



Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques



## *Mémoire de Master*

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière** : Mathématiques

**Option** : Algèbre et Mathématique Discrète

## Thème

---

*Construction des notions d'ordre et de treillis*

---

**Présentée par :**

*M<sup>elle</sup> KOUIDER Khaoula*

**Soutenu publiquement le :** 28/06/2022.

**Devant le jury composé de :**

SAADAOUI Kheir	Grade,	Université de M'sila	<b>Président.</b>
AMROUNE Abdelaziz	Prof,	Université de M'sila	<b>Encadreur.</b>
HABOUB Lakhder	Grade,	Université de M'sila	<b>Examineur.</b>

Année universitaire 2021/2022.

---

# Remerciements

Tout d'abord, Je remercie ALLAH de m'avoir donné la force, la volonté et la moral pour accomplir mon étude en master en mathématique.

Nos remerciements les plus sincères vont à toute personne ayant eu la bonté et la patience de satisfaire notre curiosité et de nous aider dans notre travail par leurs précieux conseils, réponses et recommandations.

Ainsi, je tiens également à exprimer mes vifs remerciements à mon encadreur AMROUNE Abdelaziz pour avoir proposé ce thème, et pour son suivi continué tout le long de la réalisation de ce mémoire et il n'a pas cessé de me donner ses conseils.

Je tiens à témoigner ma gratitude à SAADAOUI Kheir et HABOUB Lakhder d'avoir accepté de faire partie du jury de ce mémoire. Et le grand remerciement au prof SAAD Abdelkebir est un exemple du prof qui a donné et de la bonne créature qui m'a aidé et m'a soutenu sans être avare en quoi que ce soit.

Je remercie évidemment mes parents, et tous mes frères de les avoir encouragés et soutenus pendant de nombreuses années dans la poursuite de mes études.

Je voudrais également remercier tous mes enseignants, tous mes collègues de deuxième année Master AMD, et nous les souhaitons le bonheur et réussite dans la vie. Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à ce travail.

# Dédicaces

A mes très chers parents, source de vie, d'amour et d'affection

A ma chère soeur Hadil, A mes chers frères Oussama et youcef source de joie et de bonheur

Aux deux chers enfants de mon coeur, Bachir et Ranim

A toute ma famille KOUIDER et GHANEM, surtout ma cousine Fatima

A tous mes amis, Chaima, Warda, Nor El Houda, Amel et mon amis Yacine

Merci d'être toujours à mes côtés.

KOUIDER Khaoula

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>1 Préliminaire</b>	<b>5</b>
1.1 Notions et vocabulaires	5
1.1.1 Relation binaire, graphe dirigé	5
1.2 Pré-ordre, équivalence, ordre, ordre total et ordre strict	6
1.2.1 Pré-ordre	6
1.2.2 Équivalence	7
1.2.3 Ordre, ordre total	7
1.2.4 Ordre, ordre strict	8
1.3 Image directe et image réciproque	8
1.4 Représentations d'une relation binaire	9
1.4.1 Représentation matricielle	9
1.4.2 Autres représentations	10
<b>2 Un peu de théorie combinatoire de l'ordres</b>	<b>12</b>
2.1 Propriétés remarquables d'une relation binaire	12
2.2 Compatibilité entre une opération interne et une relation binaire	13
2.3 Fermetures	13
2.4 Applications d'un ensemble fini	14
2.4.1 Nombre de couples, nombre de n-uples	14
2.5 Un peu de combinatoire	14
2.5.1 Nombre de relations binaires de types particuliers	15
2.6 Décomposition en antichaînes et chaînes	16
2.6.1 Décomposition en niveaux (antichaînes) d'un ensemble ordonné	16
2.6.2 Décomposition en chaînes d'un ensemble ordonné	16
2.6.3 Théorème de Dilworth	17
2.7 Théorème d'Erdos-Szekeres	17
2.7.1 Théorème de Sperner	18
2.8 Extensions linéaires de l'ordre partiel : (Théorème de Szpilrajn)	19
<b>3 Quelques types de relation d'ordres</b>	<b>21</b>
3.1 Relations d'ordres	21
3.2 Bon ordre et ensembles bien ordonné	22
3.3 Bel ordre	23
3.4 Bien-quasi-ordre	23

---

3.5	Relation bien fondée . . . . .	23
3.6	Éléments particuliers d'un ensemble ordonné . . . . .	23
3.7	Borne supérieures et borne inférieures . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Classes particulières d'ensembles ordonné</b>	<b>25</b>
4.1	Notions sur les treillis . . . . .	25
4.1.1	Treillis d'ordre . . . . .	25
4.1.2	Treillis algébrique . . . . .	26
4.1.3	Sous-treillis et morphismes . . . . .	27
4.2	Propriétés algébriques de quelques classes de treillis . . . . .	29
4.2.1	Treillis distributifs . . . . .	29
4.2.2	Treillis modulaires . . . . .	31
	<b>Conclusion</b>	<b>33</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>34</b>

# Introduction

*Une relation entre deux ensembles  $X, Y$  est une partie du produit cartésien  $X \times Y$ . Parce que les éléments de la vie interagissent les uns avec les autres, nous devons les classer ou les ordonner afin de faciliter leur étude, leur compréhension et la recherche de connaissances. C'est pourquoi les mathématiciens ont développé une idée fondamentale. C'est la relation d'ordre. Cette session couvrira l'idée de classer les groupes avant de passer aux tri, un type de groupe ordonné qui sera mis en évidence dans l'étude des pinces logiques.*

*Parce qu'ils relient l'étude des relations d'ordre et l'étude de certaines structures algébriques, les treillis constituent une catégorie très importante d'ensembles ordonnés. Ils permettent l'algébrisation de nombreux calculs logiques, qu'ils soient classiques ou non classiques.*

*Dans le premier chapitre on présente des notions générales sur les relations binaires, ainsi que quelques formes de représentation de la relation binaire.*

*Dans le deuxième chapitre on calcule le nombre de relations de type particulier sur un ensemble  $E$  fini.*

*Le troisième chapitre, est consacré aux relations d'ordre et ensemble ordonné.*

*Enfin, le quatrième chapitre donne des généralités sur les treillis distributifs.*

# Préliminaire

## 1.1 Notions et vocabulaires

### 1.1.1 Relation binaire, graphe dirigé

#### Relation binaire

**Définition 1.1.** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. Une relation entre  $E$  et  $F$  est une partie de  $E \times F$ . Si  $\mathcal{R}$  est une relation binaire entre  $E$  et  $F$ , on dira que  $x$  est en relation avec  $y$  lorsque  $(x, y) \in \mathcal{R}$ , On écrit souvent  $x\mathcal{R}y$ . Lorsque  $E = F$ , nous parlerons d'une relations binaire sur  $E$ .

Soit  $X$  un ensemble non vide, et soit  $\mathcal{R}$  relation binaire sur  $X$ . On écrit

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in X^2 / x\mathcal{R}y\} \text{ i.e., } \mathcal{R} \subseteq X \times X.$$

On admet que l'ensemble vide est une relation binaire. L'opposé ou l'inverse ou la relation dual est

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(x, z) \in X^2 / (y, x) \in \mathcal{R}\}.$$

**Exemple 1.1.** Soit  $E = \{a, b, c\}$  et on définit la relation  $\mathcal{R}$  par :  $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, c)\}$ , alors  $\mathcal{R}^{-1} = \{(a, a), (b, a), (c, b)\}$ .

Si  $S$  et  $T$  sont deux relations binaires sur  $X$ , la composée de  $S$  et  $T$  est a relation binaire, définie par :

$$T \circ S = \{(x, z) / (x, y) \in T \text{ et } (y, z) \in S \text{ pour au moins un } y \in X\}.$$

**Exemple 1.2.** Relation binaire  $R$  sur  $X$ .

$$X = \{a, b, c, d, e\}, \mathcal{R} = \{(a, b), (a, e), (c, b), (c, d), (c, e), (d, e), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}.$$

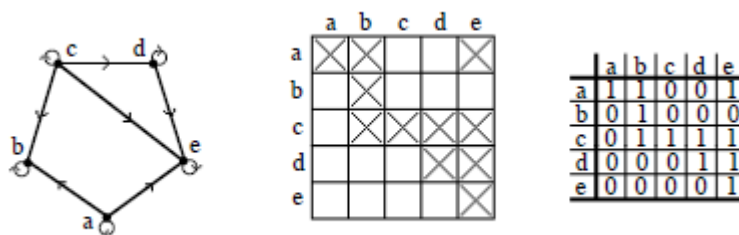


FIGURE 1.1 – Trois représentations de la même relation binaire

**Un graphe dirigé** (un graphe simple orienté) : est un couple  $G = (V, \mathcal{R})$  où :

$V$  d'un ensemble des sommets de  $G$ .

$\mathcal{R} \subseteq \{(x, y) \mid x, y \in V\}$  est un ensemble de couples  $(x, y)$  d'éléments de  $V$  sont les arcs de  $G$ .

Ce graphique est un graphique de base qui est orienté différemment des autres graphiques, comme illustré.

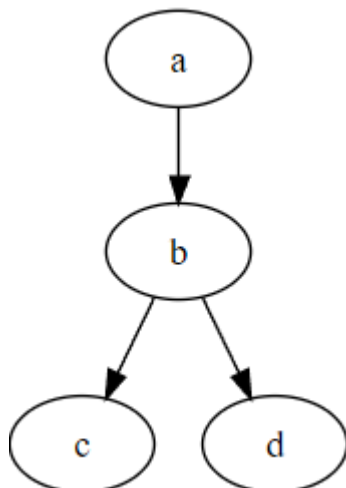


FIGURE 1.2 – un graphe simple orienté

Le nombre d'arêtes entrant respectivement sortant d'un sommet est appelé le degré entrant respectivement le degré sortant de ce sommet.

## 1.2 Pré-ordre, équivalence, ordre, ordre total et ordre strict

### 1.2.1 Pré-ordre

Une relation binaire  $\mathcal{R}$  est un pré-ordre sur un ensemble  $X$ , si  $\mathcal{R}$  est réflexive et transitive :

- $\forall x \in E \ x\mathcal{R}x$  (réflexive).
- $\forall (x, y, z) \in E, (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$  (transitive).

**Exemple 1.3.** *Les ordres sont les pré-ordres antisymétriques.  
Les relations d'équivalence sont les pré-ordres symétriques.*

### 1.2.2 Équivalence

Soit  $X$  un ensemble non vide, une relation binaire  $\mathcal{R}$  sur  $X$  est dite relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

- 1- Pour tout  $x \in E, x\mathcal{R}x$  (réflexivité).
- 1- Pour tout  $x, y \in E, x\mathcal{R}y$ , alors  $y\mathcal{R}x$  (symétrie).
- 1- Pour tout  $x, y, z \in E, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z)$ , alors  $x\mathcal{R}z$  (transitivité).

On utilise le symbole  $\equiv$  (ou aussi  $\cong$ ) pour désigner une équivalence, on lit  $x$  équivalent à  $y$  le fait que  $x \equiv y$  et on notera  $x \not\equiv y$  le fait contraire. Si  $\equiv$  désigne une équivalence sur un ensemble  $X$  alors pour chaque  $x \in X$ , l'ensemble  $\bar{x} = \{y \in X : x \equiv y\}$  est la classe d'équivalence de  $x$ .

**Lemme 1.1.** *Les classes d'équivalence forment une partition de  $V$ .*

- 1-  $\bar{X} \neq \phi$ .
- 2-  $\bar{X} \neq \bar{Y}$ , alors  $\bar{x} \cap \bar{y} = \phi$ .
- 3-  $\bigcup_{x \in X} \bar{x} = X$ .

