UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Algèbre et Mathématiques Discrètes

Par

BOUZIDI MANAL

Sujet

NOMBRES TRIANGULAIRES

Devant le jury :

Mr. L. Zedam	Prof. Univ de M'sila	Président
Mr. A. Boudaoud	Prof. Univ de M'sila	Encadreur
Mr. A. Amroune	Prof. Univ de M'sila	Examinateur

Promotion : 2018 / 2019

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes parents pour leur bien *vaillance à mon égard et m'avoir accompagné tout au long de la formation.*

A mon cher frère.

A mes chères sœurs

Atous mes amies

A tous ceux que j'aime

Je tiens à remercier aussi toutes les personnes qui ont contribué de loin ou de près au bon déroulement de mon mémoire.

Remercîment

Tout d'abord je tiens à remercier notre dieu qui m'a donné la force, la patience et le courage pour terminer ce modeste travail.

Je tiens à remercier mon encadreur ***Mr: ABDELMADJID BOUDAOUD****, pour son écoute, ses diligents conseils et son assistance constante m'ont été très précieux tout au long de ce travail.*

Je remercie aussi exprimer ma gratitude au près des membres du jury :

A. Amroune (Examinateur)

L. Zedam (Président)

Qui ont bien voulu lire et évaluer mon travail.

J'adresse mes sincères et chaleureux remerciements dès le début de ma recherche jusqu'à la fin sans interruption.

Merci à tous nous aide de près ou de loin.

Merci pour tout.

Tables des matières

Liste des figures……01

Introduction……...03

1 Notions général

1.1 Triangle de Pascal…… 05

1.2 Nombres de Mersenne…… 08

1.3 Nombres de Fermat……..... 08

1.4 Équation de Pell…… 09

1.5 Fonctions génératrices……..... 11

2 Nombres triangulaires

2.1 Nombres triangulaires…….. 17

2.2 Quelque propriétés des nombres triangulaires…..…… 19

2.3 Nombre triangulaire de Mersenne……. 25

2.4 Nombre triangulaire de Fermat……. 27

2.5 Types de nombres triangulaires…… 27

2.6 Fonction de génération pour les nombres triangulaires…… 31

3 Nombres triangulaires carrés

3.1 Nombre triangulaire carré……. 33

3.2 L'infinitude des nombres triangulaires carrés……. . 35

3.3 Définition récursive des nombres triangulaires carrés…… 37

3.4 Propriétés des nombres triangulaires carrés……...37

3.5 Fonction génératrice pour les nombres triangulaires carrés.....39

Conclusion..... 42

Bibliographie.....44

Liste des figures

Figure 1.1 : Le triangle de Pascal où les éléments sont de la forme $\binom{n}{k}$…… 05

Figure 2.1 : Nappe Thaï…… 17

Figure 2.2 : Oranges en épicerie…….. 18

Figure 2.3 : Les quatre premiers nombres triangulaires…….. 18

Figure 2.4 : Le triangle de Pascal……. 19

Figure 2.5 : Illustration géométrique ……..……. 20

Figure 2.6 : Preuve visuelle du résultat de Diophantus……..... 20

Figure 2.7 : Nombre triangulaires centrés ……..……. 31

Figure 3.1 : Représentation géométrique du nombre triangulaire carré …… 33

INTRODUCTION

Introduction :

L'ancien proverbe chinois, " L'image représente mille mots" est vrai en mathématique. Les illustrations géométriques sont souvent utilisées pour illustrer des concepts et refléter les éventuelles relations entre les éléments de l'expérience [12].

L'un des plus anciens sous-ensembles de nombres naturels reconnus par les anciens mathématiciens était l'ensemble de nombre polygonaux. Tels nombres représentent un lien ancien entre la géométrie et la théorie des nombres [6].

Les nombres polygonaux sont une classe spéciale de nombres figurés ; ce sont des entiers positifs pouvant être représentés par des $n-gons$ réguliers, où $n \geq 3$. Quand $n = 3, 4$ et 5, on l'appelle respectivement nombres triangulaires, carrés et pentagonaux [12].

Ce travail est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre consiste en un rappel des notions préliminaires et fondamental utilisées par la suite : le triangle de Pascal, nombres de Mersenne et nombres de Fermat, équation de Pell, fonction génératrice, … .

Dans le deuxième chapitre, on donne la définition des nombres triangulaires et leurs propriétés. Aussi on présente quelques types de ces nombres : nombres triangulaires du second ordre, troisième ordre et nombres triangulaires centrés.

Dans le troisième chapitre, on donnera la définition des nombres triangulaires carrés et on prouvera leur infinitude. Aussi on donnera la fonction génératrice de ces nombres.

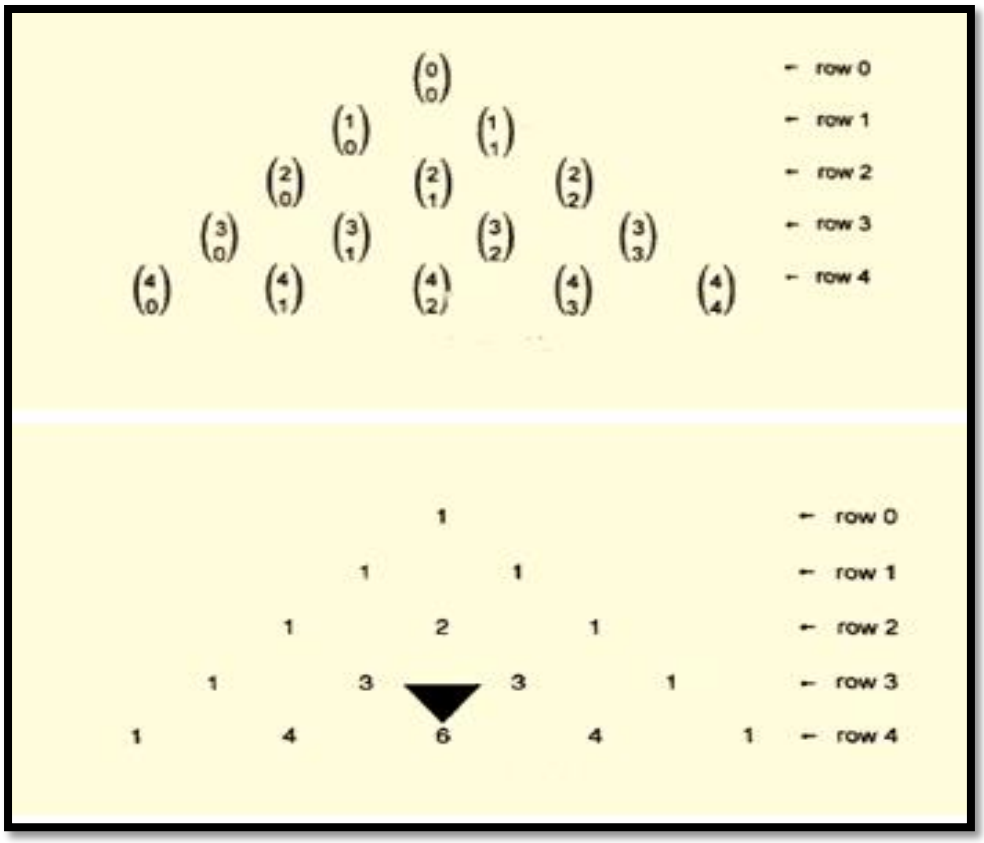
CHAPITRE 1

NOTIONS GENERAL

Nous commençons par des généralités et des définitions de certaines notions de base dont nous auvons besoin dans notre sujet. On trouve parmi les quelles : le triangle de Pascal, le nombre de Mersenne et Fermat, équation de Pell et fonction génératrice, … . Les références utilisées dans ce chapitre sont essentiellement [6], [7], [11] et [12].

