



Département de Génie Mécanique

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

En vue de l'obtention du diplôme de :

MASTER

En Génie Mécanique

Option : maintenance industriel

Thème

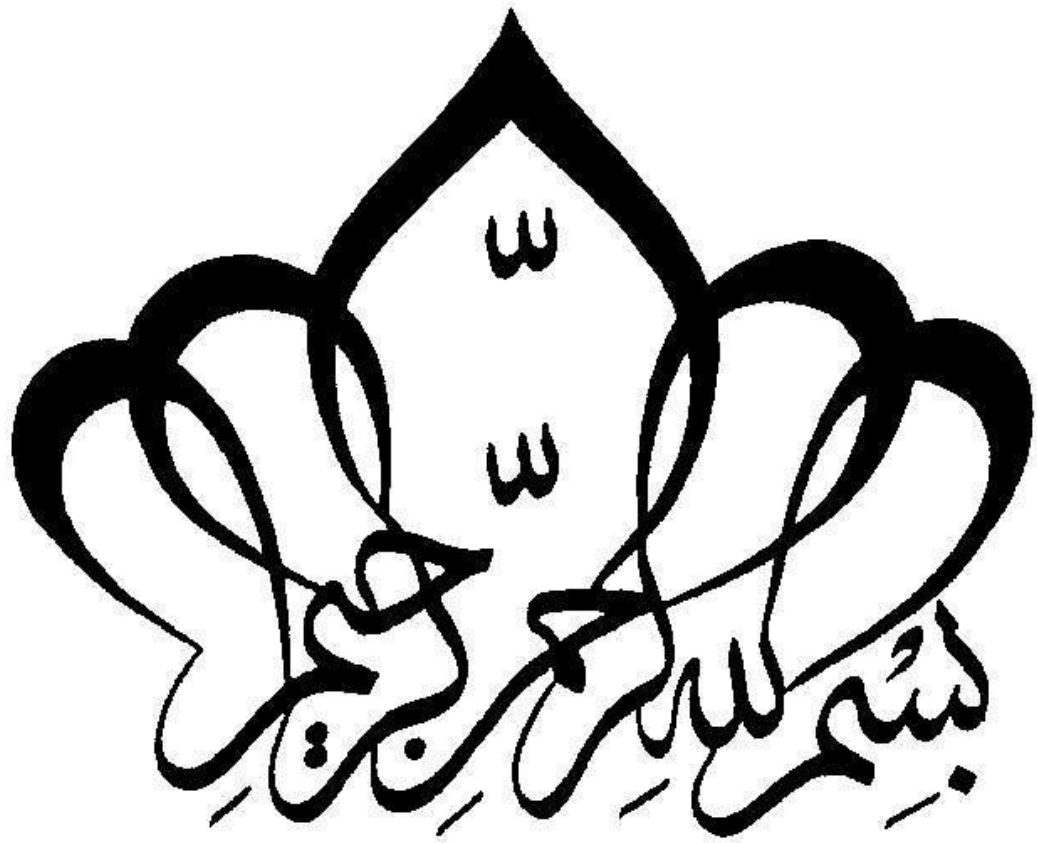
Contribution à la dynamique des machines tournantes: application aux arbres moteurs

Proposé et dirigé par
ROUABHI Youcef

Présenté PAR
TOUAHRI Abdelghani

Année Universitaire : 2015 / 1016

N° d'ordre : GM/...../2016



DEDICACES

Je dédie ce modeste travail

*A ceux qui m'ont éclairé le chemin de la sagesse et m'ont offert
tout ce qui est cher et comble le cœur dans la vie avec une
immense générosité et une tendre affection. A toi ma très chère
mère et à toi mon défunt père.*

A mes frères, à mes sœurs et à leurs enfants.

A toutes mes amies.





REMERCIEMENTS

Mes vifs remerciements et ma profonde gratitude vont à monsieur Youcef ROUABHI, enseignant à l'université Mohamed BOUDIAF de M'sila, pour m'avoir proposé le sujet et encadré tout en m'accordant sa confiance et apporté ses précieux conseils, à l'importance qu'il accorde à mon travail et d'examiner ce travail et je le remercie pour son soutien et sa gentillesse.

Ma reconnaissance à tous les enseignants du département de génie mécanique qui ont contribué à ma formation en m'inculquant leur savoir.

Enfin, je tiens à remercier tous mes collègues, amies et proches à l'université Mohamed BOUDIAF de M'sila, qui m'ont soutenu et aidé de manière directe ou indirecte.



SOMMAIRE

LISTE DES FIGURES

NOMENCLATURE

INTRODUCTION GENERAL

I.1	bref historique	2
I.2	resume	4
CHAPITRE1 FONDEMENTS DE LA MECANIQUE VIBRATOIRE		
1.1	L'OSCILLATION ELEMENTAIRE	5
1.1.1	Généralité sur des oscillations libres.....	
1.1.2	oscillations libres d'un système à un degré de liberté sans frottement.....	6
1.2	ANALYSE LINEAIRE DES SYSTEMES DISCRETS	10
1.2.1	Modèle à plusieurs degrés de liberté.....	13
1.2.2	Fréquences et modes propres de vibration.....	15
1.3	ANALYSE DES SYSTEMES CONTINUS	16
1.3.1	Vibrations de flexion des arbres (poutres).....	16
1.3.2	Séparation des variables.....	17
1.3.3	Conditions aux limites et modes de vibration.....	19
CHAPITRE2 CONCEPTS DE LA DYNAMIQUE DES ARBRES		
2.1	LE PHENOMENE DU TOURNOIEMENT	22
2.1.1	Origine du tournoiement	22
2.1.2	La vitesse critique et l'auto-centrage.....	23
2.2	LE MODELE DE LAVAL / JEFFCOTT	24
2.2.1	Généralité du modèle.....	24
2.2.2	Analyse sans amortissements.....	25
2.3	Modèle avec paliers flexibles : cas iso tropique	28
2.4	Modèle avec paliers flexibles : cas anis tropique	30
CHAPITRE3 ANALYSE D'UN MODELE DE ROTOR EN FLEXION		
3.1	CARACTERISTIQUES ENERGETIQUES DES ELEMENTS DU ROTOR	32
3.1.1	Disque.....	32
3.1.2	Arbre.....	34
3.1.3	Palier.....	37
3.1.4	Balourd	38
3.2	MISE EN EQUATION DU MODELE	39
3.2.1	Modèle étudié.....	40

3.3 ETUDE DU MODELE SYMETRIQUE	42
3.3.1 Fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation.....	42
3.3.2 Diagramme de Campbell.....	45
3.3.3 Réponse aux forces d'excitation.....	47
3.4 ETUDE DU MODELE ASYMETRIQUE	53
3.4.1 Détermination des fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation....	53
3.4.2 Diagramme de Campbell.....	55
3.4.3 Réponse aux forces d'excitation.....	57
3.5 ETUDE DU MODELE AMORTI	63
3.5.1 Détermination des fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation....	63
3.5.2 Diagramme de Campbell.....	64
3.5.3 Réponse aux forces d'excitation.....	69

CHAPITRE 4 MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS

4.1 EXPRESSIONS DES ENERGIES DES ELEMENTS DU ROTOR	80
4.1.1 Energie de déformation d'un élément de rotor.....	80
4.1.2 Energie cinétique d'un élément de rotor.....	81
4.2 FORMULATION MATRICIELLE	82
4.2.1 Formulation matricielle des équations du disque.....	82
4.2.2 Formulation matricielle des équations de l'arbre.....	83
4.2.3 Formulation matricielle des équations du palier.....	88
4.2.4 Formulation matricielle des équations du balourd.....	89
4.3 EXEMPLE DE MONTAGE DE MATRICES GLOBALES	89
a) Matrice globale classique de masse.....	90
b) Matrice globale représentant l'effet secondaire d'inertie de rotation.....	91
c) Matrice globale représentant l'effet gyroscopique.....	91
d) Matrice de rigidité totale de l'énergie de déformation.....	92
e) Matrice du palier.....	92
f) Matrice du balourd.....	92
g) Matrice globale du disque (masse et gyroscopique).....	92

CONCLUSION GENERALE	93
----------------------------------	----

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Liste de figure

Fig (1) Moteur d'avion de type Turboréacteur.

Fig(2) Modèle de Rankine.

Chapitre 1

Fig (1.1) chaine de bicyclette.

Fig (1.2) fréquences de chaine.

Fig (1.3) systèmes élastique pour petits déplacements.

Fig (1.4) paramètres d'oscillation.

Fig (1.5) trajectoire de déplacement.

Fig. (1.6) Modèle élémentaire d'oscillateur

Fig (1.7) Forces appliquées au modèle élémentaire.

Fig (1.8) représentation de la solution homogène

Fig.(1.9) Courbe de résonance.

Fig(1.10) Modèle à deux degrés de liberté

Fig(1.11) Forces appliquées au modèle à deux degrés de liberté.

Fig(1.12) Premiers modes de vibration

Chapiter 2

Fig(2.1) Arbre tournant avec une masse collée en son milieu.

Fig (2.2) Représentation de la flèche en fonction de la vitesse de rotation.

Fig(2.3) Modèle de Laval / Jeffcott.

Fig (2.4) Mouvement du centre de gravité du rotor.

Fig(2.5) Position du centre de gravité selon la valeur de la vitesse de rotation.

Fig (2.6) Modèle de Laval / Jeffcott sur paliers flexibles.

Fig(2.7) Schéma équivalent du modèle de Laval / Jeffcott sur paliers flexibles.

Fig(2.8) Représentation du régime transitoire.

Fig(2.9) Amplitude du régime permanent (courbe de résonance).

Fig (2.10) Amplitudes du régime permanent (courbes de résonance).

Chapitre 3

Fig (3.1)repère de référence du disque sue l'arbre flexible.

Fig (3.2) angles d'Euler.

Fig(3.3) section droit de l'arbre.

Fig(3.4)amortissement et raideur d'un palier.

Fig(3.5) Mass de balourd.

Fig. 3.6 Degrés de liberté.

Fig.(3.7) Rotor considéré.

Fig (3.9) orbite du rotor.

Fig (3.10) diagramme de Campbell.

Fig (3.11) Réponse au balourd .

Fig (3.12)Modèle Réponse à la force asynchrone .

Fig (3.13) Diagramme de campbell.
Fig (3.14) variation du sens de la précession.
Fig(3.15) Réponse au balourd.
Fig(3.16) Réponse à une force asynchrone .
Fig. (3.17a) Diagramme de Campbell pour un amortissement très faible.
Fig. (3.17b) Diagramme de Campbell pour un amortissement faible.
Fig. (3.17c) Diagramme de Campbell pour un amortissement critique.
Fig. (3.17d) Diagramme de Campbell pour un amortissement fort.
Fig. (3.18a)Réponse au balourd pour un amortissement très faible.
Fig.(3.18b)Réponse au balourd pour un amortissement faible.
Fig. (3.18c) Réponse au balourd pour un amortissement intermédiaire.
Fig. (3.18d)Réponse au balourd pour un amortissement très fort.
Fig (3.19.a) Réponse à une force asynchrone pour un amortissement très faible .
Fig (3.19.b) Réponse à une force asynchrone pour un amortissement faible.
Fig (3.19.c) Réponse à une force asynchrone pour un amortissement intermédiaire .
Fig (3.19.d) Réponse à une force asynchrone pour un amortissement très fort .

Chapitre 4

Fig (4.1) Degrés de liberté du disque.
Fig(4.2) Degrés de liberté d'un élément arbre.
Fig(4.3) Modèle de rotor avec éléments et nœuds.

Liste des tableaux

Chapitre I

Tableau (1.1) Conditions aux limites courantes.
Tableau (1.2) fonction de forme.

Chapitre III

Tableau (3.1) Les dimensions du disque.
Tableau (3.2) Les dimensions du arbre.

Chapitre VI

Tableau (4.1) les nœuds des éléments rotor.

NOMENCLATURE

variabel	Désignqtion
T	Energie cinétique
U	Energie de déformation.
A, B, C, D	coefficients des cubiques
Q_i	Forces généralisées
t	Temps
k	Raideur
K_{xz} et k_{zx}	Raideur croisée
ω_r	Pulsation de rotation
F(t)	Force appliquée temporal
$\dot{x}=dx/dt$	symbole de dérivation d'une variable X par rapport au temps
$\ddot{x} =d^2x/dt^2$	symbole de dérivée seconde d'une variable X par rapport au temps
x	Ddéplacement
y	Position axial sur le rotor
ψ	Angle de précession autour de l'axe Oz
θ	Angle de nutation autour de l'axe Ox
φ	Angle de rotation autour de l'axe Oy
Ω	Vitesse de rotation
ω	Pulsation propre
λ	Valeur proper
I , I_p	inertie polaire
u	Déplacement de l'arbre selon l'axe Ox
v	Déplacement de l'arbre selon l'axe Oy
w	Déplacement de l'arbre selon l'axe Oz
u_p	Déplacement du palier selon l'axe Ox
w_p	Déplacement du palier selon l'axe Oz
R	Constant thermodynamique du gaz

I_0	Tenseur d'inertie dans le repère RO_{xyz}
S	Section de l'arbre
ρ	Masse volumique
F_u	Force généralisée autour de l'axe Ox
F_w	Force généralisée autour de l'axe Oz
η	Vecteur des déplacements nodaux
q_i	Déplacements nodaux selon l'axe Oz
δ_i	Déplacements nodaux selon l'axe Ox
l	Longueur de l'arbre
E	Module de Young
K_{ij}	Éléments de la matrice de rigidité
M_{ij}	Éléments de la matrice des masses
G_{ij}	Éléments de la matrice gyroscopique
C_{ij}	Coefficients de la matrice d'amortissement
$[C]_p$	Matrice d'amortissement due aux paliers
$[K]_p$	Matrice de rigidité due aux paliers
$K_{s_{ij}}$	Éléments de la matrice de rigidité due aux supports
$C_{s_{ij}}$	Éléments de la matrice de rigidité due aux supports
λ_i	Valeurs propres
$\{X\}$	Vecteur de déplacements nodaux
M_p	Masse du palier

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Les arbres ou les rotors sont définis comme étant tout élément tournant autour d'un axe fixe. Ils constituent les pièces prêtes des machines tournantes dont le domaine d'applications industrielles est très vaste (machines-outils, turbines, véhicules, turbocompresseurs, nucléaire, l'industrie pétrolière, etc.). Par un leurs fonctions on peut citer la transmission de puissance ou la transformation de l'énergie mécanique en énergie électrique.

L'arbre d'un rotor peut être considéré en tant qu'un corps élastique continu avec des propriétés d'inertie et de masse réparties tout le long de sa longueur surtout dans le domaine de grandes vitesses. Pour cela des types variés de vibrations apparaissent dans ce système mécanique et souvent limitent les performances et mettent en danger la sécurité d'opération. L'analyse dynamique des corps continus en rotation s'impose donc car la connaissance précise du comportement vibratoire est indispensable pour assurer un bon fonctionnement.

