \right. \quad (2.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toute suite } \{\eta_n\} \subset K \text{ et } \{u_n\} \subset K \text{ telles que} \\ \eta_n \rightarrow \eta \text{ dans } H, u_n \rightarrow u \text{ dans } H \text{ et pour tout } v \in K \\ \text{l'inégalité suivante est vérifiée :} \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} [j(\eta_n, v) - j(\eta_n, u_n)] \leq j(\eta, v) - j(\eta, u) \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Alors, pour tout  $f \in H$  il existe au moins une solution à l'inégalité variationnelle ci-dessous

$$u \in K, (Au, v - u)_X + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_X, \forall v \in K. \quad (2.17)$$

La démonstration figure dans [12] et est basée sur le théorème de point fixe de Shauder. Nous donnons également un autre type de classe d'inégalités variationnelles.

**Théorème (2.2)** . Soit  $H$  un espace de Hilbert réel muni d'un produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_H$  et d'une norme associée  $\|\cdot\|_H$  . Soit  $K$  une partie de  $H$  et considérons les opérateurs  $A : K \rightarrow H$ ,  $\mathcal{R} : C(\mathbb{R}_+; H) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; H)$  ainsi que les fonctions  $j : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$  ,  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow H$  tels que :

$$K \text{ est un sous ensemble convexe fermé non vide de } H. \quad (2.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } m > 0 \text{ tel que} \\ (Au - Av, u - v)_H \geq m \|u - v\|_H^2, \forall u, v \in K. \\ (b) \text{ Il existe } M > 0 \text{ tel que} \\ \|Au - Av\|_H \leq M \|u - v\|_H, \forall u, v \in K \end{array} \right. \quad (2.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour chaque } n \in N \text{ il existe } r_n > 0 \text{ tel que} \\ \|\mathcal{R}u(t) - \mathcal{R}v(t)\|_X \leq r_n \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_X ds \\ \forall u, v \in C(\mathbb{R}_+; X), \forall t \in [0, n] \end{array} \right. \quad (2.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ La fonction } j(u, \cdot) : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ est convexe et} \\ \text{semi-continue inférieure, pour tout } u \in K \\ (b) \text{ Il existe } \alpha \geq 0 \text{ tel que} \\ j(u_1, v_2) - j(u_1, v_1) + j(u_2, v_1) - j(u_2, v_2) \\ \leq \alpha \|u_1 - u_2\|_X \|v_1 - v_2\|_X, \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in K \end{array} \right. \quad (2.21)$$

$$f \in C(\mathbb{R}_+, H) \quad (2.22)$$

Si  $m > \alpha$  alors il existe une unique fonction  $w \in C(\mathbb{R}_+; K)$  tel le que, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  :

$$\left| \begin{array}{l} (Aw(t), v - w(t))_X + (\mathcal{R}w(t), v - w(t))_X \\ + j(w(t), v) - j(w(t), w(t)) \geq (f(t), v - w(t))_X, \forall v \in K. \end{array} \right. \quad (2.23)$$

La démonstration figure dans [12] et est basée sur le théorème de point fixe de Shauder.

**Théorème (2.3)**. Soit  $(H, \|\cdot\|_H)$  un espace réel de Banach et soit

$$\Lambda : C(\mathbb{R}_+, H) \rightarrow C(\mathbb{R}_+, H)$$

un opérateur non-linéaire avec la propriété suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N} , \text{ il existe } c_n > 0 \text{ tel que :} \\ \|\Lambda u(t) - \Lambda v(t)\|_H \leq c_n \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_H ds \\ \text{Pour tout } u, v \in C(\mathbb{R}_+, H) \text{ et pour tout } t \in [0, n]. \end{array} \right.$$

Alors l'opérateur  $\Lambda$  admet un unique point fixe  $\eta^* \in C(\mathbb{R}_+, H)$ . La démonstration figure dans [27] .

### 2.2.4 Lemme de Grönwall.

**Lemme.** Soient  $f$  et  $g \in C([0, T], \mathbb{R})$ , supposons qu'il existe  $c > 0$  tel que :

$$f(t) \leq g(t) + c \int_0^t f(s) ds \quad , \forall t \in [0, T] \quad (2.22)$$

Alors

$$f(t) \leq g(t) + c \int_0^t g(s) e^{c(t-s)} ds \quad , \forall t \in [0, T] \quad (2.23)$$

Si  $g$  est non décroissante, nous avons

$$f(t) \leq g(t) e^{ct}, \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.24)$$

La démonstration figure dans [29] .

## Deuxième partie

# Analyse mathématique de quelques problèmes de contact

# Analyse mathématique de quelques problèmes de contact

*Nous allons à présent réaliser l'étude et l'analyse mathématique de trois problèmes de contact en petites déformations. Le premier problème est consacré à l'étude d'un contact élastique pour un processus statique avec compliance normale et contrainte unilatérale, le deuxième problème est viscoélastique quasi-statique avec réponse normale instantanée et contrainte unilatérale en vitesse et enfin dans le troisième problème le contact est quasi-statique viscoélastique avec des forces interfaces et longue mémoire. Une fois la formulation variationnelle de chaque problème établie, nous abordons la question de l'existence et de l'unicité d'une solution faible de chaque problème.*

# Chapitre 3

## Etude d'un problème de contact statique élastique avec compliance normale

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier un problème de contact en statique modélisant l'interaction entre un corps de type élastique, comportement déjà présenté dans la sous-section 1.2.1, et une fondation. Le contact suit une loi de compliance normale couplée aux conditions de Signorini, comme décrit précédemment, le frottement étant, quant à lui, supposé non monotone. Ce chapitre comporte quatre sections. Dans la première section on propose une formulation forte du problème puis dans la deuxième section on donne quelques hypothèses indispensables. Ensuite, dans la troisième section on aborde la formulation variationnelle du problème considéré, nous donnons une formulation faible et abordons la question de l'existence et l'unicité de la solution en utilisant des arguments des inéquations variationnelles et dans la dernière section on détermine l'existence et l'unicité d'une solution faible au problème.

### 3.1 Position du problème

Dans ce chapitre on va considérer le problème suivant

**Problème 1.**

Trouver un champ de déplacements  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  et un champ de contraintes  $\sigma : \Omega \rightarrow \mathcal{S}^d$  tels que

$$\sigma = \mathcal{F}_\varepsilon(u) \quad \text{dans } \Omega \quad (3.1)$$

$$\text{Div } \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.2)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (3.3)$$

$$\sigma \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (3.4)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_\nu \leq g, \sigma_\nu + p(u_\nu) \leq 0 \\ (u_\nu - g)(\sigma_\nu + p(u_\nu)) = 0 \end{array} \right\} \text{sur } \Gamma_3 \quad (3.5)$$

$$\left. \begin{array}{l} \|\sigma_\tau\| \leq \mu(\|u_\tau\|) p(u_\nu) \\ -\sigma_\tau = \mu(\|u_\tau\|) p(u_\nu) \frac{u_\tau}{\|u_\tau\|} \quad \text{si } u_\tau \neq 0 \end{array} \right\} \text{sur } \Gamma_3 \quad (3.6)$$

L'équation (3.1) définit la loi constitutive élastique du matériau dans laquelle  $\mathcal{F}$  est une fonction constitutive non linéaire. (3.2) représente l'équation d'équilibre dans le cas statique. (3.3) et (3.4) définissent les conditions aux limites de déplacement-traction, respectivement. Les conditions (3.5) et (3.6) concernent les conditions de contact avec frottement. Nous considérons le cas d'une loi de compliance normale couplée avec une loi de contact unilatéral.

Le cadre physique du problème considéré est comme suit : un corps élastique occupe un domaine borné  $\Omega$  doté d'une frontière rigide  $\Gamma$ . Le déplacement du corps est nul sur  $\Gamma_1$ , des forces volumiques  $f_0$  agissent sur  $\Omega$  et une force de traction surfacique de densité  $f_2$  agit sur  $\Gamma_2$ . Enfin,  $\Gamma_3$  correspond à la partie de contact entre le corps et la fondation rigide.

## 3.2 Hypothèses

Afin d'étudier l'existence et l'unicité d'une solution du problème variationnel introduit ci-après, nous supposons que l'opérateur d'élasticité  $\mathcal{F}$  satisfait les hypothèses suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \mathcal{F} : \Omega \times S^d \rightarrow S^d \\ 2. \text{ Il existe } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ tel que} \\ \|F(x, \varepsilon_1) - F(x, \varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{F}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|, \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d \\ 3. \text{ Il existe } m_{\mathcal{F}} > 0 \text{ tel que} \\ F(x, \varepsilon_1) - F(x, \varepsilon_2) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{F}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2, \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d \\ 4. \text{ Pour tout } \varepsilon \in S^d : x \mapsto F(x, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega. \\ 5. \text{ L'application } x \mapsto F(x, 0_{S^d}) \text{ appartient à } Q \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Nous supposons que les fonctions  $f_0$  et  $f_2$  sont dotées de la régularité suivante

$$f_0 \in L^2(\Omega)^d, \quad f_2 \in L^2(\Gamma_2)^d \quad (3.8)$$

On suppose que le seuil de pénétration  $g$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. g : \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ 2. \text{ Il existe } G > 0 \text{ tel que } g(x) \leq G, \forall x \in \Gamma_3 \\ 3. \text{ L'application } x \mapsto g(x) \text{ est continue sur } \Gamma_3 \end{array} \right. \quad (3.9)$$

La fonction de compliance normale  $p$  et le coefficient de frottement  $\mu$  satisfont respectivement

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. p : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ 2. \text{ Il existe } L_p > 0 \text{ tel que :} \\ |p(x, r_1) - p(x, r_2)| \leq L_p |r_1 - r_2|, \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, x \in \Gamma_3 \\ 3. \text{ L'application } x \mapsto p(x, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3. \\ 4. \text{ Il existe } p_0 > 0 \text{ tel que } p(x, G) \leq p_0, x \in \Gamma_3 \\ 5. (p(x, r_1) - p(x, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0, \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, x \in \Gamma_3 \\ 6. p(x; r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0, x \in \Gamma_3 \end{array} \right. \quad (3.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \mu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ 2. \text{L'application } x \mapsto \mu(x, r) \text{ est continue sur } \Gamma_3. \\ 3. \text{L'application } x \mapsto \mu(x, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour tout } r \in \mathbb{R} \\ 4. \text{Il existe } \mu_0 > 0 \text{ tel que } \mu(x, r) \leq \mu_0, \forall r \in \mathbb{R}, x \in \Gamma_3 \\ 5. \text{Il existe } m_\mu > 0 \text{ tel que} \\ (\mu(x, r_1) - \mu(x, r_2))(r_1 - r_2) \geq -m_\mu |r_1 - r_2|^2 \\ \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (3.11)$$

### 3.3 Formulation Variationnelle

Nous nous intéressons maintenant à la formulation variationnelle du problème  $P$ .