1.1 Triangle de Pascal

Définition 1.1.1 Les différents coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$, où $0 \leq K < n$, peuvent être disposés sous la forme d'un triangle, comme le montrent le figure1.1.



Figures 1.1 : Le triangle de Pascal où les éléments sont de la forme $\binom{n}{k}$

Le triangle de Pascal possède beaucoup de propriétés intérérissantes.

- Chaque ligne commence et finit par 1.
- Le triangle de Pascal est symétrique par rapport à la ligne verticale passant par le sommet contenant 1.

- Tout nombre intérieur de chaque ligne correspond à la somme des nombres situés immédiatement à gauche et à droite de la ligne précédente.
- La somme des nombres de chaque ligne est une puissance de 2.

Théorème 1.1.2 (Identité de Pascal)

Soit n et k des entiers positifs, où $k \leq n$.

Alors

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Preuve.

Nous simplifierons le côté droit et montrerons qu'il est égal au côté gauche.

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} \\
&= \frac{k(n-1)!}{k(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{k!\,(n-k)(n-k-1)!} \\
&= \frac{k(n-1)!}{k!\,(n-k)!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,[k+(n-k)]}{k!\,(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!\,n}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\
&= \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

Théorème 1.1.3 (Théorème binomial) Soit x *et* y des nombres réels quelconques, et n n'importe quel nombre entier non négatif.

Alors,

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r$$

Preuve.

Pour $n = 0$

$$(x+y)^0 = \sum_{r=0}^{0} \binom{0}{r} x^{0-r} y^r$$
$$= x^0 y^0$$
$$= 1$$

Supposons que $p(k)$ est vrai pour certains $k \geq 0$:

$$(x+y)^k = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} x^{k-r} y^r$$

Alors,

$$(x+y)^{k+1} = (x+y)^k (x+y)$$
$$= \left[\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} x^{k-r} y^r\right](x+y)$$
$$= \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} x^{k+1-r} y^r + \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} x^{k-r} y^{r+1}$$
$$= \left[\binom{k}{0} x^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r} x^{k+1-r} y^r\right] + \left[\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} x^{k-r} y^{r+1} + \binom{k}{k} y^{k+1}\right]$$
$$= \binom{k+1}{0} x^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r} x^{k+1-r} y^r + \sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r-1} x^{k+1-r} y^r + \binom{k+1}{k+1} y^{k+1}$$
$$= \binom{k+1}{0} x^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} \left[\binom{k}{r} + \binom{k}{r-1}\right] x^{k+1-r} y^r + \binom{k+1}{k+1} y^{k+1}$$
$$= \binom{k+1}{0} x^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} \binom{k+1}{r} x^{k+1-r} y^r + \binom{k+1}{k+1} y^{k+1}$$
$$= \sum_{r=0}^{k+1} \binom{k+1}{r} x^{k+1-r} y^r$$

Ainsi, par le principe de l'induction mathématique, la formule est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

1.2 Nombres de Mersenne

Définition 1.2.1 Les nombres de Mersenne sont les nombres de la forme :

$$M_n = 2^n - 1, \qquad n \geq 1$$

Alors ils constituent la suite d'entiers (M_n), $n \geq 1$.

Définition 1.2.2 Un nombre premier de Mersenne, ou nombre de Mersenne premier, est un nombre qui est à la fois de Mersenne et premier. Pour que le $n - iéme$ Nombre de Mersenne M_n soit premier, il est nécessaire- mais non suffisant-que son Indice n le soit. Par exemple, M_{11} n'est pas premier non plus bien que 11 le soit:

$$M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89.$$

Théorème 1.2.3 $M_n = 2^n - 1$ si ce nombre est premier alors n est premier. La réciproque n'est pas vraie.

Exemple

$$M_2 = 2^2 - 1 = 3$$
$$M_3 = 2^3 - 1 = 7$$

1.3 Nombres de Fermat

Définition 1.3.1 Un nombre de Fermat est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $2^{2^n} + 1$, avec n entier naturel. Le $n - iéme$ nombre de Fermat, $2^{2^n} + 1$, est noté F_n. On vérifie que $F_n$est premier pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$:

$$F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65537$$

Remarque

Fermat pensait que tous les F_n sont premiers, mais Euler prouva que F_6 est non premier. On a vérifié ensuite que les F_n pour n allant de 6 à 11 ne sont pas premier.

On conjecture qu'il n'y a qu'un nombre fini d'entiers de Fermat premiers.

1.3.2 Propriétés des nombres de Fermat

1) Les cinq plus petits nombres de Fermat ($n\ de$ 0 à 4) sont premiers.
2) à partir de F_2, tous les nombres de Fermat se terminent par 7.
3) Deux nombres de Fermat sont premiers eux.
4) Tout nombre de Fermat $F_n (n \geq 1)$plus un est divisible par 6.

1.4 Équation de Pell

Définition1.4.1 Une équation de Pell-Fermat est une équation diophantienne de la forme suivante :

$$x^2 - dy^2 = m$$

Où d est entier strictement positif non carré et m un entier non nul quelconque.

Considération générales

1. Si d est négatif, alors l'équation $x^2 + dy^2 = m$ $(A > 0\ et\ A = -d)$ et dans ce cas le nombre de solution s'il y en a est fini.
2. De même si d est un carré, l'équation précédente est de la forme:
   $x^2 - d^2y^2 = m$ La quelle on peut l'écrit sous le forme:
   $(x + dy)(x - dy) = m$, dans ce cas $x + dy$ et $x - dy$ sont à choisir parmi les diviseurs de m, en nombre fini. Dans la suite on s'intéressera au cas où d est positif non carré. Tout d'abord $m = 1$:

$$x^2 - dy^2 = 1$$

On a, alors les résultats suivants

- L'équation $x^2 - dy^2 = 1$ possède la solution triviale $x = 1, y = 0$.
- L'équation $x^2 - dy^2 = 1$ possède toujours une infinité de solution non triviale.

La plus petite solution non triviale est appelée solution fondamentale est notée (x_0, y_0).

Définition1.4.2 L'équation de Pell la plus simple est $x^2 - 2y^2 = 1$,

C'est $1 + 2y^2 = x^2$. Par inspection, $(\alpha, \beta) = (3, 2)$ est la solution ayant la valeur x la plus petite positive .

$3^2 - 2.2^2 = 1$; C'est la solution fondamentale.

La prochaine est $(17, 12)$: $17^2 - 2.12^2 = 1$.

Le théorème suivant montre comment nous pouvons calculer à partir de la solution fondamentale, toutes les autres solutions.

Théorème 1.4.3 Soit (α, β) la solution fondamentale de l'équation de Pell $x^2 - dy^2 = 1$. Il y a une infinité de solution (x_n, y_n) :

$$x_n = \frac{1}{2}\left[\left(\alpha + \beta\sqrt{d}\right)^n + \left(\alpha - \beta\sqrt{d}\right)^n\right]$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{d}}\left[\left(\alpha + \beta\sqrt{d}\right)^n - \left(\alpha - \beta\sqrt{d}\right)^n\right]$$

Où $(x_1, y_1) = (\alpha, \beta)$ et $n \geq 2$.

Exemple :

Trouver trois solutions de l'équation de Pell $x^2 - 7y^2 = 1$.

Solution : Par essais et erreurs, nous trouvons que $(\alpha, \beta) = (8,3)$ est la solution fondamentale. Par le théorème (1.4.3), la solution générale (x_n, y_n) est donnée par:

$$x_n = \frac{1}{2}\left[\left(8 + 3\sqrt{7}\right)^n + \left(8 - 3\sqrt{7}\right)^n\right]$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{7}}\left[\left(8 + 3\sqrt{7}\right)^n - \left(8 - 3\sqrt{7}\right)^n\right], n \geq 2.$$

Pour $n = 2$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left[\left(8 + 3\sqrt{7}\right)^2 + \left(8 - 3\sqrt{7}\right)^2\right] = 127$$

$$y_2 = \frac{1}{2\sqrt{7}}\left[\left(8+3\sqrt{7}\right)^2 - \left(8-3\sqrt{7}\right)^2\right] = 48$$

Alors, $(x_2, y_2) = (127, 48)$ est une solution. De même, $(x_3, y_3) = (2024, 765)$ est aussi une solution.