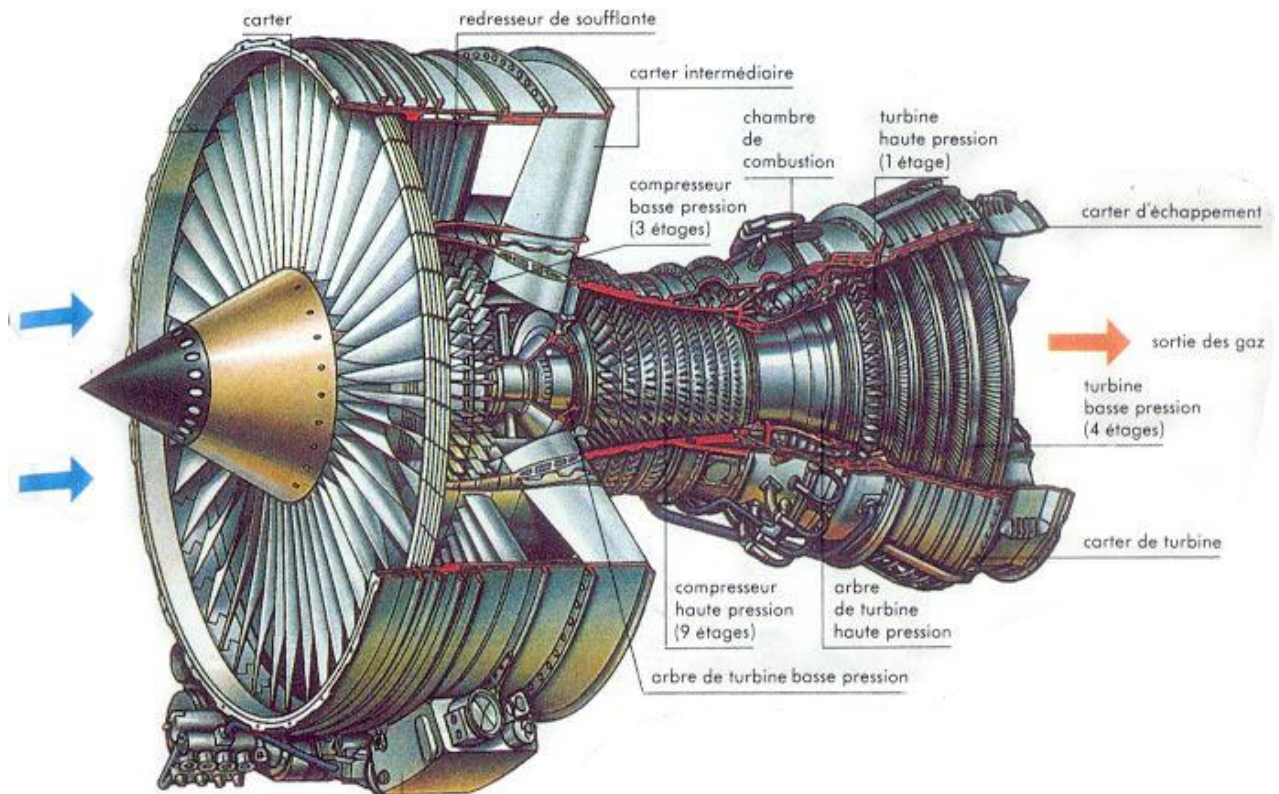


Fig. (1) Moteur d'avion de type Turboréacteur.

I.1 bref historique

La dynamique des arbres et rotors est une discipline qui a une remarquable histoire des à l'effet réciproque entre la théorie et la pratique. Elle concerne essentiellement l'étude du comportement vibratoire de machines tournantes telles que par exemple: (les pompes, les turbines et les compresseurs). Malgré que la dynamique des arbres et rotors soit connus depuis l'invention de la roue, sa recherche proprement dite a commencé avec **Rankine** qui a publié un article en 1869 sur les mouvements de tournoiement d'un arbre tournant. Mais celui-ci a utilisé incorrectement la deuxième loi de Newton en choisissant un modèle malheureux (voir Fig. I.1) et conclue que pour une certaine vitesse de rotation critique l'arbre tournant fléchit considérablement et qu'au-delà de cette vitesse son opération serait impossible [1]

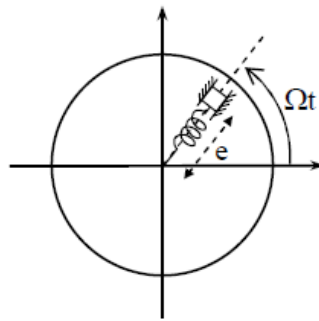


Fig.(2) Modèle de Rankine.

En 1895, Dunkerley publia une étude sur les vibrations des arbres chargés par plusieurs poulies, Cette même année Foepl utilisa un meilleur modèle et expliqua analytiquement que l'opération au-delà de la vitesse critique étant possible. Ceci a été confirmé expérimentalement en 1899 par De Laval qui travaillait sur les turbines à vapeur. Il a réussi à opérer à sept fois la vitesse critique. Kerr publia en 1916

Une autre évidence expérimentale qui montre qu'une deuxième vitesse critique pouvait être atteinte si l'on dépassait en toute sécurité la première. Cet sorte de conflit qui existait a été enfin résolu par Jeffcott en (1919) qui confirme la prédiction de Foepl en écrivant le premier rapport sur la théorie fondamentale de la dynamique des rotors .Les contributions de Jeffcott et De Laval sont encore très appréciés et c'est pour cela que leurs noms sont associés au modèle de base d'un rotor (un disque au milieu d'un arbre).

En 1924, Stodola écrivit un chef d'œuvre où il détailla les développements fait sur la dynamiques des rotors . Dans son travail il a introduit les effets gyroscopiques et montra que les solutions super

critiques étaient stabilisées par les accélérations de Coriolis. En 1933, Smith était le premier à étudier les systèmes symétriques et asymétriques [2].

Les vibrations des rotors avec des masses continûment réparties ont été étudiés dans les années 50 et 60 par Bishop, Gladwell et Parkson qui ont reporté une série de publications sur les réponses déséquilibrées et l'équilibrage des rotors continus.

La méthode des éléments finis et la méthode de transfert de matrice sont les deux méthodes utilisées pour déterminer les fréquences naturelles, les modes et les réponses forcées au déséquilibre dans les systèmes à rotor complexes. La méthode de transfert des matrices qui est utilisée pour les systèmes multi rotors avec paliers a été développée durant les années 60 par plusieurs chercheurs. Par contre la méthode des éléments finis a été développée en premier dans le domaine de la dynamique des structures. C'est Ruhl et Booker qui, en 1972, étaient les premiers à faire l'application sur les rotors.

Le comportement dynamique des arbres et des rotors est principalement dû aux vibrations de flexion, qui peuvent être excités par plusieurs différentes causes l'une des causes les plus connues est l'excentricité du centre de gravité quand appelle le balourd.

Généralement, il y a aussi des vibrations de torsion, qui peuvent concerner le comportement dynamique de tels systèmes, mais pour ce travail on s'intéresse principalement aux problèmes directs des vibrations de flexion. Le problème principal de cette étude des arbres et rotors est la détermination de la vitesse critique.

Résumé

Parmi tous les composants mécaniques présents dans n'importe quel mécanisme, les machines tournantes et surtout les arbres tiennent une place majeure puisqu'ils assurent la liaison entre les parties tournantes, les rotors, et les parties fixes, les stators. Pour assurer leur bon fonctionnement, une étude de pointe est nécessaire avant l'intervention de maintenance. Les arbres présentent de ce fait un phénomène de linéarité forte qui peut affecter le comportement vibratoire de la structure.

L'objectif de ce travail réalisé, est d'étudier l'influence de ce phénomène fonctionnel sur la dynamique du rotor.

Dans un premier temps, les caractéristiques des rotors seront traitées indépendamment et après rassembler ainsi l'aspect de modélisation des rotors. Le modèle proposé, qui prend en compte le phénomène, nécessite cependant des outils de calcul appropriés. Nous présenterons alors les différentes méthodes d'études et dans un second temps, nous présenterons la méthode des éléments finis en temps.

ملخص

جميع المكونات الميكانيكية الموجودة في أي آلية، الآلات الدوارة، وخصوصاً الرمح يأخذ دوراً رئيسياً نظراً لأنه يوفر الاتصال بين الأجزاء الدوارة، والدورات، وأجزاء ثابتة، ساكنة. لضمان التشغيل السليم، لا بد من دراسة متقدمة قبل الصيانة. الأشجار بالتالي لها الظاهرة الخطية القوية التي يمكن أن تؤثر على سلوك اهتزاز الهيكل. والهدف من القيام بهذا العمل هو دراسة تأثير هذه الظاهرة الوظيفية على الدورات ديناميكياً. أولاً، سيتم التعامل مع خصائص الدورات بشكل مستقل وبعد جمع ونمذجة مظهر من الدورات. النموذج المقترح، الذي يأخذ بعين الاعتبار هذه الظاهرة، ومع ذلك، يتطلب أدوات حسابية مناسبة. ونحن بعد ذلك تقديم طرق مختلفة لدراسة وفي المرحلة الثانية، وسوف نقدم طريقة العناصر المحددة في الوقت المناسب.

CHAPITRE I

FONDEMENTS DE LA MECANIQUE VIBRATOIRE

INTRODUCTION

Les vibrations ou les oscillations des systèmes mécaniques constituent l'un des plus importants champs d'études dans toute la physique [3]. Virtuellement, tous les corps peuvent vibrer librement en des manières variées. On peut aller de l'aile d'une mouche jusqu'aux grandes vibrations de la terre lors d'un tremblement tout en passant par l'être humain qui est en soit un réservoir de vibrations. Pour les vibrations des systèmes mécaniques et structures elles sont d'une part une nuisance pour les utilisateurs et d'autre part une source d'informations sur les comportements.

Par exemple pour les machines tournantes, elles sont redoutées car elles provoquent des dégradations et des cassures.

1.1-OSCILLATION ELEMENTAIRE

1.1.1- généralité sur des oscillations libres

Il est connu que dans certains cas, un corps, obtient une certaine perturbation initiale, après suppression des causes de cette perturbation, il continue à osciller. Ces oscillations libres jouent un rôle crucial non seulement en termes de contrôle du système de résonance le fait que le comportement du système d'oscillations libres caractérise la (individualité dynamique) qui définit le comportement du système dans toutes les autres conditions [4].

Définition Un oscillateur est un système physique manifestant la variation d'une grandeur physique de part et d'autre d'un état d'équilibre. Si les variations se reproduisent identiques à elles-mêmes, l'oscillateur est dit périodique [5].

Exemples :

- un oscillateur mécanique effectue un mouvement d'aller-retour de part et d'autre de sa position d'équilibre.

La chaîne de bicyclette suspendue d'un point fixe, peut servir de l'objet idéal de l'étude des oscillations libres, que la chaîne pend dans le cas libre se trouve dans l'état du repos, on peut provoquer les oscillations libres, si on la laisse, la chaîne va prendre quelque forme d'oscillations.

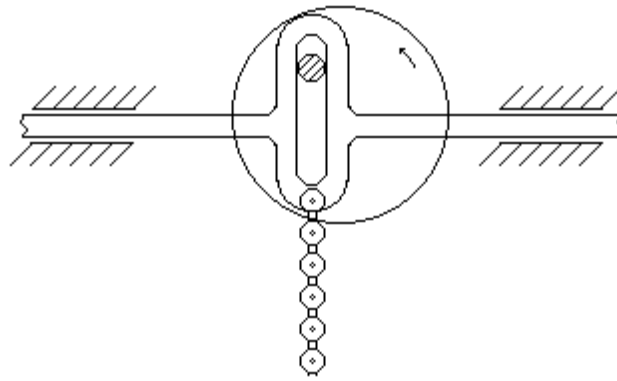
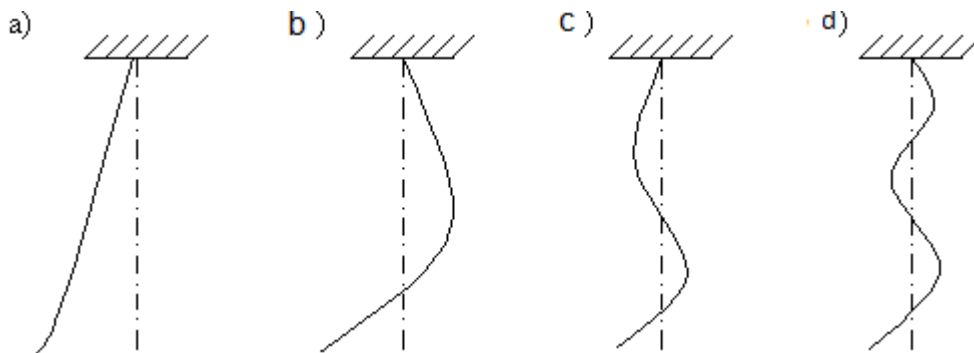


Fig (1.1) chaine de bicyclette.

- Avec l'augmentation de fréquence il apparait un moment ou la chaine à commencer intensivement oscille à une fréquence d'excitations (fig. (1.2.a)),
- avec l'augmentation progressive de la fréquence d'excitations du mécanisme peut apporter des fluctuations, au cours de laquelle la chaine prend la forme présente dans la (fig. 1.2.b),
- à des fréquences encore plus élevées vous pouvez obtenir les autres formes de vibration (fig1. 2 (c, d)).



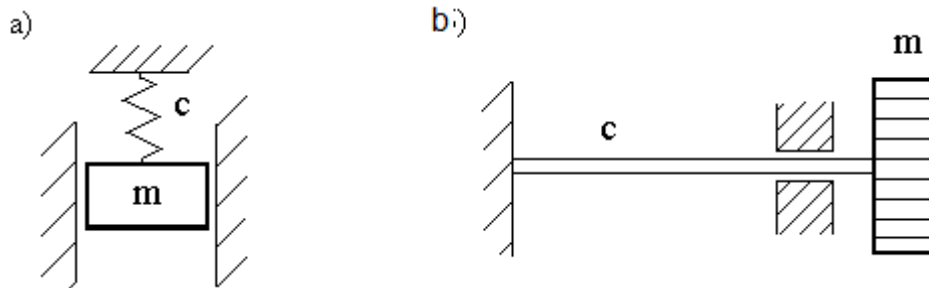
Fig(1.2) fréquences de chaine.

1.1.2 oscillations libres d'un systeme a un degre de liberte sans frottement

Dans la plupart des systèmes élastique pour suffisamment petits déplacements la force élastique dépend linéairement du déplacement x si le début du décalage de x choisie de façon que $x=0, f=0$, le système linéaire $f= c.x$, ou c : la rigidité du système d'équation différentielle de mouvement d'un système à un degré de liberté (fig. (1.2.a))est la suivant :

$$m\ddot{x} + cx=0 \tag{1.1.1}$$

; $m\ddot{x}$ =accélération ; cx =déplacement ; x' =vitesse .



fig(1.3) systèmes élastique pour petits déplacements.

En effet; L'équation du mouvement d'un corps de masse m (fig.1.3.a) sores l'action de la pesanteur et qui effectue des oscillations libres est

$$m\ddot{x}=mg-c(x+f_{ct}) \tag{1.1.2}$$

ou: $f_{ct} =mg/c$: allongement du ressort de la charge de gravité:

par conséquent les termes mg et cf_m dans l'équations (1.1.2) s'annèlent, et l'équation (1.1.2) coïncide avec (1.1.1) équation du mouvement pour le système à une masse subissant des oscillation libres de tension (fig.1.3.b) s'écrit:

$$J\ddot{\varphi}+c\varphi =0 \tag{1.1.3}$$

Ou φ : angle de rotation du corps.

J: moment d'inertie de charge **m** autour de l'axe longitudinal de l'arbre.

C : rigidité en tension de la liaison élastique.

L'équation (1.1.1) présente la forme:

$$x = c_1 \cos a\omega t+c_2 \sin a\omega t \tag{1.1.4}$$

ou $\varphi = \sqrt{\frac{c}{m}}$.fréquence angulaire .ou de fréquence propre , c_1 et c_2 constantes d'intégration .déterminées à partir des conditions initiales.

En désignant déplacement et la vitesse à l'instantes $x_0=0$ par x_0 et \dot{x}_0 respectivement après de remplacement de (1.1.4) nous trouves :

$$c_1 = x_0, c_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \tag{1.1.5}$$

Expression (1.1.4) peut être écrite différemment :

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) \tag{1.1.6}$$

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2} \quad \text{Ou:} \quad \text{Tag } \varphi = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\omega x_0}{\dot{x}_0}$$

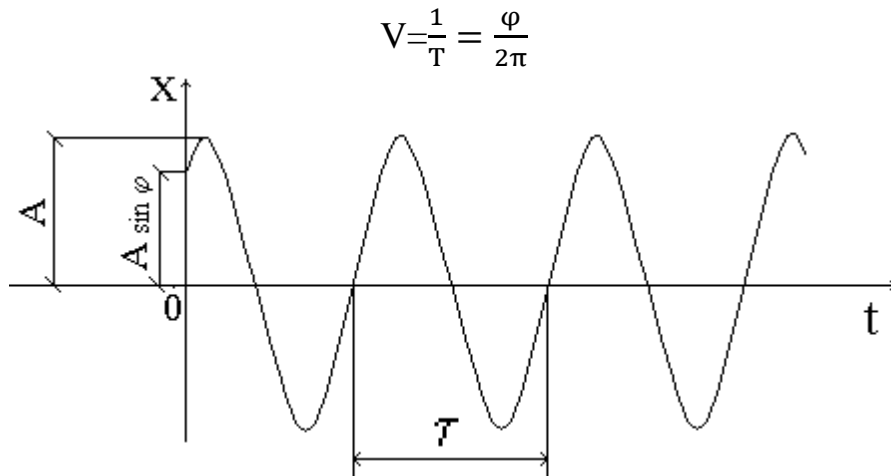
Ainsi, le mouvement de la charge aux vibrations libre de système à une masse sans frottements d'écrit une lois sinusoïdale avec une oscillation d'amplitude A .

période (τ) et la phase initial φ (fig.1.4)

Période d'oscillation (t)est déterminée à partir de la condition :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \quad \omega t = 2\pi \tag{1.1.7}$$

D'où le nombre d'oscillation par unité de temps (technique de fréquence mesuré en hertz).