Pour cela nous introduisons un ensemble des déplacements admissibles  $U$ , l'opérateur  $A$ , la fonction  $j : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f \in V$  définis par

$$U = \{v \in V : v_\nu \leq g, \text{ sur } \Gamma_3\} \quad (3.12)$$

$$(Au, v)_V = \int_{\Omega} \mathcal{F}\varepsilon(u) \cdot \varepsilon(v) dx + \int_{\Gamma_3} p(u_\nu) v_\nu da, \forall u, v \in V \quad (3.13)$$

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} \mu(\|u_\tau\|) p(u_\nu) \|v_\tau\| da, \forall u, v \in V \quad (3.14)$$

$$(f, v)_V = \int_{\Omega} f_0 \cdot v dx + \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot v da, \forall v \in V \quad (3.15)$$

Considérons que  $(u, \sigma)$  sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (3.1)(3.6) avec  $v \in U$ .

En multipliant l'équation d'équilibre (3.2) par  $v - u$  et en intégrant sur  $\Omega$ , on obtient :

$$\int_{\Omega} (Div\sigma + f_0)(v - u) dx = 0$$

ce qui implique que :

$$- \int_{\Omega} (Div\sigma(v - u)) dx = \int_{\Omega} f_0(v - u) dx$$

Nous utilisons la formule de Green suivante :

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) dx + \int_{\Omega} \text{Div} \sigma \cdot v dx = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v$$

On a alors :

$$\int_{\Omega} \sigma(\varepsilon(v) - \varepsilon(u)) dx - \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot (v - u) ds = \int_{\Omega} f_0(v - u) dx$$

En utilisant les conditions (3.4)-(3.6) on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \mathcal{F} \varepsilon(u)(\varepsilon(v) - \varepsilon(u)) dx - \underbrace{\int_{\Gamma_1} \sigma \nu \cdot (v - u) ds}_{=0} - \underbrace{\int_{\Gamma_2} \sigma \nu \cdot (v - u) da}_{=f_2(v-u)} \\ - \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - u) da = \int_{\Omega} f_0(v - u) dx \end{array} \right.$$

par la suite on a

$$\int_{\Omega} \mathcal{F} \varepsilon(u)(\varepsilon(v) - \varepsilon(u)) dx - \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - u) da = \int_{\Omega} \underbrace{(f_0 + f_2)(v - u) dx}_{=f(v-u)} \quad (3.16)$$

d'autre part

$$\int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - u) da = \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v_{\nu} - u_{\nu}) da + \int_{\Gamma_3} \sigma \tau \cdot (v_{\tau} - u_{\tau}) da$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v_{\nu} - u_{\nu}) da &= \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v_{\nu} - g + g - u_{\nu}) da \\ &= \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v_{\nu} - g) da - \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (u_{\nu} - g) da \end{aligned}$$

Mais d'après (4.5)

$$\int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (u_{\nu} - g) da = - \int p(u_{\nu})(u_{\nu} - g) da$$

de plus :

$$\sigma_{\nu} \leq -p(u_{\nu}) \quad \text{et} \quad v_{\nu} - g \leq 0$$

alors

$$\sigma_\nu(v_\nu - g) \geq -p(u_\nu)(v_\nu - g)$$

ce qui implique

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(v_\nu - g) da \geq - \int_{\Gamma_3} p(u_\nu)(v_\nu - g) da \quad (3.17)$$

En combinant les relations précédentes on peut en déduire que

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(v_\tau - u_\tau) da \geq \int_{\Gamma_3} \mu(\|u_\tau\|) p(u_\nu) \|u_\tau\| da - \int_{\Gamma_3} \mu(\|u_\tau\|) p(u_\nu) \|v_\tau\| da \quad (3.18)$$

On va combiner l'égalité (3.16) avec les inégalités (3.17) et (3.18), et, en utilisant la loi constitutive (3.1) les définitions (3.12)(3.15), nous obtenons la formulation variationnelle du Problème  $P$ .

**Problème  $\mathcal{P}^\nu$**  . Déterminer un champ de déplacements  $u$  tel que

$$u \in V , (Au, v - u)_V + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_V ; \forall v \in V \quad (3.19)$$

Notons que le problème  $\mathcal{P}^\nu$  est formulé en terme de champ de déplacements. Une fois le champ des déplacements connu on peut déduire le champ des contraintes en utilisant la loi constitutive (3.1). Le couple  $(u, \sigma)$  qui satisfait (3.1) et (3.19) sera appelé solution faible du problème de contact  $P$ .

## 3.4 Existence et unicité

Dans ce paragraphe on va étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel  $\mathcal{P}^\nu$  . En se basant sur le théorème 2.1 du chapitre2 , on démontre les résultats suivants :

**Théorème 4.1.** Si les conditions (3.7) – (3.11) sont vérifiées. Alors, les propositions suivantes le sont également :

- 1) Le Problème  $\mathcal{P}^\nu$  possède au moins une solution.

2) Il existe une constante  $\alpha_0$ , ne dépendant que de  $\Omega$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_3$  et  $\mathcal{F}$ , telle que le problème admet une unique solution si

$$p_0 m_\mu + \mu_0 L_p < \alpha_0 \quad (3.20)$$

**Preuve.** On utilise le théorème 2.1 du chapitre 2 avec  $X = V$  et  $K = U$ .

Notons tout d'abord que  $U$  est une partie convexe fermée non-vide de  $V$  et que  $0_V \in U$ .

Nous utilisons après la définition de l'opérateur  $A$  on a :

$$\langle Au, v \rangle_V = \langle F(\varepsilon(u)), \varepsilon(v) \rangle + \int_{\Gamma_3} p(u_\nu) v_\nu da \quad (3.21)$$

Donc :

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_V = \underbrace{\langle \mathcal{F}(\varepsilon(u)) - \mathcal{F}(\varepsilon(v)), \varepsilon(u) - \varepsilon(v) \rangle}_{A_1} + \underbrace{\int_{\Gamma_3} (p(u_\nu) - p(v_\nu)) (u_\nu - v_\nu) da}_{A_2} \quad (3.22)$$

D'après la propriété (3.7)(3) , il existe  $m_F > 0$  :

$$A_1 = \langle \mathcal{F}(\varepsilon(u)) - \mathcal{F}(\varepsilon(v)), \varepsilon(u) - \varepsilon(v) \rangle \geq m_{\mathcal{F}} \|\varepsilon(u) - \varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (3.23)$$

Mais on a :  $\|\varepsilon(u)\|_{\mathcal{H}} = \|u\|_V$  , alors :

$$\langle \mathcal{F}(\varepsilon(u)) - \mathcal{F}(\varepsilon(v)), \varepsilon(u) - \varepsilon(v) \rangle \geq m_{\mathcal{F}} \|u - v\|_V^2 \quad (3.24)$$

D'après (3.10)(5) on a :

$$A_2 = \int_{\Gamma_3} (p(u_\nu) - p(v_\nu)) (u_\nu - v_\nu) da \geq 0 \quad (3.25)$$

Alors de (3.24) et (3.25) on a :

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_V \geq m_{\mathcal{F}} \|u - v\|_V^2$$

Qui implique que l'opérateur  $A$  est fortement monotone.

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
 \|Au - Av\|_V^2 &= \langle Au - Av, Au - Av \rangle_V & (3.26) \\
 &= \underbrace{\langle \mathcal{F}(\varepsilon(u)) - \mathcal{F}(\varepsilon(v)), \varepsilon(A(u)) - \varepsilon(A(v)) \rangle_{\mathcal{H}}}_{K_1} + \underbrace{\int_{\Gamma_3} p(u_\nu) - p(v_\nu) ((Au)_\nu - (Av)_\nu) da}_{K_2}
 \end{aligned}$$

D'un coté on a :

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \langle \mathcal{F}(\varepsilon(u)) - \mathcal{F}(\varepsilon(v)), \varepsilon(A(u)) - \varepsilon(A(v)) \rangle_{\mathcal{H}} & (3.27) \\
 &\leq \| \mathcal{F}(\varepsilon(u)) - \mathcal{F}(\varepsilon(v)) \|_{\mathcal{H}} \| \varepsilon(A(u)) - \varepsilon(A(v)) \|_{\mathcal{H}} \\
 &\leq L_{\mathcal{F}} \| (\varepsilon(u)) - (\varepsilon(v)) \|_{\mathcal{H}} \| (A(u)) - (A(v)) \|_V \\
 &\leq L_{\mathcal{F}} \| u - v \|_V \| (A(u)) - (A(v)) \|_V
 \end{aligned}$$

D'un autre coté et d'après (3.10)(2) on a :

$$\begin{aligned}
 K_2 &= \int_{\Gamma_3} p(u_\nu) - p(v_\nu) ((Au)_\nu - (Av)_\nu) da & (3.28) \\
 &\leq \| p(u_\nu) - p(v_\nu) \|_{L^2(\Gamma_3)} \| (Au)_\nu - (Av)_\nu \|_{L^2(\Gamma_3)} \\
 &\leq L_p \| u_\nu - v_\nu \|_{L^2(\Gamma_3)} \| (Au)_\nu - (Av)_\nu \|_{L^2(\Gamma_3)}
 \end{aligned}$$

De l'inégalité de la trace (2.4) on a :

$$K_2 \leq L_p C_0^2 \| u_\nu - v_\nu \|_V \| (Au)_\nu - (Av)_\nu \|_V \quad (3.29)$$

Combinons (3.27) et (3.29) pour avoir :

$$\begin{aligned}
 \|Au - Av\|_V^2 &\leq L_{\mathcal{F}} \| u - v \|_V \| (A(u)) - (A(v)) \|_V & (3.30) \\
 &\quad + L_p C_0^2 \| u_\nu - v_\nu \|_V \| (Au)_\nu - (Av)_\nu \|_V
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\|Au - Av\|_V \leq (L_{\mathcal{F}} + L_p C_0^2) \| u - v \|_V, \forall u, v \in V.$$

Qui implique que l'opérateur A est de Lipschitz

Nous déduisons que  $A$  est un opérateur de Lipschitz et fortement monotone sur  $V$ .