1.5 Fonctions génératrices

Les fonctions génératrices sont un outil puissant pour résoudre des récurrences et des problèmes combinatoires. Ils ont été inventés par le mathématicien français Abraham De Moivre (1667-1754). Les fonctions génératrices sont essentiellement des séries de puissance formelles qui tiennent compte des différents coefficients.

Définition 1.5.1 La fonction génératrice de la suite $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ de nombres réels est la série infinie.

$$G(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Exemple 1

La fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$ est la fonction génératrice de la séquence 1, 1, 1, 1,…, car $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ Pour$|x| < 1$.

Exemple 2

Soit $g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$Utilisez l'exemple 1 pour trouver les coefficients $a_0, a_1, \ldots$dans la représentation suivante :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Solution. De l'exemple 1, nous voyons que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Par conséquent, nous avons

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x}$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} 1.1\right) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$$

Exemple 3

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{(1-x)} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{n} 1 \,.\, (n+1-i)\right] x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) + n + \cdots + 1]\, x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n$$

$$= 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots$$

Maintenant on se demande comment trouver la fonction génératrice de suit données moyennant une récurrence linéaire. Pour cela

1. Récurrences linéaires homogènes à coefficients constants

Une récurrence homogène linéaire du $k - iéme$ ordre à coefficients constants est une récurrence de la forme :

$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$, où chaque c_i est un nombre réel et $c_k \neq 0$.

Exemple 4

Soit $g(x)$ la fonction génératrice

$$g(x) = x + 6x^2 + 35x^3 + 204x^4 + \cdots + a_n x^n + \cdots .$$

De la suite donnée par la récurrence linéaire homogène suivante :

$$\begin{cases} a_1 = 1, \quad a_2 = 6 \\ a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}, \quad n \geq 3 \end{cases}$$

Puis

$$6xg(x) = 6x^2 + 36x^3 + 210x^4 + \cdots + 6a_{n-1}x^n + \cdots$$

$$x^2 g(x) = x^3 + 6x^4 + \cdots + a_{n-2}x^n + \cdots$$

$$(1 - 6x + x^2)g(x) = x$$

$$g(x) = \frac{x}{1 - 6x + x^2}$$

C'est la fonction génératrice désirée :

$$\frac{x}{1 - 6x + x^2} = x + 6x^2 + 35x^3 + 204x^4 + \cdots$$

2. Récurrence linéaire non homogène à coefficients constants

Rappelons qu'une équation linéaire non homogène à coefficients constants est de donnée par la formule suivante :

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + c$$

Exemple 5. Trouver la fonction génératrice $g(x)$ de la suite d'entiers positifs définir récursivement par : 1, 8, 49, 288… .

$$g(x) = x + 8x^2 + 49x^3 + \cdots.$$

Solution.

Premièrement, on trouve la relation linéaire définissant cette suite.

$$1 = 1$$
$$8 = 8$$
$$49 = 6.8 - 1 + 2$$
$$288 = 6.49 - 8 + 2$$
$$. \quad . \quad .$$
$$. \quad . \quad .$$

Alors la relation est la suivant :

$$\begin{cases} a_1 = 1, \quad a_2 = 8 \\ a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2} + 2, \quad n \geq 3 \end{cases}$$

Maintenant on rend cette dernière homogène.

On a,

$$\begin{aligned} a_n &= 6a_{n-1} - a_{n-2} + 2 \\ &= (7a_{n-1} - a_{n-1}) - a_{n-2} + 2 \\ &= 7a_{n-1} - (a_{n-1}) - a_{n-2} + 2 \\ &= 7a_{n-1} - (6a_{n-2} - a_{n-3} + 2) - a_{n-2} + 2. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{cases} a_1 = 1, \quad a_2 = 8, \quad a_0 = 0 \\ a_n = 7a_{n-1} - 7a_{n-2} + a_{n-3}\,. \end{cases}$$

Respectivement, trouver $7xg(x), 7x^2g(x)\ et\ \ x^3g(x)$.

$$7xg(x) = 7x^2 + 56x^3 + 343x^4 + \cdots + \cdots$$
$$7x^2g(x) = 7x^3 + 56x^4 + \cdots + \cdots$$
$$x^3g(x) = x^4 + 8x^5 + \cdots + \cdots$$

Ainsi

$$(1 - 7x + 7x^2 - x^3)g(x) = x + x^2.$$
$$g(x) = \frac{x + x^2}{1 - 7x + 7x^2 - x^3} = \frac{x(1 + x)}{(1 - x)(1 - 6x + x^2)}$$

La fonction génératrice souhaitée est :

$$\frac{x(1 + x)}{(1 - x)(1 - 6x + x^2)} = x + 8x^2 + 49x^3 + 288x^4 + \cdots.$$

CHAPITRE 2 :

NOMBRES TRIANGULAIRES

Dans ce chapitre, nous avons présenté les nombres triangulaires et certaines de leurs propriétés, y compris certaines représentation visuelles. Il contient également les nombres triangulaires de Mersenne et de Fermat, leurs types et enfin la fonction génératrice. Les références utilisées dans ce chapitre sont essentiellement [6], [12].

2.1 Nombres triangulaires

Nous voyons souvent des arrangements triangulaires d'objets dans le monde réel. Un ensemble des dix quilles de bowling est initialement configuré en une forme triangulaire. Au jeu de billard, les 15 boules sont également initialement configurées sous la forme d'un tableau triangulaire. Le motif floral blanc dans la nappe de la figure 2.1 représente le nombre 15 ; les espaces gris entre les dessins représentent le nombre 10.

Figure 2.1 : Nappe Thaï

Les magasins de fruits et légumes empilent souvent des fruits, tel que des pommes et des oranges en arrangements triangulaires ; voir la figure 2.2. Les nombres 3, 10 et 15 Sont des nombres triangulaires.

Figure 2.2 : Oranges en épicerie

Plus généralement, un nombre triangulaire t_n est un entier positif qui peut être représenté par un tableau triangulaire équilatéral. Les quatre premiers nombres triangulaires sont : $t_1 = 1, t_2 = 3, t_3 = 6 \ et \ t_4 = 10$. Ils sont représentés de manière illustrée à la figure 2.3.

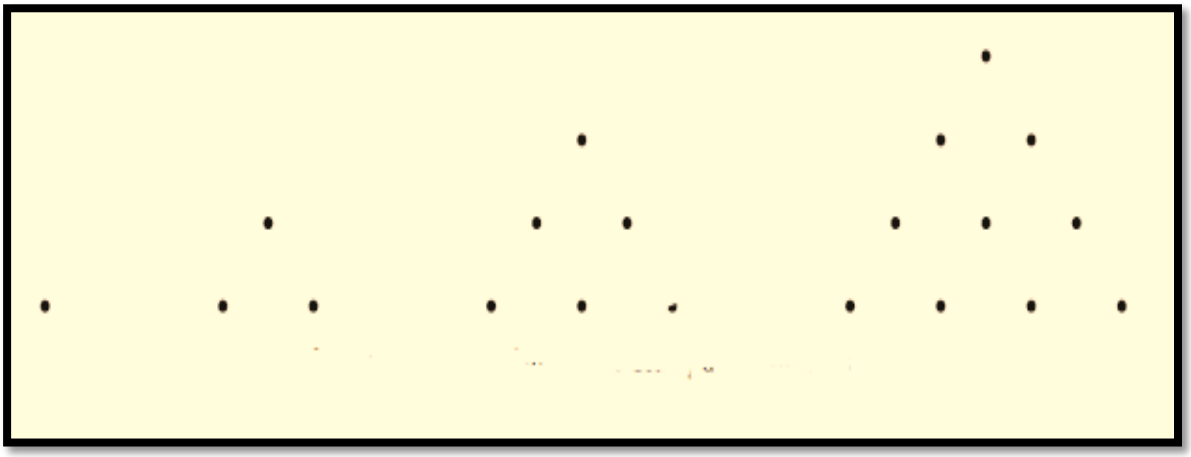


Figure 2.3 : Les quatre premiers nombres triangulaires

Comme la ligne i dans un tel tableau contient i points, l'on trouve que

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Par exemple :

$$t_{36} = \frac{36 .37}{2} = 666 \text{ et } t_{1681} = \frac{1681 .1682}{2} = 1413721 = 1189^2$$

On observe que t_{1681} est un carré.