Fig(1.4) Fig. 1.4 paramètres d'oscillation.

En pratique il est parfois commode de relier le fréquence et la période d'oscillation avec une déformation statique f_{cm} accouplement élastique provoqué par une force égale au poids de la charge $f_{cm} = \frac{mg}{c}$.

Dans ce cas, nous avons les formules :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{f_{cm}}} ; v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{f_{cm}}} ; \tau = 2\pi \sqrt{\frac{f_{cm}}{g}} \tag{1.1.8}$$

Etant donné que la valeur de f_{cm} introduite en (1.1.8) formellement, Il est évident leur validité indépendamment du fait que concède ou non la direction de la gravité avec la direction de déplacement de la charge [6].

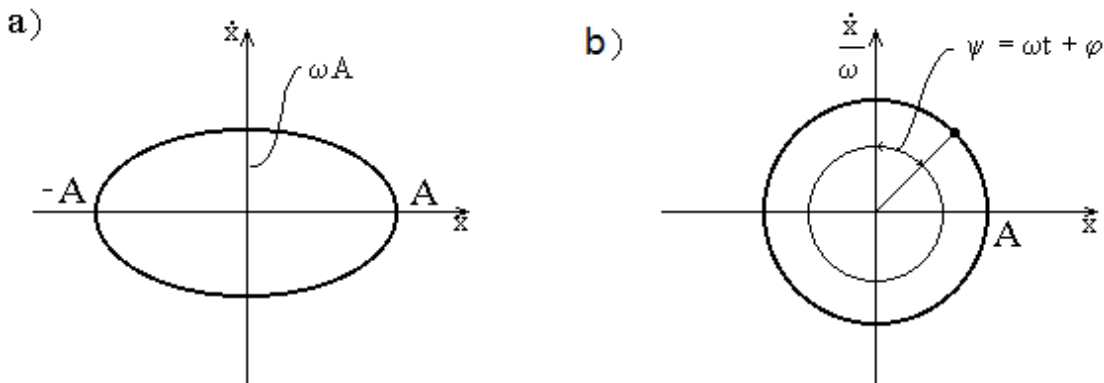
Pour l'analyse des oscillations libres commodes à utiliser l'image de la loi du mouvement du plan de phase, phase du mouvement appelé la représentation graphique de la vitesse du déplacement, pour le partait de phase différent l'expression (1.1.6) par rapport à t:

$$\text{L'équation de mouvement } x = A\cos(\omega t + \psi) \tag{1.1.9}$$

L'équation de mouvement (1.1.5) et l'expression (1.1.9) est l'équation de la trajectoire de phase sous formes paramétrique éliminant le paramètre $\omega t + \psi$ obtiendrons.

$$x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega^2} = A^2 \tag{1.1.10}$$

L'équations (1.1.10) est l'équation d'une ellipse dont les demi-axes égaux A et $A\omega$ fig (1.5) La matie supérieurs correspond à une augmentations de déplacement .inférieure décroissant les dimensions de l'épendent des conditions initiales qui déterminent, l'amplitude de l'oscillations A .



fig(1.5) trajectoire de déplacement.

Toute possible vibration libre d'un système avec une seule masse sont représentées par la famille des ellipses .dont chacun corresponde à un certain niveau d'énergie défini, plus l'amplitude des oscillations a plus l'énergie total du système, si les valeurs

D'énergie tracée sur l'axe perpendiculaire au plan, alors on réussira la surface (paraboloïde). Le point le plus bas qui correspond ou niveau d'énergie zéro le point représentant les significations du déplacement et les vitesses au moment donné du temps (point représentant), se déplace à horizontal de cette surface si vous modifier l'échelle de contraction de la phase trajectoire et d'enregistrer l'assisse x , et l'axe verticale \dot{x}/ω ;alors la trajectoire de phase (fig.5.b)sera un cercle avec un rayon A ;

Le point représentatif se déplace uniforme meut le long de ce cercle avec une vitesse angulaire égale à la propre fréquence ω ,en présente de la dissipation d'énergie représentatif du point se déplace dans un spirale proche de l'origine [7].

1.2-ANALYSE LINEAIRE DE SYSTEMES DISCRETS

Les ressorts: sont fréquemment utilisés pour l'enseignement élémentaire de la mécanique. On s'intéresse en particulier à des ressorts dont l'allongement est proportionnel à la force à laquelle ils sont soumis. Dans le cas général, la déformation d'un ressort n'est pas proportionnelle à la sollicitation, mais ce cas particulier présente un intérêt pédagogique puisqu'il permet une étude simple Ce modèle sert aussi dans la modélisation du comportement dynamique des solides [10].

Comme tous les corps possédants une masse et une élasticité sont capables de vibrer, dans toute documentation sur les phénomènes oscillatoires ou vibratoires, on commence toujours la théorie par le modèle le plus simple à un degré de liberté qui consiste en une masse accrochée à un ressort et pouvant être soumise à une force de frottement et à une force d'excitation ou chargement. La figure (1.6) schéma donné système.

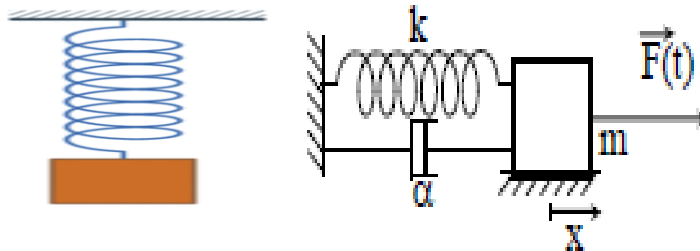


Fig. (1.6) Modèle élémentaire d'oscillateur

-Pour ce cas élémentaire la méthode la plus simple consiste à exprimer directement l'équilibre dynamique de toutes les forces agissant sur la masse m qui sont le chargement appliqué F(t) et les forces engendrées par le mouvement c'est à dire la force de rappel \vec{F}_k , la force d'amortissement \vec{F}_f et la force d'inertie \vec{F}_x (voir Fig.1.7).

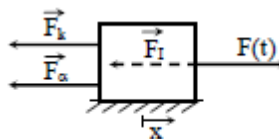


Fig (1.7) Forces appliquées au modèle élémentaire.

On a donc :

$$\vec{F}(t) + \vec{F}_k + \vec{F}_f + \vec{F}_I = \vec{0} \tag{1.2.1}$$

Toutes les forces sont de même direction avec les trois dernières qui sont en fonction du déplacement x ou des dérivées par rapport au temps .ce qui donne:

$$F(t) - kx - \alpha \dot{x} - m \ddot{x} = 0 \tag{1.2.2}$$

D'où l'équation différentielle :

$$m \ddot{x} + \alpha \dot{x} + kx = F(t) \quad (1.2.3)$$

Si le système n'est pas amorti ou excité, elle s'écrit :

$$m \ddot{x} + kx = 0 \quad (1.2.4)$$

La solution de cette dernière équation qui est homogène est un mouvement harmonique simple de la forme :

$$x = x_h = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (1.2.5)$$

$$\text{ou bien } x = x_h = C \cos (\omega_0 t + \varphi) \quad (1.2.6)$$

où ω_0 est la fréquence angulaire (pulsation) propre ou naturelle des oscillations. A et B (ou C et φ) sont des constantes qu'on détermine par les conditions initiales. Lorsque le système est amorti, elle devient:

$$m \ddot{x} + \alpha \dot{x} + kx = 0 \quad (1.2.7)$$

En posant $\lambda = \alpha/2m$, qui représente la constante d'amortissement, la solution à l'une des trois formes (voir Fig. 1.8) :

Si $\lambda > \omega_0$ (frottement fort) → régime apériodique.

$$x = x_h = A \exp(p_1 t) + B \exp(p_2 t) \quad (1.2.8)$$

$$\text{avec } p_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}$$

Si $\lambda = \omega_0$ (frottement critique) → régime critique.

$$x = x_h = (A + Bt) \exp(-\lambda t) \quad (1.2.9)$$

Si $\lambda < \omega_0$ (frottement faible) → régime pseudopériodique.

$$x = x_h = C \exp(-\lambda t) \cos (\omega t + \varphi) \quad (1.2.10)$$

$$\text{Avec } \omega = \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2} \rightarrow \text{ la pseudo-pulsation.}$$

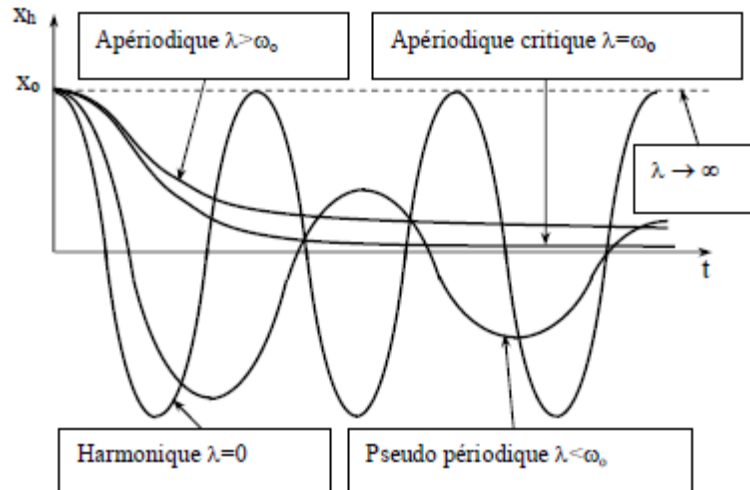


Fig (1.8) représentation de la solution homogène

Pour le cas général, l'équation (1.2.3) qui a un second membre admet une solution qui est la superposition d'une solution homogène (x_h) de l'équation sans second membre (amortie ou non amortie) et d'une solution particulière x_p de l'équation complète. Cette dernière dépend bien évidemment de la forme de l'excitation $F(t)$.

-Dans le cas d'une excitation harmonique de pulsation ω_e , x_p est aussi harmonique de pulsation ω_e de la forme $A_e \cos(\omega_e t + \phi_e)$ où A_e dépend de ω_e et dans la représentation graphique en fonction de celle-ci représente ce que l'on appelle la courbe de résonance. L'allure de cette dernière dépend aussi de l'amplitude de l'excitation qui peut être constante (excitation de déplacement voir Fig(1.9.a)), en fonction de ω_e (excitation de vitesse voir Fig.1.9.b), ou en fonction de ω_e^2 (excitation d'accélération voir Fig.1.9.c). Elle peut être aussi une combinaison de ces dernières [9].

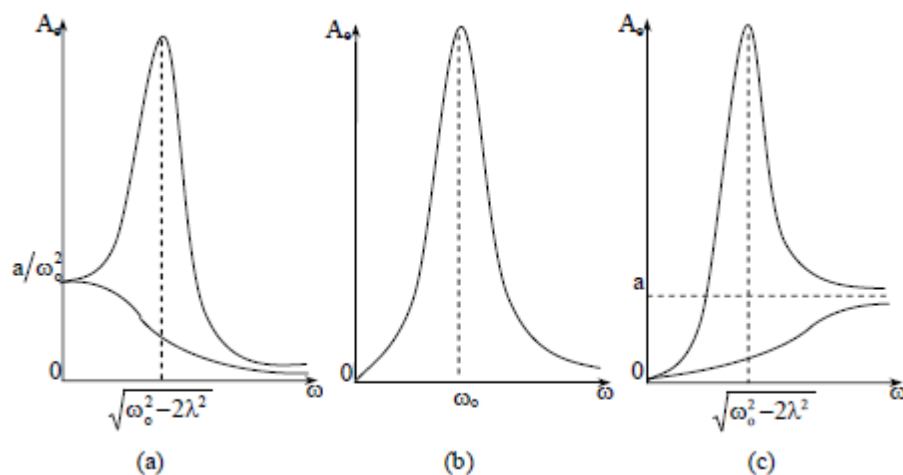
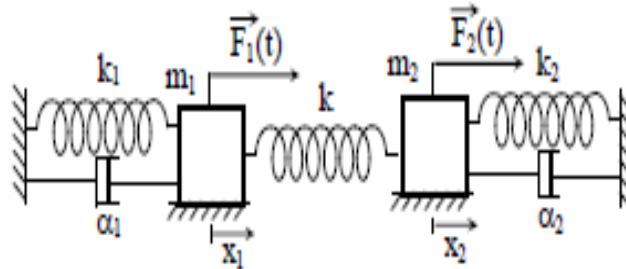


Fig.(1.9) Courbe de résonance.

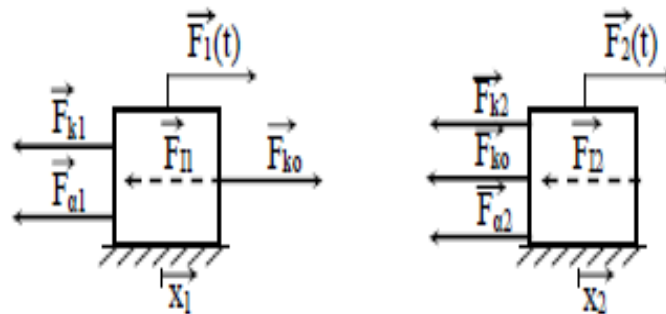
1.2.1 Modèle à plusieurs degrés de liberté

Dans l'étude des systèmes à plusieurs degrés de liberté considérons d'abord un exemple de système à deux degrés de liberté comme celui représenté par la figure (1.10).



Fig(1.10) Modèle à deux degrés de liberté

Pour trouver les équations différentielles du mouvement, on procède de la même manière que précédemment. On exprime directement l'équilibre dynamique de toutes les forces associées à chaque sous-système, c'est à dire appliquées sur les masses m1 et m2 (voir Fig. 1.11)[10].



Fig(1.11) Forces appliquées au modèle à deux degrés de liberté.

Pour les deux sous-systèmes on aura :

$$\begin{cases} \vec{F}_1 + \vec{F}_{k1} + \vec{F}_{k0} + \vec{F}_{e1} + \vec{F}_{11} = \vec{0} \\ \vec{F}_2 + \vec{F}_{k2} + \vec{F}_{k0} + \vec{F}_{e2} + \vec{F}_{12} = \vec{0} \end{cases} \quad (1.2.11)$$

Ce qui donne après expression des forces en fonction des coordonnées généralisées x_1 et x_2 et de leurs dérivées par rapport au temps :

$$\{ F_1(t) - k_1 x_1 + k_0(x_2 - x_1) - \alpha_1 \dot{x}_1 - m_1 \ddot{x}_1 = 0 \quad (1.2.12)$$

$$\{ F_2(t) - k_2 x_2 + k_0(x_2 - x_1) - \alpha_2 \dot{x}_2 - m_2 \ddot{x}_2 = 0$$

Ces équations peuvent se mettre sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_0 & K_0 \\ K_0 & K_2 + K_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix} \quad (1.2.13)$$

qui peut s'écrire :

$$[m]\{\ddot{x}\} + [\alpha]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{F(t)\} \quad (1.2.14)$$

On voit bien que cette équation est similaire à l'équation (1.2.3) dans laquelle les matrices [m], [α] et [k] se réduisent aux éléments m, α et k car le système est à un degré de liberté.