**Démonstration 1.1.** 1-  $\forall x, x \in \bar{X} \Rightarrow \bar{X} \neq \phi$ .

2- Si  $\bar{x} \neq \bar{y}$  et  $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \phi$ , alors  $\exists x \notin \bar{X} \Rightarrow y \notin \bar{X}$ , supposons que  $z \in \bar{x} \cap \bar{y}$

$$\begin{cases} z\mathcal{R}x \\ \text{et} \\ z\mathcal{R}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\mathcal{R}z \\ \text{et} \\ z\mathcal{R}y \end{cases} \Rightarrow x\mathcal{R}y. \text{ Donc } \bar{x} = \bar{y} \text{ contradiction, car } \bar{x} \cap \bar{y} \neq \phi. \text{ Donc } \bar{x} \cap \bar{y} = \phi.$$

3- En effet  $\bar{x} \subseteq X, \forall x \in X \Rightarrow x \in \bar{x} \Rightarrow x \in \bigcup_{x \in X} \bar{x} \Rightarrow \bar{x} = X$ .

L'ensemble des classes d'équivalence, qu'on peut écrire partir du formulaire  $V/\equiv$ , est le quotient de  $V$  par la relation d'équivalence  $\equiv$ . L'application qui à chaque  $x \in V$  associe  $\bar{x}$  est la surjection canonique de  $V$  dans  $V/\equiv$ .

### 1.2.3 Ordre, ordre total

Une relation d'ordre est désignée par le symbole  $\leq$ , on lit  $x$  inférieur ou égal à  $y$  le fait que  $x \leq y$ , et on écrit  $x \not\leq y$  le fait contraire. Nous utilisons également des notations comme pour éviter toute confusion avec d'autres ordres sur la même ensemble  $x \leq_{\mathcal{R}} y$ .

**Définition 1.2.** *Une relation binaire  $\mathcal{R}$  dans un ensemble non vide  $E$  est dite relation d'ordre sur  $E$  si et seulement si elle vérifie les trois propriétés suivantes :*

- 1- *Réflexivité : pour tout  $x, x\mathcal{R}x$ .*
- 2- *Transitivité : si  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}z$ , alors  $x\mathcal{R}z$ .*
- 3- *Antisymétrie : si  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}x$ , alors  $x = y$ .*
- 4- Pour tout  $x, y \in E$   $x \leq y$  ou  $y \leq x$  l'ordre est dit totale.

### 1.2.4 Ordre, ordre strict

Si  $\mathcal{R}$  est une relation binaire est un ordre, quand elle est réflexive, Antisymétrique et transitive.

Soit  $X$  un ensemble non vide, une relation  $\mathcal{R}$  est un ordre strict si elle est irreflexive et transitive.

- Irréflexive : pour tout  $x \in X, (x, x) \notin \mathcal{R}$ .
- Transitive : pour tous  $x, y, z \in X, x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$ .

**Remarque 1.1.**  $\mathcal{R}$  est toujours antisymétrique : si  $\forall x, y \in X, x \neq y$ , alors  $(x, y) \notin \mathcal{R}$  ou  $(y, x) \notin \mathcal{R}$ .

Si une relation  $S$  est un ordre strict, alors  $\mathcal{R} = S \cup \Delta_X$  est un ordre sur  $X$ .

## 1.3 Image directe et image réciproque

**Définition 1.3.**  $E$  et  $F$  deux ensembles et  $f : E \rightarrow F$ . Le graphe de  $f$  est une relation binaire, on a alors :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = f(x).$$

**Définition 1.4.** (Domaine, image) Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et  $\mathcal{R}$  une relation entre  $E$  et  $F$ .

Le domaine de  $\mathcal{R}$  l'ensemble :

$$\text{Dom}(\mathcal{R}) = \{x \in E \mid \exists y \in F, x\mathcal{R}y\}.$$

L'image de  $\mathcal{R}$  l'ensemble :

$$\text{Imag}(\mathcal{R}) = \{y \in F \mid \exists x \in E, x\mathcal{R}y\}.$$

**Définition 1.5.** (Image directe, image réciproque (inverse)) [11] Soit  $A, B$  des parties de  $E$ , et soit  $\mathcal{R}$  une relation binaire sur un ensemble  $E$ .  $\mathcal{R}(A)$  est appelée l'image directe de  $A$  :

$$\mathcal{R}(A) = \{y \in E \mid \exists x \in A, (x, y) \in \mathcal{R}\}.$$

$\mathcal{R}^{-1}(B)$  est appelée image réciproque de  $B$  :

$$\mathcal{R}^{-1}(B) = \{x \in E \mid \exists y \in B, (x, y) \in \mathcal{R}\}.$$

**Exemple 1.4.** Soient  $E = \{1, 2, 3\}$  et  $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2)\}$  une relation binaire sur  $E$ .

$$\mathcal{R}(\{1, 3\}) = \{1, 2\}, \mathcal{R}(\{2\}) = \{1\}.$$

$$\mathcal{R}^{-1}(\{1, 2\}) = \{1, 2, 3\}, \mathcal{R}^{-1}(\{2\}) = \{3\}.$$

**Définition 1.6.** (Image d'un élément selon une relation) Soient  $E$  et  $F$  deux ensemble,  $\mathcal{R}$  une relation binaire de  $E$  vers  $F$  et  $a$  un élément de  $E$ .

$$\mathcal{R}(a) = \{y \in F \mid (a, y) \in \mathcal{R}\}.$$

$\mathcal{R}(a)$  est l'image selon  $\mathcal{R}$  de l'élément  $a$  de  $E$  est appelée coupe selon l'élément  $a$ .

## 1.4 Représentations d'une relation binaire

**Définition 1.7.** (*Représentations*) Un ensemble est dit ensemble défini en extension s'il est défini par la liste de ses éléments.

### 1 Liste de couples :

Cette représentation quelque strictement la définition en extension 1.7.

**Exemple 1.5.**  $\mathcal{R} = \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (c, d), (e, a)\}$ .

### 2 Table booléenne ou matrice caractéristique :

Soit  $\mathcal{R}$  une relation de  $A$  vers  $B$ , on associe une matrice booléenne  $M_{\mathcal{R}}$ , les éléments de  $A$  et de  $B$  il est numéroté comme suit :

$M_{\mathcal{R}}$  Contient une ligne par élément  $a_i \in A$ .  $M_{\mathcal{R}}$  Contient une colonne par élément  $b_j \in B$ .

Chaque élément  $r_{i,j}$  de  $M_{\mathcal{R}}$  a de la valeur :

$$r_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (a_i, b_j) \in \mathcal{R}; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

### 3 Vecteur de vérité :

L'ensemble des  $(a_i, b_j) \in A \times B$  ils sont destinés à être listés dans un ordre fixe, à une relation  $\mathcal{R} \subset A \times B$  nous connectons le vecteur booléen  $\mathcal{R}$  d'un booléen par couple  $(a_i, b_j)$ .

### 1.4.1 Représentation matricielle

**Définition 1.8.** (*Matrices booléennes*) Soit  $E = \{x_1, \dots, x_n\}$  un ensemble fini, et soit  $\mathcal{R}$  une relation binaire sur  $E$ .

$M$  est matrice booléenne associée à  $\mathcal{R}$ . La matrice  $M_{\mathcal{R}} = (a_{i,j}), 1 \leq i, j \leq n$ , définie par :

$$\text{pour tout } 1 \leq i, j \leq n, a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \mathcal{R} x_j; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$A = (a_{i,j}) 1 \leq i, j \leq n$  et  $B = (b_{i,j}) 1 \leq i, j \leq n$ , par

- La somme booléenne  $A \oplus B = (c_{i,j}) 1 \leq i, j \leq n$  avec  $c_{i,j} = \text{Max}(a_{i,j}, b_{i,j})$ .
- Le produit booléenne  $A \otimes B = (d_{i,j}), 1 \leq i, j \leq n$  avec  $d_{i,j} = \max_{k=1, \dots, n} (a_{i,k} \wedge b_{k,j})$ .

Avec les loi correspondantes :

$$\begin{cases} 0 \wedge 0 = 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0 \\ 1 \wedge 1 = 1 \end{cases} \quad (\text{resp}) \quad \begin{cases} 1 \vee 1 = 0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1 \\ 0 \vee 0 = 0 \end{cases}$$

**Exemple 1.6.** Soit  $E = \{a, b, c\}$ ,  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  deux relation binaire.

$\mathcal{R}_1$	$a$	$b$	$c$
$a$	$1$	$1$	$0$
$b$	$0$	$1$	$1$
$c$	$0$	$0$	$1$

et

$\mathcal{R}_2$	$a$	$b$	$c$
$a$	$0$	$1$	$1$
$b$	$1$	$0$	$0$
$c$	$0$	$1$	$1$

$$M_{\mathcal{R}_1} \oplus M_{\mathcal{R}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M_{\mathcal{R}_1} \otimes M_{\mathcal{R}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Proposition 1.1.** *D'après Définition 1.8, on a :*

$\mathcal{R}$  est réflexive si et seulement si  $M_{\mathcal{R}}$  ne possède que dans "1" sur la diagonale.

$\mathcal{R}$  est symétrique si et seulement si  ${}^t M_{\mathcal{R}} = M_{\mathcal{R}}$ .

**Exemple 1.7.** Soit  $E = \{a, b, c, d, e\}$ . Et  $\mathcal{R} = \{(a, b), (b, a), (b, c), (d, b), (d, d)\}$ .

La représentation matricielle de  $\mathcal{R}$  est :

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Une représentation sagittale du graphe  $(E, \mathcal{R})$  est :

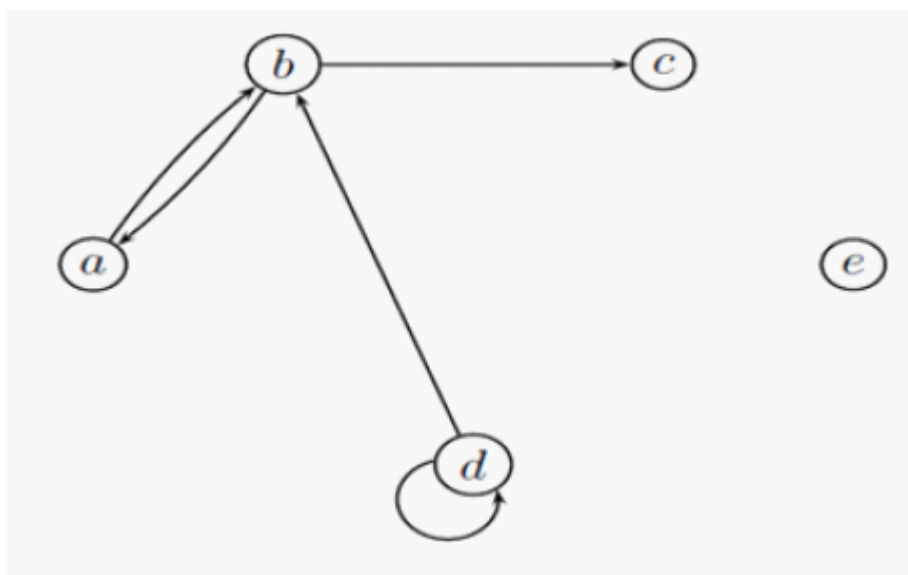


FIGURE 1.3 – représentation sagittale

## 1.4.2 Autres représentations

Si  $E$  et  $F$  sont fini, nous pouvons représenter une relation binaire ( $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ ) par un diagramme sagittal, par un diagramme cartésien, ou une matrice booléenne.

### Diagramme sagittal ou graphe

On représente d'abord les éléments de  $E$  et  $F$  par des points, ce sont les sommets du diagramme, si  $a \in E$  et  $b \in F$  tels que  $a\mathcal{R}b$ , on dessine une flèche partant du point qui représente  $a$  et allant à celui qui représente  $b$ .

Lorsqu'on dessine le diagramme sagittal d'une relation binaire sur  $E$ , on convient de le simplifier en représentant qu'une seule fois les éléments de  $E$ .

**Exemple 1.8.** Soit  $E = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $F = \{1, 2, 3, 4\}$ .

On définit la relation  $\mathcal{R} \subseteq E \times F$  par :

$\mathcal{R} = \{(a, 4) (a, 2) (c, 1) (b, 1) (e, 4) (c, 4)\}$ .