Puisque

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Les nombres triangulaires se lit directement dans le triangle de pascal ; voir la diagonale montante sur la figure 2.4.

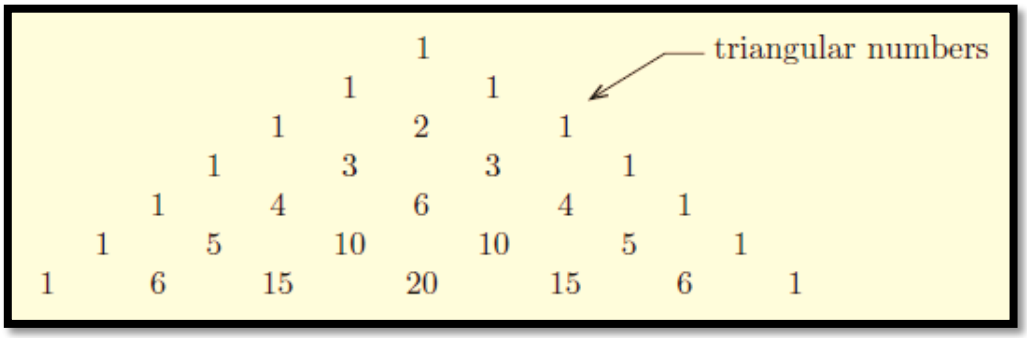


Figure 2.4 : Le triangle de Pascal

Puisque la n - ième ligne du tableau contient n points, t_n peut être défini récursivement :

$$t_1 = 1$$

$$t_n = t_{n-1} + n\,, \qquad n \geq 2$$

2.2 Quelque propriétés des nombres triangulaires

Les nombres triangulaires satisfaits une vaste gamme de propriétés intéressantes, la plus simple et la plus évidente c'est le fait que, la somme de deux nombres triangulaires successifs est un carré :

$$t_n + t_{n-1} = n^2 (n \geq 2).$$

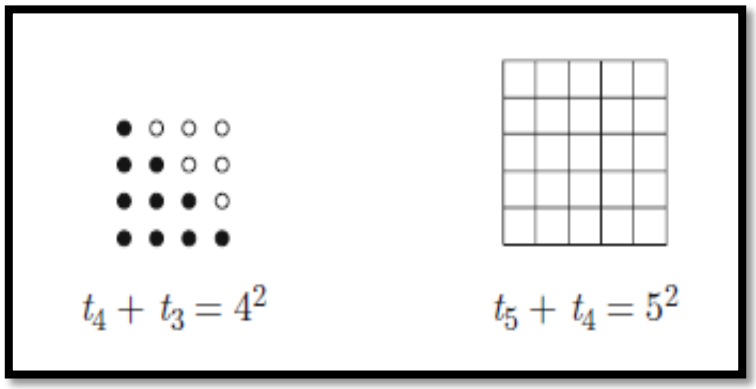


Figure 2.5 : illustration géométrique

Théorème2.2.1 Les nombres triangulaires t_n *et* t_{n+1} ont la même parité si et seulement si n est impair.

Preuve.

Supposons que $t_n \equiv t_{n+1}$ (mode 2). Alors $t_n + t_{n+1} = (n+1)^2$ est pair, donc $(n+1)$ est pair. D'où n est impair. Réciproquement, soit n impair, alors $n+1$ est pair i.e. $(n+1)^2$ est pair aussi. Alors $t_n + t_{n+1}$ est pair, par conséquent $t_n \equiv t_{n+1}$ (mode 2).

Théorème 2.2.2 (Diophantus)

$$8\,t_n + 1 = (2n+1)^2$$

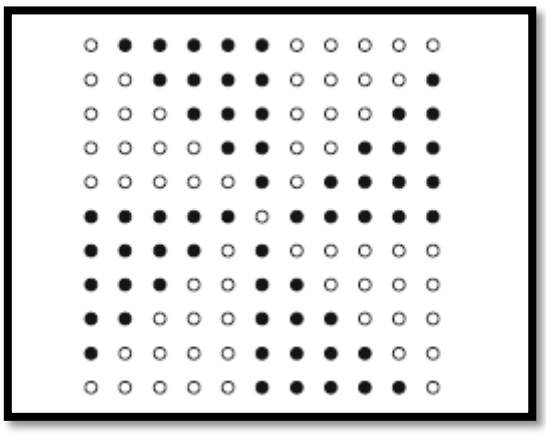


Figure 2.6 : Preuve visuelle du résultat de Diophantus.

Le théorème de Diophantus donne aussi un résultat intéressant. Le carré de chaque entier impair est congru à 1 modulo 8 ; c'est-à-dire

$(2n+1)^2 \equiv 1(mode\ 8)$. Ce théorème implique également que si

$$8N + 1 = (2n+1)^2$$

Alors $N = \frac{n\,(n+1)}{2} = t_n$. (Voir l'illustration géométrique de la figure 2.6).

Autre conséquence, le théorème de Diophantus peut être utilisé pour déterminer si un entier positif N est un nombre triangulaire $t_n$ou non ; Si oui, alors nous pouvons identifier la valeur de n, comme l'illustrent les deux exemples suivants.

Exemple 1

Détermine si $N = 1983036$ est un nombre triangulaire t_n.

Solution

Supposons qu'est N est un nombre triangulaire et d'après le théorème 2.2.2 on a :

$$8N + 1 = (2n+1)^2.$$

Donc

$$n = \frac{\sqrt{8N+1}-1}{2} = \frac{\sqrt{8.1983036+1}-1}{2} = 1991.$$

Est un entier positif. Alors N est un nombre triangulaire et $N = t_{1991} = \frac{1991\,.1992}{2}$

Exemple 2

Détermine si $N = 724$ est un nombre triangulaire t_n.

Solution

Encore une fois, supposons qu'est$N$ est un nombre triangulaire. Alors d'après l'exemple1

$$n = \frac{\sqrt{8N+1}-1}{2} = \frac{\sqrt{8.724+1}-1}{2} \approx 38{,}0259.$$

Une contradiction, donc N n'est pas un nombre triangulaire.