Cette procédure peut être appliquée dans le cas le plus général pour un système ayant N degrés de liberté. On obtient un système de n équations différentielles à n inconnues sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{11}\ddot{x}_1 + m_{12}\ddot{x}_2 + \dots + m_{1n}\ddot{x}_n + \alpha_{11}\dot{x}_1 + \alpha_{12}\dot{x}_2 + \dots + \alpha_{1n}\dot{x}_n + K_{11}x_1 + K_{12}x_2 + \dots + K_{1n}x_n = F_1(t) \\ m_{21}\ddot{x}_1 + m_{22}\ddot{x}_2 + \dots + m_{2n}\ddot{x}_n + \alpha_{21}\dot{x}_1 + \alpha_{22}\dot{x}_2 + \dots + \alpha_{2n}\dot{x}_n + K_{22}x_1 + K_{22}x_2 + \dots + K_{2n}x_n = F_2(t) \\ m_{n1}\ddot{x}_1 + m_{n2}\ddot{x}_2 + \dots + m_{nm}\ddot{x}_n + \alpha_{n1}\dot{x}_1 + \alpha_{n2}\dot{x}_2 + \dots + \alpha_{nm}\dot{x}_n + K_{n1}x_1 + K_{n2}x_2 + \dots + K_{nm}x_n = F_n(t) \end{array} \right\} \quad (1.2.15)$$

qui peut s'écrire :

$$[m]\{\ddot{x}\} + [\alpha]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{F(t)\} \quad (1.2.16)$$

Où:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{bmatrix} \text{ est la matrice d'amortissement}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nm} \end{bmatrix} \text{ est la matrice de rigidité.} \quad (1.2.17)$$

$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{Bmatrix}$ est le vecteur déplacement.

et $\{F(t)\} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_n(t) \end{Bmatrix}$ est le vecteur excitation avec $F_i(t)$ le chargement appliqué sur le ième sous

système .

1.2.2 Fréquences et modes propres de vibration

Rechercher les fréquences et modes propres d'un système à plusieurs degrés de liberté revient à étudier les vibrations libres non-amorties. Dans ce cas l'équation (1.2.16) devient :

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\} \quad (1.2.18)$$

Pour trouver la solution de cette équation, on fait l'analogie avec le système à un degré de liberté. On cherche pour chaque sous-système, une solution harmonique de la forme donnée par l'équation (1.2.16)

$$x_i = A_i \cos \omega t + B_i \sin \omega t \quad (1.2.19)$$

Qui peut s'écrire pour tous les sous-systèmes en même temps, sous la forme matricielle :

$$\{x\} = \{A\} \cos \omega t + \{B\} \sin \omega t \quad (1.2.20)$$

On reporte ce résultat dans l'équation (1.2.16) pour obtenir :

$$(-\omega^2 [m] + [k])\{x\} = \{0\} \quad (1.2.21)$$

Cette dernière équation représente un système de n équations linéaires à n inconnues. Si le déterminant de la matrice $(-\omega^2 [m] + [k])$ est différent de zéro, on aura la solution triviale $\{x\} = \{0\}$. Dans ce cas le système est au repos et cela ne nous intéresse pas.

Une solution non triviale n'est donc possible que si :

$$\det(-\omega^2 [m] + [k]) = 0 \quad (1.2.22)$$

Cette équation est appelée équation aux pulsations (fréquences) propres du système. Le développement du déterminant nous donne une équation polynomiale de degré n en ω^2 . Les n solutions

$(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2)$ sont les carrés des pulsations des n modes de vibrations possibles. Le mode qui correspond à la pulsation la plus basse est appelé le premier mode, le second correspond à la pulsation suivante, etc. Ainsi pour chaque sous-système on a la superposition de n modes de vibrations correspondant aux n pulsations. Par exemple pour le i ème sous-système la solution s'écrit [11]:

$$x_{hi} = C_{i1} \cos(\omega_{1t} + \phi_{i1}) + C_{i2} \cos(\omega_{2t} + \phi_{i2}) + \dots + C_{in} \cos(\omega_{nt} + \phi_{in}) \quad (1.2.23)$$

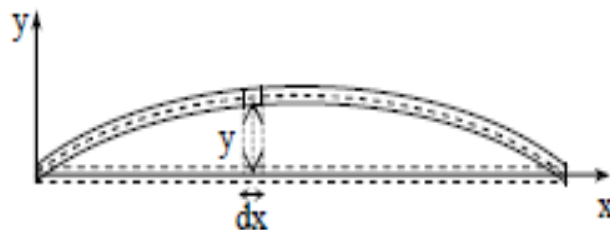
1.3 ANALYSE DES SYSTEMES CONTINUS

On a considéré dans les sections précédentes des systèmes discrets, c'est à dire des systèmes dont les éléments de masse, de rigidité et d'amortissement sont distincts. Ce sont des systèmes à paramètres groupés ayant des modes de vibrations allant de un jusqu'à un nombre fini correspondant au nombre de degrés de liberté. L'extension logique est lorsque ce dernier.

Tend vers l'infini. Ce cas correspondant exactement aux systèmes continus qui possèdent, par définition, une infinité de degrés de liberté, donc une infinité de fréquences propres. Ceci est dû au fait que dans ces systèmes, tels que les cordes, les poutres, les membranes et les plaques ; les éléments de masse, de rigidité et d'amortissement sont confondus. Elles font partie du matériau et sont indissociables l'une de l'autre. Les équations régissant les mouvements des systèmes continus sont des équations aux dérivés partielles qu'on détermine par application des principes de la mécanique des corps déformables. Leurs résolutions permet, en utilisant les conditions aux limites et initiales, de connaître le comportement naturel du système [12].

1.3.1 vibrations de flexion des arbres (poutres)

Comme ce travail porte sur la flexion des arbres, on traite le cas de vibration latérale d'une poutre homogène [5]. Pour cela on considère une poutre de section constante s dont la ligne moyenne est supposée rectiligne au repos et située dans un certain plan de symétrie xoy de la poutre. [7] La vibration transversale de celle-ci est donnée par sa flèche $y(x,t)$ par rapport à la position d'équilibre (voir figure(1.10) ; elle est déterminée par l'étude de la déformé dynamique dans le plan xoy .



Fig(1.10) Arbre (poutre) en flexion .

Supposons que L est la longueur de la poutre, ρ sa masse volumique, s la section constante, E le module d'élasticité et I son moment d'inertie de section. Désignons respectivement par V et M l'effort tranchant et le moment fléchissant à une distance x de l'origine pour de petites déformations (voir Fig.1.11).

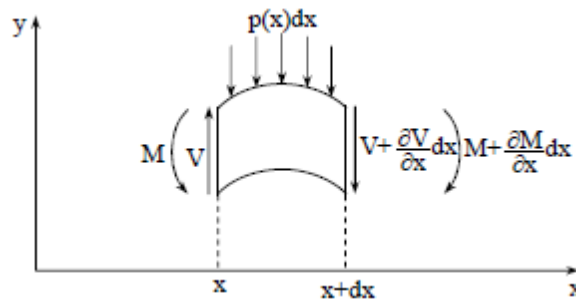


Fig.(1.11) Forces et moments à un élément de l'arbre (poutre).

Les lois classiques de la résistance des matériaux donnent les relations :

$$M = EI \frac{d^2y}{dx^2} \quad (3.1.1) \quad \text{et} \quad v = \frac{dM}{dX} = EI \frac{d^2Y}{dX^2} \quad (1.3.2)$$

Si $p(x)$ est un chargement distribué, à l'équilibre dynamique le principe fondamentale de Newton donne :

$$-\left(\frac{dv}{dx} \partial x\right) + P(x)dx = Ps \, dx \frac{d^2y}{dt^2} \rightarrow Ps \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dv}{dx} = P(x) \quad (1.3.3)$$

$$\rightarrow ps \frac{d^2y}{dt^2} + EI \frac{d^4y}{dx^4} = p(x) \quad (1.3.4)$$

-vibrations libres ($p(x)=0$)

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} + Ps \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \quad (1.3.5)$$

1.3.2 Séparation des variables

La solution de l'équation (1.3.5) peut être obtenue en utilisant la technique de Séparation des variables.

Dans ce cas, on suppose une solution de la forme :

$$y(x, t) = \phi(x)\psi(t) \quad (1.3.6)$$

où $\phi(x)$ est une fonction d'espace désignant l'amplitude des vibrations selon l'axe des x et $\psi(t)$ est une fonction de temps désignant le terme vibratoire. [11].

L'introduction de (1.3.6) dans (1.3.5) donne :

$$EI \frac{d^4\phi}{dx^4} \psi(t) = -p\phi(x) \frac{d^2\psi(t)}{dt^2} \quad (1.3.7)$$

Ou bien

$$\frac{\ddot{\omega}(T)}{\psi(t)} = -V^2 \frac{\phi^6(x)}{\phi(x)} \quad (1.3.8)$$

Avec $V^2 = \frac{EI}{PS}$ qui est une constante positive. On remarque que les deux membres de cette équation ne dépendent pas de la même variable et ainsi ils sont constants. Ceci permet de les écrire sous la forme :

$$V^2 \frac{\phi^6(t)}{\phi(x)} = - \frac{\ddot{\omega}(T)}{\psi(t)} = \omega^2 \quad (1.3.9)$$

Ou ω est une constante.

Le choix de la forme $(+\omega^2)$ est fait logiquement pour avoir une forme qui amène à un terme vibratoire analogue au système oscillatoire masse-ressort. C'est à dire :

$$\ddot{\omega}(T) + \omega^2\psi(t) = 0 \quad (1.3.10)$$

La solution de cette équation est :

$$\psi(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t \quad (1.3.11)$$

On cherche des solutions de la forme $\phi = Ae^{pt}$ que l'on remplace dans l'équation (1.3.11) pour avoir :

$$\left[p^4 - \frac{\omega^2}{V^2} \right] Ae^{pt} \quad (1.3.12)$$

Ou bien $p^4 - \beta^4 = 0$
 (1.3.13)

Les racines de cette dernière équation sont : avec $\beta = \sqrt{\frac{\omega}{V}} L$

$$p_1 = \sqrt{\beta}; \quad p_2 = -\sqrt{\beta}; \quad p_3 = j\sqrt{\beta} \text{ et } p_4 = -j\sqrt{\beta} \text{ ou } j^2 = -1$$

La solution de l'équation (1.3.13) s'écrit alors :

$$\phi(x) = A_3 e^{\beta x} + A_4 e^{-\beta x} + A_5 e^{j\beta x} + A_6 e^{-j\beta x} \quad (1.3.14)$$

En posant:

$$B_1 = A_3 + A_4; \quad B_2 = A_3 - A_4; \quad B_3 = A_5 + A_6 \text{ et } B_4 = j(A_5 - A_6) \quad (1.3.15)$$

C'est à dir

$$A_3 = \frac{B_1+B_2}{2}; \quad A_4 = \frac{B_1-B_2}{2}; \quad A_5 = \frac{B_3-jB_4}{2} \text{ et } A_6 = \frac{B_3+jB_4}{2} \quad (1.3.16)$$

on obtient :

$$\phi(x) = \frac{B_1}{2} e^{\beta x} + \frac{B_2}{2} e^{\beta x} + \frac{B_1}{2} e^{-\beta x} + \frac{B_2}{2} e^{-\beta x} + \frac{B_3}{2} e^{j\beta x} + j \frac{B_4}{2} e^{j\beta x} + \frac{B_3}{2} e^{-j\beta x} + j \frac{B_4}{2} e^{-j\beta x}$$

(1.3.17)

Qu'on peut écrire :

$$\phi(x) = B_1 \left(\frac{e^{\beta x} + e^{-\beta x}}{2} \right) + B_2 \left(\frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{2} \right) + B_3 \left(\frac{e^{j\beta x} + e^{-j\beta x}}{2} \right) + jB_4 \left(\frac{e^{j\beta x} - e^{-j\beta x}}{2} \right)$$

(1.3.18)

ou bien

$$\phi(x) = B_1 \text{ch}\beta x + B_2 \text{sh}\beta x + B_3 \cos\beta x + B_4 \sin\beta x$$

(1.3.19)

Finalement la solution s'écrit :

$$Y(x,t) = (B_1 \text{ch}\beta x + B_2 \text{sh}\beta x + B_3 \cos\beta x + B_4 \sin\beta x) (A_1 \cos\omega t + A_2 \sin\omega t)$$

(1.3.20)

Les constantes A_1 et A_2 correspondent au terme temporel (terme vibratoire) et se déterminent en considérant les conditions initiales tandis que les constantes B_1, B_2, B_3 et B_4 correspondent au terme spatial (l'amplitude) et se déterminent en considérant des conditions aux limites qui sont généralement prises aux extrémités de la poutre (arbre).

1.3.3 Conditions aux limites et modes de vibration

Il s'agit d'imposer à l'équation d'amplitude du modèle des conditions qui correspondent à l'effet physique de ses appuis [14]. Les conditions aux limites les plus courantes se situent aux extrémités ($x_0 = 0$ et $x_0 = L$). Elles sont données par (voir Tab(1.3.1)) :

Appui simple charnière	Extrémité libre	encastrement	Appui élastique (ressort)
$Y=0, M=0$	$M=0, V=0$	$Y=0, Y' \neq 0$	$M=0, V=ky$
$\Phi(x_0)=0$ $\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0 (x=x_0)$	$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0, \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$ $(x=x_0)$	$\Phi(x_0)=0, \frac{d\phi}{dx}=0$ $(x=x_0)$	$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0, (x=x_0)$ $\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{\mp K}{EI} \Phi(x)$

Tab(1.1) Conditions aux limites courantes.

L'application de ces conditions permet en effet de déterminer les constantes B_1, B_2, B_3 et B_4 , et les fréquences naturelles au quelles vont correspondre les différents modes de vibration. Si l'on considère, par exemple, le cas de la poutre (arbre) sur deux appuis simples où la flèche et le moment fléchissant sont nuls les conditions de continuité nous donnent :

$$B_1 = B_2 = B_3 = 0$$

Et
$$B_4 \sin \beta L = 0 \tag{1.3.20}$$

Comme $B_4 = 0$ est la solution trivial (système au repos), on a la condition $\sin \beta L = 0$. Cette dernière, qu'on appelle l'équation des fréquences propres, résulte en des solutions de la forme : $(\beta_n L = n \pi)$

D'où les fréquences naturelles :

$$\omega_n = \beta_n^2 V = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho s}} \tag{1.3.21}$$

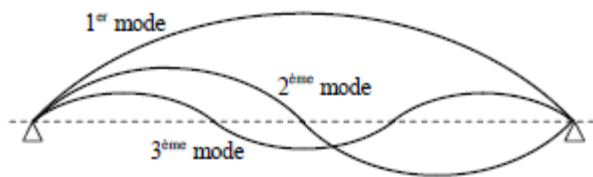
A celles-ci correspondent, évidemment des modes normaux dont les amplitudes sont définies par les fonctions normales :

$$\phi_n(x) = \beta_{4n} \sin \beta_n x \tag{1.3.22}$$

La solution générale sera donc la superposition de tous les modes, soit :

$$Y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) (A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t) \tag{1.3.23}$$

Pour ce cas d'appuis simples, la représentation des premiers modes de vibration est donnée sur la figure(1.13). naturelles et l'équation d'amplitude



Fig(1.12) Premiers modes de vibration

pour les différents genres de conditions aux limites. Pour les cas classiques, les différentes valeurs et expressions sont données ci-dessous (voir Tab. 1.3.2).