D'autre part, la fonctionnelle  $j$  définie par :

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} \mu(\|u_\tau\|) p(u_\nu) \|v_\tau\| da$$

satisfait la condition (2.15) du théorème (2.1) car si on considère deux suites  $\{\eta_n\} \subset V$ ,  $\{u_n\} \subset V$  telles que

$$\eta_n \rightharpoonup \eta \text{ dans } V, \quad u_n \rightharpoonup u \text{ dans } V \quad (3.31)$$

et  $v$  un élément arbitraire dans  $V$ , alors, d'après la définition (3.14) nous trouvons que

$$j(\eta_n, v) - j(\eta, v) \leq \int_{\Gamma_3} (p(\eta_n) \mu(\|\eta_{n\tau}\|) - \mu(\|\eta_\tau\|) + \mu(\|\eta_\tau\|) |p(\eta_{n\nu}) - p(\eta_\nu)|) \|v_\tau\| da$$

En utilisant maintenant les conditions (3.10) et (3.11) nous en déduisons que :

$$j(\eta_n, v) - j(\eta, v) \leq \int_{\Gamma_3} p_0 \mu(\|\eta_{n\tau}\|) - \mu(\|\eta_\tau\|) + \mu_0 |p(\eta_{n\nu}) - p(\eta_\nu)| \|v_\tau\| da \quad (3.32)$$

Un raisonnement similaire au précédent conduit aux inégalités suivantes

$$j(\eta_n, u_n) - j(\eta, u_n) \leq \int_{\Gamma_3} p_0 \mu(\|\eta_{n\tau}\|) - \mu(\|\eta_\tau\|) + \mu_0 |p(\eta_{n\nu}) - p(\eta_\nu)| \|u_{n\tau}\| da \quad (3.33)$$

$$j(\eta_n, u_n) - j(\eta, u) \leq \int_{\Gamma_3} p_0 \mu_0 \left| \|u_{n\tau}\| - \|u_\tau\| \right| da \quad (3.34)$$

En utilisant maintenant la convergence faible (3.31) et les propriétés des fonctions  $p$  et  $\mu$ , nous constatons que :

$$\mu(\|\eta_{n\tau}\|) \rightarrow \mu(\|\eta_\tau\|) \quad ; \quad p(\eta_{n\nu}) \rightarrow p(\eta_\nu) \quad ; \quad \|u_{n\tau}\| \rightarrow \|u_\tau\| \quad , \quad \text{dans } L^2(\Gamma_3)$$

et, de ce fait, (3.32) (3.34) permettent de déduire que

$$j(\eta_n, v) \rightarrow j(\eta, v) \quad (3.35)$$

$$j(\eta_n, u_n) - j(\eta, u_n) \rightarrow 0 \quad (3.36)$$

$$j(\eta, u_n) \rightarrow j(\eta, u) \quad (3.37)$$

quand  $n \rightarrow \infty$ . Nous écrivons maintenant

$$j(\eta_n, v) - j(\eta_n, u_n) = j(\eta_n, v) - j(\eta, u_n) + j(\eta, u_n) - j(\eta_n, u_n)$$

puis nous considérons les résultats de convergence (3.35) (3.37) pour déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [j(\eta_n, v) - j(\eta_n, u_n)] = j(\eta, v) - j(\eta, u)$$

Par conséquent grace au théorème 2.1 nous obtenons l'existence d'une solution faible.

**2.Unicité.** Pour démontrer l'unicité de la solution faible considérons  $u_1, u_2 \in V$  , deux solutions du Problème  $P$ . Ensuite, en utilisant (3.19), (3.21) nous trouvons que

$$m_{\mathcal{F}} \|u_1 - u_2\|_V^2 \leq j(u_1, u_2) - j(u_1, u_1) + j(u_2, u_1) - j(u_2, u_2). \quad (3.38)$$

De plus, en utilisant la définition (3.14) de la fonction  $j$ , il s'avère que

$$\left\{ \begin{array}{l} j(u_1, u_2) - j(u_1, u_1) + j(u_2, u_1) - j(u_2, u_2) = \\ \int_{\Gamma_3} \mu(\|u_{1\tau}\|) p_{\nu}(u_{1\nu}) - \mu(\|u_{2\tau}\|) p_{\nu}(u_{2\nu}) (\|u_{2\tau}\| - \|u_{1\tau}\|) da \\ = \int_{\Gamma_3} p_{\nu}(u_{1\nu}) \mu(\|u_{1\tau}\|) - \mu(\|u_{2\tau}\|) (\|u_{2\tau}\| - \|u_{1\tau}\|) da \\ + \int_{\Gamma_3} p_{\nu}(u_{1\nu}) \mu(\|u_{2\tau}\|) - p_{\nu}(u_{2\nu}) (\|u_{2\tau}\| - \|u_{1\tau}\|) da \end{array} \right. \quad (3.39)$$

Ainsi, en se servant des propriétés (3.10) et (3.11) des fonctions  $\mu$  et  $p$ , nous obtenons que :

$$\begin{aligned} & j(u_1, u_2) - j(u_1, u_1) + j(u_2, u_1) - j(u_2, u_2) \\ & \leq \int_{\Gamma_3} p_0 m_{\mu} (\|u_{1\tau}\| - \|u_{2\tau}\|)^2 da + \int_{\Gamma_3} \mu_0 L_p (|u_{1\nu} - u_{2\nu}|) (\|u_{2\tau}\| - \|u_{1\tau}\|) da. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Ensuite, à l'aide des inégalités élémentaires suivantes

$$|u_{1\nu} - u_{2\nu}| \leq \|u_1 - u_2\|, \quad \left| \|u_{1\tau}\| - \|u_{2\tau}\| \right| \leq \|u_1 - u_2\| \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3, \quad (3.41)$$

à l'aide de (2.4) , nous en déduisons que

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{F}} \|u_1 - u_2\|_V^2 & \leq j(u_1, u_2) - j(u_1, u_1) + j(u_2, u_1) - j(u_2, u_2) \\ & \leq c_0^2 (p_0 m_{\mu} + \mu_0 L_p) \|u_1 - u_2\|_V^2. \end{aligned} \quad (3.42)$$

En choisissant

$$\alpha_0 = \frac{m_{\mathcal{F}}}{c_0^2} \quad (3.43)$$

et notons que  $\alpha_0$  ne dépend que de  $\Omega$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_3$  et  $\mathcal{F}$ . Si (3.43) est vérifié alors il résulte que  $u_1 = u_2$ , ce qui achève la démonstration. ■

# Chapitre 4

## Etude d'un problème de contact quasistatique viscoélastique avec mémoire longue et réponse normale instantanée

Dans ce chapitre, nous considérons un problème de contact quasistatique qui modélise le contact entre un corps viscoélastique avec mémoire longue et un obstacle ou une fondation. Cette fois nous nous intéressons au même type de loi mais formulée en vitesse avec une loi de frottement de Coulomb monotone, formulée une nouvelle fois en vitesse. Le chapitre comporte quatre sections. Dans la première on propose une formulation forte du problème puis dans la deuxième partie on donne quelques hypothèses indispensables à la démonstration. Ensuite, dans la troisième section on aborde la formulation variationnelle du problème considéré, Enfin nous donnons une formulation faible et abordons la question de l'existence et dans la dernière section on détermine l'existence et l'unicité d'une solution faible au problème

### 4.1 Position du problème

Dans cette partie on va considérer le problème suivant

**Problème $\mathcal{P}$**  Trouver un champ de déplacements  $u : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$  et un champ de contraintes  $\sigma : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{S}^d$  tels que :

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t \theta(t-s)\varepsilon(\dot{u}(t))ds \quad \text{dans } \Omega \quad (4.1)$$

$$\text{Div}(\sigma(t)) + f_0(t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (4.2)$$

$$u(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (4.3)$$

$$\sigma(t)\nu = f_2(t) \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (4.4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{u}_\nu(t) \leq g \quad , \quad \sigma_\nu(t) + p(\dot{u}_\nu(t)) \leq 0 \\ (\dot{u}_\nu(t) - g)(\sigma_\nu(t) + p(\dot{u}_\nu(t))) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (4.5)$$

$$\left. \begin{array}{l} \|\sigma_\tau(t)\| \leq \mu p(\dot{u}_\nu(t)) \\ -\sigma_\tau(t) = \mu p(\dot{u}_\nu(t)) \frac{\dot{u}_\tau(t)}{\|\dot{u}_\tau(t)\|} \quad \text{si } \dot{u}_\tau(t) \neq 0 \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (4.6)$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (4.7)$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  .

(4.1) représente la loi constitutive viscoélastique du matériau avec mémoire longue .(4.2) représente l'équation d'équilibre exprimée ici dans le cas quasistatique. Les conditions (4.3) et (4.4) représentent respectivement les conditions de déplacement,traction . Les équations (4.5) et (4.6) caractérisent les conditions de contact avec frottement et réponse normale instantanée couplée aux conditions de contraintes unilatérales en vitesse et une loi de frottement de Coulomb .(4.7) est la condition initiale dans laquelle  $u_0$  désigne le déplacement initial.

## 4.2 Hypothèses

Afin d'étudier l'existence et l'unicité d'une solution du problème variationnel introduit ci-après, nous supposons que les opérateurs de **viscosité** , d'**élasticité** et le tenseur de **relaxation** satisfont les conditions suivantes.

1. L'opérateur de viscosité non linéaire  $\mathcal{A}$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \mathcal{A} : \Omega \times \mathcal{S}^d \rightarrow \mathcal{S}^d \\ 2. \text{ Il existe } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que :} \\ \|\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{A}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| ; \\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{S}^d, x \in \Omega \\ 3. \text{ Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que :} \\ (\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2 ; \\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{S}^d, x \in \Omega \\ 4. \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega, \forall \varepsilon \in \mathcal{S}^d. \\ \text{L'application } x \mapsto \mathcal{A}(x, 0_{\mathcal{S}^d}) \in Q. \end{array} \right. \quad (4.8)$$

2. L'opérateur d'élasticité  $\mathcal{B}$  satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \mathcal{B} : \Omega \times \mathcal{S}^d \rightarrow \mathcal{S}^d \\ 2. \text{ Il existe } L_{\mathcal{B}} > 0 \text{ tel que :} \\ \|\mathcal{B}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{B}(x, \varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{B}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| ; \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{S}^d, x \in \Omega \\ 3. \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{B}(x, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega, \forall \varepsilon \in \mathcal{S}^d. \\ 4. \text{ L'application } x \mapsto \mathcal{B}(x, 0_{\mathcal{S}^d}) \in Q. \end{array} \right. \quad (4.9)$$

3. le tenseur de relaxation  $\theta$  satisfait :

$$\theta \in C(\mathbb{R}_+, Q_{\infty}). \quad (4.10)$$

4. Nous considérons que les forces  $f_0$  et  $f_2$  sont dotées de la régularité suivante :

$$f_0 \in C(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)^d) , \quad f_2 \in C(\mathbb{R}_+, L^2(\Gamma_2)^d) \quad (4.11)$$

5. La fonction  $g$  est telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. g : \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ 2. \text{ Il existe } G > 0 , \text{ tel que } g(x) \leq G , \forall x \in \Gamma_3 \\ 3. \text{ L'application } x \mapsto g(x) \text{ est continue sur } \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (4.12)$$

6. La fonction de **réponse normale instantanée**  $p$ , le **coefficient de frottement**  $\mu$  et le **déplacement initial**  $u_0$  satisfont

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. p : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ 2. \text{ Il existe } L_p > 0 \text{ tel que :} \\ |p(x, r_1) - p(x, r_2)| \leq L_p |r_1 - r_2|, \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in \Gamma_3. \\ 3. \text{ L'application } x \mapsto p(x, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \forall r \in \mathbb{R} \\ 4. (p(x, r_1) - p(x, r_2)) \cdot (r_1 - r_2) \geq 0; \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in \Gamma_3. \\ 5. p(x, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0, p.p.x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (4.13)$$

$$\mu \in L^\infty(\Gamma_3) , \mu(x) \geq 0 \text{ p.p.}x \in \Gamma_3. \quad (4.14)$$

$$u_0 \in V \quad (4.15)$$

### 4.3 Formulation Variationnelle

Nous nous interessons maintenant à la formulation variationnelle du problème  $P$  .Pour cela nous définissons un ensemble de vitesses admissibles  $U$  ainsi que les fonctionnelles

$$j : U \times U \rightarrow \mathbb{R}, f : \mathbb{R}_+ \rightarrow V$$

définis par

$$U = \{v \in V : v_\nu \leq g \text{ .sur } \Gamma_3\} \quad (4.16)$$

$$j(w, v) = \int_{\Gamma_3} \mu p(w_\nu) \|v_\tau\| da , \forall w \in U, \forall v \in V \quad (4.17)$$

$$(f(t), v)_V = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v dx + \int_{\Gamma_3} f_2(t) \cdot v da ; \forall v \in V, \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (4.18)$$

Supposons que  $(u, \sigma)$  sont des fonctions suffisamment régulières satisfaisant (4.1) , (4.7) et donne  $v \in U$ .