2.2.3 Propriétés des nombres triangulaires

1) $t_n + t_{n-1} = n^2$
2) $t_{t_n} + t_{t_n-1} = t_n^2$
3) $t_n^2 + t_{n-1}^2 = t_{n^2}$
4) $8\,t_n + 1 = (2n+1)^2$
5) $8\,t_{n-1} + 4n = (2n)^2$
6) $t_{2n} = 3t_n + t_{n-1}$
7) $t_{2n+1} = 3t_n + t_{n+1}$
8) $t_n^2 - t_{n-1}^2 = n^3$
9) $t_{2n} - 2t_n = n^2$
10) $t_{2n-1} - 2t_{n-1} = n^2$
11) $t_n^2 = t_n + t_{n-1}t_{n+1}$
12) $2t_n t_{n-1} = t_{n^2-1}$

Preuve de propriété 1

On a :

$$\begin{aligned} t_n + t_{n-1} &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} \\ &= \frac{1}{2}(n^2 + n + n^2 - n) \\ &= \frac{1}{2}(2n^2) \\ &= n^2 \end{aligned}$$

Preuve de propriété 3

On a :

$$\begin{aligned} t_n^2 - t_{n-1}^2 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + \frac{1}{4}n^2(n-1)^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}n^2[(n+1)^2 + (n-1)^2]$$

$$= \frac{1}{4}n^2[n^2 + 2n + 1 + n^2 - 2n + 1]$$

$$= \frac{1}{4}n^2[2n^2 + 2]$$

$$= \frac{n^2(n^2+1)}{2}$$

$$= t_{n^2}$$

Preuve de propriété 6

On a :

$$3t_n + t_{n-1} = 3\left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right) + \frac{(n-1)\,n}{2}$$

$$2(3t_n + t_{n-1}) = 3\left(n\,(n+1)\right) + n\,(n-1)$$

$$= 3\,n^2 + 3n + n^2 - n$$

$$= 4\,n^2 + 2n$$

$$= 2n(2n+1)$$

Donc, $$3t_n + t_{n-1} = n(2n+1)$$

$$= t_{2n}$$

Preuve de propriété 8

On a :

$$t_n^2 - t_{n-1}^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{4}n^2(n-1)^2$$

$$= \frac{1}{4}n^2[(n+1)^2 - (n-1)^2]$$

$$= \frac{1}{4} n^2 (4n)$$

$$= n^3$$

Exemples numériques :

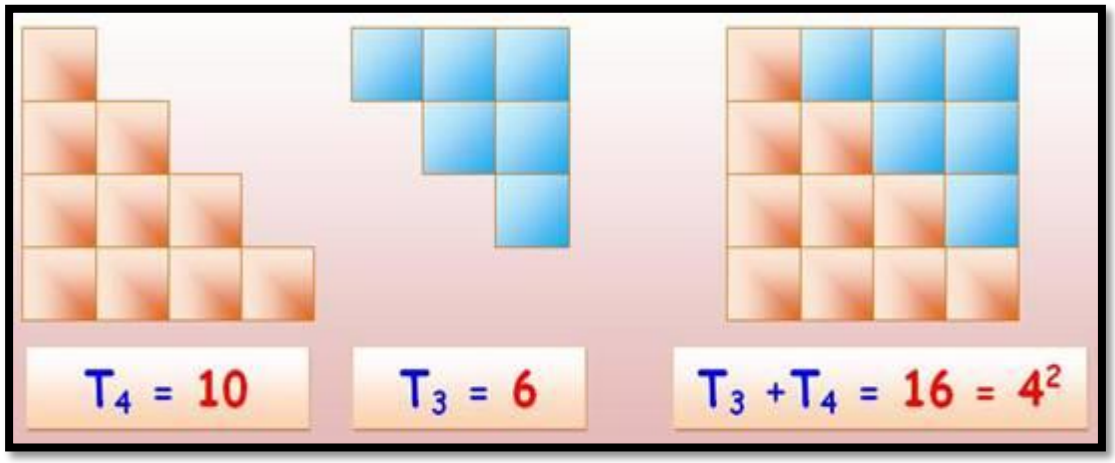
Propriété 1

$$t_{10} + t_9 = 55 + 45 = 10^2$$

$$t_{12} + t_{11} = 78 + 66 = 12^2$$

Illustration géométrique

$$16 = 4^2 = t_4 + t_3 = 10 + 6$$



Propriété 3

$$t_3^2 + t_2^2 = 6^2 + 3^2 = 45 = t_{3^2}$$

$$t_4^2 + t_3^2 = 10^2 + 6^2 = 136 = t_{4^2}$$

Propriété 6

- $t_6 = 3t_3 + t_2$

  $= 3 \times 6 + 3$

  $= 21$

- $t_4 = 3t_2 + t_1$

  $= 3 \times 3 + 1$

  $= 10$

Propriété 8

$$t_2^2 - t_1^2 = 3^2 - 1^2 = 8 = 2^3$$
$$t_3^2 - t_2^2 = 6^2 - 3^2 = 27 = 3^3$$

2.3 Nombre triangulaire de Mersenne

Même si chaque nombre parfait est triangulaire, quel est le cas avec les nombres Mersenne M_n ? On remarque $M_1 = t_1,\ M_2 = 3 = t_2,\ M_4 = 15 = t_5$ et $M_{12} = 4095 = t_{90}$ sont des nombres triangulaires. Mais il n'y a pas d'autre nombre triangulaire de Mersenne $\leq M_{30}$. Il semble donc que les nombres de Mersenne triangulaires ont une densité faible dans $\mathbb{N}$.

Proposition (U.V. Satyanarayana de l'université d'Andhra, India, 1958) Il y a une infinité de nombre de Mersenne qui ne sont pas triangulaire.

Preuve.

Premièrement, tout nombre triangulaire est congru à 0, 1, 3, 5, 6, où 8 modulo10. En effet, tout entier $n \geq 1$ s'écrit sous la forme $n = 10i + k$, où $1 \leq k \leq 9$ et $i \geq 0$. D'où

$$t_n = t_{10i+k} = \frac{(10i+k)(10i+k+1)}{2}$$
$$= \frac{(10i+k)^2 + (10i+k)}{2}$$
$$\equiv \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} + 5i[10].$$

Alors

$$t_n \equiv \begin{cases} \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2}[10], si\ i\ est\ pair \\ \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} + 5[10], si\ i\ est\ impair\ . \end{cases}$$

En calculant directement sur k on termine la preuve de cette partie.

Deuxièment, pour $n \geq 1$ *on montre que*

$$M_n = \begin{cases} 5\ (mod\ 10) & si\ n \equiv 0\ (mod\ 4) \\ 1\ (mod\ 10) & si\ n \equiv 1\ (mod\ 4) \\ 3\ (mod\ 10) & si\ n \equiv 2\ (mod\ 4) \\ 7\ (mod\ 10) & sinon. \end{cases}$$

En effet

$*)$ $n \equiv 0\ (mod\ 4)$, Donc $n = 4K$ pour $K \geq 0$.

Dans ce cas $M_n = 2^{4K} - 1 = (2^4)^K - 1 \equiv (6)^K - 1 \equiv 6 - 1 \equiv 5\ (mod\ 10)$.

$*)$ $n \equiv 1\ (mod\ 4)$, Donc $n = 4K + 1$ pour $K \geq 0$.

Dans ce cas $M_n = 2^{4K+1} - 1 = 2.(2)^{4K} - 1 \equiv 2.6^K - 1 \equiv 2.6 - 1 \equiv 1\ (mod\ 10)$.

De la même façon on démontre que $M_n = \begin{cases} 3\ (mod\ 10)\ si\ n \equiv 2\ (mod\ 4) \\ 7\ (mod\ 10)\ si\ n \equiv 3\ (mod\ 4). \end{cases}$

D'où il y a une infinité de nombres de nombres de Mersenne qui ne sont pas triangulaires ; on peut considérer par exemple la suite des nombres de Mersenne de la forme M_{4k+3}.