Et la relation  $S$  sur  $F$  par :

$S = \{(1, 2) (2, 2) (4, 1) (3, 1) (4, 4) (2, 3)\}$ .

Diagramme Sagittal de  $\mathcal{R}$  et  $S$  :

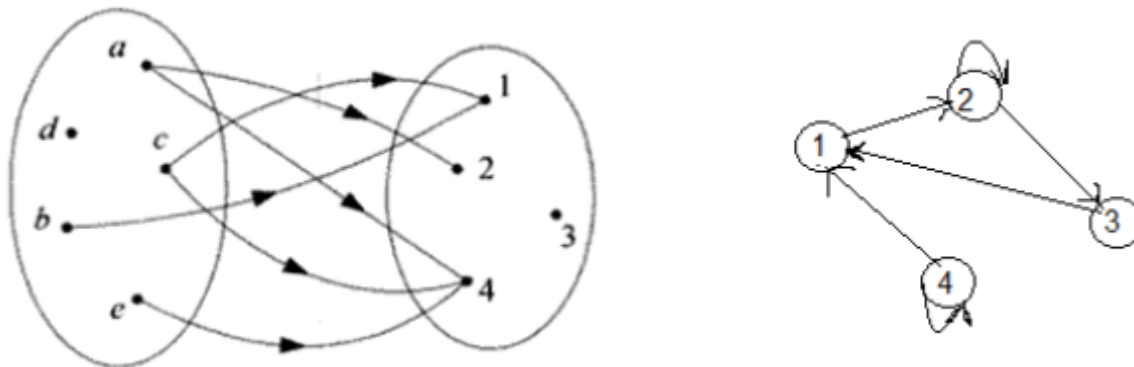


FIGURE 1.4 – Diagramme sagittale pour R et S

### Diagramme cartésien

Un tableau à deux entrées qui décrit une relation entre les composants d'un ensemble de départ et ceux d'un ensemble d'arrivée. Les éléments d'un ensemble sont écrits à gauche, tandis que les éléments de l'autre ensemble sont écrits en bas ou en haut.

Le sens dans lequel la relation doit être lue est indiqué par une flèche. Le diagramme cartésien d'une relation sur un ensemble est carré parce que il a le même nombre de lignes que de colonnes, les cases qui représentent les couples de type  $(x, x)$  remplissent la diagonale du carré qu'on appelle la diagonale.

Par exemple on dessinant la table Cartésienne pour les relations  $\mathcal{R}$  et  $S$ .

$\mathcal{R}$	1	2	3	4
$a$		×		×
$b$	×			
$c$	×			×
$d$				

$S$	1	2	3	4
1		×		
2		×	×	
3	×			
4	×			×

### Représentation des relations binaires entre éléments d'ensembles finis par des matrices

Considérons deux ensembles finis  $E$  et  $F$ , ainsi qu'une relation  $\mathcal{R}$  entre leurs constituants. Comme  $E$  est fini, ses éléments sont notés  $a_1, \dots, a_n$ , et comme  $F$  est fini, ses éléments sont notés  $b_1, \dots, b_m$ .

Si  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  sont deux relations entre les composants de  $E$  et  $F$ , la matrice correspondant à  $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$  (resp.  $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ ) est la matrice formée en « additionnant » les éléments des matrices correspondantes à  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  selon la procédure normale de addition matricielle. Pour plus de détails, voir [14]

## Un peu de théorie combinatoire de l'ordres

### 2.1 Propriétés remarquables d'une relation binaire

**Définition 2.1.** [8] Soit  $\mathcal{R}$  une relation binaire sur  $E$  alors :

- ▶ Si  $\forall a \in E, (a, a) \in \mathcal{R}$ , alors  $\mathcal{R}$  est réflexive.
- ▶ Si  $\forall a \in E, (a, a) \notin \mathcal{R}$ , alors  $\mathcal{R}$  est irréflexive.
- ▶ Si  $\forall a, b \in E, (a, b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow (b, a) \in \mathcal{R}$ , alors  $\mathcal{R}$  est symétrique.
- ▶ Si  $\forall a, b \in E, (a, b) \in \mathcal{R} \text{ et } (b, a) \in \mathcal{R} \Rightarrow a = b$ , alors  $\mathcal{R}$  est antisymétrique.
- ▶ Si  $\forall a, b, c \in E, (a, b) \in \mathcal{R} \text{ et } (b, c) \in \mathcal{R} \Rightarrow (a, c) \in \mathcal{R}$ , alors  $\mathcal{R}$  est transitive.

**Définition 2.2.** (complémentaire de  $\mathcal{R}$ ) Soit  $\mathcal{R}$  une relation binaire d'un ensemble  $E$  vers un ensemble  $F$ , la relation binaire  $\mathcal{R}^c$  de  $E$  vers  $F$  définie par

$$\forall (x, y) \in E \times F, (x, y) \in \mathcal{R}^c \Leftrightarrow (x, y) \notin \mathcal{R}.$$

**Proposition 2.1.** Soit  $\mathcal{R}$  une relation binaire sur un ensemble  $E$ .

1. Si  $\mathcal{R}$  réflexive, alors  $\mathcal{R}^{-1}$  est réflexive.
2. Si  $\mathcal{R}$  est transitive si, et seulement si,  $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$ .
3. Si  $\mathcal{R}$  est antisymétrique si, et seulement si,  $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \subseteq \Delta_E$ .

**Démonstration 2.1.** Soit  $\mathcal{R}$  une relation binaire sur un ensemble  $E$ .

1. Si  $\mathcal{R}$  est réflexive, alors  $\forall x \in E, (x, x) \in \mathcal{R}$  donc  $(x, x) \in \mathcal{R}^{-1}$  est réflexive.
2.  $\Rightarrow$  On montre que  $\mathcal{R}$  est transitive entraîne  $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$ . Soit  $(x, y) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$ , alors  $\exists z \in E : (x \mathcal{R} z) \text{ et } (z \mathcal{R} y)$  comme  $\mathcal{R}$  est transitive alors  $x \mathcal{R} y$  (i.e.,  $(x, y) \in \mathcal{R}$ ), donc  $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$ .
- $\Leftarrow$  On montre que si  $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$ , alors  $\mathcal{R}$  est transitive.

$$\text{Soit } x, y, z \in E, \begin{cases} x \mathcal{R} y \\ \text{et} \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \Rightarrow x(\mathcal{R} \circ \mathcal{R})z \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{R}, \text{ alors } (x, z) \in \mathcal{R}, \text{ car } \mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}.$$

Donc  $\mathcal{R}$  est transitive.

3.  $\Rightarrow$  On montre que  $\mathcal{R}$  est antisymétrique.

$$\text{Soit } x, y \in E \begin{cases} (x, y) \in \mathcal{R} \\ \text{et} \\ (x, y) \in \mathcal{R}^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) \in \mathcal{R} \\ \text{et} \\ (y, x) \in \mathcal{R} \end{cases} \Rightarrow x = y \text{ (car } \mathcal{R} \text{ antisymétrique)}.$$

Alors  $(x, y) = (x, x) \in \Delta_E$ , donc  $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \subseteq \Delta_E$ .

$\Leftarrow$   $\mathcal{R}$  est antisymétrique est ce que implique  $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \subseteq \Delta_E$ .

$$\text{Soit } x, y \in E \begin{cases} (x, y) \in \mathcal{R} \\ \text{et} \\ (y, x) \in \mathcal{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) \in \mathcal{R} \\ \text{et} \\ (x, y) \in \mathcal{R}^{-1} \end{cases} \Rightarrow (x, y) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}, \text{ alors } x = y.$$

donc  $\mathcal{R}$  est antisymétrique.

## 2.2 Compatibilité entre une opération interne et une relation binaire

Soit  $E$  un ensemble non vide.  $\mathcal{R}$  une relation binaire sur  $E$ , est dite compatible avec "  $\circ$  ".

$$\forall x, x', y, y' \in E \text{ si : } \begin{cases} x \mathcal{R} x' \\ y \mathcal{R} y' \end{cases} \text{ alors } (x \circ y) \mathcal{R} (x' \circ y').$$

**Exemple 2.1.** On considère la relation  $\leq$  sur  $\mathcal{R}$  avec les loi interne "  $+$  ".

$$\begin{cases} x \leq x' \\ y \leq y' \end{cases} \text{ alors } (x + y) \leq (x' + y').$$

On a  $3 \leq 5$  et  $2 \leq 6$ , alors  $3 + 2 \leq 5 + 6$ .

Donc  $5 \leq 11$ .

## 2.3 Fermetures

Soit  $\Omega$  un ensemble, trouver  $C \subset \Omega$  telle que :

1.  $S \subseteq C$ .
2.  $(p)$  une propriété.

$S \subseteq C$ ,  $C$  le plus petit partie que contient  $S$  et vérifie la propriété  $(p)$ .  $C$  est dit fermeture de  $S$  selon  $(p)$ .  $E = \{a, b, c\}$ , et  $S = \{(a, a), (b, b)\}$  donc  $C = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ .

Soit  $\mathcal{R}$  une relation binaire sur un ensemble non vide  $E$ .

### Fermeture réflexive

$r(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup IE = \mathcal{R} \cup \Delta_E = \mathcal{R} \cup \{(x, x) / x \in E\}$ , et si  $\mathcal{R}$  est réflexive alors  $r(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ .

**Exemple 2.2.** Soit  $E = \{a, b, c\}$  et  $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, c)\}$  alors :

La fermeture réflexive est :

$$r(\mathcal{R}) = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c)\} = \mathcal{R} \cup \Delta_E.$$

**Exemple 2.3.** Soit  $E = \{1, 2, 3, 4\}$  et  $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 3)\}$  alors :

La fermeture réflexive est :

$$r(\mathcal{R}) = \text{réflexive}(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \Delta_E = \mathcal{R} \cup \{(2, 2), (4, 4)\}.$$

#### Fermeture symétrique

$\text{Sym}(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ , et si  $\mathcal{R}$  est symétrique alors  $\text{Sym}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ .

**Exemple 2.4.** Soit  $E = \{1, 2, 3, 4\}$  et  $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 3)\}$  alors :

La fermeture symétrique est :

$$\text{Sym}(\mathcal{R}) = \text{symétrique}(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R} \cup \{(4, 2), (3, 4)\}.$$

#### Fermeture transitive

$$t(\mathcal{R}) = \text{transitive}(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2 \cup \mathcal{R}^3 \cup \dots \cup \mathcal{R}^i \cup \dots \cup \mathcal{R}^n = \bigcup_{(d \leq 1)} \mathcal{R}^d = \mathcal{R}^*.$$

**Théorème 2.1.** Soient  $E$  un ensemble fini de  $n$  éléments et  $\mathcal{R}$  est une relation binaire sur  $E$ , alors la fermeture transitive de  $\mathcal{R}$  est :

$$t(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2 \cup \mathcal{R}^3 \cup \dots \cup \mathcal{R}^n.$$

**Démonstration 2.2.** On a :

$$\begin{aligned} t(\mathcal{R}) &= \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2 \cup \mathcal{R}^3 \cup \dots \cup \mathcal{R}^n. \\ &= t(\mathcal{R}) \circ (t(\mathcal{R}) \subseteq t(\mathcal{R})). \\ &= (\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2 \cup \mathcal{R}^3 \cup \dots \cup \mathcal{R}^n) \circ (\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2 \cup \mathcal{R}^3 \cup \dots \cup \mathcal{R}^n). \\ &= (\mathcal{R}^2 \cup \mathcal{R}^3 \cup \dots \cup \mathcal{R}^n) \cup (\mathcal{R}^2 \cup \mathcal{R}^3 \cup \dots \cup \mathcal{R}^n) \cup (\mathcal{R}^2 \cup \mathcal{R}^3 \cup \dots \cup \mathcal{R}^n). \\ &= (\mathcal{R}^2 \cup \mathcal{R}^3 \cup \dots \cup \mathcal{R}^n) \subseteq t(\mathcal{R}). \end{aligned}$$

Donc  $t(\mathcal{R})$  est transitive.