En multipliant l'équation d'équilibre dans le cas quasistatique (4.2) par  $(v - \dot{u})$  et en integrant par partie sur  $\Omega$  , on obtient pour tout  $u, v \in U$

$$(Div \sigma + f_0) (v - \dot{u}) = 0$$

et

$$\int_{\Omega} (Div\sigma + f_0)(v - \dot{u})dx = 0 \implies - \int_{\Omega} Div\sigma(v - \dot{u})dx = \int_{\Omega} f_0(v - \dot{u})dx$$

En utilisant la formule de Green , on trouve :

$$\int_{\Omega} \sigma(\varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}))dx - \int_{\Gamma} \sigma\nu \cdot (v - \dot{u}) ds = \int_{\Omega} f_0(v - \dot{u})dx$$

Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \mathcal{F}\varepsilon(u)(\varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}))dx - \underbrace{\int_{\Gamma_1} \sigma\nu \cdot (v - \dot{u}) ds}_{=0} - \int_{\Gamma_2} \underbrace{\sigma\nu \cdot (v - \dot{u})}_{=f_2(v-u)} da \\ - \int_{\Gamma_3} \sigma\nu \cdot (v - \dot{u}) da = \int_{\Omega} f_0(v - \dot{u})dx \end{array} \right.$$

par la suite on a

$$\int_{\Omega} \mathcal{F}\varepsilon(u)(\varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}))dx - \int_{\Gamma_3} \sigma\nu \cdot (v - \dot{u}) da = \int_{\Omega} \underbrace{(f_0 + f_2)(v - \dot{u})}_{=f(v-u)}dx$$

d'autre part

$$\int_{\Gamma_3} \sigma\nu \cdot (v - \dot{u}) da = \int_{\Gamma_3} \sigma\nu \cdot (v_{\nu} - \dot{u}_{\nu}) da + \int_{\Gamma_3} \sigma\tau \cdot (v_{\tau} - \dot{u}_{\tau}) da$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} \sigma\nu \cdot (v_{\nu} - \dot{u}_{\nu}) da &= \int_{\Gamma_3} \sigma\nu \cdot (v_{\nu} - g + g - \dot{u}_{\nu}) da \\ &= \int_{\Gamma_3} \sigma\nu \cdot (v_{\nu} - g) da - \int_{\Gamma_3} \sigma\nu \cdot (\dot{u}_{\nu} - g) da \end{aligned}$$

Mais d'après (5.5) on a

$$\int_{\Gamma_3} \sigma\nu \cdot (\dot{u}_{\nu} - g) da = - \int p(\dot{u}_{\nu})(\dot{u}_{\nu} - g)da$$

de plus :

$$\sigma_{\nu} \leq -p(\dot{u}_{\nu}) \quad \text{et} \quad v_{\nu} - g \leq 0$$

alors

$$\sigma_\nu(v_\nu - g) \geq -p(\dot{u}_\nu)(v_\nu - g)$$

qui implique

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(v_\nu - g) da \geq - \int_{\Gamma_3} p(\dot{u}_\nu)(v_\nu - g) da$$

En combinant les relations précédentes on peut en déduire que

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(v_\tau - \dot{u}_\tau) da \geq \int_{\Gamma_3} \mu(\|\dot{u}_\tau\|) p(\dot{u}_\nu) \|\dot{u}_\tau\| da - \int_{\Gamma_3} \mu(\|\dot{u}_\tau\|) p(\dot{u}_\nu) \|v_\tau\| da$$

Puis

$$(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_Q = (f(t), v - \dot{u}(t))_V \quad (4.19)$$

$$+ \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(t)(v_\nu - \dot{u}_\nu(t)) da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(t) \cdot (v_\tau - \dot{u}_\tau(t)) da$$

Nous utilisons les conditions (4.5), (4.6) et la définition (4.16) pour obtenir

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(t)(v_\nu - \dot{u}_\nu(t)) da \geq - \int_{\Gamma_3} p(\dot{u}_\tau(t))(v_\nu - \dot{u}_\nu(t)) da \quad (4.20)$$

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(t) \cdot (v_\tau - \dot{u}_\tau(t)) da \geq \int_{\Gamma_3} \mu p(\dot{u}_\nu(t)) \|\dot{u}_\tau(t)\| da - \int_{\Gamma_3} \mu p(\dot{u}_\nu(t)) \|u_\tau\| \quad (4.21)$$

Ensuite, nous combinons (4.19) (4.21) ainsi que la définition (4.17) pour déduire que

$$(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_Q + (p(\dot{u}_\nu(t)), v_\nu - \dot{u}_\nu(t))_{L^2(\Gamma_3)} \quad (4.22)$$

$$+ j(\dot{u}(t), v) - j(\dot{u}(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V, \quad \forall v \in V$$

D'autre part, (4.3), (4.5), (4.15) et (4.16) montrent que

$$\dot{u}(t) \in U, \quad u(t) \in V \quad (4.23)$$

Enfin, nous combinons (4.22) avec la loi constitutive (4.1), la régularité (4.23) et la condition initiale (4.7) pour obtenir la formulation variationnelle suivante pour le problème  $\mathcal{P}$ .

**Problème  $\mathcal{P}^\nu$ .** Trouver un champ de déplacements  $u \in C^1(\mathbb{R}_+; V)$  tel que  $u(0) = u_0$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  :

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) \in U, & (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_Q + (B\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_Q \\ & + \left( \int_0^t \theta(t-s)\varepsilon(\dot{u}(t))ds, \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \right)_Q + (p(u_\nu(t), v_\nu - \dot{u}_\nu(t)))_{L^2(\Gamma_3)} \\ & + j(\dot{u}(t), v) - j(\dot{u}(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V, \quad \forall v \in V \end{aligned} \quad (4.24)$$

Le problème  $\mathcal{P}^\nu$  est formulé en terme de champ de déplacements. Une fois que le champ de déplacements est obtenu, le champ de contraintes peut être déduit par la loi constitutive (4.1). Le couple  $(u, \sigma)$  qui satisfait (4.1) et (4.24) est appelé solution faible du problème  $\mathcal{P}$ .

## 4.4 Existence et unicité

Dans ce paragraphe on va étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel  $\mathcal{P}^\nu$ .

L'étude de l'unicité de la solution du Problème  $\mathcal{P}^\nu$  est déduite du résultat suivant

**Théorème 4.1.** Si les conditions (4.8)- (4.15) sont vérifiées et, de plus si

$$c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^2(\Gamma_3)} < m_{\mathcal{A}} \quad (4.25)$$

le Problème  $\mathcal{P}^\nu$  admet une unique solution, qui satisfait la régularité  $u \in C^1(\mathbb{R}_+; V)$ .

La démonstration se fera en plusieurs étapes.

**Preuve.** Pour commencer nous supposons que (4.8) -(4.14) sont valides, et nous considérons les opérateurs

$$A : V \rightarrow V, \quad \mathcal{S} : C(\mathbb{R}_+; V) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; V)$$

$$\mathcal{R} : C(\mathbb{R}_+; V) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; V)$$

tels que

$$(Aw, v)_V = \int_{\Omega} \mathcal{A}\varepsilon(w) \cdot \varepsilon(v) dx + \int_{\Gamma_3} p(w_\nu) v_\nu da, \quad \forall w, v \in V, \quad (4.26)$$

$$\mathcal{S}w(t) = \int_0^t w(s) ds + u_0; \quad \forall w \in C(\mathbb{R}_+; V), t \in \mathbb{R}_+ \quad (4.27)$$

$$(\mathcal{R}w(t), v)_V = \mathcal{B}\varepsilon(\varphi w(t)), \varepsilon(v)_Q + \left( \int_0^t \theta(t-s) \varepsilon(w) ds, \varepsilon(v) \right)_Q \quad (4.28)$$

avec  $w \in C(\mathbb{R}_+; V), v \in V, t \in \mathbb{R}_+$ . Rappelons que l'opérateur  $\mathcal{S}$  satisfait

$$\|\mathcal{S}w_1(t) - \mathcal{S}w_2(t)\|_V \leq \int_0^t \|w_1(s) - w_2(s)\|_V ds \quad (4.29)$$

$$\forall w_1, w_2 \in C(\mathbb{R}_+; V), \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Avec les préliminaires, nous considérons le problème auxiliaire formulé en vitesses défini de la manière suivante :

**Problème  $\mathcal{Q}_V$ .** Trouver un champ de vitesses  $w \in C(\mathbb{R}_+; U)$  tel que, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  :

$$(\mathcal{A}w(t), v - w(t))_V + (\mathcal{R}w(t), v - w(t))_V + j(w(t), v) - j(w(t), w(t)) \geq \quad (4.30)$$

$$(f(t), v - w(t))_V, \quad \forall v \in U$$

Nous avons le résultat d'équivalence suivant.

**Lemme 4.2.** Soient  $u \in C^1(\mathbb{R}_+; V)$  et  $w \in C(\mathbb{R}_+; U)$ , deux fonctions données telles que  $u = \mathcal{S}w$ . Alors  $u$  est une solution du Problème  $\mathcal{P}^V$  si et seulement si  $w$  est une solution du Problème  $\mathcal{Q}^V$ .

**Preuve.** On suppose que  $u$  est une solution du problème  $\mathcal{P}^V$ , alors d'après l'égalité  $u = \varphi w$  et la définition (4.27) de l'opérateur  $\varphi$  impliquent que  $\dot{u} = w$ . Par suite, en utilisant (4.24) et les définitions (4.26) et (4.28) des opérateurs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{R}$ , respectivement, nous déduisons que la fonction  $w$  est une solution du problème  $\mathcal{Q}^V$ .

Réciproquement, supposons que  $w$  est une solution du problème  $\mathcal{Q}^V$ . Alors, l'égalité  $u = \mathcal{S}w$  et la définition (4.27) de l'opérateur  $\mathcal{S}$  impliquent que  $\dot{u} = w$  et  $u(0) = u_0$ . De plus, en utilisant (4.30) et les notations (4.27) et (4.28) nous en déduisons que (4.24) est valide. Nous en concluons que la fonction  $u$  est une solution du problème  $\mathcal{P}^V$ .

**2.Existence.** pour la question de l'existence et de l'unicité de la solution du problème  $\mathcal{Q}^V$  nous avons le résultat suivant.

**Lemme 4.3.** Le problème  $\mathcal{Q}^V$  admet une unique solution, qui satisfait la régularité  $w \in C(\mathbb{R}_+; U)$ .

*Démonstration.* Pour cela nous utilisons le théorème 2.2 en prenant  $X = V$  et  $K = U$ .