2.4 Nombre triangulaire de Fermat

Comme

$$t_{3n} = \frac{3n\ (3n+1)}{2} \equiv 2(3n)(3n+1) \equiv 0(mod\ 3)$$

$$t_{3n+1} = \frac{(3n+1)(3n+2)}{2} \equiv 2(3n+1)(3n+2) \equiv 1(mod\ 3)$$

$$t_{3n+2} = \frac{(3n+2)\ (3n+3)}{2} \equiv 2(3n+2)(3n+3) \equiv 0(mod\ 3)$$

Il s'ensuit que :

$$t_m \equiv \begin{cases} 1(mod\ 3) & si\ m \equiv 1\ (mod\ 3) \\ 0(mod\ 3) & sinon \end{cases}$$

Cette congruence à une conséquence intéressante à voir ceci, considérer le $n^{iéme}$ nombre de Fermat $F_n = 2^{2^n} + 1$, ou $n \geq 0$. Remarquons que $F_0 = 3$ est un nombre triangulaire. Prenons $n \geq 1$. Alors $F_n \equiv (-1)^{2^n} + 1 \equiv 1 + 1 \equiv 2(mod\ 3)$; $F_n$ne Peut donc pas être un nombre triangulaire lorsque $n \geq 1$. En d'autres termes, 3 est le seul nombre triangulaire Fermat.

2.5 Types des nombres triangulaires

2.5.1 Nombres triangulaires du second ordre [8]

On appelle " nombres triangulaires du second ordre " les nombres triangulaires formés à partir des nombres triangulaires simples de la façon suivante :

Le premier nombre triangulaire du second ordre est 1, il est noté $T_1^{(2)}$, $T_1^{(2)} = t_1$.

Le second nombre triangulaire du second ordre est

$$T_2^{(2)} = t_1 + t_2 = 1 + 3 = 4.$$

Le troisième nombre triangulaire du second ordre est

$$T_3^{(2)} = t_1 + t_2 + t_3 = 1 + 3 + 6 = 10.$$

Ainsi les premiers nombres triangulaires du second ordre sont donc : 1, 4, 10, 20, 35,… .

Comment sont formés ces nombres triangulaires du second ordre ? Une façon d'obtenir une formule nous permettant de les calculer serait la suivante :

Enuméra la suite fille, la suite mère, et la suite grande mère, alors

Suite grandes mères :	1	2	3	4	5	6	7	…
Suite mère :	1	3	6	10	15	21	28	…
Suite fille :	1	4	10	20	35	56	84	…

$$\frac{1+2}{3} \times 1 \ , \quad \frac{2+2}{3} \times 3 \ , \quad \frac{3+2}{3} \times 6 \ , \quad \frac{4+2}{3} \times 10$$

Cette dernière suite d'entiers naturels positifs représente la suite des filles qui représente de sa part la suite 1, 4, 10, 20, … ; formée par les nombres triangulaires du second ordre.

En générale, ce processus donne :

$$T_n^{(2)} = \frac{n+2}{3} \times t_n$$
$$= \frac{n+2}{3} \times \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

D'où $T_n^{(2)} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2\times 3}$.

Démontrons par récurrence cette formule. En effet $T_1^{(2)} = 1 = t_1$, supposons pour $n \geq 1$ on a

$$T_n^{(2)} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \times 3}.$$

Alors.

$$T_{n+1}^{(2)} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \times 3} + t_{n+1}.$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{2 \times 3} + \frac{(n+1)(n+2)}{2 \times 3} \times 3$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \times 3}$$
$$T_{n+1}^{(2)} = \frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2)}{2 \times 3}.$$

Donc, la formule est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

2.5.2 Nombres triangulaires du troisième ordre

On peut remarquer que cette étude des nombres triangulaires peut se prolonger bien loin. Il suffira donc de mentionner très brièvement, que les nombres triangulaires du troisième ordre, sont formés à partir de ceux du deuxième ordre, comme ceux-ci étaient formés à partir des nombres triangulaires simples.

L'énumération des suites filles, mères, grand'mère, arrière grand'mère nous donne :

Suite arrière grande mère :	1	2	3	4	5	6
Suite grande mère :	1	3	6	10	15	21
Suite mère :	1	4	10	20	35	56
Suite fille :	1	5	15	35	70	126

Ces nombres triangulaires du troisième ordre sont notés comment suit

$T_1^{(3)} = 1, \quad T_2^{(3)} = 5, \quad T_3^{(3)} = 15, \quad T_4^{(3)} = 35, \ldots .$

On voit que le processus de formation des termes de cette suites est analogue à celui des termes de la suite de $T_n^{(2)}$.

$$T_1^{(3)} = 1 \qquad\qquad T_1^{(3)} = \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}$$

$$T_2^{(3)} = 1 + 4 \qquad \text{Ou} \qquad T_2^{(3)} = \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}$$

$$T_3^{(3)} = 1 + 4 + 10 \qquad\qquad T_3^{(3)} = \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}$$

$$T_4^{(3)} = 1 + 4 + 10 + 20 \qquad\qquad T_4^{(3)} = \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}$$

En générale

$$T_n^{(3)} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{1.2.3.4}.$$

Cette formule se montre aussi par récurrence comme concernant $T_n^{(2)}$.

2.5.3 Nombres triangulaires centrés [9]

On peut développer d'autres suites de nombres en s'inspirant de la démarche Pythagoricienne au lieu d'ajouter une ligne de points à partir du nombre 1, entourons le d'un triangle.

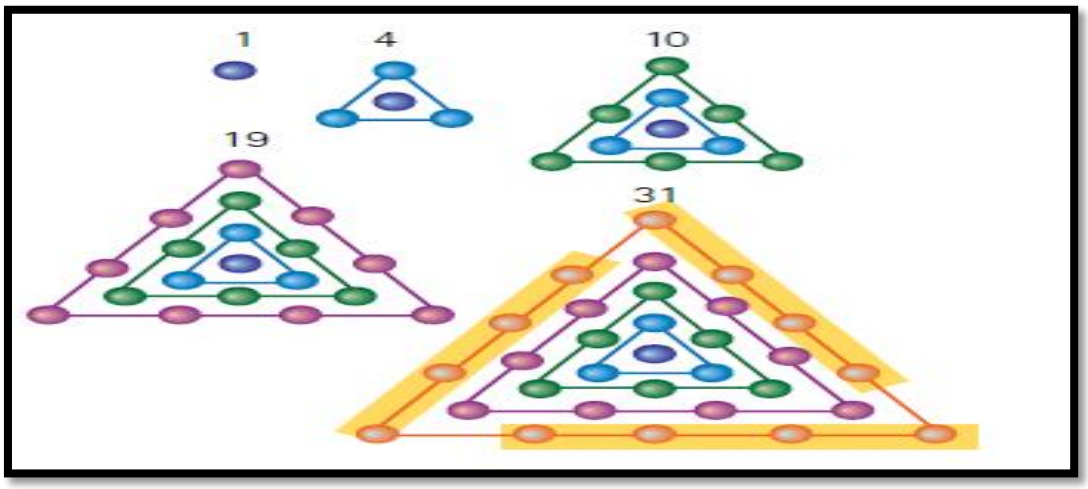


Figure 2.7 : Nombre triangulaires centrés

En poursuivant ainsi, le n^e triangle est obtenu en entourant le triangle précédent par un triangle dont chaque côté possède n points. Ces nombres notés $t_n^{'}$, sont appelés nombres triangulaires centrés. En général, le nombre total de points le long du périmètre de ce nouveau triangle est $3(n-1)$, si l'on tient compte que les points aux extrémités sont partagés par deux côtés. La formule de récurrence est

$$\begin{cases} t_n^{'} = t_{n-1}^{'} + 3(n-1), n \geq 1 \\ t_0^{'} = 1 \end{cases}$$

2.6 Fonction de génération pour les nombres triangulaires

Rappelle que de (1.5) on a :

$$\frac{1}{1-X} = \sum_{n=0}^{\infty} X^n$$

$$\frac{1}{(1-X)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)X^n$$

$$\frac{1}{(1-X)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} X^n$$

C'est la fonction de génération des nombres triangulaires.

CHAPITRE 3 :

NOMBRES TRIANGULAIRES CARRES

Dans ce chapitre, nous allons étude les nombres triangulaires carrés : leurs propriétés, leur fonction génératrice, … . Les références utilisées dans ce chapitre sont essentiellement [12].