**Exemple 2.5.** Soit  $E = \{1, 2, 3\}$  et  $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3)\}$  alors :

$$\mathcal{R}^2 = \mathcal{R} \times \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3)\}.$$

$$t(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3), (1, 3)\}.$$

$\mathcal{R}^2 \subseteq \mathcal{R}$  alors  $\mathcal{R}$  est transitive.

## 2.4 Applications d'un ensemble fini

### 2.4.1 Nombre de couples, nombre de n-uples

Soit  $E$  un ensemble fini.

#### Nombre de couples :

On a  $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$   $E \times E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \times \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

$\{(x_1, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_1, x_n), (x_2, x_1), (x_2, x_2), \dots, (x_2, x_n), \dots, (x_n, x_1), (x_n, x_2), \dots, (x_n, x_n)\}$ .

Une relation est une partie de  $E \times E$ , donc on a  $n^2$  relation binaire.

#### Nombre de m-uples :

Un m-uples est une application de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, m\}$  de  $n$  éléments de  $E$ .

Le nombre de m-uples est le cardinale de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$  vers  $E$  avec  $|E| = m^n$ .

## 2.5 Un peu de combinatoire

Soit  $E$  un ensemble fini à  $n$  élément, le nombre de couple et le cardinal  $|E \times E|$  est  $n^2$ . Dans ce qui suit, on va montrer que le nombre de relation binaire sur le ensemble  $E$  est  $2^{n^2}$ .

**Lemme 2.1.** Soit  $E$  un ensemble fini. L'ensemble  $\mathcal{P}(x)$  est en bijection avec  $\{0, 1\}$ .

**Démonstration 2.3.** En effet :

$$\begin{array}{lcl} X : \mathcal{P}(x) & \longrightarrow & \{0, 1\} \\ A & \longrightarrow & \mathcal{X}_A. \end{array}$$

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A; \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Est une application bijective.

•  **$\mathcal{X}$  injective**

$A, B \in \mathcal{P}(x) :$

- Si  $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B \Rightarrow A = B$ .
- Si  $\mathcal{X}_A(x) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{X}_B(x) = 1 \Rightarrow x \in A \Leftrightarrow x \in B$ .

•  **$\mathcal{X}$  surjective**

$$X : \mathcal{F}(x) \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$F : X \longrightarrow \{0, 1\}$$

Existe-t-elle une partie  $A$  en effet :

$$\mathcal{X}_A = f, \text{ il suffit de } A = F^{-1}(1).$$

$\mathcal{R}$  relation binaire  $\Leftrightarrow \mathcal{R} \in \mathcal{X}^E, \mathcal{P}(X \times X) \cong 2^{X \times X}$ .

**Théorème 2.2.** Le nombre de relation binaires sur un ensemble  $E$  a  $n$  élément, si  $2^{n^2}$ .

**Démonstration 2.4.** Une relation binaire  $\mathcal{P}$  sur  $E$  est un élément de  $\mathcal{P}(E \times E)$ . D'après le lemme 2.1 précédente  $\mathcal{P}(E \times E) \cong 2^{E \times E}$ .

Donc  $|\mathcal{P}(E \times E)| =$  le nombre de relation binaire sur  $E = 2^{|E \times E|} = 2^{n^2}$ .

### 2.5.1 Nombre de relations binaires de types particuliers

Soit  $E$  un ensemble fini à  $n$  éléments, On détermine le nombre de relations binaires sur  $E$  qui sont réflexive ainsi que le nombre de relations binaires sur  $E$  qui sont symétrique.

#### Nombre de relations réflexives

Une relation  $\mathcal{R}$  réflexives sur  $E$  un ensemble fini.

Si,  $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$  soit encoure  $(x, x) \in \mathcal{R}$ .

C'est à dire  $\Delta_E = \{(x, x) : x \in E\} \subseteq \mathcal{R}$ .

Donc pour construire une relation réflexive  $\mathcal{R}$  on doit choisir une partie  $p(E \times E)$  de qui contient obligatoirement  $\Delta_E$ .

On a chaque partie de  $\mathcal{R} \subseteq E \times E - \Delta_E$  peut correspondre une relation réflexive on lui ajoutant la partie  $\Delta_E$ . Donc le nombre de relation réflexive sur  $E$  est le cardinal de  $p(|E \times E - \Delta_E|)$ , on a donc  $2^{|E \times E - \Delta_E|}$  relation réflexive soit encoure  $2^{n(n-1)}$  relation réflexive.

#### Nombre de relations symétriques

Une relation  $\mathcal{R}$  symétriques sur  $E$  un ensemble fini.

Si  $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ .

Les relations symétriques sont caractérisées par des valeurs de vérité identique pour les couples  $(x, y)$  et  $(y, x)$  avec  $x \neq y$ . Il existe  $n^2 - n = n(n - 1)$  couples  $(x, y)$  avec  $x \neq y$ .

Pour la moitié d'entre eux, la valeur de vérité est libre, 0 ou 1, pour l'autre moitié, qui sont les couples symétriques, elle est fixée. Pour les  $n$  couples  $(x, x)$ , la valeur de vérité est libre, 0 ou 1. Au total, nous obtenons  $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$  couples  $(x, y)$  pour lesquels la valeur de vérité est libre, 0 ou 1. Remarquons que ce nombre de couples peut aussi être obtenu en soustrayant du nombre total  $n^2$  de couples, le nombre  $\frac{n(n-1)}{2}$  de couples pour lesquels la valeur de vérité est fixée par symétrie :  $n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ .  
Donc il existe  $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$  relations binaires symétriques sur  $X$ .

## 2.6 Décomposition en antichaînes et chaînes

### 2.6.1 Décomposition en niveaux (antichaînes) d'un ensemble ordonné

**Définition 2.3.** [6] Soit  $E$  un ensemble ordonné, supposons que  $\min(E) = \{a \in E \mid a \text{ minimal dans } E\}$ .

Définissons également :

$$E_0 = \min(E).$$

$$E_1 = \min(E \setminus E_0).$$

$$E_n = \min(E \setminus E_0 \cup_{m < n} E_m).$$

Ces niveaux sont des antichaînes et sont disjoints.

$E$  est fini,  $E_0, \dots, E_{h(E)-1}$  Ce sont ces sous ensembles, que nous pouvons appeler niveaux.

**Exemple 2.6.** Soit  $E = (\{1, 2, 3\})$  les niveaux de le ensemble ordonné  $(E, |)$ .

$$E_0 = \{1\}.$$

$$E_1 = \{2, 3\}.$$

$$E_2 = \{\phi\}.$$

### 2.6.2 Décomposition en chaînes d'un ensemble ordonné

Soit  $E$  un poset.  $\{C_1, \dots, C_m\}$  un ensemble de chaînes disjointes de  $E$  tel que  $E = \cup_{i=1}^m C_i$ , le ensemble  $\{C_1, \dots, C_m\}$  est une décomposition en chaînes de  $E$ .

**Définition 2.4.** Soit  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné fini.

- On appelle la Largeur de  $E$ , le cardinal de l'antichaînes maximale de  $E$ , et on le note  $W(E)$ .
- On appelle la Hauteur de  $E$ , le cardinal de la chaîne maximale de  $E$ , et on le note  $h(E)$ .
- $|E| \leq W(E) \times h(E)$ .

**Exemple 2.7.** • Soit l'ensemble  $E = D(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$  ordonné par la divisibilité.

Les niveaux de l'ensemble  $E = D(20)$  sont :

$$E_0 = \{1\}.$$

$$E_1 = \{2, 5\}.$$

$$E_2 = \{4, 10\}.$$

$$E_3 = \{20\}.$$

$$E_4 = \phi.$$

On a  $E_4 = \phi$ , donc  $h(E) = 4$ .

Donc  $|E| = 6 \leq W(E) \times h(E) = 3 \times 4 = 12$ .

- Soit l'ensemble  $E = D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$  ordonné par la divisibilité.

Les niveaux de l'ensemble  $E = D(30)$  sont :

$$E_0 = \{1\}.$$

$$E_1 = \{2, 3, 5\}.$$

$$E_2 = \{6, 10, 15\}.$$

$$E_3 = \{30\}.$$

$$E_4 = \phi.$$

On a  $E_4 = \phi$ , donc  $h(E) = 4$ .

Donc  $|E| = 6 \leq W(E) \times h(E) = 3 \times 4 = 12$ .

### 2.6.3 Théorème de Dilworth

**Lemme 2.2.** (Théorème de Dilworth) [9]

- 1– Soit  $E$  un poset fini. La largeur de  $E$  est égale au cardinal d'une décomposition minimale en chaînes de  $E$ .
- 2– Soit  $E$  un poset fini. Si  $w$  est la Largeur de  $E$  et  $C_1, \dots, C_w$  est une décomposition en chaînes de  $E$ , et  $A$  est une antichaîne qui comporte  $w$  éléments, alors  $|A \cap C_i| = 1$  pour tout  $i = 1, \dots, w$ .

**Démonstration 2.5.** 1– Soit  $A$  une antichaîne de  $E$ , et  $C_1, \dots, C_t$  chaînes disjointes couvrant de  $E$ . Alors pour tout  $i$  on a  $|A \cap C_i| \leq 1$ ,  $\exists x, y \in A \cap C_i : x \neq y$ ,  $x$  et  $y$  sont comparables, alors impossible  $x, y$  appartenir à la fois pour  $A$ , une contradiction. Comme les  $C_i$  sont disjointes, on a  $|A| = \sum_{i=1}^t |A \cap C_i|$  et ce dernier nombre est au plus petit  $t$ .

- 2– Si  $t = w$ , alors  $|A| = \sum_{i=1}^t |A \cap C_i| \leq w$ , et nous avons un égalité des deux côtés. De plus,  $|A \cap C_i| = 1$  pour tout  $i$ .

**Théorème 2.3.** Soit  $E$  un ensemble ordonné fini, alors  $|E| \leq W(E) \times h(E)$ .

**Démonstration 2.6.** Considérons un repère orthonormé notons les éléments de l'ensemble  $E$  sur ce repère selon leurs niveaux. Il est claire que  $h(E)$  la surface au rectangle le congruence de largeur  $W(E)$ .

**Conclusion 2.1.** Puisque les poset de  $E$  sont l'intérieure du rectangle, alors  $|E| \leq |W(E)| \times |h(E)|$ .  
 $|E| \leq |C_{\max}| \times |A_{\max}|$ .

## 2.7 Théorème d'Erdos-Szekeres

**Théorème 2.4.** (Erdos-Szekeres) [7]

Soient  $p$  et  $q$  deux entiers. Si  $E$  est un ensemble ordonné de taille au moins  $pq + 1$  élément, alors il contient soit une chaîne de taille  $p + 1$  élément, soit une antichaîne de taille  $q + 1$  élément.

**Démonstration 2.7.**  $E$  ne contient aucun chaîne maximal de taille  $p + 1$  et ne contient aucun antichaîne maximal de taille  $q + 1$ .

Alors la taille de la chaîne maximale est  $p < p + 1$  et la taille de la antichaîne maximale et  $q < q + 1$ , donc  $|E| \leq p \times q$ , et on a par hypothèse  $|E| = pq + 1 \leq p \times q$ , contradiction.

**Théorème 2.5.** Si  $E$  est un ensemble ordonné à  $pq + 1$  nombre réels, alors  $E$  contient une chaîne croissante à  $p + 1$  éléments, soit une antichaîne décroissante à  $q + 1$  éléments.

**Démonstration 2.8.**  $E = \{x_1, x_2, \dots, x_{pq+1}\}$ . Poussons  $F = \{(x_i, x_1) \mid 1 \leq i \leq pq + 1\}$  sur  $E$  on définit la relation  $\leq$  par  $(i, x_i) \leq (j, x_j)$  ssi  $i \leq j$  et  $x_i \leq x_j$ .  $(i, x_i) \leq (j, x_j)$  est une relation d'ordre.