Ensuite, nous avons recours à la définition (4.26) de l'opérateur  $A$ , ainsi qu'aux propriétés (4.8)(3) et (4.13)(4) pour avoir

$$\langle Aw - Av, w - v \rangle = \underbrace{\langle \mathcal{A}(\varepsilon(w)) - \mathcal{A}(\varepsilon(v)), \varepsilon(w) - \varepsilon(v) \rangle}_{F_1} + \underbrace{\int_{\Gamma_3} (p(w_\nu) - p(v_\nu))(w_\nu - v_\nu) da}_{F_2}$$

D'après (4.8)(3), il existe  $m_{\mathcal{A}} > 0$

$$\begin{aligned} F_1 &\geq m_{\mathcal{A}} \|\varepsilon(w) - \varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\geq m_{\mathcal{A}} \|w - v\|_V^2 \end{aligned}$$

D'après (4.13)(4), on a :

$$F_2 = \int_{\Gamma_3} (p(w_\nu) - p(v_\nu))(w_\nu - v_\nu) da \geq 0$$

Donc en combinant les deux inégalités précédentes on a :

$$(Aw - Av, w - v)_V \geq m_{\mathcal{A}} \|w - v\|_V^2, \quad \forall u, v \in V \quad (4.31)$$

Qui implique que l'opérateur  $A$  est fortement monotone.

D'autre part, en utilisant (4.8)(2), (4.13)(2), (4.26) et l'inégalité de la trace (2.4), nous avons

$$\|Aw - Av\|_V^2 = \underbrace{\langle \mathcal{A}(\varepsilon(w)) - \mathcal{A}(\varepsilon(v)), \varepsilon(A(w)) - \varepsilon(A(v)) \rangle}_{T_1} + \underbrace{\int_{\Gamma_3} (p(w_\nu) - p(v_\nu))((Aw)_\nu - (Av)_\nu) da}_{T_2}$$

On a :

$$\begin{aligned} T_1 &= \langle \mathcal{A}(\varepsilon(w)) - \mathcal{A}(\varepsilon(v)), \varepsilon(A(w)) - \varepsilon(A(v)) \rangle \\ &\leq \|\mathcal{A}(\varepsilon(w)) - \mathcal{A}(\varepsilon(v))\|_{\mathcal{H}} \cdot \|A(w) - A(v)\|_V \\ &\leq L_{\mathcal{A}} \|w - v\|_V \cdot \|A(w) - A(v)\|_V \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_2 &= \int_{\Gamma_3} (p(w_\nu) - p(v_\nu)) ((Aw)_\nu - (Av)_\nu) da \\ &\leq \|p(w_\nu) - p(v_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)} \|A(w) - A(v)\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\quad L_p \|w - v\|_{L^2(\Gamma_3)} \|A(w) - A(v)\|_{L^2(\Gamma_3)} \end{aligned}$$

de (2.4) théorème de la trace on a :

$$T_2 \leq L_P C_0^2 \|w - v\|_V \|A(w) - A(v)\|_V$$

en combinant les deux inégalités précédentes en déduit que

$$\begin{aligned} \|Aw - Av\|_V^2 &\leq L_A \|w - v\|_V \cdot \|A(w) - A(v)\|_V + L_P C_0^2 \|w - v\|_V \|A(w) - A(v)\|_V \\ &\leq (L_A + L_P C_0^2) \|w - v\|_V \end{aligned} \quad (4.32)$$

qui implique que l'opérateur  $A$  est de Lipschitz.

Nous en déduisons que  $A$  est un opérateur Lipschitzien, fortement monotone sur l'espace  $V$ .

A présent, soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t \in [0, n]$  et considérons  $u, v \in C(\mathbb{R}_+; V)$ .

Nous utilisons la définition (4.28) pour trouver que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}u(t) - \mathcal{R}v(t)\|_V &\leq \|\mathcal{B}\varepsilon(\varphi(u(t))) - \mathcal{B}\varepsilon(\varphi(v(t)))\| \\ &\quad + \left\| \int_0^t \theta(t-s)\varepsilon(u(s))ds - \int_0^t \theta(t-s)\varepsilon(v(s))ds \right\| \end{aligned} \quad (4.33)$$

et, par conséquent, les hypothèses (4.9) et les inégalités (4.29), (2.3) nous donnent

$$\|\mathcal{R}u(t) - \mathcal{R}v(t)\|_V \leq \left( L_B + \max_{r \in [0, n]} \|\theta(r)\|_{Q_\infty} \right) \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_V ds$$

L'inégalité (4.33) montre que (2.20) est vérifiée en prenant

$$r_n = L_B + \max_{r \in [0, n]} \|\theta(r)\|_{Q_\infty}$$

En outre, il est facile de voir que la fonctionnelle  $j$  définie par (4.17) satisfait la condition (2.21).

Soient  $u_1, u_2, v_1, v_2$ , quatre éléments arbitraires de  $U$ . Nous utilisons la définition (4.17) pour voir que

$$j(u_1, v_2) - j(u_1, v_1) + j(u_2, v_1) - j(u_2, v_2) = \int_{\Gamma_3} \mu(p(u_{1v}) - p(u_{2v}))(\|v_{2\tau}\| - \|v_{1\tau}\|) da \quad (4.34)$$

Ensuite, nous avons recours aux inégalités

$$|u_{1\nu} - u_{2\nu}| \leq \|u_1 - u_2\|, \quad \left| \|v_{1\tau}\| - \|v_{2\tau}\| \right| \leq \|v_1 - v_2\| \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

pour déduire, à l'aide de l'hypothèse (4.13) et de l'inégalité (2.4), que

$$\begin{aligned} & j(u_1, v_2) - j(u_1, v_1) + j(u_2, v_1) - j(u_2, v_2) \\ & \leq c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|u_1 - u_2\|_V \|v_1 - v_2\|_V \end{aligned}$$

Cette inégalité montre que la condition (2.21) est vérifiée avec  $\alpha = c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}$ .

En utilisant l'hypothèse (4.11) et la définition (4.18), nous en déduisons que  $f$  a la régularité requise pour que (2.22) soit également vérifiée. Enfin, nous notons que la condition de petitesse (4.25) correspond à la condition  $m > \alpha$  dans la mesure où (4.31) et (4.34) signifient que  $m = m_{\mathcal{A}}$  et  $\alpha = c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}$ , respectivement.

Alors le Lemme 4.2 est une conséquence du Théorème (2.2). On peut maintenant donner la démonstration du Théorème 4.1.

**Existence.** Supposons  $w$  la solution du problème  $\mathcal{Q}_V$  obtenue au Lemme 4.3 et soit  $u = \varphi w$ . Alors  $u \in C(\mathbb{R}_+; V)$  et le Lemme 4.2 montre que  $u$  est une solution du Problème  $\mathcal{P}^\nu$ .

**Unicité.** On considère  $u_1$  et  $u_2$ , deux solutions du Problème  $\mathcal{P}^\nu$  telles que  $u_1, u_2 \in C^1(\mathbb{R}_+; V)$ . Alors  $u_i(0) = u_0$  pour  $i = 1, 2$  ce qui implique que  $u_i = \varphi w_i$  où  $w_i = \dot{u}_i$ , pour  $i = 1, 2$ . De plus, le lemme 5.2 implique que  $w_i$  représente une solution du Problème  $\mathcal{Q}_V$  et en utilisant l'unicité de la solution de ce problème, qui est garantie par le lemme 4.3, nous en déduisons que  $w_1 = w_2$ .

Par la suite,  $u_1 = \varphi w_1 = \varphi w_2 = u_2$ , ce qui montre l'unicité de la solution ce qui achève la démonstration. ■

# Chapitre 5

## Etude d'un problème de contact élastique quasistatique avec usure et contrainte unilatérale

**Introduction.** Dans ce chapitre nous abordons un problème de contact glissant entre un corps de loi constitutive élastique et un obstacle assimilé à une fondation. La différence réside dans le fait que dans ce chapitre nous prenons en considération l'usure des surfaces de contact. Ceci revient au fait, à introduire une nouvelle variable, la fonction d'usure, satisfaisant la loi d'Archard et, de ce fait le problème est quasistatique. La nouveauté du modèle réside dans l'utilisation de cette nouvelle variable.

Les processus de contact entre corps déformables ou entre corps déformable et fondation abondent dans l'industrie et la vie quotidienne. Leur modélisation est assez complexe et conduit généralement à des problèmes de valeurs aux limites fortement non linéaires. Les références de base dans le domaine comprennent [1–5] et, plus récemment [6–9]. Là, l'analyse mathématique de divers modèles de contact est fournie, y compris les résultats d'existence et d'unicité de la solution. Les références [2,3,7] traitent également de l'analyse numérique de différents modèles de contact. Pour modéliser l'usure des surfaces en contact, la fonction d'usure  $w = w(x, t)$  est introduite, mesurant la profondeur, dans la direction normale, du

matériau retiré. Par conséquent, il mesure le changement de la géométrie de la surface et représente la quantité cumulée de matériau retiré, par unité de surface, au voisinage du point  $x$  jusqu'au temps  $t$ .

Ce chapitre comporte quatre sections, dans la première on propose une formulation forte du problème puis dans la deuxième partie on donne quelques hypothèses indispensables pour la démonstration. Ensuite, dans la troisième section on aborde la formulation variationnelle du problème considéré, nous donnons une formulation variationnelle et dans la dernière section on aborde la question de l'existence et l'unicité d'une solution faible au problème considéré.

## 5.1 Position du problème

Dans ce chapitre on va considérer le problème mécanique suivant.

**Problème  $\mathcal{P}$ .** Trouver un champ de contraintes  $\sigma : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{S}^d$ , un champ de déplacements  $u : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$  et une fonction d'usure  $w : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  tels que :

$$\sigma(t) = \mathcal{F}_\varepsilon(u(t)) \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \quad (5.1)$$

$$\text{Div}(\sigma) + f_0(t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \quad (5.2)$$

$$u(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \quad (5.3)$$

$$\sigma(t)v = f_2(t) \quad \text{sur } \Gamma_2 \times \mathbb{R}_+ \quad (5.4)$$

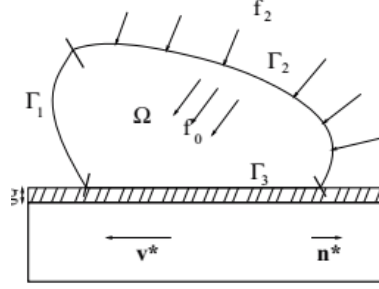
$$\begin{cases} u_v(t) \leq g, \sigma_v(t) + p(u_v(t) - w(t)) \leq 0 \\ (u_v(t) - g)(\sigma_v(t) + p(u_v(t) - w(t))) = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \quad (5.5)$$

$$-\sigma_\tau(t) = \mu p(u_v(t) - w(t))n^*(t) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \quad (5.6)$$

$$\dot{w}(t) = \alpha(t)p(u_v(t) - w(t)) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \quad (5.7)$$

$$w(0) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (5.8)$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ .



Cadre physique contact avec  
usure

Ce problème prend en considération l'usure de la fondation. Ceci rend le modèle mathématique plus intéressant, car il conduit à un problème non linéaire d'évolution. Ici ci-dessous et, pour plus de simplicité, nous ne signalons pas explicitement la dépendance des différentes fonctions de la variable spatiale  $x$ . En outre, nous rappelons que les fonctions  $n^*$  et  $\alpha$  sont données par :

$$n^*(t) = -\frac{v^*(t)}{\|v^*(t)\|} \quad , \quad \alpha(t) = k \|v^*(t)\| \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (5.9)$$

où  $k$  représente le coefficient d'usure et  $v^*(t)$  est la vitesse de la fondation.

Nous fournissons maintenant une brève explication pour les équations et les conditions du problème  $\mathcal{P}$ . Tout d'abord, l'équation (5.1) représente la loi de comportement élastique du matériau dans laquelle  $\mathcal{F}$  désigne un opérateur non linéaire donné. Puis, (5.2) est l'équation d'équilibre dans le cas d'un problème quasi-statique. Ensuite, (5.3) et (5.4) représentent respectivement les conditions de déplacement et de traction. La condition (5.5) représente la condition de contact avec compliance normale et contrainte unilatérale dans laquelle  $w$  représente la fonction d'usure de la fondation. Les conditions (5.6) et (5.7) représentent respectivement la loi de frottement et la loi d'Archard présentées dans l'introduction. Enfin, (5.8) représente la condition initiale pour la fonction de l'usure.

## 5.2 Hypothèses

Nous passons maintenant à la formulation variationnelle du problème  $\mathcal{P}$  et, à cette fin, nous énonçons les hypothèses sur les données.

Premièrement, nous supposons que l'opérateur d'élasticité  $\mathcal{F}$  vérifie les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \mathcal{F} : \Omega \times \mathcal{S}^d \rightarrow \mathcal{S}^d \\ 2. \text{ Il existe } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ tel que : } \|\mathcal{F}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{F}(x, \varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{F}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{S}^d \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ 3. \text{ Il existe } m_{\mathcal{F}} > 0 \text{ tel que :} \\ \quad (\mathcal{F}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{F}(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{F}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2 \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{S}^d \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ 4. \text{ L'application } x \rightarrow \mathcal{F}(x, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega, \forall \varepsilon \in \mathcal{S}^d. \\ 5. \text{ L'application } x \rightarrow \mathcal{F}(x, 0) \text{ appartient à } Q. \end{array} \right. \quad (5.10)$$

et la fonction de compliance normale vérifie les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. p : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ 2. \text{ Il existe } L_p > 0 \text{ tel que : } |p(x, r_1) - p(x, r_2)| \leq L_p |r_1 - r_2| \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ 3. (p(x, r_1) - p(x, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ 4. \text{ L'application } x \rightarrow p(x, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \forall r \in \mathbb{R} \\ 5. p(x, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (5.11)$$

Les densités des forces volumiques et tractions surfaciques ont la régularité

$$f_0 \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)^d) \quad , \quad f_2 \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_2)^d). \quad (5.12)$$

Enfin, le coefficient de frottement, le coefficient d'usure et la vitesse de la fondation vérifient les conditions :

$$\mu \in L^\infty(\Gamma_3) \quad , \quad \mu(x) \geq 0 \quad , \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3, \quad (5.13)$$

$$k \in L^\infty(\Gamma_3) , k(x) \geq 0 , p.p.x \in \Gamma_3, \quad (5.14)$$

$$v^* \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d) \text{ et il existe } v > 0 \text{ tel que } \|v^*(t)\| \geq v, \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (5.15)$$

Notons que l'hypothèse (5.15) est compatible avec le cadre physique décrit ci-dessus, puisque, à chaque moment de temps, la vitesse de la fondation est supposée assez grande. De plus (5.9), (5.14) et (5.15) impliquent la régularité

$$n^* \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d), \alpha \in C(\mathbb{R}_+; L^\infty(\Gamma_3)). \quad (5.16)$$

Et en outre

$$\alpha(t) \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3, \forall t \in \mathbb{R}_+. \quad (5.17)$$

Ensuite, nous rappelons l'ensemble des champs de déplacements admissibles définis par :

$$U = \{v \in V : v_\nu \leq g \text{ sur } \Gamma_3\} \quad (5.18)$$

Par ailleurs, nous utilisons le théorème de représentation de Riesz pour définir la fonction  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow V$  par l'égalité

$$(f(t), v)_V = (f_0(t), v)_{L^2(\Omega)^d} + (f_2(t), v)_{L^2(\Gamma_2)^d}, \quad (5.19)$$

pour tout  $v \in V$  et  $t \in \mathbb{R}_+$ . Il résulte de l'hypothèse (5.12) que  $f$  a la régularité

$$f \in C(\mathbb{R}_+; V). \quad (5.20)$$

## 5.3 Formulation Variationnelle

Nous supposons dans ce qui suit que  $(\sigma, u, w)$  sont des fonctions suffisamment régulières qui vérifient (5.1) (5.8). Soit  $v \in U$  et  $t > 0$ .

Nous utilisons la formule de Green (1.4) et l'équation d'équilibre (5.2) pour obtenir

$$\int_{\Omega} \sigma(t)(\varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))dx - \int_{\Omega} f_0(t)(v - u(t))dx = \int_{\Gamma} \sigma(t)\nu \cdot (v - u(t))da ; \forall v \in U$$

Ensuite, nous divisons l'intégrale de surface sur  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ .

Puisque  $v - u(t) = 0$  sur  $\Gamma_1$ ,  $\sigma(t)\nu = f_2(t)$  sur  $\Gamma_2$ , en tenant compte de (5.19) on déduit que :

$$\sigma(t)(\varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_Q = (f(t), v - u(t))_V + \int_{\Gamma_3} \sigma(t)\nu \cdot (v - u(t))da. \quad (5.21)$$

Notons que :

$$\sigma(t)\nu \cdot (v - u(t)) = \sigma_{\nu}(t)(v_{\nu} - u_{\nu}(t)) + \sigma_{\tau}(t) \cdot (v_{\tau} - u_{\tau}(t)) \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (5.22)$$

et, en utilisant la condition de contact (5.5) et la définition (5.18) de l'ensemble  $U$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma_{\nu}(t)(v_{\nu} - u_{\nu}(t)) &= (\sigma_{\nu} + p(u_{\nu}(t) - w(t)))(v_{\nu} - g) \\ &+ (\sigma_{\nu} + p(u_{\nu}(t) - w(t)))(g - u_{\nu}(t)) - p(u_{\nu}(t) - w(t))(v_{\nu} - u_{\nu}(t)) \\ &\geq -p(u_{\nu}(t) - w(t))(v_{\nu} - u_{\nu}(t)) \quad \text{sur } \Gamma_3. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Par conséquent, en tenant compte de l'égalité (5.22) et en utilisant l'inégalité (5.23) et la loi de frottement (5.6) on voit que :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} \sigma(t)\nu \cdot (v - u(t))da &\geq - \int_{\Gamma_3} p(u_{\nu}(t) - w(t))(v_{\nu} - u_{\nu}(t))da \\ &- \int_{\Gamma_3} \mu p(u_{\nu}(t) - w(t))n^*(t) \cdot (v_{\tau} - u_{\tau}(t))da. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Nous combinons maintenant (5.21) et (5.24) pour obtenir que :

$$\begin{aligned} &(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_Q + \int_{\Gamma_3} p(u_{\nu}(t) - w(t))(v_{\nu} - u_{\nu}(t))da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \mu p(u_{\nu}(t) - w(t))n^*(t) \cdot (v_{\tau} - u_{\tau}(t))da \geq (f(t), v - u(t))_V, \forall v \in U. \end{aligned} \quad (5.25)$$

En outre, la condition de déplacement (5.3), la première inégalité dans (5.5) et (5.18) impliquent que  $u(t) \in U$ .

Enfin, nous intégrons l'équation différentielle (5.7) avec la condition initiale (5.8) pour voir que :

$$w(t) = \int_0^t \alpha(s)p(u_\nu(s) - w(s))ds. \quad (5.26)$$

Nous combinons maintenant la loi de comportement (5.1), l'inégalité variationnelle (5.25), et l'équation intégrale (5.26) pour obtenir la formulation variationnelle du problème  $\mathcal{P}$  suivante.

**Problème  $\mathcal{P}^V$ .** Trouver un champ de contraintes  $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow Q$ , un champ de déplacements  $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow U$  et une fonction d'usure  $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow L^2(\Gamma_3)$  tels que :

$$\sigma(t) = \mathcal{F}\varepsilon(u(t)) \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} & (\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_Q + \int_{\Gamma_3} p(u_\nu(t) - w(t))(v_\nu - u_\nu(t))da \\ & + \int_{\Gamma_3} \mu p(u_\nu(t) - w(t))n^*(t) \cdot (v_\tau - u_\tau(t))da \geq (f(t), v - u(t))_V, \forall v \in U \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$w(t) = \int_0^t \alpha(s)p(u_\nu(s) - w(s))ds. \quad (5.29)$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ .

La solution unique du Problème  $\mathcal{P}^V$  sera démontrée dans la section suivante.

Un triplet  $(\sigma, u, w)$  qui satisfait (5.27) (5.29) s'appelle solution faible de Problème  $\mathcal{P}$ .

## 5.4 Existence et unicité de la solution

Dans cette section, nous énonçons et prouvons le résultat de l'existence d'unicité suivant.

**Théorème 5.1.** Supposons que les hypothèses (5.10) (5.15) sont satisfaites. Alors il existe une constante  $\mu_0$  qui ne dépend que  $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ , et,  $\mathcal{F}$  et  $p$ , telle que, si

$$\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0 \quad (5.30)$$

alors le Problème  $\mathcal{P}^V$  admet une solution unique. De plus, la solution ayant la régularité

$$\sigma \in C(\mathbb{R}_+, Q) \quad , \quad u \in C(\mathbb{R}_+, U) \quad , \quad w \in C(\mathbb{R}_+, L^2(\Gamma_3)) \quad (5.31)$$

et, en outre,

$$w(t) \geq 0 \text{ p.psur } \Gamma_3, \forall t \in \mathbb{R}_+. \quad (5.32)$$

Nous concluons de ce qui précède que le problème  $\mathcal{P}$  admet une solution unique, à condition que les hypothèses du théorème 5.1 soient satisfaites. En outre, notons que la condition (5.30) représente une condition de petitesse sur le coefficient de frottement qui est souvent nécessaire dans l'étude des problèmes de contact statiques ou quasi-statiques avec frottement.

La démonstration du théorème 5.1 sera réalisée en plusieurs étapes. Dans la première étape, nous supposons que la fonction  $w \in C(\mathbb{R}_+, L^2(\Gamma_3))$  est donnée et nous construisons le problème intermédiaire suivant.