3.1 Nombre triangulaire carré

Définition 3.1.1 Un nombre triangulaire carré est un nombre triangulaire qui est de plus carré en tant que entier. Il y a une infinité de tels nombres dont les premiers sont 0, 1, 36, 1225, … .

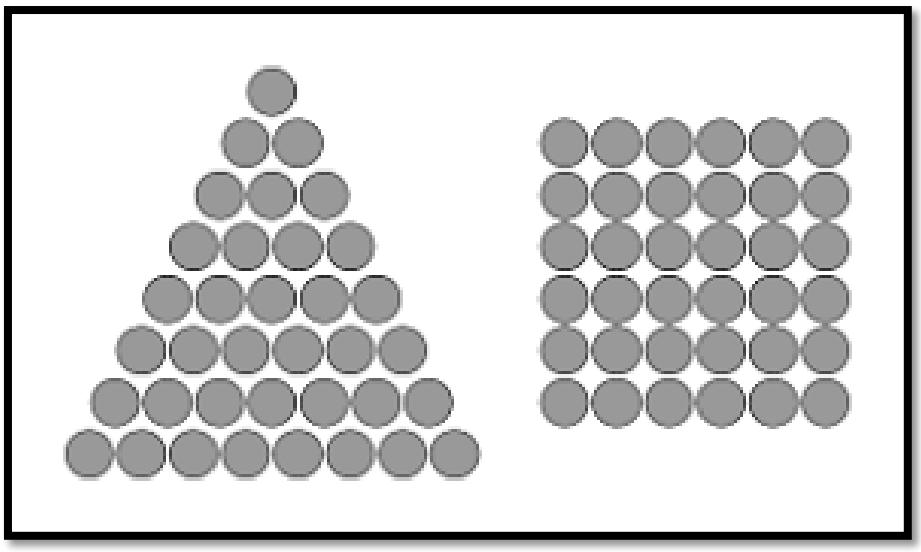


Figure 3.1 : Représentation géométrique du nombre triangulaire carré.

Définition 3.1.2 Les nombres triangulaires carrés sont calculés à partir de l'équation de Pell en réalisant l'équation $t_n = s_m$ où t_n désignent le n *iéme* nombre triangulaire et s_m le m *iéme* nombre carré.

$$\frac{1}{2}n(n+1) = m^2$$

$$\frac{1}{2}(n^2+n) = \frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$= m^2$$
$$\frac{1}{8}(2n+1)^2 - \left(\frac{1}{8}\right) = m^2$$

$$(2n+1)^2 - 8m^2 = 1$$

Donc, définir

$$x = 2n+1$$
$$y = 2m$$

Alors l'équation de Pell :

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

Les premières solutions sont $(x, y) = (3,2), (17,12), (99,70), \ldots$. Celles-ci donnent la solution $(n, m) = (1,1), (8,6), (49,35), \ldots$. Correspondant aux nombres triangulaires carrés 1, 36, 1225, 41616, … .

Une formule générale pour les nombres triangulaires carrés est:

$$ST_n = \left[\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}}{4\sqrt{2}}\right]^2$$

$$= \frac{1}{32}\left[\left(17+12\sqrt{2}\right)^n + \left(17-12\sqrt{2}\right)^n - 2\right]$$

Nous donnons dans le tableau suivant les premiers nombres triangulaires carrés.

k	m_k	Nombre triangulaire carré m_k^2	Indice correspondants n_k de t_{n_k}
1	1	1	1
2	6	36	8
3	35	1225	49
4	204	41616	288
5	1189	1413721	1681
6	6930	48024900	9800
7	40391	1631432881	57121
8	235416	55420693056	332928
9	1372105	1882672131025	1940449
10	7997214	63955431761796	11309768

3.2 L'infinitude des nombres triangulaires carrés

Nous pouvons établir l'infinitude des nombres triangulaires carrés sans avoir recours à l'équation de Pell. Premièrement, si t_n est un nombre triangulaire carré, alors $4t_n$ est un carré, et aussi $8t_n + 1$ par le théorème de Diophantus. Par conséquent,

$4t_n(8t_n + 1)$ Est aussi un carré. Mais $4t_n(8t_n + 1) = \frac{(8t_n)(8t_n+1)}{2} = t_{8t_n}$ est aussi un nombre triangulaire.

Donc, si t_n est un carré, alors t_{8t_n} est aussi un triangulaire carré. Puisque t_1 est un nombre triangulaire carré, il en résulte qu'il existe une infinité de nombres triangulaires carrés.

En 1961, le mathématicien polonais W. Sierpinski a prouvé que si $t_x = y^2$ est un nombre triangulaire carré, alors $t_{3x+4y+1} = (2x + 3y + 1)^2$ est le prochain nombre triangulaire carré.

Encore, puisque t_1 est un nombre triangulaire carré, cette formule établit également l'infinitude des nombres triangulaires carrés. Par exemple, $t_8 = 6^2$ est un nombre triangulaire carré, le prochain est $t_{3.8+4.6+1} = t_{49} = 35^2$.

En 1962, E. Just du Bronx community collège, Bronx, New York, a également accordé une brève preuve et précise : Rappelons que l'équation de Pell a une infinité de solution ; C'est-à-dire que l'équation $\frac{(x^2-1)}{2} = y^2$a une infinité de solution. En D'autres termes, il existe une infinité de carré de forme $\frac{(x^2-1)}{2}$. Ainsi, il existe une infinité de carrés de la forme $\frac{(x^2-1)x^2}{2}$; C'est-à-dire qu'il y a une infinité de nombre carrés triangulaires t_{x^2-1} . Par exemple, rappelons encore que $(17,12)$ est une Solution de l'équation de Pell $x^2 - 2y^2 = 1$.

Alors

$$t_{17^2-1} = t_{288} = \frac{288\,.\,289}{2} = 41616 = 204^2.$$

Est un nombre triangulaire carré.

3.3 Définition récursive des nombres triangulaires carrés

La preuve de Sylvester fournit un algorithme élégant pour le calcul récursif de nombres carrés triangulaires $t_n^{(s)}$:

$$t_1^{(s)} = 1$$

$$t_n^{(s)} = 4t_{n-1}^{(s)}\left(8t_{n-1}^{(s)} + 1\right), n \geq 2$$

Les quatre premiers nombres triangulaires carrés sont :

$t_1^{(s)} = 1 = 1^2 = t_1$

$t_2^{(s)} = 4.1(8.1 + 1) = 36 = 6^2 = t_{8.1}$

$t_3^{(s)} = 4.36(8.36 + 1) = 41616 = 204^2 = t_{8.36}$

$t_4^{(s)} = 4.41616(8.41616 + 1) = 55420693056 = 235416^2 = t_{8.41616}$

En 1942 W. Ljunggren a établi qu'il existe exactement deux nombres triangulaires dont les carrés sont également des nombres triangulaires. Ce sont $t_1$et t_3 $t_1^2 = 1 = t_1$ Et $t_3^2 = 36 = t_8$. Il a également montré qui aucun nombre triangulaire n'est la quatrième puissance d'un entier.

3.4 Propriétés des nombres triangulaires carrés

Lemme 3.4.1 Un entier positif d est un triangulaire carré si et seulement s'il existe des entiers positifs u et v tels que $d = u^2v^2$ et $2u^2 - v^2 = \pm 1$.

Preuve.

Supposons que $d = u^2v^2$.

Cas1. Soit $2u^2 - v^2 = 1$. Alors $d = \frac{v^2(v^2+1)}{2}$ est clairement triangulaire carré.

Cas2. Soit $2u^2 - v^2 = -1$. Alors $d = \frac{(v^2-1)v^2}{2}$ est également triangulaire carré.