- 1- Réflexivité  $(i, x_i) \leq (i, x_i)$ .
- 2- Antisymétrie  $(i, x_i) \leq (j, x_j)$  et  $(j, x_j) \leq (i, x_i) \Rightarrow (i, x_i) = (j, x_j)$ .
- 3- transitivité  $(i, x_i) \leq (j, x_j)$  et  $(j, x_j) \leq (k, x_k) \Rightarrow (i, x_i) \leq (k, x_k)$ .

Donc  $(F, \leq)$  est un poset, donc  $F$  contient soit une chaîne croissante à  $p + 1$  éléments, soit une antichaîne décroissante à  $q + 1$  éléments.

### 2.7.1 Théorème de Sperner

**Théorème 2.6.** Soit  $A$  une antichaîne sur un ensemble  $E$ , de cardinal  $n$ . Alors

$$|A| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Le nombre de sections à  $k$  composantes est noté  $f(k)$ .

**Démonstration 2.9.** Le nombre de parties à  $k$  éléments est noté  $f(k)$  avec  $k = \frac{n}{2}$  si  $n$  est pair et  $k = \frac{(n-1)}{2}$  ou  $k = \frac{(n+1)}{2}$  si  $n$  est impair.  $f(k) = \binom{n}{k}$  il suffit de démontrer l'inégalité de Sperner.

$$\max(f(k)) = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

On calcule la différence  $f(k + 1) - f(k)$

$$\begin{aligned} f(k + 1) - f(k) &= \binom{n}{k+1} - \binom{n}{k} \\ &= \frac{n!}{(n - k - 1)!(k + 1)!} - \frac{n!}{(n - k)!k!} \\ &= \frac{n!}{(n - k - 1)!k!} \left( \frac{n - 2k - 1}{(n - k)(k + 1)} \right) \end{aligned}$$

Pour que  $f$  soit croissante il faut que  $f(k + 1) - f(k) \geq 0$ , alors  $n - 2k - 1 \geq 0$  donc  $k \leq \frac{n-1}{2}$ . Alors il est positive pour  $k \leq \frac{n-1}{2}$  et négative pour  $k \geq \frac{n-1}{2}$ .

La table de variation est créée en utilisant suivant les parités de  $n$ .

$K$	0	$\frac{n-1}{2}$	$n$
$n$ pair		↖ ↗	
$n$ impair		● ↖ ↗	

**Exemple 2.8.** Soit  $A$  une antichaînes sur un ensemble  $E$ , de cardinal  $n$ .

Alors  $E = \{a, b, c\}$ ,  $|E| = 3$  et  $(p(E), \subseteq)$ .

A antichaînes de  $|f(n)| = C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ ,  $|A| \leq C_3^{\lfloor \frac{3}{2} \rfloor} = C_3^1 = 3$ .

## 2.8 Extensions linéaires de l'ordre partiel : ( Théorème de Szpilrajn)

**Définition 2.5.** Soit  $\mathcal{R}$  une relation binaire sur  $E$ .  $\mathcal{R}'$  est dit extension de  $\mathcal{R}$  si  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}'$ .  $\mathcal{R}'$  est dit extension linéaire si  $\mathcal{R}'$  est un ordre total.

**Théorème 2.7.** Tout ordre partiel s'étend à un ordre total.

**Lemme 2.3.** Un ordre est linéaire si et seulement si il n'a pas d'autre extension que lui même.

**Démonstration 2.10.** Si un ordre  $E$  est linéaire, on ne peut lui ajouter aucune comparabilité donc il n'a pas d'extension autre que lui même.

**Lemme 2.4.** (Lemme de Zorn) Soit  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné dans le quel toute  $C$  chaîne,  $C$  est inductive (possède un majorant ou un élément maximal), alors  $E$  possède un élément maximal.

**Définition 2.6.** Tout ordre partiel existe dans un ordre total, selon cette théorème. Et que la comparaison des éléments peut être étendue de manière à ce que chaque élément soit inférieur ou supérieur, ce qui donne des appariements incomparables. Une relation d'ordre sur  $E$ .

1. Réflexive  $\forall x \in E : x\mathcal{R}x$ .
2. Antisymétrique  $\forall x, y \in E : x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$ .
3. Transitive  $\forall x, y, z \in E : x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$ .

**Lemme 2.5.** Soit  $E$  un ensemble non vide,  $\mathcal{R}$  une relation d'ordre partielle sur  $E$  et soit  $a, b \in E$  avec  $(a, b) \notin \mathcal{R}$  et  $(b, a) \notin \mathcal{R}$ .

Il existe une relation d'ordre  $\mathcal{R}'$  sur  $E$ ,  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}'$  telle que  $(a, b) \in \mathcal{R}'$ .

**Démonstration 2.11.** [17] On définit  $\mathcal{R}'$  comme suit :

$$x\mathcal{R}'y \Leftrightarrow \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ \vee \\ x\mathcal{R}a \wedge b\mathcal{R}y. \end{cases}$$

Montrée que  $\mathcal{R}'$  relation d'ordre.

$\mathcal{R}'$  est réflexive :

Comme pour tout  $x \in E$ ,  $(x, x) \in \mathcal{R}$  Donc  $(x, x) \in \mathcal{R}'$

$\mathcal{R}'$  est antisymétrique : Soient  $a, b \in E$ .

$$x\mathcal{R}'y \Leftrightarrow \begin{cases} x\mathcal{R}y \dots (1) \\ \vee \\ x\mathcal{R}a \wedge b\mathcal{R}y \dots (2). \end{cases} \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}'x \Leftrightarrow \begin{cases} y\mathcal{R}x \dots (3) \\ \vee \\ y\mathcal{R}a \wedge b\mathcal{R}x \dots (4). \end{cases}$$

**cas 1** (1) et (3) :  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$ .

**cas 2** (1) et (4) :  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}a$  et  $b\mathcal{R}x \Rightarrow b\mathcal{R}a$  contradiction.

**cas 3** (2) et (3) :  $x\mathcal{R}a$  et  $b\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}x \Rightarrow b\mathcal{R}a$ .

*cas 4 (2) et (4) :*

$$\begin{cases} x\mathcal{R}a \text{ et } b\mathcal{R}y \\ \wedge \\ y\mathcal{R}a \text{ et } b\mathcal{R}x. \end{cases} \Rightarrow b\mathcal{R}a \text{ contradiction.}$$

*$\mathcal{R}'$  est transitive :*

$\forall x, y, z \in E.$

$$x\mathcal{R}'y \Rightarrow \begin{cases} x\mathcal{R}y \dots (1) \\ \vee \\ x\mathcal{R}a \quad \wedge \quad b\mathcal{R}y \dots (2). \end{cases} \text{ et } y\mathcal{R}'z \Rightarrow \begin{cases} y\mathcal{R}z \dots (3) \\ \vee \\ y\mathcal{R}a \quad \wedge \quad b\mathcal{R}z \dots (4). \end{cases}$$

*cas 1 (1) et (3) :  $x\mathcal{R}y \Rightarrow x\mathcal{R}'z.$*

*cas 2 (1) et (4) :  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}a$  et  $b\mathcal{R}z$  ( $x\mathcal{R}a$  et  $b\mathcal{R}z$ )  $\Rightarrow x\mathcal{R}'z.$*

*cas 3 (2) et (3) :  $x\mathcal{R}a$  et  $b\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}z. \Rightarrow x\mathcal{R}'z.$*

*cas 4 (2) et (4) :  $x\mathcal{R}a$  et  $b\mathcal{R}y, y\mathcal{R}a$  et  $b\mathcal{R}z \Rightarrow b\mathcal{R}a$  contradiction.*

*Conclusion on a  $\mathcal{R}'$  est une relation d'ordre contenant  $\mathcal{R}$  et dans laquelle  $(a, b) \in \mathcal{R}'.$*

## Quelques types de relation d'ordres

### 3.1 Relations d'ordres

**Définition 3.1.** (*Relations d'ordres*) Soit  $E$  un ensemble, une relation  $\leq$  sur  $E$  est une relation d'ordre si  $\forall x, y$  et  $z$  éléments de  $E$ .

Une relation d'ordre est une relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive :

- 1- *Réflexivité* :  $\forall x \in E, x \leq x$ .
- 2- *Antisymétrie* :  $\forall x, y \in E, (x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$ .
- 3- *Transitivité* :  $\forall x, y, z \in E, (x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ .

**Exemple 3.1.** On prend les relations suivantes :  $(\leq, =, <, >)$ .

- $\leq, =$  sont des relations d'ordre sur  $\mathbb{R}$ .

**Définition 3.2.** (*Ordre strict*) Soit  $E$  un ensemble et soit  $<$  est une relation binaire sur  $E$ . On dit que  $<$  est un ordre strict, si  $<$  est

- *Irréflexive*  $\forall x \in E, x \not< x$
- *Transitive*  $\forall x, y, z \in E, ((x < y) \text{ et } (y < z)) \Rightarrow x < z$

Le couple  $(E, <)$  est dit un ensemble strictement ordonné.

**Exemple 3.2.** On prend les relations suivantes :  $(<, >)$ .

- $<, >$  sont des ordre stricte.

**Remarque 3.1.** ★ Un ordre strict  $<$  est toujours antisymétrique. En effet, si l'on considère  $\forall x, y \in E, ((x < y) \text{ et } (y < x))$  avec  $x \neq y$ .

**Exemple 3.3.** 1- Le couple  $(\mathbb{N}^*, |)$  est un ensemble partiellement ordonné puisque la relation de divisibilité  $(a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a | b)$  est un ordre partiel sur  $\mathbb{N}^*$ .

2-  $(P(E), \subseteq)$  est un ensemble partiellement ordonné pour tout ensemble  $E$ , où  $P(E)$  est l'ensemble des parties de  $E$ .

**Remarque 3.2.** • Si  $\leq$  est un ordre partiel sur un ensemble  $E$ , l'ordre strict associé à est défini comme suit :  
 $a < b \Leftrightarrow (a \leq b \text{ et } a \neq b)$ .

- S'il existe  $<$  un ordre strict sur un ensemble  $E$ , l'ordre partiel  $\leq$  associée à est définie comme suit :  
 $a \leq b \Leftrightarrow (a < b \text{ ou } a = b)$ .

**Définition 3.3.** (Ordre total) Soit  $E$  un ensemble. Toute relation d'ordre  $\leq$  pour laquelle deux éléments quelconque de  $E$  sont toujours comparables est appelée une relation d'ordre total sur le ensemble  $E$ .

**Définition 3.4.** (Comparabilité)

Soient  $(E, \leq)$  un ensemble partiellement ordonné et  $a, b$  des éléments de  $E$ .

- Si  $a \leq b$  ou  $b \leq a$ , on dit que  $a$  et  $b$  sont comparables selon  $\leq$ .
- Si  $a \not\leq b$  et  $b \not\leq a$ , on dit que  $a$  et  $b$  sont incomparables d'après  $\leq$ .

**Définition 3.5.** Soient  $(E_1, \leq_1)$  et  $(E_2, \leq_2)$  deux ensemble ordonné.  $f : E_1 \rightarrow E_2$  est dite isomorphisme d'ordre si :

- 1-  $f$  si bijective.
- 2-  $\forall x, y \in E_1, x \leq_1 y \Leftrightarrow f(x) \leq_2 f(y)$ .

## 3.2 Bon ordre et ensembles bien ordonné

**Définition 3.6.** (Ensemble ordonné) [1] Un ensemble ordonné est un ensemble muni d'une relation d'ordre.

**Définition 3.7.** (Ensemble bien ordonné)[13] Un ensemble ordonné  $(E, \leq)$  est dit bien ordonné si toute partie non vide de cet ensemble  $E$  possède un plus petit élément. On dit encore que  $\leq$  est un bon ordre.

**Exemple 3.4.** [1]  $(\mathbb{N}, \leq)$ ,  $\mathbb{N}$  ensemble bien ordonné et  $\leq$  est un bon ordre. Un ensemble bien ordonné est totalement ordonné.