Conditions aux limites	Equation des fréquences	$\phi_n(x)$	α_n	$\beta_n L$
Simple simple	$\sin\beta_n L=0$	$B_{4n} [\sin\beta_n x]$	-----	$\beta_1 L=\pi$ $\beta_2 L=2\pi$ $\beta_3 L=3\pi$ $\beta_4 L=4\pi$
Encastré libre	$\cos\beta_n L \cdot \text{ch}\beta_n L = -1$	$B_{4n} [\sin\beta_n x - \text{sh}\beta_n x - \alpha_n (\cos\beta_n x - \text{ch}\beta_n x)]$	$\frac{\sin\beta_n L + \text{sh}\beta_n L}{\cos\beta_n L + \text{ch}\beta_n L}$	$\beta_1 L= 1.875104$ $\beta_2 L= 4.694091$ $\beta_3 L= 7.854757$ $\beta_4 L=10.995541$
Encastré encastré	$\cos\beta_n L \cdot \text{ch}\beta_n L = 1$	$B_{4n} [\text{sh}\beta_n x - \sin\beta_n x - \alpha_n (\text{ch}\beta_n x - \cos\beta_n x)]$	$\frac{\text{sh}\beta_n L - \sin\beta_n L}{\cos\beta_n L - \text{ch}\beta_n L}$	$\beta_1 L= 4.730041$ $\beta_2 L= 7.853205$ $\beta_3 L=10.995608$ $\beta_4 L=14.137165$
Encastré simple	$\text{tg}\beta_n L - \text{th}\beta_n L = 0$	$B_{4n} [\sin\beta_n x - \text{sh}\beta_n x - \alpha_n (\cos\beta_n x - \text{ch}\beta_n x)]$	$\frac{\sin\beta_n L - \text{sh}\beta_n L}{\cos\beta_n L - \text{ch}\beta_n L}$	$\beta_1 L= 3.926602$ $\beta_2 L= 7.068583$ $\beta_3 L=10.210176$ $\beta_4 L=13.351768$
Libre libre	$\cos\beta_n L \cdot \text{ch}\beta_n L = 1$	$B_{4n} [\sin\beta_n x + \text{sh}\beta_n x + \alpha_n (\cos\beta_n x + \text{ch}\beta_n x)]$	$\frac{\sin\beta_n L - \text{sh}\beta_n L}{\text{ch}\beta_n L - \cos\beta_n L}$	$\beta_1 L= 4.730041$ $\beta_2 L= 7.853205$ $\beta_3 L=10.995608$ $\beta_4 L=14.137165$
Simple libre	$\text{tg}\beta_n L - \text{th}\beta_n L = 0$	$B_{4n} [\sin\beta_n x + \alpha_n \text{sh}\beta_n x]$	$\frac{\sin\beta_n L}{\text{sh}\beta_n L}$	$\beta_1 L= 3.926602$ $\beta_2 L= 7.068583$ $\beta_3 L=10.210176$ $\beta_4 L=13.351768$

Tab (1.2) fonction de forme.

CHAPITRE II

CONCEPTS DE LA DYNAMIQUE DES ARBRES

Introduction

Les problèmes vibratoires associés aux systèmes tournants tels que les arbres et les rotors constituent des enjeux majeurs dans le domaine technologique. Leur fine compréhension aide au mieux de dimensionner et d'optimiser de tels systèmes. La dynamique des rotors vient de ce se fait pour comprendre et prédire précisément leur comportement vibratoire. Par exemple l'un des points essentiels réside dans la prédiction et le placement juste des premières vitesses critiques. En effet, celles-ci sont en fonction des caractéristiques des systèmes tournants et leur détermination est parmi les éléments primordiaux lors du dimensionnement. [15],[16].

2.1 LE PHENOMENE DU TOURNOIEMENT (WHIRLING)

2.1.1 Origine du tournoiement

Quand un arbre tourne, il tend à certaines vitesses, à fléchir et vibrer avec des oscillations transversales qui le font tourbillonner autour de son axe d'équilibre statique. Ce phénomène est appelé "whirling", un mot anglais introduit par Rankine en 1869 dans la dynamique des rotors et qui veut dire tournoiement [6]. L'arbre aura donc un mouvement de rotation autour de lui-même qui est le mouvement de spin et un autre mouvement de rotation du au whirling autour de sa position d'équilibre qui sera le mouvement orbital.

Le whirling résulte de plusieurs causes telles que les balourds, les forces gyroscopiques, l'amortissement d'hystérésis, les paliers, les frottements d'huiles dans les paliers, les raideurs non-symétriques, etc. Il devient très dangereux quand l'amplitude des oscillations sera grande. Un fait qui se produit quand la fréquence de rotation de l'arbre coïncide ou voisine sa fréquence naturelle d'oscillations. Pour voir cela, considérons un arbre sans masse avec une masse m collée en son milieu et qui soit distante de (e) de son axe géométrique. Quand l'arbre tourne, une force centrifuge radiale due à la masse m le fait fléchir. Si la flèche au milieu de l'arbre est (r), la distance du centre de gravité où se trouve la masse m de l'axe géométrique d'équilibre est alors $r + e$ en supposons que cette dernière soit dans le plan de déflexion ou le plan tournant (voir fig. 2.1).

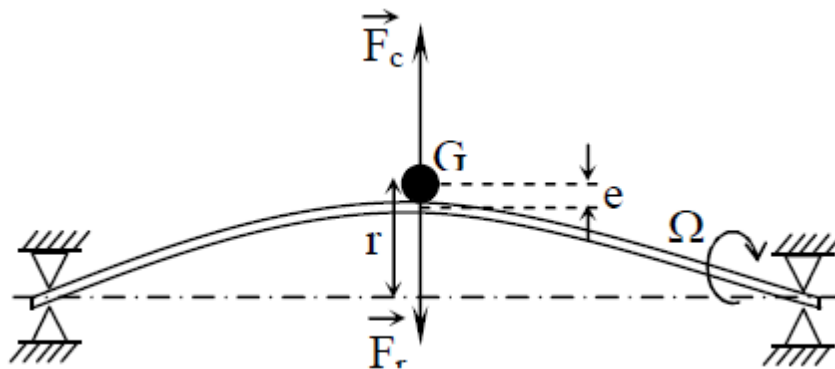


Fig (2.1) Arbre tournant avec une masse collée en son milieu.

Supposons aussi que la vitesse de rotation de l'arbre soit Ω et que sa raideur transversale soit k . La force de rappel due à la déflexion est donc:

$$F_r = k_r \tag{2.1.1}$$

et la force centrifuge est:

$$F_c = m\Omega^2 (r + e) \tag{2.1.2}$$

En égalisons les deux forces on obtient:

$$r = \frac{m\Omega^2}{k - m\Omega^2} \tag{2.1.3}$$

2.1.2 La vitesse critique et l'auto-centrage

Sachant que la fréquence naturelle d'oscillations est donnée par $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$ (équivalence avec le système masse-ressort) la relation (2.1.3) devient :

$$r = \frac{\Omega^2 e}{\omega_n^2 - \Omega^2} \tag{2.1.4}$$

A partir de cette relation qui montre que la valeur de la flèche (r) dépend de la vitesse de rotation Ω (voir Fig. 2.2). On a les constatations suivantes:

- * Si $\omega = \omega_n$, la valeur de r devient infinie. On a un phénomène de résonance et ω_n représente donc une valeur critique. C'est le régime critique.
- * Si $\omega < \omega_n$, r et e ont le même signe. Le centre de gravité se trouve à l'extérieur du plan formé par l'axe de l'arbre en flexion et son axe à l'équilibre comme il est montré sur la figure (2.2) C'est le régime sous-critique.
- * Si $\omega > \omega_n$, r et e ont des signes opposés. Le centre de gravité G se trouve entre les axes de l'arbre en flexion et à l'équilibre. Il a ainsi tourné de 180° de sa position d'équilibre. C'est le régime super critique.
- * Si $\omega \rightarrow \infty$, r tend vers $-e$ et l'arbre va tourner autour du centre de gravité avec une parfaite stabilité. On a ce qu'on appelle l'auto-centrage, c'est le régime hyperstatique.

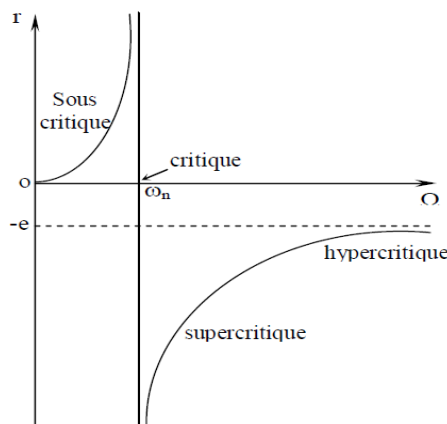


Fig (2.2) Représentation de la flèche en fonction de la vitesse de rotation.

Si l'arbre contient n masses disposées en des endroits différents nous avons pour chaque masse

$\omega^2 = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}}$ et la fréquence critique est donnée par l'équation de Dunkerley:

$$\frac{1}{\omega_{cr}^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i^2} \tag{2.1.5}$$

Mais cette dernière sous-estime la vitesse critique car elle ne tient pas compte de l'effet d'une masse sur la flèche de l'autre.

2.2 LE MODELE DE LAVAL/ JEFFCOTT

2.2.1 Généralité du modelé

Le modèle de base ou élémentaire utilisé dans l'introduction à la compréhension du comportement dynamique vibratoire des arbres et rotors est le modèle connu sous le nom de "rotor de Jeffcott" à propos duquel ce dernier avait publié une étude en 1919[17] . Certain pays européen préfèrent utiliser le nom de "rotor de Laval" en hommage et par souci d'antériorité à l'utilisation du modèle dont Jeffcott n'était peut-être pas au courant. Pour la même raison, la nomination de "rotor de Foppl" est aussi utilisée mais cette dernière n'est pas très connue. Le modèle (voir Fig. 2.3) est essentiellement constitué de:

- Un disque indéformable de masse m et ayant une excentricité e. C'est à dire que son centre de masse et son centre géométrique ne sont pas confondus.
- Un arbre de masse faible et de raideur en flexion k_a .

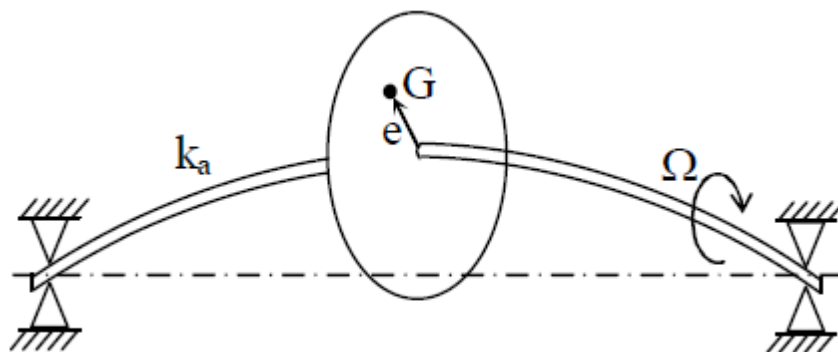


Fig (2.3) Modèle de Laval / Jeffcott.

2.2.2 Analyse sans amortissements

Considérons le cas le plus simple dans lequel on étudie les vibrations de flexion latérales du modèle symétrique de Laval/Jeffcott non amorti ou la vitesse de rotation est constante, et la pesanteur et l'effet gyroscopique sont négligés.

Quand le système est en rotation on a un phénomène de tournoiement (whirling) qui fait que les centres géométrique et de gravité du disque vont osciller dans un plan perpendiculaire à l'équilibre du système. Ils auront donc deux degrés de liberté qu'on suppose selon les axes ox et oz d'un repère ($oxyz$) (voir fig. 2.4).

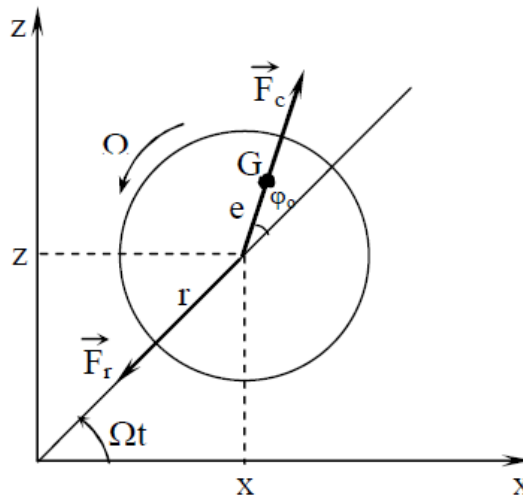


Fig (2.4) Mouvement du centre de gravité du rotor.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au centre du disque est donnée par:

$$\vec{F}_r + \vec{F}_c = m\vec{\gamma} \tag{2.2.1}$$

Avec la force centrifuge, en module $F_r = me\Omega^2$, les projections sur les axes ox et oz donnent :

$$\begin{cases} -k_a x + me\Omega^2 \cos(t\Omega + \varphi_0) = m\ddot{x} \\ -k_a z + me\Omega^2 \sin(t\Omega + \varphi_0) = m\ddot{z} \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Ou:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{k_a}{m}x = e\Omega^2 \cos(t\Omega + \varphi_0) \\ \ddot{z} + \frac{k_a}{m}z = e\Omega^2 \sin(t\Omega + \varphi_0) \end{cases} \tag{2.2.3}$$

On a deux équations découplées non homogènes dont les solutions doivent être la superposition de solutions homogènes et particulières soient :

$$x = x_h + x_p \text{ et } z = z_h + z_p.$$

$$\begin{cases} x_h = A \cos(\omega_n t + \varphi) \\ z_h = B \cos(\omega_n t + \psi) \end{cases} \quad (2.2.4)$$

où la fréquence naturelle ou propre :

$$\begin{cases} x_p = A_e \cos(\Omega t + \varphi_e) \\ z_p = B_e \sin(\Omega t + \psi_e) \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Les solutions homogènes x_h et z_h des équations sans seconds membres représentent deux mouvements harmoniques simples qui s'effectuent selon deux directions orthogonales ox et oz . Leur composition donne un mouvement plan dont la forme de la trajectoire dépend des constantes A , B , φ et ψ qui se déterminent en considérant les conditions initiales. Selon Lissajous on a les cas suivants (voir chapitre 1) :

- * Si $\varphi - \psi = 0$, la courbe est un segment de droite de pente positive.
- * Si $\varphi - \psi = \pi$, la courbe est un segment de droite de pente négative.
- * Si $\varphi - \psi = \pi/2$ et $A = B$, la courbe est un cercle tournant de z vers x .
- * Si $\varphi - \psi = -\pi/2$ et $A = B$, la courbe est un cercle tournant de x vers z .
- * $\varphi - \psi < 0$ la courbe est une ellipse tournante de z vers x .
- * $\varphi - \psi > 0$ la courbe est une ellipse tournante de x vers z .

D'autre part les constantes A_e , φ_e , B_e et ψ_e des solutions particulières se déterminent en sachant que ces dernières vérifient leurs équations correspondantes avec seconds membres. Leurs expressions sont donc :

$$A_e = B_e = \frac{e\Omega^2}{-\Omega^2 + \omega_n^2} \quad \text{et } \varphi_e = \psi_e = \varphi_0 \quad \text{si } \omega < \omega_n \quad (2.2.6)$$

ou bien :

$$A_e = B_e = \frac{-e\Omega^2}{-\Omega^2 + \omega_n^2} \quad \text{et } \varphi_e = \psi_e = \varphi_0 + \pi \quad \text{si } \omega > \omega_n \quad (2.2.7)$$

Et les solutions particulières sont dans les deux cas égales à :

$$x_p = \frac{e\Omega^2}{-\Omega^2 + \omega_n^2} \cos(\Omega t + \varphi_0) \quad (2.2.8)$$

$$z_p = \frac{e\Omega^2}{-\Omega^2 + \omega_n^2} \sin(\Omega t + \varphi_0) \quad (2.2.9)$$

Celles-ci représentent deux mouvements harmoniques simples ayant la même amplitude et déphasés d'un angle de $\pi/2$. Leur composition donne d'après Lissajous une trajectoire circulaire de rayon $e\Omega^2/(-\Omega^2 + \omega_n^2)$. Cependant on remarque que cette dernière relation est la même que la relation (2.1.4). Une chose évidente puisque c'est le même phénomène physique du whirling sauf qu'ici il s'effectue en deux directions perpendiculaires. Le mouvement résultant est ainsi la superposition de deux trajectoires dont la première est la composition des solutions homogènes (ellipse, cercle ou segment de droite) et la deuxième est la composition des solutions particulières (cercle).

Les mêmes constatations peuvent être faites sur l'amplitude de cette solution particulière qui est le rayon de la trajectoire circulaire. Pour mieux les expliquer on considère la projection de l'excentricité e sur le prolongement de r qui est égal à $e \cos\phi_0$. On a alors (voir Fig. 2.5) :

* Si $\Omega < \omega_n$ (régime sous critique),

$r/e < 0$ et ainsi $\phi_0 < \pi/2$

Le centre de gravité se trouve extérieur au centre géométrique.

* Si $\Omega > \omega_n$ (régime super critique),

$r < 0$ et ainsi $\phi_0 > \pi/2$

Le centre de gravité intérieur au centre géométrique.

* Si $\Omega = \omega_n$ (régime critique), on a la valeur intermédiaire au cas précédents d'où $\phi = 2\pi$.

Mais théoriquement si $r \rightarrow \infty$, e sera négligeable.

* Si $\Omega \rightarrow \infty$, (régime hypercritique), $r/e \rightarrow -1$ d'où $\phi_0 \rightarrow -\pi$.

On a dans ce cas l'auto centrage.