Ainsi, dans les deux cas, d est triangulaire carré.

Inversement, supposons que $d = \frac{n(n+1)}{2} = y^2$ est un triangulaire carré.

Cas1. Supposons qu'est n pair. Alors $\frac{n}{2}$ et $n + 1$ sont relativement

Premiers; $\left(\frac{n}{2}, n + 1\right) = 1$. Puisque d est un carré, supposons que $d = (q_1q_2 \dots q_k)^2$,

où chaque q_i est égala p_i^{ei} où p_i est un entier premier. Sans perte de généralité, on

peut supposer que $\frac{n}{2} = (q_1 q_2 \dots q_r)^2$ et $n+1 = (q_{r+1} q_{r+2} \dots q_k)^2$. Soit $u^2 = \frac{n}{2}$ et $v^2 = n+1$. Alors

$d = u^2 v^2$ et $2u^2 - v^2 = n - (n+1) = -1$.

Cas2. Supposons qu'est n impair. Un argument similaire montrera que $d = u^2 v^2$ et $2u^2 - v^2 = \pm 1$.

Donc, d est triangulaire carré si et seulement si $d = u^2 v^2$et $2u^2 - v^2 = \pm 1$.

Par exemple, rappelons que $d = 36 = t_8$ est triangulaire carré :

$d = 2^2 3^2$, Où $2.2^2 - 3^2 = -1$ également, $d = 1225 = t_{49}$ est triangulaire carré.

$d = 5^2 7^2$, Où $2.5^2 - 7^2 = 1$.

Lemme 3.4.2 Soit u et v deux entiers > 1 tels que $2u^2 - v^2 = \pm 1$.

Alors $2u > v > u$.

Preuve (par contradiction). Supposons $2u^2 - v^2 = \pm 1$.

(1) Supposons que $u \geq v$. Alors $u^2 \geq uv \geq v^2 > 1$.

Donc, $2u^2 \geq u^2 + v^2 > v^2 + 1$, alors $2u^2 - v^2 > 1$. C'est une contradiction, alors $v > u$.

(2) Supposons que $v \geq 2u$. Puisque $v > u$, $v \geq u + 1$.

Ainsi $v \geq 2u$ et $v \geq u + 1$.

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} v^2 &\geq 2u(u+1) \\ &= 2u^2 + 2u \\ &> 2u^2 + 1, \text{ puisque } u > 1. \end{aligned}$$

Alors $2u^2 - v^2 < -1$, encore une contradiction. Donc $2u > v$. Ainsi $2u > v > u$.

Les deux lemmes 3.4.1 et 3.4.2 servent à démontrer l'important théorème suivant de caractérisation de Warten. Nous ici le théorème sans le démontrer.

Théorème 3.4.3 Soit $\{N_k\}$ une suite d'entiers positifs, définie récursivement comme suit

(1) $N_1 = u_1^2 v_1^2$, où $u_1 = 1 = v_1$.

(2) $N_k = u_k^2 v_k^2$, où $u_k = u_{k-1} + v_{k-1}$.

$v_k = 2\,u_{k-1} + v_{k-1}$, et $k \geq 2$.

Alors la séquence $\{N_k\}$ est constituée de tous les nombres triangulaires carrés.

3.5 Fonction génératrice pour les nombres triangulaires carrés

Considérons la suite des nombres triangulaires carrés : 1, 36, 1225, … . Alors nous pouvons déduire que les éléments de cette suite sont donnés récursivement par

$$\begin{cases} c_1 = 1,\ c_2 = 36 \\ c_k = 34c_{k-1} - c_{k-2} + 2, k \geq 3. \end{cases}$$

Maintenant on rend cette dernière relation homogène

$$\begin{cases} c_0 = 0,\ c_1 = 1 \\ c_k = 35c_{k-1} - 35c_{k-2} + c_{k-3}. \end{cases}$$

Posons,

$g(x) = x + 36x^2 + 1225x^3 + 41616x^4 + \cdots$. Est la fonction génératrice des nombres triangulaires carrés.

Trouver $35xg(x), 35x^2g(x), x^3g(x)$ Respectivement.

$$35xg(x) = 35x^2 + 1260x^3 + \cdots$$

$$35x^2g(x) = 35x^3 + 1260x^4 + \cdots$$

$$x^3g(x) = x^4 + 36x^5 + \cdots$$

$$(1 - 35x + 35x^2 - x^3)g(x) = x + x^2.$$

$$g(x) = \frac{x + x^2}{1 - 35x + 35x^2 - x^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)(1-34x+x^2)}$$

C'est la fonction génératrice désirée :

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)(1-34x+x^2)} = x + 36x^2 + 1225x^3 + 41616x^4 + \cdots \ .$$

3.5.1 Fonction génératrice pour $\{n_k\}$

Rappelons que dans le chapitre (1) de section (1.5) l'exemple (5), on a trouvé que la fonction génératrice de la suite $\{n_k\}_{k\geq 1}$est donnée par :

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)(1-6x+x^2)} = x + 8x^2 + 49x^3 + 288x^4 + \cdots$$

CONCLUSION

Conclusion :

Dans ce mémoire, on a fait une étude des nombres triangulaires et leurs propriétés, où on a remarqué l'important rôle joué par le théorème de Diophantus. Ce dernier théorème, à côté des autres propriétés, a permet de connaître si un entier positif N est triangulaire ou non.

D'autre part nous avons présenté les nombres triangulaires carrés avec leur fonction génératrice.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ewell, J. A, on representations of numbers by sums of two triangular numbers, Fibonacci Quarterly **30** (1992), 175-8.

[2] Ewell, J. A, on sums of triangular numbers and sums of squares, American Mathematical Monthly **99** (1992), 752-7.

[3] Haggard, P.W. and Sadler, B.L, A generalization of triangular numbers, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology **25** (1994), 195-202.

[4] Hemmerly, H .O, Polyhedral numbers, Mathematical Teacher **66** (1973), 356-62.

[5] I. Niven, H. S. Zuckerman and H. L. Montgomery, An introduction to the Theory of numbers, John Wiley et Sons, Inc. Fifth edition 1991.

[6] James J. Tattersall, Elementary Number Theory in nine chapters, Cambridge 1999.

[7] Jean-Marie De Koninck and Armel Mercier, 1001 problems in Classical Number Theory, 2004 édition Marketing S. A.

[8] L. Hogben, Mathématiques pour tous, Edité par payot, Paris, 1950.

[9] M. Laforest, A. Ross, Géométrie des nombres, Accromath 2012 (site web).

[10] Mohanty, S.P, Which triangular numbers are products of three consecutive integers ? Acta Mathematica Hungarica **58** (1991), 31-6.

[11] Thomas Koshy, Fibonacci and Lucas numbers with application, John Wiley and Sons, Inc, 2001.

[12] Thomas Koshy, Pell and Pell-Lucas numbers with application, Springer 2014.

ملخص:

هذه مذكرة ماستر رياضيات متقطعة، وهي تخص الأعداد المثلثية،أين تناولنا.

•مفاهيم عامة.

• العدد المثلثي وخواصه.

• دراسة الأعداد المثلثية التربيعية.

الكلمات المفتاحية:

عدد مثلثي، عدد مثلثي تربيعي، تمثيل هندسي، دالة التوليد

Résumé :

Ce mémoire de master mathématique discrète, où on a fait :

• Notions général.

• Nombres triangulaires et leurs propriétés.

• Etude d'un nombre triangulaire carré.

Mots clés:

Nombre triangulaire, Nombre triangulaire Carré, Représentation géométrique, fonction génératrice.

Abstract:

This Memory of master degree mathematics discrete which concerns triangular numbers. Where we did.

• General notions.

• Triangular numbers and their properties.

• Study of a triangular square number.

Key words:

Triangular number, triangular square number, geometric representation, generating function.