En effet : Soit  $A \neq \emptyset$  un ensemble bien ordonné et  $x, y \in A$ .

$\{x, y\} \subseteq A$  possède un plus petit élément :

Si  $x$  le plus petit élément de  $\{x, y\} \subseteq A$ , donc  $x \leq y$ .

Si  $y$  :  $y \leq x$ .

**Conclusion 3.1.** les élément de l'ensemble bien ordonné sont toujours comparable.

**Définition 3.8.** (Segment initial)[1] Soit  $E$  un ensemble ordonné et  $S$  une partie de  $E$ , si pour tout  $x, y \in E$  ( $y \in S$  et  $x \leq y$ ), alors  $x$  dans  $S$ , on dit que  $S$  est un segment initial de  $E$ .

**Exemple 3.5.**  $(\mathbb{N}, \leq)$ ,  $x_0 \in \mathbb{N}$

$S_{x_0} = \{x \in \mathbb{N} / x \leq x_0\}$  est un segment initial de  $\mathbb{N}$ .

**Proposition 3.1.** [1] Soit  $(E, \leq)$  est un ensemble bien ordonné et  $f : E \rightarrow E$  est une application strictement croissante, alors  $f(x) \geq x, \forall x \in E$ .

**Démonstration 3.1.** - Si  $M = \emptyset$ , alors le proposition est résolue.

- Si  $M \neq \emptyset$ , alors  $M$  admet un plus petit élément  $x_0$ .

- Supposons qu'il existe  $x \in E : f(x) < x$ . Soit  $M = \{x \in E / f(x) < x\} \subseteq E$ .

Alors pour tout  $x \in E, x < x_0$  entraîne  $f(x) \geq x$ , d'autre part  $f(x_0) < x_0$ , donc  $f(x_0) \notin M$ , alors  $f(f(x_0)) \geq f(x_0)$ ???. Et puisque  $f$  est strictement croissante on a pour tout  $x \in E, x < x_0$ , alors  $f(x_0) > x$  mais  $f(x_0) < x_0$ , implique  $f(f(x_0)) < f(x_0)$ ...??. Contradiction, donc  $M = \emptyset$ .

### 3.3 Bel ordre

**Définition 3.9.** [13] Un ensemble ordonné  $E$  est dit bel ordonné si toute partie non vide  $X$  admet un nombre fini d'éléments minimaux.

**Conséquence 3.1.** 1- Tout ensemble ordonné fini est bel ordonné.

2- Tout ensemble bien ordonné est bel ordonné.

3-  $(D(n), |)$  est bel ordonné.

4-  $(\mathbb{Z}, \leq)$ ,  $(\mathbb{N}, |)$  n'est pas bel ordonné.

### 3.4 Bien-quasi-ordre

**Définition 3.10.** (Quasi-ordre) Soit  $E$  un quasi-ordre est  $\leq$  une relation à la fois réflexive et transitive.

- Réflexive ( $\forall x \in E, x \leq x$ ).

- Transitive ( $\forall x, y, z \in E, x \leq y$  et  $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ ).

Et écrivez  $\leq_E$  pour la relation binaire du quasi-ordre  $E$ .

**Définition 3.11.** (bien-quasi-ordre) Soit  $E$  un bien-quasi-ordre est un quasi-ordre  $\leq$ , tel que pour toute suite infinie  $x_0, x_1, \dots$  il existe  $i < j$  i.e.  $x_i \leq x_j$ .

**Exemple 3.6.** •  $(\mathbb{Z}, \leq)$  l'ensemble des entiers positifs et négatifs, n'est pas un bien-quasi-ordre.

- $(\mathbb{N}, |)$  l'ensemble des nombres naturels ordonnés par divisibilité, n'est pas un bien-quasi-ordre : les nombres premiers sont une antichaîne infinie.

### 3.5 Relation bien fondée

**Définition 3.12.** Un ordre  $\leq$  sur un ensemble  $E$  est bien fondé s'il n'y a pas de suite infinie strictement décroissante  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , c'est à dire telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} < x_n$ .

**Exemple 3.7.** • L'ensemble des nombres naturels est bien fondé lorsqu'il est présenté dans son ordre usuel.

- $(\mathbb{N}, |)$  est un ordre bien fondé.

- L'ordre usuel  $\leq$  sur  $\mathbb{N}$  est bien fondé.

- $(\mathbb{Z}, \leq)$  n'est pas bien fondé.

### 3.6 Éléments particuliers d'un ensemble ordonné

Soit  $(E, \leq_E)$  un ensemble ordonné, nous pouvons identifier quatre types d'éléments importants dans la relation d'ordre.

**Définition 3.13.** (Élément maximal et élément minimal) [10] Soit  $E$  un ensemble ordonné.

- Un élément  $k$  de  $E$  est dit maximal si pour tout  $x \in E : k \not< x$ .

- Un élément  $k$  de  $E$  est dit minimal si pour tout  $x \in E : k \not\prec x$ .

**Exemple 3.8.**  $E = \{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$  ordonné par divisibilité :

- 12, 20 et 25 sont des éléments maximaux.
- 2 et 5 sont des éléments minimaux.

**Définition 3.14.** (Plus grand élément et plus petit élément) [16] Soit  $E$  un ensemble ordonné.

- On appelle plus grand élément (maximum) de  $E$ , tout élément  $g \in E$  vérifiant  $\forall x \in E / x \leq g$ . On note  $g = \max(E)$ .
- On appelle plus petit élément (minimum) de  $E$ , tout élément  $p \in E$  vérifiant  $\forall x \in E / p \leq x$ . On note  $p = \min(E)$ .

**Exemple 3.9.**  $E = \{1, 2, 3, 6\}$  ensemble ordonné par divisibilité :

- 1 est le plus petit élément de  $E$ .
- 6 est le plus grand élément de  $E$ .

**Remarque 3.3.** • Si  $E$  a un plus grand élément (respectivement. un plus petit élément) c'est le seul.

- Si  $E$  est une chaîne, les notions d'élément maximal et de plus grand élément (resp. d'élément minimal et de plus petit élément) coïncident.

**Définition 3.15.** (Majorant et minorant)

Soit  $E$  un ensemble ordonné et  $A$  une partie non vide de  $E$ .

- Si  $k \in E$  est un majorant de  $A$  dans  $E$ , si  $\forall x \in A : x \leq k$ . L'ensemble des majorants de  $A$  sera noté  $Major(A)$ ,  $Major(A) = \{z \in E : \forall a \in A, a \leq z\}$ .
- Si  $k \in E$  est un minorant de  $A$  dans  $E$ , si  $\forall x \in A : x \leq k$ . L'ensemble des minorants de  $A$  sera noté  $Minor(A)$ ,  $Minor(A) = \{z \in E : \forall a \in A, z \leq a\}$ .

**Exemple 3.10.** Soit  $A = \{2, 3, 4, 9\}$  et  $(\mathbb{N}^*, |)$ .

- 36 est un majorant de  $A$ .  
 $Major(A) = \{36z, z \in \mathbb{N}^*\}$ .
- 1 est le seul minorant de  $A$ .  
 $Minor(A) = \{1\}$ .

## 3.7 Borne supérieures et borne inférieures

**Définition 3.16.** [18]

Soit  $E$  un ensemble ordonné et  $A$  une partie non vide de  $E$ .

- On dit que  $a \in E$  est une borne inférieures de  $A$  dans  $E$ , si  $a$  est le plus grande minorante de  $A$ .  
Si une partie  $A$  de  $E$  admet une borne supérieure  $a$ , Notée  $\inf(A)$ .
- On dit que  $b \in E$  est une borne supérieures de  $A$  dans  $E$ , si  $b$  est le plus petit majorante de  $A$ .  
Si une partie  $A$  de  $E$  admet une borne inférieure  $b$ , Notée  $\sup(A)$ .

**Exemple 3.11.** Soit  $A = \{2, 3, 4, 9\}$  et  $(\mathbb{N}^*, |)$ .

- 36 est le plus majorant de  $A$ , donc 36 est la borne supérieure de  $A$ .  $\sup(A) = 36$ .
- 1 est le plus grande minorant de  $A$ , donc 1 est la borne inférieure de  $A$ .  $\inf(A) = 1$ .

## Classes particulières d'ensembles ordonné

### 4.1 Notions sur les treillis

#### 4.1.1 Treillis d'ordre

Soit  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné.

**Définition 4.1.** (*Treillis*) [4]

$(E, \leq)$  est un treillis ssi pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $\sup(\{x, y\})$  et  $\inf(\{x, y\})$  existent.

**Définition 4.2.** (*sup.demi-treillis*) [2]

On dit que  $E$  est un sup.demi-treillis, si tout couple  $\{x, y\}$  d'éléments de  $E$  admet une borne supérieure dans  $E$ , on notera :  $\sup\{x, y\} = x \vee y$ .

**Définition 4.3.** (*inf.demi-treillis*) [2]

On dit que  $E$  est un inf.demi-treillis, si tout couple  $\{x, y\}$  d'éléments de  $E$  admet une borne inférieure dans  $E$ , on notera :  $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ .

**Exemple 4.1.** 1.  $(\mathbb{N}^*, |)$  est un treillis avec  $\forall x, y \in \mathbb{N}^* : x \vee y = \text{ppcm}(x, y)$  et  $x \wedge y = \text{pgcd}(x, y)$ .

2. Pour tout ensemble  $E$ ,  $(P(E), \subseteq)$  est un treillis avec  $A \vee B = A \cup B$  et  $A \wedge B = A \cap B$  pour tout  $A, B \in P(E)$ .

3. Toute chaîne est un treillis avec  $x \vee y = \max(x, y)$  et  $x \wedge y = \min(x, y)$ .

**Proposition 4.1.** [5] Dans un sup.demi-treillis  $(E, \leq)$  la loi de composition interne  $\vee$  si :

- Idempotente  $x \vee x = x$ .
- Commutative  $x \vee y = y \vee x$ .
- Associative  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ .

**Démonstration 4.1.** • Pour l'associativité : supposons que  $s = x \vee (y \vee z)$ , on a  $x \leq s$  et  $y \vee z \leq s$ , donc  $y \leq s$  et  $z \leq s$ ,  $x \vee y \leq s$ . Ensuite  $s$  est un majorant de  $\{x \vee y, z\}$ .

Soit  $M$  un autre majorant de  $\{x \vee y, z\}$ ,  $x \vee y \leq M$ , donc  $x \leq M$  et  $y \leq M$ , et aussi  $z \leq M$ , donc  $y \vee z \leq M$ . Ensuite  $M$  est un majorant de  $\{x, y \vee z\}$ , donc  $s \leq M$ ,  $s = (x \vee y) \vee z$ .

**Remarque 4.1.** [12]

- La démonstration précédente montre que  $s = x \vee (y \vee z)$  n'est autre que  $\sup\{x, y, z\}$ , et on écrit simplement  $x \vee y \vee z$  au lieu de  $x \vee (y \vee z)$ .
- Toute partie finie non vide d'un sup.demi-treillis admet une borne supérieure.

### 4.1.2 Treillis algébrique

**Définition 4.4.** Considéré un treillis  $(E, \leq)$  on peut définir les opération binaires  $\vee, \wedge$  sur l'ensemble non vide  $E$  par :  $x \vee y = \sup_E\{x, y\}, x \wedge y = \inf_E\{x, y\} : x, y \in E$ .

**Lemme 4.1.** Soient  $E$  un treillis et  $a, b \in E$ , alors ce qui suit est équivalent.

1.  $a \leq b$  ;
2.  $a \vee b = b$  ;
3.  $a \wedge b = a$ .

**Proposition 4.2.** Soit  $E$  un treillis, alors les loi de composition interne  $\vee, \wedge$  vérifiées, pour tout  $x, y, z \in E$

1. Associative  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ .
2. Commutative  $x \vee y = y \vee x, x \wedge y = y \wedge x$ .
3. Idempotente  $x \vee x = x, x \wedge x = x$ .
4. Absorption  $x \vee (x \wedge y) = x, x \wedge (x \vee y) = x$ .