Problème  $\mathcal{P}_w^V$ . Trouver un champ de déplacement  $u_w : \mathbb{R}_+ \rightarrow U$  tel que :

$$\begin{aligned} & (\mathcal{F}\varepsilon(u_w(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(u_w(t)))_Q + \int_{\Gamma_3} p(u_{w\nu}(t) - w(t))(v_\nu - u_{w\nu}(t)) da \\ & + \int_{\Gamma_3} \mu p(u_{w\nu}(t) - w(t)) n^*(t) \cdot (v_\tau - u_{w\tau}(t)) da \geq (f(t), v - u_w(t))_V, \forall v \in U \end{aligned} \quad (5.33)$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Dans l'étude du problème  $\mathcal{P}_w^V$  nous avons le résultat de l'existence et d'unicité suivant.

**Lemme 5.2.** Il existe une solution unique du Problème  $\mathcal{P}_w^V$  qui satisfait  $u_w \in (\mathbb{R}_+, U)$ .

**Démonstration.** Soit  $t \in \mathbb{R}_+$  et soit l'opérateur  $A_{wt} : V \rightarrow V$  défini par

$$\begin{aligned} (A_{wt}u, v)_V &= (\mathcal{F}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q + \int_{\Gamma_3} p(u_\nu - w(t))v_\nu da \\ & \quad \int_{\Gamma_3} \mu p(u_\nu - w(t))n^*(t) \cdot v_\tau da; \forall u, v \in V. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Nous utilisons les hypothèses (5.10), (5.11), (5.13) et l'inégalité (1.8) pour voir que l'opérateur  $A_{wt}$  est de Lipschitz, c'est-à-dire qu'il vérifie l'inégalité :

$$\|A_{wt}u_1 - A_{wt}u_2\|_V \leq (L_{\mathcal{F}} + c_0^2 L_p (1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)})) \|u_1 - u_2\|_V, \quad (5.35)$$

pour tout  $u_1, u_2 \in V$ .

Ensuite, nous introduisons la constante  $\mu_0$  définie par

$$\mu_0 = \frac{m_{\mathcal{F}}}{c_0^2 L_p} \quad (5.36)$$

qui, visiblement ne dépend que de  $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, \mathcal{F}$  et  $p$ . Supposons que l'hypothèse de (5.30) est vérifiée. Alors, nous obtenons

$$c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < m_{\mathcal{F}}. \quad (5.37)$$

Nous utilisons à nouveau les hypothèses (5.10), (5.11) et les inégalités (1.8) et (5.37) pour déduire que l'opérateur  $A_{wt}$  est fortement monotone, c'est-à-dire qu'il satisfait l'inégalité

$$(A_{wt}u_1 - A_{wt}u_2, u_1 - u_2)_V \geq (m_{\mathcal{F}} - c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \|u_1 - u_2\|_V^2 \quad (5.38)$$

pour tout  $u_1, u_2 \in V$ . Par le Théorème (2.1), nous en déduisons qu'il existe un unique élément  $u_{wt} \in U$  tel que

$$(A_{wt}u_{wt}, v - u_{wt})_V \geq (f(t), v - u_{wt})_V \forall v \in U. \quad (5.39)$$

Nous notons  $u_{wt} = u_w(t)$ . Ensuite, il découle de (5.39) et (5.34) que  $u_w(t) \in U$  est un élément unique qui résout l'inégalité variationnelle (5.33). Ce qui conclut la partie d'unicité de la solution.

Nous prouvons maintenant la continuité de la fonction  $t \rightarrow u_w(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow V$ .

Soient  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ . Nous désignons par  $u_w(t_i) = u_i, w(t_i) = w_i, f(t_i) = f_i, n^*(t_i) = n_i^*$ , pour  $i = 1, 2$ . En outre, nous utilisons des arguments standard dans (5.33) pour constater que

$$\begin{aligned} & (F\varepsilon(u_1) - F\varepsilon(u_2), \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2))_Q \leq (f_1 - f_2, u_1 - u_2)_V \\ & + \int_{\Gamma_3} [p(u_{1\nu} - w_1) - p(u_{2\nu} - w_2)] [(u_{2\nu} - w_2) - (u_{1\nu} - w_1)] da \\ & \quad + \int_{\Gamma_3} [p(u_{1\nu} - w_1) - p(u_{2\nu} - w_2)] (w_2 - w_1) da \\ & + \int_{\Gamma_3} \mu [p(u_{1\tau} - w_1)n_1^* - p(u_{2\nu} - w_2)n_1^*] \cdot (u_{2\tau} - u_{1\tau}) da \\ & \quad + \int_{\Gamma_3} \mu [p(u_{2\nu} - w_2)n_1^* - p(u_{2\nu} - w_2)n_2^*] \cdot (u_{2\tau} - u_{1\tau}) da \end{aligned}$$

Donc, sous les hypothèses (5.10), (5.11), (5.13) et (1.8), nous obtenons

$$\begin{aligned} & (m_{\mathcal{F}} - c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \|u_1 - u_2\|_V^2 \leq \\ & c_0 L_p (1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \|w_1 - w_2\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|f_1 - f_2\|_V + \\ & c_0 g(p) \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|n_1^* - n_2^*\| \|u_1 - u_2\|_V + L_p \|w_1 - w_2\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant l'inégalité (5.37) pour obtenir que

$$\|u_1 - u_2\|_V^2 \leq a \left( \|w_1 - w_2\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + \|f_1 - f_2\|_V + \|n_1^* - n_2^*\| \right)^2 + b \|w_1 - w_2\|_{L^2(\Gamma_3)} \quad (5.40)$$

où a et b désignent deux constantes positives qui ne dépendent pas de  $t_1$  et  $t_2$ . Nous combinons l'inégalité (5.40) avec les hypothèses (5.16), (5.20) et la régularité  $w \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3))$ . Nous déduisons que d'ici  $u_w \in C(\mathbb{R}_+; V)$ . Ainsi, nous concluons, par le Lemme 5.2 la partie de l'existence de la solution, ce qui conclut la démonstration du lemme.

Nous considérons maintenant l'opérateur  $\Lambda : C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3)) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3))$  défini par

$$\Lambda w(t) = \int_0^t \alpha(s) p(u_{wv}(s) - w(s)) ds \quad (5.41)$$

pour tous  $w \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3))$ , où  $u_w$  est la solution unique du Problème  $\mathcal{P}_w^V$ . Nous avons le résultat de point fixe suivant, qui représente la deuxième étape de la démonstration du Théorème 5.1.

**Lemme 5.3.** L'opérateur  $\Lambda$  admet un unique point fixe  $w^* \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3))$ .

**Démonstration.** Soient  $w_1, w_2 \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3))$ . Pour simplifier, nous notons par  $u_i$ ,  $i = 1, 2$  les solutions des problèmes  $\mathcal{P}_w^V$ , c'est-à-dire que  $u_i = u_{w_i}$ . Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in [0, n]$ .

Nous utilisons la définition (5.41) de l'opérateur  $\Lambda$  et les hypothèses (5.11), (5.14) et (5.15) afin de déduire que

$$\|\Lambda w_1(t) - \Lambda w_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq v_n^* \left( c_0 \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds + \int_0^t \|w_1(s) - w_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds \right) \quad (5.42)$$

$$v_n^* = L_p \|k\|_{L^2(\Gamma_3)} \max \|v^*(r)\|$$

D'autre part, l'utilisation d'arguments similaires à ceux utilisés dans la démonstration (5.40) donne

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq \sqrt{a+b} \|w_1(t) - w_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \quad (5.43)$$

Nous combinons maintenant les inégalités (5.42) et (5.43) pour déduire que

$$\|\Lambda w_1(t) - \Lambda w_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq v_n^* \left( c_0 \sqrt{a+b} + 1 \right) \int_0^t \|w_1(s) - w_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds \quad (5.44)$$

Le lemme 5.3 est maintenant une conséquence directe du Théorème (2.3).

Nous avons maintenant tous les ingrédients nécessaires pour fournir la démonstration du Théorème 5.1.

**Existence.**

Soit  $w^* \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3))$  l'unique point fixe de l'opérateur  $\Lambda$  et soient  $u^*, \sigma^*$  définis par :

$$u^*(t) = u_{w^*}(t) \quad (5.45)$$

$$\sigma^*(t) = \mathcal{F}_\varepsilon(u^*(t)) \quad (5.46)$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . Nous rappelons que  $w^* = \Lambda w^*$  et en utilisant des égalités (5.41) et (5.45) nous déduisons que

$$w^*(t) = \int_0^t \alpha(s) p(u_{w^*}(s) - w^*(s)) ds \quad (5.47)$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . Nous montrons que le triplet  $(\sigma^*, u^*, w^*)$  satisfait (5.27) (5.29).

Premièrement, nous remarquons que (5.27) est une conséquence directe de (5.46). Ensuite, nous écrivons l'inégalité (5.33) pour  $w = w^*$  et nous utilisons la notation (5.45), (5.46) pour voir que (5.28) est validé. Puis, (5.29) découle de (5.47). Nous concluons de ce qui précède que le triplet  $(\sigma^*, u^*, w^*)$  représente une solution du problème  $\mathcal{P}^V$ . La régularité exprimée dans (5.31) est une conséquence directe du lemme 5.2 combiné avec l'hypothèse

(5.10) et la formule (5.47). Enfin, la condition (5.32) découle de (5.47), puisque  $\alpha$  et  $p$  sont des fonction positives, tel qu'il résulte de (5.17) et (5.11).

**Unicité.**

L'unicité de la solution découle de la solvabilité unique du Problème  $\mathcal{P}_w^V$  fournie dans le Lemme 5.2, combinée avec l'unicité du point de l'opérateur  $\Lambda$  défini par (5.41) qui achève la démonstration.

## Conclusion et perspectives

*Au cours de ce travail, on a étudié théoriquement quelques problèmes de contact entre un corps déformable et une fondation, avec frottement et usure. Les problèmes étudiés sont respectivement*

*1-Problème1. Etude d'un problème de contact statique pour un matériau élastique avec compliançe normale et contrainte unilatérale.*

*Dans ce problème le contact est statique modélisant l'interaction entre un corps de type élastique et une fondation déformable. Le contact suit une loi de compliançe normale couplée aux conditions de Signorini, le frottement quand à lui est supposé non monotone. Dans la première section de ce chapitre on propose une formulation forte du problème, puis dans la deuxième section on cite quelques hypothèses sur les données. Dans la troisième section, nous donnons une formulation faible et enfin dans la quatrième section nous abordons la question de l'existence et l'unicité de la solution faible. La démonstration est basée sur un résultat général des inéquations variationnelles [31].*

*2-Problème2. Etude d'un problème de contact quasistatique pour un matériau visco-élastique avec mémoire longue et réponse normale instantanée.*

*Dans ce problème le contact est quasistatique modélisant le contact entre un corps viscoélastique avec mémoire longue et un obstacle faisant figure de fondation. Le contact cette fois est en compliançe normale mais formulée en vitesse avec les conditions de réponse normale instantanée. Dans la première section du chapitre nous présentons la formulation forte du problème considéré, puis dans la deuxième section nous formulons quelques hypothèses nécessaires à l'obtention d'une formulation variationnelle forte. Dans la section 3 nous donnons la formulation variationnelle du problème. Enfin dans la section 4, nous abordons la question de l'existence et l'unicité de la solution faible. La démonstration est basée sur un résultat général des inéquations variationnelles perturbées [31].*