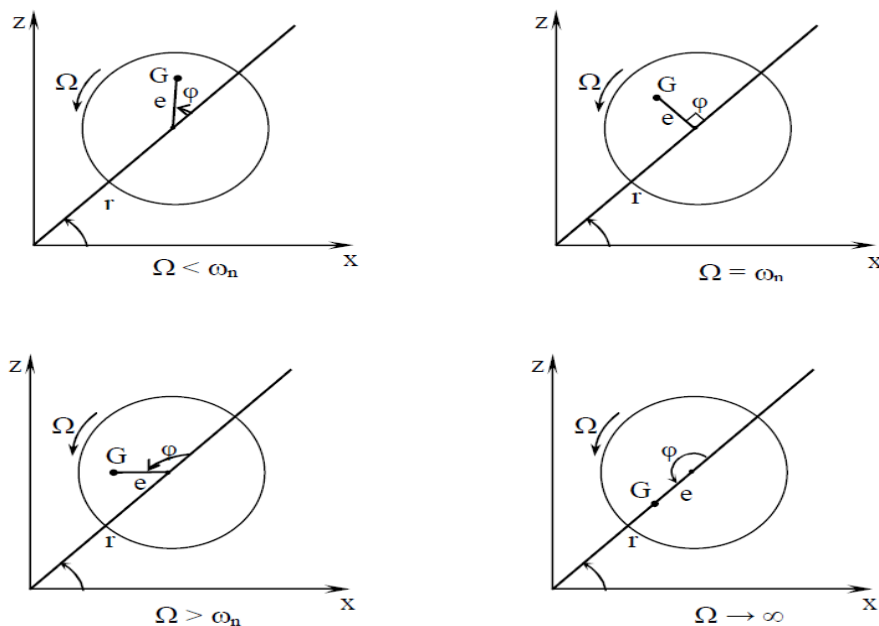


Fig (2.5) Position du centre de gravité selon la valeur de la vitesse de rotation.

2.3 MODELE AVEC PALIERS FLEXIBLES : CAS ISOTROPIQUE

Prenons maintenant le modèle simple de Laval Jeffcott sur deux supports flexibles identiques et considérons le cas où ces deux derniers soient isotropiques, c'est à dire que leurs caractéristiques (raideurs et viscosités) sont les mêmes dans les deux directions ox et oz (voir Fig. 2.6).

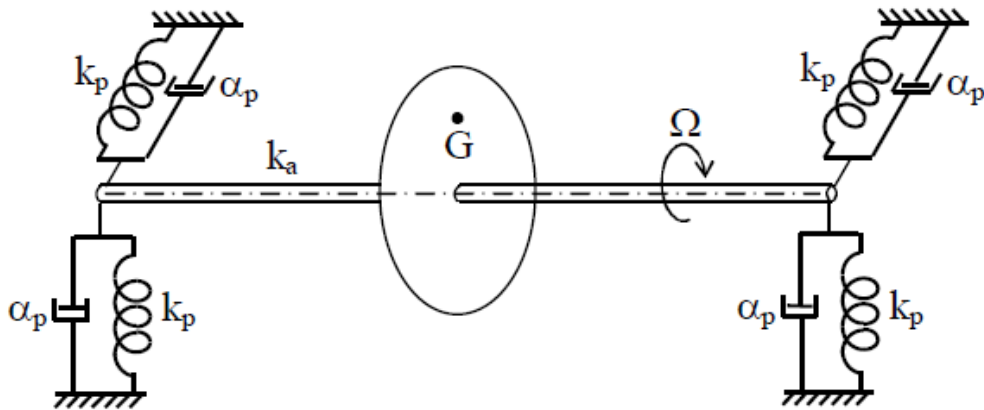
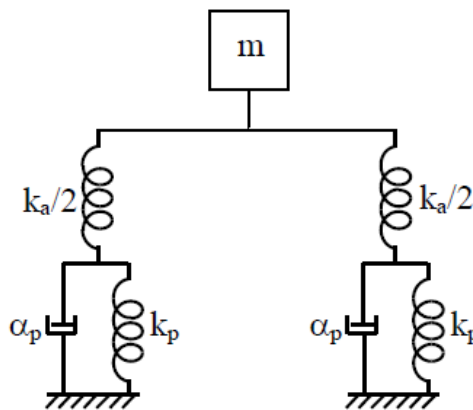


Fig (2.6) Modèle de Laval / Jeffcott sur paliers flexibles.

Pour l'étude du mouvement dans chacune des deux directions nous pouvons représenter le modèle par le système masse- ressort- amortisseur (voir Fig. 2.7)



Fig(2.7) Schéma équivalent du modèle de Laval / Jeffcott sur paliers flexibles.

Les raideurs et les coefficients d'amortissements seront donc pour les deux directions:

$$K = K_x = K_z = \frac{k_a k_p}{2k_a + k_p} \tag{2.3.1}$$

$$\alpha = \alpha_x = \alpha_z = 2\alpha_p \tag{2.3.2}$$

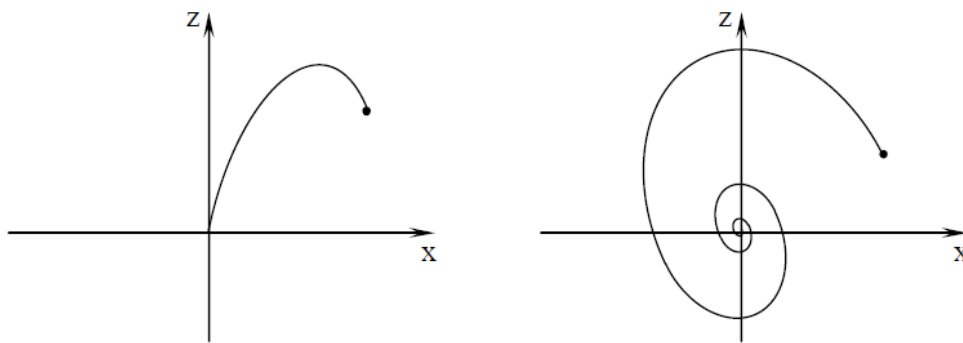
Les équations différentielles régissant le mouvement du système, s'écrivent alors :

$$\begin{cases} -kx + \alpha\dot{x} + m\Omega^2 \cos \Omega t = m\ddot{x} \\ -kz + \alpha\dot{z} + m\Omega^2 \sin \Omega t = m\ddot{z} \end{cases} \quad (2.3.3)$$

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = e\Omega^2 \cos \omega_e t \\ \ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = e\Omega^2 \sin \omega_e t \end{cases} \quad (2.3.4)$$

Ceux sont donc deux équations découplées non homogènes dont les solutions vont être la superposition de solutions homogènes $x = x_h + x_p$ et particulières $z = z_h + z_p$. Pour les solutions homogènes on considère les solutions des équations sans seconds membres. Si les frottements sont négligées les résultats sont exactement les mêmes que ceux du paragraphe précédent (équation 2.2.4) en remplaçant seulement k_a par k . Par contre si l'amortissement est considéré, les solutions homogènes vont dépendre de la valeur de celui-ci. Nous avons trois cas possibles pour les deux directions ox et oz , et qui sont les régimes apériodiques, apériodiques critiques ou pseudo périodiques (voir chapitre1).

Ces derniers sont exponentiellement amortis (solutions transitoires) et leur composition donne un mouvement plan amorti, c'est-à-dire allant vers l'origine. L'allure est donnée pour les cas apériodique / apériodique ou apériodique critique / apériodique critique sur la figure (2.8a) et pseudo périodique / pseudo périodique sur la figure (2.8b).



(a) Apériodique / apériodique.

(b) Pseudo périodique / pseudo périodique.

Fig(2.8) Représentation du régime transitoire

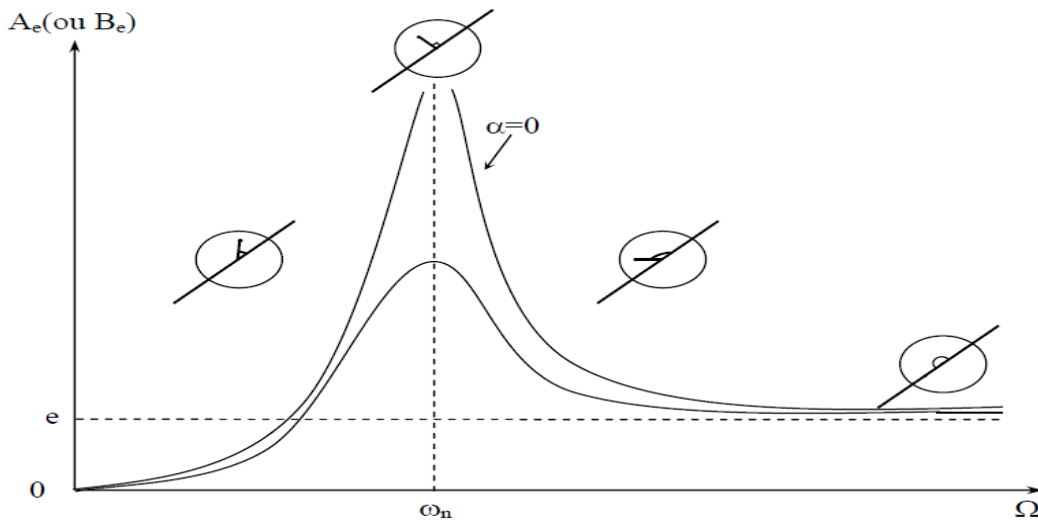
En ce qui concerne les solutions particulières, elles ont la même forme que l'excitation. C'est à dire elles sont harmoniques de la forme donnée par (2.2.5) mais avec les constantes Ae , φ_e , Be et ψ_e données par :

$$A_e = B_e = \frac{e\Omega^2}{\sqrt{(-\Omega^2 + \omega_n^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}} \quad (2.3.5)$$

$$\varphi_e = \psi_e = -\text{arctg}\left(\frac{2\lambda\Omega}{-\Omega^2 + \omega_n^2}\right) \quad (2.3.6)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\alpha}{2m}$$

Leur composition est, d'après Lissajous, une trajectoire circulaire dont le rayon est égal à A_e (ou B_e) et qui dépend de la fréquence d'excitation Ω avec l'allure donnée par la figure (2.9) où les mêmes constatations du cas sans paliers sont faites.



Fig(2.9) Amplitude du régime permanent (courbe de résonance).

2.4 MODELE AVEC PALIERS FLEXIBLES : CAS ANISOTROPIQUE

Si les caractéristiques (raideurs et viscosités) des paliers ne sont pas les mêmes suivant les deux directions ox et oz , on dit qu'ils sont anisotropiques.

Supposons qu'elles soient égales à k_x et α_x suivant ox et à k_z et α_z suivant oz . Dans ce cas les équations différentielles régissant le mouvement du système se réécrivent :

$$\begin{cases} -k_x x + \alpha_x \dot{x} + m e \Omega^2 \cos \Omega t = m \ddot{x} \\ -k_z z + \alpha_z \dot{z} + m e \Omega^2 \sin \Omega t = m \ddot{z} \end{cases} \quad (2.4.1)$$

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{\alpha_x}{m} \dot{x} + \frac{k_x}{m} x = e \Omega^2 \cos \omega_e t \\ \ddot{z} + \frac{\alpha_z}{m} \dot{z} + \frac{k_z}{m} z = e \Omega^2 \sin \omega_e t \end{cases} \quad (2.4.2)$$

On a deux équations découplées non homogènes dont les paramètres ne sont pas les mêmes. Leurs solutions vont bien évidemment être la superposition de solutions homogènes $x = x_h + x_p$ et particulières $z = z_h + z_p$.

Pour les solutions homogènes des équations sans seconds membres, on a la superposition de deux mouvements qui s'effectuent dans des directions perpendiculaires mais avec des fréquences différentes d'où il y a plusieurs possibilités. Lorsque les frottements sont négligés et les fréquences sont multiples (rapport de deux entiers naturels) on a l'une des représentations de Lissajous (voir chapitre1). Si elles sont quelconques on a des courbes planes qui ne se renferment pas (voir aussi chapitre1). Par contre en présence

d'amortissement, on a la superposition de deux mouvements amortis (transitoires) qui tendent vers 0. Un cas similaire au cas du paragraphe précédent. D'autres parts les solutions particulières suivent l'excitation qui est harmonique. Elles ont la forme donnée par (2.2.4) mais avec les constantes A_e , φ_e , B_e et ψ_e égales à :

$$A_e = \frac{e\Omega^2}{\sqrt{(-\Omega^2 + \omega_{nx}^2)^2 + 4\lambda_x^2\Omega^2}} \tag{2.4.3}$$

$$B_e = \frac{e\Omega^2}{\sqrt{(-\Omega^2 + \omega_{nz}^2)^2 + 4\lambda_z^2\Omega^2}} \tag{2.4.4}$$

$$\varphi_e = -\arctg\left(\frac{2\lambda_x\Omega}{-\Omega^2 + \omega_{nx}^2}\right) \tag{2.4.5}$$

$$\psi_e = -\arctg\left(\frac{2\lambda_z\Omega}{-\Omega^2 + \omega_{nz}^2}\right) \tag{2.4.6}$$

$$\omega_{nx} = \sqrt{\frac{k_x}{m}}, \lambda_x = \frac{\alpha_x}{2m} \text{ et } \omega_{nz} = \sqrt{\frac{k_z}{m}}, \lambda_z = \frac{\alpha_z}{2m}$$

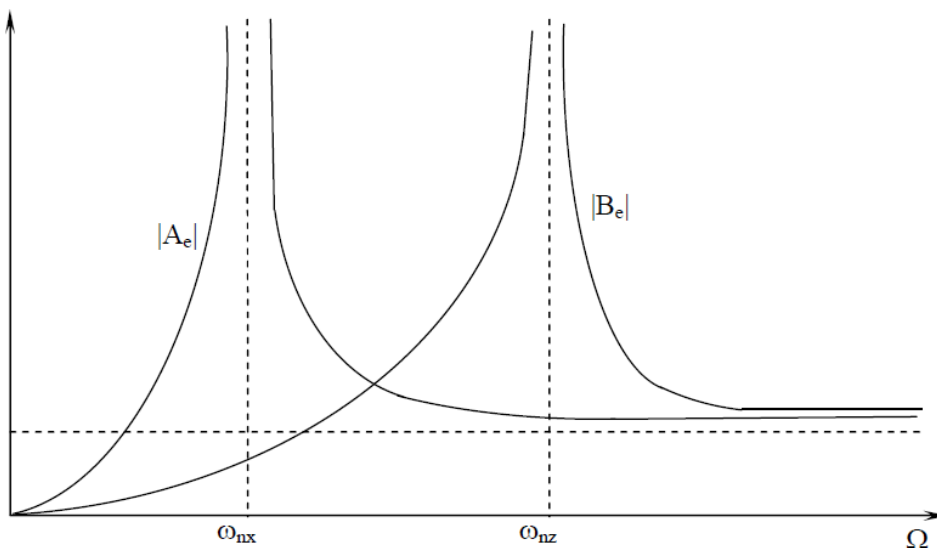


Fig (2.10) Amplitudes du régime permanent (courbes de résonance).

CHAPITRE III

ANALYSE D'UN MODELE DE ROTOR EN FLEXION

INTRODUCTION

Les machines tournantes sont présentes dans ses nombreux secteurs d'activité .elles sont très diverse : comme presseurs turbines, moteurs d'avion, pompes, alternateurs...Elles doivent, dans un sous de qualité, d'efficacité et de serrette, être avec soin au niveau du projet Dans une première étape, les rotors des machines sont dimensionnés à partir de la résistance des matériaux:

-Il s'agit d'avoir un rayon minimal de l'arbre pouvant supporter le couple nominal.

-L'étude du comportement dynamique en torsion est ensuite effectuée, Il s'agit un fonctionnement dans une plage de vitesse comportant une ou des vitesses critiques, Par ailleurs si des régimes des transitoires existent ; par exemple dans les cas d'un mateur électrique lors du démarrage ou lors d'un court – circuit accidentel. Le comportement transitoire doit être étudié ; il fournit alors un rayon de l'arbre supérieur ou rayon minimum d'fini en statique. la dynamique des rotors en flexion doit ensuite être considérée. [18]

Deux effets particuliers sont généralement présent : l'effet gyroscopique (Coriolis) d'aux disques et l'effet d'amortiraient qui peut être très important dans le cas de paliers hydrodynamique dans un premier temps. Il s'agit de prévoir l'évolution des fréquences naturelles en fonction de vitres de rotation : cela permet et déterminer les vitesses critiques et les possibles instabilités dues ou paliers dans un deuxième tempe on calcule en Régine permet. La réponse a des effets de balourd et éventuellement a une force asynchrone.