**Proposition 4.3.** [12] Si  $E$  est un ensemble muni d'une loi de composition interne  $\vee$ , qui est idempotente, commutative et associative, alors il existe une unique relation d'ordre sur  $E$ , telle que  $E$  soit un sup.demi-treillis et  $\forall x, y \in E : \sup_E\{x, y\} = x \vee y$ .

**Démonstration 4.2.** On a  $x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y$ .

- $\mathcal{R}$  est réflexive :  $x \mathcal{R} x$ , car  $x \vee x = x$  idempotente.
- $\mathcal{R}$  est antisymétrique :  $x \mathcal{R} y$  et  $y \mathcal{R} x$ , donc  $x \vee y = y$  et  $y \vee x = x$ . Comme  $\vee$  est commutative  $x = y$ .
- $\mathcal{R}$  est transitive : soit  $x, y, z \in E / x \mathcal{R} y$  et  $y \mathcal{R} z$ , donc  $x \vee y = y$  et  $y \vee z = z$  alors :  $x \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = y \vee z = z \Leftrightarrow x \mathcal{R} z$ .

★ Montrons que  $\sup_E\{x, y\} = x \vee y$ .

- 1-  $x \vee y$  est un majorant de  $x$ .  
 $x \vee (x \vee y) = (x \vee x) \vee y = x \vee y \Leftrightarrow x \leq x \vee y$ .
- 2-  $x \vee y$  est un majorant de  $y$ .  
 $y \vee (x \vee y) = (y \vee y) \vee x = x \vee y \Leftrightarrow y \leq x \vee y$ .
- 3-  $x \vee y$  est le plus petit des majorant de  $\{x, y\}$ .  
Soit  $M$  un autre majorant de  $x$  et  $y$ .  
 $(x \vee y) \vee M = x \vee (y \vee M) = x \vee M = M$ .

**Remarque 4.2.** [12]

Si  $(E, \leq)$  est un treillis, il est muni de deux lois de composition internes  $\vee$  et  $\wedge$ , sont idempotentes, commutatives, associatives et vérifient les lois d'absorption.

$$x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y).$$

**Proposition 4.4.** [8]

Dans un treillis  $(E, \leq)$  :

- Si  $a \leq b$ , alors pour tout  $x \in E$  :  $a \wedge x \leq b \wedge x$  et  $a \vee x \leq b \vee x$ .
- Si  $a \leq b$  et  $c \leq d$ , alors :  $a \wedge c \leq b \wedge d$  et  $a \vee c \leq b \vee d$ .

**Démonstration 4.3.**

- Si  $a \leq b$ , donc  $a \wedge b = a$  et  $a \vee b = b$ , alors :

$$\begin{aligned} (a \wedge x) \wedge (b \wedge x) &= a \wedge (x \wedge x) \wedge b \\ &= a \wedge x \wedge b \\ &= a \wedge b \wedge x \\ &= a \wedge x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a \vee x) \vee (b \vee x) &= a \vee (x \vee x) \vee b \\ &= b \vee x \vee a \\ &= b \vee a \vee x \\ &= b \vee x. \end{aligned}$$

- Si  $a \leq b$  et  $c \leq d$  alors :

$$\star a \wedge c \leq b \wedge d$$

$$\begin{aligned} (a \wedge c) \wedge (b \wedge d) &= c \wedge (a \wedge b) \wedge d \\ &= c \wedge a \wedge d \\ &= a \wedge (c \wedge d) \\ &= a \wedge c \Leftrightarrow a \wedge c \leq b \wedge d. \end{aligned}$$

$$\star a \vee c \leq b \vee d$$

$$\begin{aligned} (a \wedge x) \wedge (b \wedge x) &= a \wedge (x \wedge x) \wedge b \\ &= a \wedge x \wedge b \\ &= a \wedge b \wedge x \\ &= a \wedge x. \end{aligned}$$

**4.1.3 Sous-treillis et morphismes****Définition 4.5.** (Sous-sup.demi-treillis) [4]

Une partie non vide d'un sup.demi-treillis  $E$ .  $A$  est dite sous-sup.demi-treillis si on a l'une des deux conditions équivalentes suivantes :

- $\sup_A\{x, y\} = x \vee y, \forall x, y \in A$ .
- $x \vee y \in A, \forall x, y \in A$ .

**Remarque 4.3.** [12]

1. Une des deux conditions doit être remplie  $\forall x, y \in A$ .
2. Bien que  $A$  ne soit pas un sous-sup.demi-treillis de  $E$ , c'est toujours un sup.demi-treillis supérieur pour la structure induite.

**Exemple 4.2.** Dans  $(\mathbb{N}^*, |)$ ,  $A = \{1, 3, 4, 24\}$ .

$A$  n'est pas un sous-sup.demi-treillis de  $\mathbb{N}^*$  car  $\sup_A\{3, 4\} = 12 \notin A$ .

$A$  est un sup.demi-treillis car  $\sup_A\{x, y\}$  existe toujours.

**Définition 4.6.** (*sous-inf.demi-treillis*) [4]

Soit  $A$  une partie non vide d'un inf.demi-treillis  $E$ , est dite sous-inf.demi-treillis si on a l'une des deux conditions équivalentes suivantes :

- ★  $\inf_A\{x, y\} = x \wedge y \quad \forall x, y \in A.$
- ★  $x \wedge y \in A, \quad \forall x, y \in A.$

**Définition 4.7.** (*Sous-treillis*) [3]

Si  $A$  est à la fois un sous-sup.demi-treillis et un sous-inf.demi-treillis, on dit que  $(E, \leq)$  est un sous-treillis de  $E$ , pour tout  $x, y$  dans  $A$  :

$$\sup_A\{x, y\} = x \vee y.$$

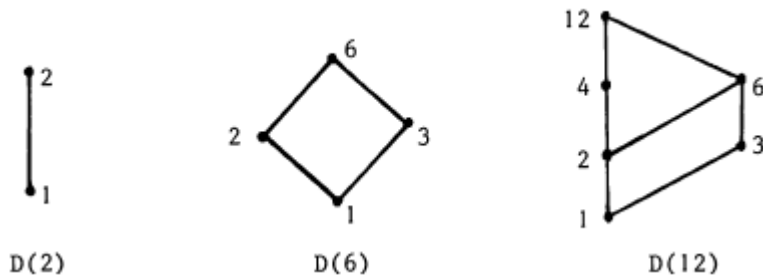
$$\inf_A\{x, y\} = x \wedge y.$$

**Exemple 4.3.** [3]

1. On considère le treillis  $(\mathbb{N}^*, |)$  et soit  $n$  un entier fixé, on désigne par  $D(n)$  l'ensemble des diviseurs de  $n$ , alors  $D(n)$  est un sous-treillis de  $\mathbb{N}^*$ . En effet : si  $x | n$  et  $y | n$ , alors :

$$\text{pgcd}(x, y) | n \text{ c'est à dire } x \wedge y = \text{pgcd}(x, y) \in D(n)$$

$$\text{ppcm}(x, y) | n \text{ c'est à dire } x \vee y = \text{ppcm}(x, y) \in D(n)$$

FIGURE 4.1 –  $D(n)$ 

2. Soit  $E$  un espace topologique, on considère le treillis  $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ , alors :

- L'ensemble  $O$  des ouverts de  $E$  est un sous-treillis de  $\mathcal{P}(E)$ .
- L'ensemble  $F$  des fermés de  $E$  est un sous-treillis de  $\mathcal{P}(E)$ .

**Définition 4.8.** [4] Soit  $(E_1, \leq)$  et  $(E_2, \leq)$  deux sup.demi-treillis. Toute application  $f : E_1 \rightarrow E_2$  est qui vérifie :  $\forall x, y \in E : f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$  est dit  $\vee$ -morphisme.

Elle sera dite  $\wedge$ -morphisme si elle vérifie  $\forall x, y \in E : f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ .

**Définition 4.9.** ( $\vee$ -isomorphisme) [12]

Un morphisme bijectif de sup.demi-treillis est défini comme un  $\vee$ -isomorphisme (resp. un  $\wedge$ -isomorphisme) (resp. comme un morphisme bijectif de inf.demi-treillis).

**Définition 4.10.** (*Morphisme de treillis*) [4]

Un morphisme de treillis est toute application qui est à la fois un  $\vee$ -morphisme et  $\wedge$ -morphisme.

**Définition 4.11.** (*Isomorphisme de treillis*) [17]

Un isomorphisme de treillis est un morphisme de treillis bijective.

**Proposition 4.5.** [12]

Soient  $(E_1, \leq_1)$  et  $(E_2, \leq_2)$  deux ensemble ordonné.  $P$  et  $Q$  deux ensemble ordonné finis.

1.  $f$  est un isomorphisme d'ordre.
2.  $f$  est un  $\vee$ -isomorphisme.
3.  $f$  est un  $\wedge$ -isomorphisme.
4. Si  $P$  et  $Q$  sont treillis.  $f$  est un isomorphisme de treillis.

**Démonstration 4.4.** • On a montrer  $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \Leftrightarrow \vee$ -morphisme.

1  $\Rightarrow$  2

$$\text{ona} : \begin{cases} x \leq x \vee y \\ y \leq x \vee y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq f(x \vee y) \\ f(y) \leq f(x \vee y). \end{cases}$$

Donc  $f(x) \vee f(y) \leq f(x \vee y)$ .

Reste à montrer que  $f(x \vee y)$  le plus petit des majorants.

Soit  $M \in E_2$  un autre majorant de  $f(x)$  et  $f(y)$ .

$$\begin{cases} f(x) \leq M = f(t) \Leftrightarrow x \leq t \\ f(y) \leq M = f(t) \Leftrightarrow y \leq t \end{cases} \Rightarrow x \vee y \leq t \Rightarrow f(x \vee y) \leq f(t) = M.$$

2  $\Leftarrow$  1

$$\begin{aligned} f(x \vee y) &= f(x) \vee f(y) \\ x \leq y &\Leftrightarrow f(x) \leq f(y) \\ x \vee y = y &\Rightarrow f(x \vee y) = f(y) \\ f(x) \vee f(y) = f(y) &\Rightarrow f(x) \leq f(y) \\ f(x) \leq f(y) &\Rightarrow x \leq y \\ f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) = f(y) &\Rightarrow x \vee y = y, \text{ car } f \text{ est injective } \Rightarrow x \leq y. \end{aligned}$$

• 1  $\Leftrightarrow$  3 s'obtient dualement.

• 1  $\Leftrightarrow$  2 et 1  $\Leftrightarrow$  3 donnent 1  $\Leftrightarrow$  4.

**Définition 4.12.** (Homomorphisme de treillis) [4]

Soient  $(P, \leq)$  et  $(Q, \leq)$  deux treillis  $f : P \rightarrow Q$  est un Homomorphisme de treillis si :

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y).$$

Si de plus  $f$  est bijective, alors  $f$  est dite isomorphisme de treillis.

**Remarque 4.4.** [12]

En pratique, il ne reste plus qu'à prouver que  $f$  est un isomorphisme de treillis :  $f$  est bijective et quels que soient  $x$  et  $y$ ,  $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$  ou  $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ .

## 4.2 Propriétés algébriques de quelques classes de treillis

### 4.2.1 Treillis distributifs

**Définition 4.13.** Soit  $(E, \leq, \vee, \wedge)$  est dit distributive, si  $\forall x, y, z \in E$ .

$$D_1 : x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

$$D_2 : x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

**Remarque 4.5.** [5]

Les deux conditions  $D_1$  et  $D_2$  sont équivalentes. En effet, supposons qu'on a  $D_1$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} D_1 : (x \wedge y) \vee (x \wedge z) &= [(x \wedge y) \vee x] \wedge [(x \wedge y) \vee z] \\ &= x \wedge [z \vee (x \wedge y)] \\ &= x \wedge (z \vee x) \wedge (z \vee y) \\ &= x \wedge (y \vee z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 : (x \vee y) \wedge (x \vee z) &= [(x \vee y) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge z] \\ &= x \vee [z \wedge (x \vee y)] && \text{(loi d'absorption)} \\ &= x \vee (z \wedge x) \vee (z \wedge y) \\ &= x \vee (y \wedge z). && \text{(loi d'absorption)} \end{aligned}$$

**Remarque 4.6.** [15] Les deux conditions suivantes sont toujours vraies dans n'importe quelle treillis :

$$D'_1 : \forall x, y, z : x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

$$D'_2 : \forall x, y, z : x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

En effet :

$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y)$  et  $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge z)$ , donc  $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ .

$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y)$  et  $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee z)$ , donc  $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ .

Par conséquent, les conditions  $D_1$  et  $D_2$  ont la même signification :

$$D''_1 : \forall x, y, z : x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

$$D''_2 : \forall x, y, z : x \vee (y \wedge z) \geq (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Enfin, les quatre conditions  $D_1 D_2 D''_1 D''_2$  sont équivalentes en combinant les deux remarques précédentes.

**Définition 4.14.** (Treillis distributif) [12]

Un treillis  $E$  est dit distributif si chacune des lois  $\wedge$  et  $\vee$  est distributive par rapport à l'autre, cela équivaut à dire que  $E$  satisfait à l'une des quatre condition  $D_1, D_2, D''_1, D''_2$ .

**Théorème 4.1.** (Caractérisation des treillis distributifs) [11]

Il est à la fois requis et suffisant pour qu'un treillis  $E$  soit distributif s'il satisfait les conditions suivantes, quels que soient  $x, y, z \in E$  :

$$\begin{cases} x \wedge z = y \wedge z; \\ x \vee z = y \vee z. \end{cases} \implies x = y.$$

**Démonstration 4.5.** Soit  $E$  un treillis distributif et supposons qu'on a  $\forall x, y, z \in E$ .

$$\begin{cases} x \wedge z = y \wedge z; \\ x \vee z = y \vee z. \end{cases} \implies x = y.$$

$$\begin{aligned} x &= x \wedge (z \vee x). \\ &= x \wedge (y \vee z). \\ &= x \wedge y \vee x \wedge z. \\ &= x \wedge y \vee y \wedge z. \quad \text{Donc } x = y. \\ &= y \wedge (x \vee z). \\ &= y \wedge (y \vee z). \\ &= y. \end{aligned}$$

**Exemple 4.4.** *De treillis non distributifs :*

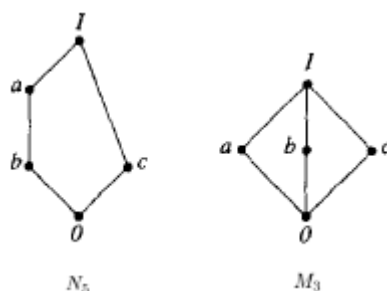


FIGURE 4.2 –  $M_3 - N_5$

$N_5$  n'est pas distributif car :  $x \wedge (y \vee z) = x \wedge 1 = x$ , mais  $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = y \vee 0 = y$ .  
 $M_3$  n'est pas distributif car :  $x \wedge (y \vee z) = x \wedge 1 = x$ , mais  $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = 0 \vee 0 = 0$ .

**Exemple 4.5.** • Le treillis  $(p(E), \subseteq)$  est distributif parce que les deux lois  $\cap$  et  $\cup$  sont distribuées l'une par rapport à l'autre.

- Toute chaîne est un treillis distributif.
- Tout sous-treillis d'un treillis distributif est aussi distributif.
- Le treillis  $E = \{1, 2, 3, 5, 30\}$ , ce treillis n'est pas distributif, car :
- $2 \wedge (3 \vee 5) = 2 \wedge 30 = 2$ .  
 $(2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 5) = 1 \vee 1 = 1$ , donc n'est pas distributive.
- $2 \vee (3 \wedge 5) = 2 \vee 1 = 2$ .  
 $(2 \vee 3) \wedge (2 \vee 5) = 30 \wedge 30 = 30$ .

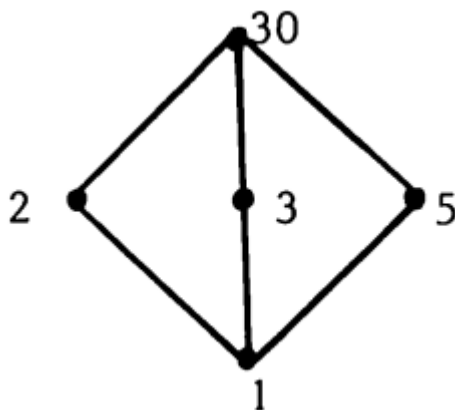


FIGURE 4.3 – treillis non modulaires

## 4.2.2 Treillis modulaires

**Définition 4.15.** [11]

Un treillis  $E$  est dit modulaire si  $\forall x, y, z \in E : x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$ .

**Exemple 4.6.** 1. Tout treillis distributif est modulaire. En effet de  $E$  un treillis distributif  $\forall x, y, z \in E : x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ , donc : si  $\forall x, y, z \in E : x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$ .

2. Le treillis  $E = \{1, 2, 3, 5, 30\}$  qui n'est pas distributif est modulaire.
3. Tout sous-treillis d'un treillis modulaire est aussi modulaire.
4. Considérons les treillis non modulaires  $E = \{1, 2, 4, 5, 20\}$  qui est ordonné par divisibilité.  
 $2 \leq 4$ , mais  $2 \vee (5 \wedge 4) = 2 \vee 1 = 2$  et  $(2 \vee 5) \wedge 4 = 20 \wedge 4 = 4$ .
5. Tout treillis fini distributif.

**Théorème 4.2.** (Caractérisation des treillis modulaires) [11]

Soit  $E$  un treillis modulaires il faut et il suffit pour tous  $x, y$  et  $z$  dans  $E$ .

$$\forall x, y, z \in E : \begin{cases} x \wedge z = y \wedge z \\ x \vee z = y \vee z \end{cases} \Rightarrow x \text{ et } y \text{ sont gaux ou incomparables.}$$

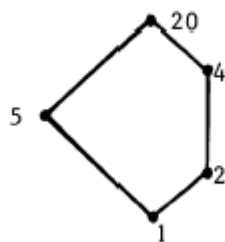


FIGURE 4.4 – treillis modulaires

**Démonstration 4.6.** • Si  $E$  est un treillis modulaire, supposons  $x \wedge z = y \wedge z$  et  $x \vee z = y \vee z$  avec  $x, y$  comparables et distincts, par exemple  $x < y$ . On a :

$$\begin{aligned} x \vee (z \wedge y) &= x \vee (x \wedge z) = x \\ (x \vee z) \wedge y &= (y \vee z) \wedge y = y. \end{aligned}$$

Ce qui contredit la modularité.

- Réciproquement, supposons que la condition énoncée dans le théorème soit vérifiée et soient  $x, y, z$  avec  $x \wedge z$ . Posons  $a = x \vee (y \wedge z)$  et  $b = (x \vee y) \wedge z$ . On sait (condition  $D'_1$ ) que :  $x \vee (y \wedge z) < (x \vee y) \wedge (x \vee z)$  et puisque  $x < z$  on a  $x \vee z = z$ , donc  $a < b$ .

$$\begin{aligned} a \wedge y &= (x \vee (y \wedge z)) \wedge y > (x \vee (y \wedge z)) \wedge (y \wedge z) = y \wedge z. \\ b \wedge y &= ((x \vee y) \wedge z) \wedge y < y \wedge z. \end{aligned}$$

Donc  $a \wedge y > b \wedge y$ , mais  $a < b$  d'où  $a \wedge y = b \wedge y$ .

$$\begin{aligned} a \vee y &= (x \vee (y \wedge z)) \vee y > x \vee y. \\ b \vee y &= ((x \vee y) \wedge z) \vee y < ((x \vee y) \wedge z) \vee (x \vee y) = x \vee y. \end{aligned}$$

Donc  $a \vee y > b \vee y$ , mais  $a < b$  d'où  $a \vee y = b \vee y$ .

Il en résulte que  $a$  et  $b$  sont égaux ou incomparables, or  $a < b$ , donc  $a = b$ , ce qui montre que le treillis est modulaire.

# Conclusion

Dans ce mémoire, nous rappelons l'essentiel des résultats connus sur la relation binaire et la relation d'ordre et le treillis.

# Bibliographie

- [1] Abdelaziz Amroune. *Cours Théorie des relations*. Janvier 2021.
- [2] Abdelaziz Belhadj. *Génération de treillis et propriétés algébriques*. PhD thesis, Tizi Ouzou, 2011.
- [3] Nathalie Caspard, Bruno Leclerc, Bernard Monjardet, et al. *Ensembles ordonnés finis : concepts, résultats et usages*, volume 60. Springer, 2007.
- [4] JUDITE CHAUVIN. *Le treillis cambrian*. 2010.
- [5] Brian A Davey and Hilary A Priestley. *Introduction to lattices and order*. Cambridge university press, 2002.
- [6] Robert P Dilworth. A decomposition theorem for partially ordered sets. In *Classic Papers in Combinatorics*, pages 139–144. Springer, 2009.
- [7] Paul Erdős and George Szekeres. A combinatorial problem in geometry. *Compositio mathematica*, 2 :463–470, 1935.
- [8] Bernard Kolman, Robert C Busby, and Sharon Ross. *Discrete mathematical structures*. Prentice-Hall, Inc., 1995.
- [9] Jean-Louis Krivine. Classical logic, storage operators and second-order lambda-calculus. *Annals of Pure and Applied Logic*, 68(1) :53–78, 1994.
- [10] Seymour Lipschutz and Marc Lipson. *Discrete mathematics, schaum’s outlines*, 1997.
- [11] Michel Marchand. *Outils mathématiques pour l’informaticien : Mathématiques discrètes*. De Boeck Supérieur, 2005.
- [12] Daniel Ponasse and Jean Claude Carrega. *Algèbre et topologie booléennes*. Masson, 1979.
- [13] Maurice Pouzet. *Théorie de l’ordre : une introduction*. 2021.
- [14] Jacques Riguet. Relations binaires, fermetures, correspondances de galois. *Bulletin de la société mathématique de France*, 76 :114–155, 1948.
- [15] Steven Roman. *Lattices and ordered sets*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [16] Kenneth H Rosen and Kamala Krithivasan. *Discrete mathematics and its applications : with combinatorics and graph theory*. Tata McGraw-Hill Education, 2012.
- [17] Edward Szpilrajn. Sur l’extension de l’ordre partiel. *Fundamenta mathematicae*, 16(1) :386–389, 1930.
- [18] Aviva Szpirglas, François Arnault, Gilles Bailly-Maitre, Yves Benjamin, Philippe Du Bois, Lionel Ducos, Aurélien Galateau, Henri Lombardi, Cécile Poirier, Claude Quitté, et al. *Mathématiques algèbre l3 : Cours complet avec 400 tests et exercices corrigés*, 2009.

## ملخص

نحاول في هذه المذكرة استيعاب المفاهيم المتعلقة بنظرية العلاقات ونظرية الترتيب والمشابك لاستكمال التأخير الذي حدث أثناء دراستنا. و لهذا السبب حاولنا إعطاء العديد من الأمثلة ، وتقديم عروض توضيحية أولية ومفصلة للنظريات والاقتراحات المقدمة في هذه الدروس.

## Abstract

In this memory, we try to assimilate the concepts related to the theory of relations and the theory of orders and lattices to accomplish the delay known during our training. This is why we have tried to give many examples, give elementary and detailed demonstrations of the theorems and propositions made in these courses.

## Résumé

Dans cette mémoire, nous essayons d'assimiler des concepts liés à la théorie des relations et la théorie de l'ordres et treillis pour accomplir le retard connu l'ors de notre formation. C'est pourquoi, nous avons essayé de donner beaucoup d'exemples, donner des démonstrations élémentaires et détaillés des théorèmes et des propositions faites dans ces cours.