*3. Problème3. Etude d'un problème de contact avec usure et contrainte unilatérale.*

*Dans ce chapitre nous abordons un problème de contact glissant entre un corps de loi constitutive non linéaire élastique et une fondation déformable. La différence réside dans le fait que dans ce cas nous prenons en compte l'usure de la surface de contact. Ceci revient à introduire une nouvelle variable la fonction d'usure qui satisfait la loi d'Archard de ce*

*fait le processus est quasistatique. Dans la première section de ce chapitre nous écrivons le problème mécanique, puis dans la deuxième section nous formulons les hypothèses nécessaires. Dans la troisième section nous obtenons la formulation faible du problème. Enfin dans la quatrième section nous démontrons notre résultat principal d'existence et d'unicité de la solution faible. La démonstration est faite en deux étapes où on utilise un résultat général des inéquations variationnelles pour les déplacements et le théorème de point fixe pour la fonction d'usure [4, 6, 9].*

*Sous certaines hypothèses sur les données en utilisant le théorème de point fixe et des résultats sur les inéquations variationnelles nous avons démontré que chacun des problèmes considérés admet une solution unique faible.*

*Dans la continuité des travaux accomplis, il serait intéressant de considérer des processus de contact dynamique associé aux différentes lois de contact et de frottement étudiées. L'analyse variationnelle de ces problèmes représente un sujet de recherche ouvert qui mérite d'être abordé dans l'avenir. Le contrôle optimal des modèles de contact présentés dans cette thèse pourrait aussi être étudié. Pour vérifier les estimations de l'erreur ainsi que les résultats de convergence obtenus dans ce mémoire et illustrer le comportement des modèles étudiés, des simulations numériques basées sur des méthodes performantes seront les bienvenues. Cet objectif sera réalisé dans des travaux ultérieurs.*

# Bibliographie

- [1] A.Adams, *Sobolev Spaces*, Pure and Applied Mathematics, 65. A Series of Monographs and Textbooks, New York–San Francisco–London : Academic Press, Inc., a subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers. XVIII, 1975.
- [2] E.Anderson, *A quasistatic frictional problem with normal compliance*, Nonlinear Anal, 16 (1991), pp. 347-370.
- [3] A.Amssad , M.Sofonea, *Analysis of quasistatic viscoplastic problem involving Tresca friction law Discrete and Continuous Dynamical systems*, Discrete Contin. Dyn. Systems, 4 (1998), pp. 55-72.
- [4] A.Amssad , M.Shillor and M.Sofonea, *A quasistatic contact problem for elastic perfectly plastic body with Tresca's friction*, Nonlin. Anal, 35 (1999), pp. 95-109..
- [5] B.Awbi, *Analyse variationnelle de quelques problèmes viscoélastiques avec frottement*, Thèse de Doctorat , Université de perpignion, 2001.
- [6] H Brezis, *Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité*, Annales de l'Institut Fourier., 18 (1968), pp. 115-175
- [7] H. Brezis, *Problèmes unilatéraux*, J. Math. Pures Appl., 51 (1972), pp. 1-168.
- [8] H.Brézis, *Analyse fonctionnelle* ,Théorie et Applications,Masson, 1987.
- [9] O.Chau ,W.Han and M.Sofonea , *Analysis and approximation of a viscoelastic contact problem with slip-dependent friction*, Dynamic of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, 8(1)(2001), pp. 153–174.
- [10] J. Chen, W. Han and M. Sofonea, *Numerical Analysis of a Quasistatic Problem of Sliding Frictional Contact with Wear*, Method and Application of Analysis, 7(2000), pp. 687–704.

- 
- [11] G.Duvaut, *Mécanique des milieux continus*, Dunod, Paris ,1998.
- [12] G.Duvaut, J.L.Lions, *Les inéquation en mécanique et en physique*, Dunod , 1972.
- [13] I.Ekeland, R.Teman, *Convex Analysis and Variational problems*, North Holland, Amsterdam.1976.
- [14] R.Glowinski, *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, Springer Verlag.New York, 1984.
- [15] W.Han , M.Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, American Mathematical Society and International Press, 2002.
- [16] W.Han ,B.Reddy, *Plasticity*, Mathematical Theory And Numerical Analysis, Springer, New York, 1999.
- [17] T.-V. Hoarau-Mantel, A. Matei , *Analysis of viscoelastic antiplane contact problem with slip dependent friction*, International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, 12(2002), pp.51-58.
- [18] J.A.Martins, *Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction*, J.Nonlinear Analysis TMA, 11(1987), pp.407-428.
- [19] D.Montreanu, M.Sofonea , *Evolutionary variational inequalities arising in quasistatic frictional contact problems for elastic materials*, Abstr. Appl. Anal. 4(4)(1999), pp.255-279.
- [20] A. Matei,V.V. Motreanu and M. Sofonea,*On the Signorini frictionless contact problem for linear viscoelastic materials Applied Analysis*, Applicable Analysis 80(1-2)(2007), pp.177-199.
- [21] Francesco de Il'Isola, Mircea Sofonea and David Steigmann, *Mathematical Modelling Solid Mechanics*, Springer Science and Business Media LLC, 2017.
- [22] J.Necas, *Theory of Elasticity and Plasticity Bodies*, Elsevier, Amsterdam , 1981.
- [23] A.Ourahmoun, B.Bouderah, *Analysis of Quasistatic Problem for an Elastic Material with Friction and Wear*. International Journal of Mathematics and Computer Science, 16(1)(2021), pp. 79–98.

- 
- [24] A.Ourahmoun, B.Bouderah, T.Serrar, *Analysis of quasistatic frictional contact problem with subdifferential form, unilateral condition and long term-memory*. International Journal of Analysis and Applications,18(2)(2020), pp. 161-171.
- [25] A.Ourahmoun, B.Bouderah,T.Serrar, *Analysis of a dynamic elasto-viscoplastic frictionless antiplan contact problem with normal compliance*, Aust. J. Math. Anal. Appl.17(2)(2020).
- [26] M.Rochdi, *Quasistatic viscoelastic contact with normal compliance and friction*, Journal of Elasticity, 51(1998), pp.105-126.
- [27] M.Sofonea, *On a contact problem for elastic viscoplastic bodies*, Nonlinear Analysis , 29(1997), pp.1037-1050.
- [28] M.Sofonea, C,Avramescu , A matei, *A Fixed point results with applications in the study of viscoplastic frictionless contact problems*, Communications on Pure and Applied Analysis.7(2008),645-658.
- [29] M.Sofonea, C , A matei, *Mathematical Models in Contact Mechanics*,London Mathematical Society lecture Note Series.398(2012) , Cambridge University Press ,Cambridge.
- [30] M.Sofonea, Flavius Patrulescu and Yahyeh Souleiman, *Analysis of contact problem with wear and unilateral constraint*, Applicable Analysis , 95(2016), pp.2590-2607.
- [31] S.Migorski , Anna Ochal , M.Sofonea, *Nonlinear inclusion and hemivariational inequalities,Models and Analysis of Contact Problem*, Advances in Mechanics and Mathematics 26,Springer , 2013.<https://www.springer.com/series/5613>
- [32] P.Le Tallec, *Numerical Analysis of viscoelasticity Problems*, Masson, Springer, 1990.
- [33] R.Temam, *Mathematical Modeling in Continuum Mechanics*, Cambridge University, 2001.

---

**ملخص :** الهدف من هذه الأطروحة هو الدراسة التباينية لبعض المسائل في ميكانيكا التلامس للقوانين التأسيسية المرنة ، واللزجة اللزجة ذات الذاكرة الطويلة. النتائج التي تم الحصول عليها تتعلق بوجود وحدانية الحل ضعيف لهذه المسائل المطروحة. تتكون الأطروحة من جزأين. ينقسم الجزء الأول إلى فصلين. تم تخصيص الفصل الأول لاستدعاء النماذج الميكانيكية المختلفة للتلامس التي تمت دراستها بالإضافة إلى بعض الأدوات الرياضية اللازمة لتسهيل فهم هذا العمل. الفصل الثاني مخصص للتذكير بالتحليل الوظيفي غير الخطي مثل المتباينة المتغيرة و قضايا غرونوال ونظرية النقطة الثابتة. الجزء الثاني يتكون من ثلاثة فصول. يتناول الفصل الأول دراسة مسألة التلامس الساكن مع الامتثال العادي والضغط من جانب واحد. الفصل الثاني مخصص لدراسة مسألة التلامس شبه المطاطية اللزجة مع ذاكرة طويلة واستجابة طبيعية فورية. يتناول الفصل الثالث دراسة مسألة التلامس شبه الساكنة مع التآكل. المطاطية اللزجة مع ذاكرة طويلة واستجابة طبيعية فورية. يتناول الفصل الثالث دراسة مسألة التلامس شبه الساكنة مع التآكل.

**كلمات مفتاحية :** تماس المواد المرنة ، اللزجة المرنة، قانون احتكاك تريسكا، عدم المساواة في التطور، حل ضعيف، نظرية النقطة الثابتة .

---

**Abstract :** *The object of this thesis is the variational study of some problems in contact mechanics for elastic, viscoelastic and viscoelastic constitutive laws with long memory. The results obtained concern the existence and the uniqueness of a weak solution for the considered problems. The thesis is structured in two parts. The first part is subdivided into two chapters. The first chapter is devoted to recalling the various mechanical models of contact studied as well as some mathematical tools necessary for the continuation of this work. The second chapter is intended for reminders of nonlinear functional analysis such as variational inequalities, Grönwall lemmas and the fixed point theorem. The second part consists of three chapters. The first chapter deals with the study of a static contact problem with normal compliance and unilateral stress. The second chapter is devoted to the study of a viscoelastic quasistatic contact problem with long memory and normal response. The third chapter deals with the study of a quasi-static contact problem with wear.*

**Keys words:** *Elastic, viscoelastic materials, compliance normale , variational inequality , evolution inequality , weak solution , fixed point theorem.*

---

**Résumé :** *L'objet de cette thèse est l'étude variationnelle de quelques problèmes en mécanique de contact pour des lois constitutives élastiques, viscoélastiques et viscoélastiques avec mémoire longue. Les résultats obtenus concernent l'existence et l'unicité d'une solution faible pour les problèmes considérés. La thèse est structurée en deux parties. La première partie est subdivisée en deux chapitres. Le premier chapitre est consacré à rappeler les différents modèles mécaniques de contact étudiés ainsi que quelques outils mathématiques nécessaires pour la suite de ce travail. Le deuxième chapitre est destiné à des rappels de l'analyse fonctionnelle non-linéaire telle que les inéquations variationnelles les lemmes de Grönwall et le théorème de point fixe. La deuxième partie est constituée de trois chapitres. Le premier chapitre traite l'étude d'un problème de contact statique avec compliance normale et contrainte unilatérale. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude d'un problème de contact quasistatique viscoélastique avec mémoire longue et réponse normale instantanée. Le troisième chapitre se penche sur l'étude d'un problème de contact quasistatique avec usure.*

**Mots clés :** *Matériaux élastiques, viscoélastiques, contact avec compliance normale, inéquations variationnelle, inéquation variationnelle d'évolution, solution faible, théorème de point fixe.*

---