3.1 CARACTERISTIQUES ENERGETIQUES DES ELEMENTS DU ROTOR

Les éléments de base d'une rotor sont: disque ,arbre et balourd l'énergie de déformation est nécessaire pour caractériser l'arbre , l'expression du travail virtuel des forces dues aux rotor sont obtenues à partir des étapes suivants: L'énergie cinétique T ;l'énergie de déformation U et le travail virtuel des forces extérieurs $\delta\omega$ sont calculer pour tous les éléments du système [19].

Une méthode numérique est chosez : la méthode des éléments finis pour l'application industrielle.

L'équation de Lagrange : sont appliqués sont la forme suivant :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{dq_i} \right) - \frac{dT}{dq_i} + \frac{dU}{dq_i} = F_{q_i} \quad (3.1.1)$$

Ou N ($1 \leq i \leq N$) est le nombre de degrés de liberté, q_i sont les coordonnées généralisées indépendantes F_{q_i} sont les forces généralisées et ou (0) désigne une dérivée par rapport au temps .

3.1.1Disque

Le disque est supposé rigide et donc caractérisé par son énergie cinétique R (x.y.z) est un repère galiléen et R (x.y.z) un repère fixe au disque (fig (3.1)) le système le coordonnées(x.y.z)pas l'intermédiaire des angles ψ .o, ω . Pour déterminer la positon du disque ou tourne initialement d'un angle ψ autour de l'axe Z, puis d'un angle o autour du nouvel axe X_1 noté X_1 : enfin d'un angle ω autour de l'axe de rotation propre du disque Y. le vecteur rotation instantanée traduisant la position du repère (x .y. z) est [19]:

$$\overrightarrow{w_R}_{R_0} = \psi z + \dot{\theta} X_1 + \dot{\phi} y \quad (3.1.2)$$

Ou \vec{z}_1, \vec{x}_1 et \vec{y} sont les vecteurs unitaires des axes $\vec{o}\vec{z}, \vec{o}\vec{x}_1, \vec{o}\vec{y}$, l'énergie cinétique du disque correspondant à son mouvement autour du center de masse o est calculée en utilisant le repère, le vecteur rotation instantanée est :

$$\vec{w}_{R_0} = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \cos \theta \sin \phi & +\dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\phi} & +\dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi & +\dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix} \tag{3.1.3}$$

Soient U et W les coordonnées suivant x,z et y dans R_0 , la coordonnées suivant y est constat, par ailleurs. la masse du disque est M_0 et sont **tenseur d'inertie** en O, comme

x y z sont les directions principales d'inertie, a comme expression.

$$I_{i0} = \begin{bmatrix} I_{dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{dz} \end{bmatrix} \tag{3.1.4}$$

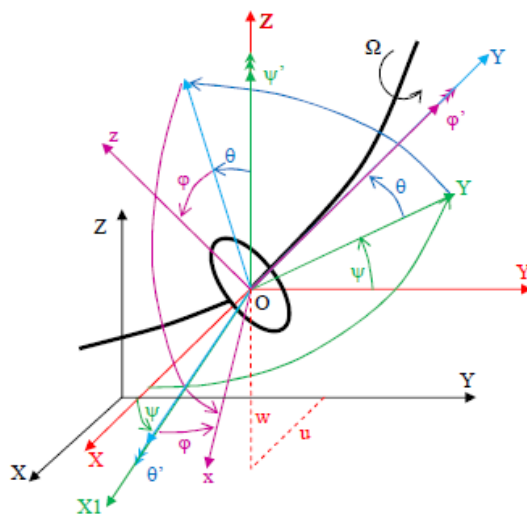


Fig (3.1):repère de référence du disque sue l'arbre flexible.

Ainsi pour déterminer l'orientation du disque on effectue les rotations successives suivantes:

* La précession ψ

Rotation autour de l'axe $o'z$ qui fait passer de $o'xyz$ à $o'x_1y_1z_1$ (voir fig3.2a).

* La nutation θ

Rotation autour l'axe $o'x_1$ qui fait passer de $o'x_1y_1z_1$ à $o'x_1y'z_2$ (voirfig3.2b).

* La rotation propre ϕ

Rotation autour de l'axe $o'y'$ qui fait passer de $o'x_1y'z_2$ à $o'x'y'z'$ (voir Fig. 3.2c).

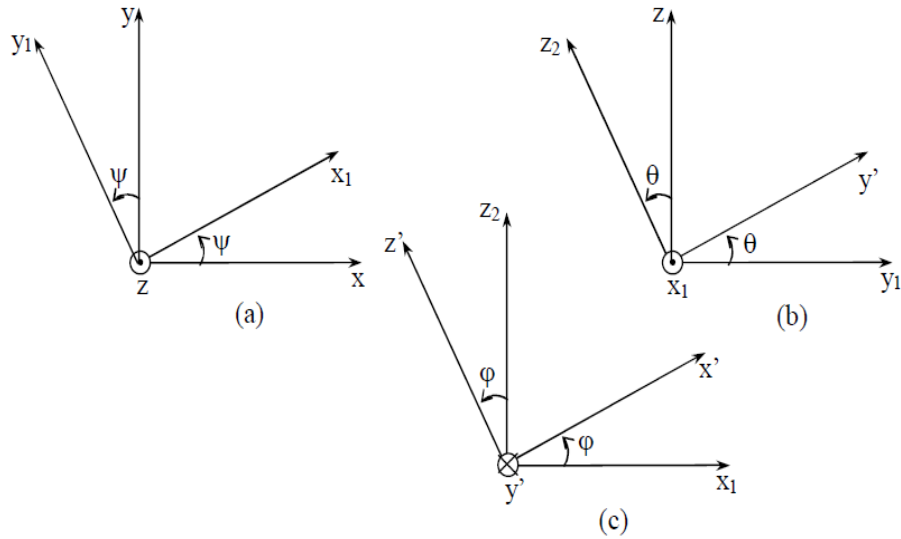


Fig (3.2) angles d'Euler.

L'expression général de l'énergie cinétique du disque s'écrit alors :-

$$T_d = \frac{1}{2} M_d (U^2 + W^2) + \frac{1}{2} (I_{dx} W_X^2 + I_{dy} W_Y^2 + I_{dz} W_Z^2) \tag{3.1.5}$$

Et peut-être simplifiée car le disque est symétrique ($I_{dx} = I_{dz}$). Les angles θ et ψ petits et la vitesse angulaire constant ($\dot{\phi} = \Omega$) l'équation (3.1.5) devient alors

$$T_d = \frac{1}{2} M_d (\dot{U}^2 + \dot{W}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \tag{3.1.6}$$

Ou le terme $\frac{1}{2} I_{dy} \Omega^2$ qui est constant n'a pas d'influence sur les équations du mouvement et représente l'énergie cinétique du disque tournant à la vitesse Ω dans la cas ou tous les autres déplacements sont nuls. Le dernier terme $I_{dy} \dot{\psi}\theta$ représente l'effet gyroscopique (Coriolis).

3.1.2 Arbre

L'arbre qui est flexible est considéré en tant qu'une poutre de section circulaire caractérisée par l'énergie cinétique de déformation [5].

a- énergie cinétique

la formulation général de l'énergie cinétique de l'arbre est un extension de celle du disque (3.1.6). pour un élément e longueur L direction droit constant, l'expression de l'énergie cinétique est :-

$$T_a = \frac{ps}{2} \int_0^L (\dot{U}^2 + \dot{W}^2) dy + \frac{PI}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + pL\Omega^2 + 2pI \int_0^L \dot{\psi}\theta dy \tag{3.1.7}$$

Ou:-

P: est la masse par unité de volume (masse volumétrique).

S: est l'aire de la section droite de la poutre.

I: le moment d'inerte diamétral.

En considérant une masse d'arbre infiniment mince d'épaisseur

$$\frac{\rho s}{2} \int_0^1 (\dot{U}^2 + \dot{W}^2) dy \tag{3.1.8}$$

: l'expression de l'énergie cinétique d'une poutre en flexion.

$$\frac{PI}{2} \int_0^1 (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy \tag{3.1.9}$$

: représente l'effet secondaire de l'inertie de rotation (poutre de Timoshenko).

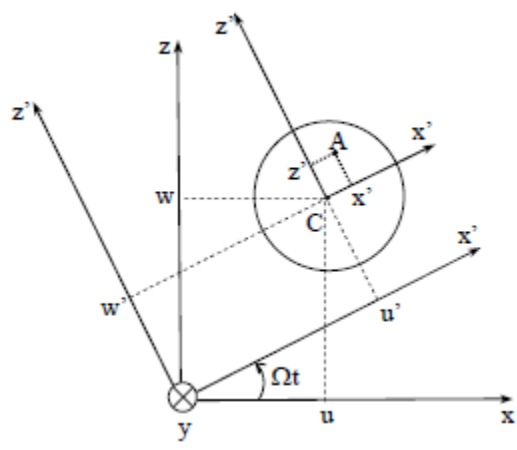
. $PI \Omega^2$: un terme constant, représente l'énergie de rotation de l'arbre il a une contribution nulle dans les équations du mouvement.

$$2\rho I \int_0^1 \dot{\psi} \dot{\theta} dy \tag{3.1.10}$$

: Un terme représentant l'effet gyroscopique.

b. énergie de déformation

Le calcul de l'énergie de déformation de l'arbre s'effectue en considérant le cas d'une poutre flexible en rotation sans à l'effort tranchant. Considérant le point c comme centre géométrique de la poutre et B(x,z) est un point de la section de transversale droit de l'arbre (fig(3.3)) B est module d'Yong , et supassent que ϵ et δ représentant successivement la déformation et la contrainte l'axe de l'arbre Sant \dot{U} et \dot{w} . Sant le déplacement du centre géométrique de l'arbre par rapport au repère x. y .z et le déplacement suivant y'supposé négligeable avec les termes du seconde ordre qui ne sont pas près en compte.



Fig(3.3) section droit de l'arbre.

La déformation longitudinale du point B s'écrit :

$$\varepsilon = -x \frac{d^2 u'}{dy^2} - z \frac{d^2 w'}{dy^2} \quad (3.1.11)$$

L'énergie de déformation a comme expression:

$$U_a = \frac{1}{2} \int_t^0 \varepsilon^T \delta dt \quad (3.1.12)$$

Ou t:est le symbole matriciel de transposition.

τ : est le volume de l'arbre.

- Compte tenu de la loi HOOK $\delta = E\varepsilon$ qui donne la relation entre les contraintes et les déformations on a :

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_{\tau} \varepsilon^2 dt \quad (3.1.13)$$

- Compte tenu de (8) l'énergie de déformation s'écrit :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^l \int_s (-x \frac{d^2 U'}{dy^2} - z \frac{d^2 W'}{dy^2})^2 ds dy \quad (3.1.14)$$

$$= \frac{E}{2} \int_0^l \int_s \left[x^2 \left(\frac{d^2 U'}{dy^2} \right)^2 + z^2 \left(\frac{d^2 W'}{dy^2} \right)^2 + 2xz \frac{d^2 U'}{dy^2} \frac{d^2 W'}{dy^2} \right] ds dy \quad (3.1.15)$$

Par suite du la symétrie de la section l'intégral correspondent au 3^{eme} terme de (3.1.15) est nulle En introduisant les intersts diamètre ales de la section droite par rapport à x et z on a:

$$I_x = \int_s z^2 ds \quad (3.1.16)$$

$$I_z = \int_s x^2 dz \quad (3.1.17)$$

Et l'énergie de déformation à donc comme expression:

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^l \left[I_z \left(\frac{d^2 U'}{dy} \right)^2 + I_x \left(\frac{d^2 w'}{dy^2} \right)^2 \right] dy \quad (3.1.18)$$

a: arbre.

pour éviter des termes périodiques explicitement fonction du temps ; il nécessaires compté tenu des propriétés des paliers, d'exprimer l'énergie de déformation .

$$U' = u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \quad (3.1.19)$$

$$W' = u \sin \Omega t + w \cos \Omega t \quad (3.1.20)$$

L'équation devient alors :

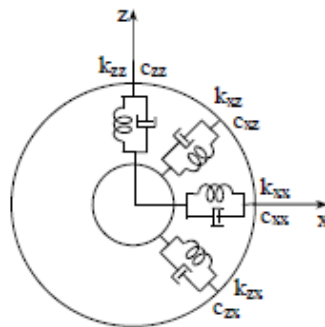
$$W_d = \frac{E}{2} \int_0^1 \left[I_z \left(\cos \Omega t \frac{d^2 u}{dy^2} - \sin \Omega t \frac{d^2 w}{dy^2} \right)^2 + I_x \left(\sin \Omega t \frac{d^2 w}{dy^2} + \cos \Omega t \frac{d^2 u}{dy^2} \right)^2 \right] dy \quad (1.1.21)$$

Finalement pour le cas le plus courant d'un arbre symétrique (ou $I_x = I_y$) l'énergie de déformation s'écrit :

$$U_a = \frac{EI}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} \right)^2 \right] dy \quad (3.1.21)$$

3.1.3 Palier

D'une manière générale les palier qui induisent des forces extérieures agissant sur l'arbre comportant des caractéristique de raideur et d'amortissement ces caractéristique sont sur le plan de la section droit selon les direction montrée sur le fig (3.4), les caractéristique de raideur et d'amortissement sont supposées comme [6] .



Fig(3.4) amortissement et raideur d'un palier.

Dans celle-ci on a :

$$k_{xx} \quad k_{zz} - C_{xx} \quad C_{zz}$$

les rigidité et les amortissement selon les direction x et z de l'arbre.

$k_{xx} \quad k_{zz} - C_{xx} \quad C_{zz}$ les rigidité et les amortissement dans une direction ils représentent des constants d'accouplement.

le travail virtuel : $\delta \omega$ des forces extérieures agissant sur l'arbre se met sous la forme :

$$\delta W = -K_x \cdot U \delta u - k_{xz} W \delta u - k_{zz} W \delta w - k_{zx} U \delta W - C_{xx} \dot{U} \delta u - C_{zz} \dot{W} \delta w - C_{zx} \dot{U} \delta w \quad (3.1.22)$$

Ou sous une forme plus compacte

$$\delta W = F_u \delta u + F_w \delta w \quad (3.1.23)$$

F_u et F_w SONT les composants de la force généralisée et s'expriment sous la forme matricielle suivant :

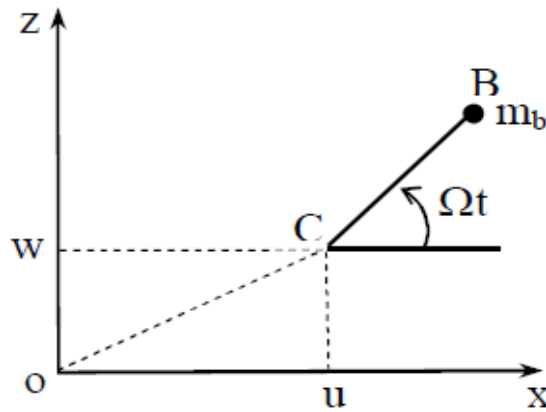
$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xz} \\ K_{zx} & K_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xz} \\ C_{zx} & C_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.1.24)$$

Fréquence en particulier dans le cas de palier hydrodynamique :

$$k_{xx} \neq k_{zz} ; C_{xx} \neq C_{zz} ; \text{ et } K_{zx} \neq K_{xz} ; k_{zx} \neq K_{xz} ; C_{xz} \neq C_{zx}$$

3.1.4 Balourd

Le balourd qui est caractérisé par son énergie cinétique est du lorsque une masse m se trouve en un point D dans le plan du disque à une certaine distance d de son centre géométrique (voir fig (3.5)).



Fig(3.5) Mass de balourd.

Dans le repère R_0 OXYZ les coordonnées de la masse sont données par :

$$\overrightarrow{OD} = \begin{bmatrix} u + d \sin \Omega t \\ \text{cte} \\ w + d \cos \Omega t \end{bmatrix} \quad (3.1.25)$$

D'où la vitesse :

$$\mathbf{V} = \frac{d\overrightarrow{OD}}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{u} + d\Omega \cos \Omega t \\ 0 \\ \dot{w} - d\Omega \sin \Omega t \end{bmatrix} \quad (3.1.26)$$

Et l'énergie cinétique :

$$T_b = \frac{m_b}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2d\Omega \dot{u} \cos \Omega t - 2\Omega \dot{w} d \sin \Omega t) \quad (3.1.27)$$

Le terme $m_b \Omega^2 \frac{d^2}{2}$ est constant et donc sans influence sur les équations du mouvement la masse m_b est sans commune mesure avec celle du rotor ; alors l'énergie cinétique peut se mettre sous la forme :

$$T_b = m_b \Omega_d (\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t). \quad (3.1.28)$$

L'application des équation de Lagrange fournit la force tournant due au balourd .

3.2 MISE EN EQUATION DU MODELE

Il s'agit du modèle présenté sur la fig(3.6) $R_0(x, y, z)$ est le repère galiléen ; l'axe du rotor est suivant l'axe y ; et la vitesse de rotation est constante ; un seul degré de liberté est utilisé pour chaque déplacement dans les directions x et z . Le rotor est supposé en appui aux deux extrémités il est constituée :

- d'un arbre de longueur l et de section circulaire constante.
- d'un disque symétrique comportant un balourd ; situé à $y = l_1$.
- d'un palier situé à $y = l_2$.

Les expressions de l'énergie cinétique, de l'énergie de déformation et du travail virtuel établies sont utilisées pour chaque élément et le terme constant apparaissant dans l'expression de l'énergie cinétique est systématiquement négligé.

La modélisation s'effectue par la méthode de Rayleigh RITZ qui est caractérisée par des substitutions des déplacements U et W dans les directions X et Z par des fonctions d'approximation respectivement, les expressions de déplacement sont :

$$u(y,t) = f(y)q_1(t) = f(y)q_1 \tag{3.2.1}$$

$$w(y,t) = f(y)q_2(t) = f(y)q_2 \tag{3.2.2}$$

ou $f(y)$ est la déformée modèle choisie ; et q_1 et q_2 sont des coordonnées généralisées indépendantes et comme nous avons les pentes ψ et θ sont petits fig(3.6) elles sont approximées par :

$$\psi = \frac{du}{dy} = \frac{df(y)}{dy} q_1 = g(y)q_1 \tag{3.2.3}$$

$$\theta = \frac{dw}{dy} = \frac{df(y)}{dy} q_2(t) = g(y)q_2 \tag{3.2.4}$$

Les dérivées du second ordre de U et W sont aussi nécessaires pour exprimer l'énergie de déformation elle s'écrit :

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d^2f(y)}{dy^2} q_1 = h(y)q_1 \tag{3.2.5}$$

$$\frac{d^2w}{dy^2} = \frac{d^2f(y)}{dy^2} q_2 = h(y)q_2 \tag{3.2.6}$$

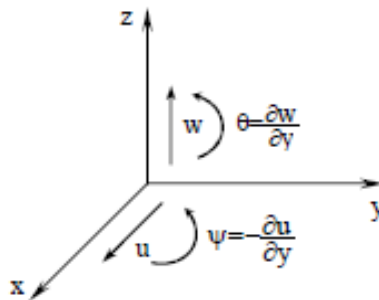
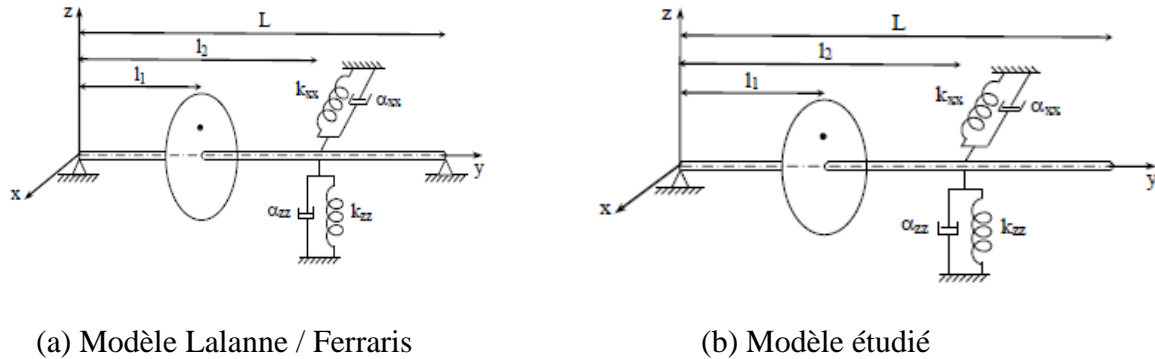


Fig. 3.6 Degrés de liberté.

Le modèle que l'on s'est proposé d'étudier et la démarche sont les mêmes que ceux traités par Lalanne et Ferraris [3] et que l'on trouve dans pas mal de travaux de recherche. Cependant la différence réside dans le fait que l'on ne considère pas les mêmes conditions aux limites et cela pour voir leur effet et une éventuelle comparaison. Lalanne et ferraris ont pris le rotor sur deux appuis fixe alors qu'on la prit sur un appui fixe d'une cote et libre de l'autre fig (3.7.a) et fig (3.7.b).



(a) Modèle Lalanne / Ferraris

(b) Modèle étudié

Fig.(3.7) Rotor considéré.

3.2.1 Modele étudié

Les caractéristique du rotor sont par :

A. Disque

Rayon intern	$R_1=0.01m$	La masse et les inertie du disque sont:
Rayon externe	$R_2=0.15m$	
épaisseur	$h= 0.03m$	$M_d = (R_2^2 - R_1^2)h\rho = 16.47kg$
densité	$\rho=7800kg/m^3$	$I_{dx} = I_{dz} = \frac{M_d}{12} (3R_1^2 + R_2^2 + h^2) = 9.247 * 10^{-2}kg.m^2$
position	$L_1=L/3$	$I_{dz} = \frac{M_d}{2} (R_1^2 + R_2^2 +) = 0.1861kg.m^2$

Tableau (3.1) Les dimensions du disque.

B. L'arbre

longueur	L=.04m	L'aire de la section droit et le moment d'inertie diamétral sont :
Rayon de section droit	R ₁ =0.01m	
Densité:	ρ=7800kg/m ³	S=πR₁²=3.142*10⁻⁴m²
Module de Young	E=2*10 ¹¹ N/m ² =200 GPA	I= $\frac{\pi R_1^2}{4} = 7.854 * 10^{-9} \text{kgm}^4$

Tableau (3.2) Les dimensions du arbre.

C. Balourd

Masse Mb =10⁻⁴kg

Distance d =R₂= 0.15m

D. Palie

K_{xx} =0 , K_{zz} =5*10⁵N/m.

Les fonctions de déplacement :

Pour le modèle étudier, les fonctions de déplacement sont celle du premier mode d'une poutre ; de section constant, en flexion et appuyée en deux extrémité soit :

$$F(y) = \beta_{4n} [\sin \beta_n y + a_n \text{sh} \beta_n y] \tag{3.2.7}$$

$$F(y) = \sin \frac{\pi y}{l} = \sin \frac{\pi y}{0.4} \tag{3.2.8}$$

Avec $A_n = \frac{\sin \beta_n l}{\text{sh} \beta_n l}$ et β_{4n} et une constant qu'on prend égale à un 1 , les expressions générales de l'énergie cinétique (T) de l'énergie de déformation U et du travail virtuel δω peuvent être ainsi obtenues l'énergie cinétique général du système est donnée par:

$$T = T_a + T_b + T_d \tag{3.2.9}$$

Ou T_a est l'énergie cinétique de l'arbre donnée par la formule (3.1.7) T_b l'énergie cinétique du balourd données par la formule(3.1.6)et T_d l'énergie du disque données par la formule (3.1.27).

L'expression de l'énergie cinétique générale après calcul ; est donc:

$$T = 7.147 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 2.871\Omega\dot{q}_1q_2 + 1.299 * 10^{-5}\Omega(\cos\Omega t\dot{q}_1 - \sin\Omega t\dot{q}_2) \quad (3.2.10)$$

L'énergie de déformation total est celle de l'arbre qui à pour expression.

$$U_a = 5.977*10^5(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \quad (3.2.11)$$

Le travail virtuel total du à raideur du palier K_{zz} est:

$$\delta w = -3.75*10^5q_2\delta q_2 \quad (3.2.12)$$

$$D'où : F_{q_1}=0 \quad F_{q_2}=-3.75*10^5q_2 \quad (3.2.13)$$

Le travail virtuel total du à la raideur du palier k_{zz} est :

$$\delta w = F_{q_1}\delta q_1 + F_{q_2}\delta q_2 = -K_{zz}f^2(I_2) \quad (3.2.14)$$

3.3 ETUDE DU MODELE SYMETRIQUE

Pour étudier le système symétrique on a pris la raideur $k_{zz} = 0$ et l'application des équations de Lagrange en utilisant les équations (3.2.10) et (3.2.11) a conduit aux équations du mouvement [7

$$14.75\ddot{q}_1 - 0,7474\Omega\dot{q}_2 + 2,914.10^6q_1 = 1,377.10^{-5}\Omega^2\sin\Omega t \quad (3.3.1)$$

$$14.75\ddot{q}_2 - 0,7474\Omega\dot{q}_1 + 2,914.10^6q_2 = 1,37710^{-5}\Omega^2\sin\Omega t$$

Que l'on peut mettre sous la forme :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 + a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = C\Omega^2f(l_1)\sin\Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = C\Omega^2f(l_1)\cos\Omega t \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Ou bien sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = C\Omega^2 \begin{bmatrix} \sin\Omega t \\ \cos\Omega t \end{bmatrix} \quad (3.3.3)$$

3.3.1 Fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation (digramme de Campbell)

L'étude des solutions homogènes permet d'avoir les fréquences naturelles qui permettent de localiser les vitesses critiques à l'aide du diagramme de Campbell. Pour cela on cherche les solutions qui vérifient le système donné par (3.3.2) et (3.3.1) lorsqu'il est homogène (sans second membre), c'est-à-dire des solutions de la forme [5].

$$\begin{cases} q_{1h} = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) \\ q_{2h} = A_2 \cos(\omega t + \phi_2) \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Qu'on peut mettre sous la forme complexe :

$$\begin{cases} \underline{q}_{1h} = \underline{A}_1 \exp j\omega t \\ \underline{q}_{2h} = \underline{A}_2 \exp j\omega t \end{cases} \quad (3.3.5)$$

Avec $\underline{A}_1 = A_1 \exp j\phi_1$ et $\underline{A}_2 = A_2 \exp j\phi_2$.

Et que l'on reporte dans le système homogène complexe :

$$\begin{cases} m\ddot{\underline{q}}_{1h} + a\Omega\dot{\underline{q}}_{2h} + k\underline{q}_{1h} = 0 \\ m\ddot{\underline{q}}_{2h} + a\Omega\dot{\underline{q}}_{1h} + k\underline{q}_{2h} = 0 \end{cases} \quad (3.3.6)$$

Pour avoir:

$$\begin{bmatrix} k - m\omega^2 & -ja\Omega\omega \\ ja\Omega\omega & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_1 \\ \underline{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.7)$$

Cette dernière équation représente un système linéaire de deux équations à deux inconnues qui sont \underline{A}_1 et \underline{A}_2 avec un paramètre qui est Ω . Les solutions de celui-ci se discutent donc selon Ω où l'on peut utiliser la méthode du déterminant. Alors :

Si **det** $\neq 0$, on a $\underline{A}_1 = \underline{A}_2 = 0$ d'où $q_{1h} = q_{2h} = 0$.

C'est la solution triviale qui est sans intérêt.

Si **det** = 0, on a $\underline{A}_1 = \frac{\theta}{\theta}$ et $\underline{A}_2 = \frac{\theta}{\theta}$.

Ceux sont des formes indéterminées, d'où la possibilité d'avoir des solutions non nulles. Dans ce cas on a :

$$\text{Det} = \begin{bmatrix} k - m\omega^2 & ja\Omega\omega \\ ja\Omega\omega & k - m\omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

(3.3.8)

$$\text{Qui donne: } m^2\omega^4 - (2km + a^2\Omega^2)\omega^2 + k^2 = 0 \quad (3.3.9)$$

On remarque que si $\Omega = 0$ (à l'arrêt), la valeur de ω est égale à

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.3.10)$$

Tandis que pour $\Omega \neq 0$ (rotor tournant), l'équation bicarrée (3.3.6) a un discriminant positif d'où l'on tire deux valeurs réelles positives pour ω égales à :

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{a^2\Omega^2}{2m^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2\omega_0^2}{a^2\Omega^2}} \right)} \quad (3.3.11)$$

$$\text{Et } \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2 \omega_{10}^2}{a^2 \Omega^2}} \right)} \quad (3.3.12)$$

On remarque facilement que l'encadrement de ces valeurs est :

$$\omega_1 < \omega_0 < \omega_2 \quad (3.3.13)$$

Et à partir de (3.3.8) on a :

$$|k - m\omega^2| = a\Omega\omega \quad (3.3.14)$$

Aux deux valeurs ω_1 et ω_2 correspondent donc deux modes pour les coordonnées généralisées q_{1h} et q_{2h} .

* Pour le premier mode où $\omega = \omega_1$, on a :

$$\frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{ja\Omega\omega_1}{k - m\omega_1^2} = \frac{ja\Omega\omega_1}{m(\omega_0^2 - \omega_1^2)} = j \quad (3.3.15)$$

$$\text{Qui donne } A_{11} = A_{21} \text{ et } \varphi_{22} = \varphi_{12} + \pi/2 \quad (3.3.16)$$

$$\text{D'où } q_{1h2} = A_{22} \cos(\omega_2 t + \phi_{12}) \quad (3.3.17)$$

$$q_{2h2} = A_{22} \cos(\omega_2 t + \phi_{22}) = -A_{12} \sin(\omega_2 t + \phi_{12}) \quad (3.3.18)$$

$$U(y, t) = q_{1h2} f(y) = A_{12} \cos(\omega_2 t + \phi_{12}) [\sin \beta_n y + \alpha_n \text{sh} \beta_n y] \quad (3.3.19)$$

$$\text{Et } w(y, t) = q_{2h2} f(y) = A_{22} \sin(\omega_2 t + \phi_{22}) [\sin \beta_n y + \alpha_n \text{sh} \beta_n y] \quad (3.3.20)$$

Le mouvement suivant ox a la même amplitude que celui suivant oz mais il est en avance de $\pi/2$. Les points situés sur l'axe du rotor décrivent donc, d'après Lissajous, des orbites circulaires qui vont de ox vers oz. Elles sont dans le sens opposé au sens de rotation du rotor qui est autour de oy allant Positivement de oz vers ox. On dit dans ce cas qu'on a une précession inverse ou rétrograde (Voir fig. 3.9a).

* Pour le deuxième mode où $\omega = \omega_2$, on a :

$$\frac{A_{12}}{A_{22}} = \frac{ja\Omega\omega_2}{k - m\omega_2^2} = \frac{ja\Omega\omega_2}{m(\omega_0^2 - \omega_2^2)} = -j \quad (3.3.21)$$

$$\text{Qui donne } A_{11} = A_{21} \text{ et } \varphi_{21} = \varphi_{11} - \pi/2. \quad (3.3.22)$$

$$\text{D'où } q_{1h1} = A_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_{11}) \quad (3.3.23)$$

$$q_{2h1} = A_{21} \cos(\omega_1 t + \phi_{21}) = A_{11} \sin(\omega_1 t + \phi_{11}) \quad (3.3.24)$$

$$U(y, t) = q_{1h1} f(y) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_{11}) [\sin \beta_n y + \alpha_n \text{sh} \beta_n y] \quad (3.3.25)$$

$$\text{Et } w(y, t) = q_{2h1} f(y) = A_{11} \sin(\omega_1 t + \phi_{11}) [\sin \beta_n y + \alpha_n \text{sh} \beta_n y] \quad (3.3.26)$$

Le mouvement suivant ox a la même amplitude que celui suivant oz mais il est en retard de $\pi/2$. Les points situés sur l'axe du rotor décrivent donc, d'après Lissajous, des orbites circulaires qui vont de oz vers ox. Elles sont dans le même sens que le sens de rotation du rotor qui est autour de oy allant positivement de oz vers ox. On dit dans cas qu'on a une précession directe (voir fig. 3.9b).

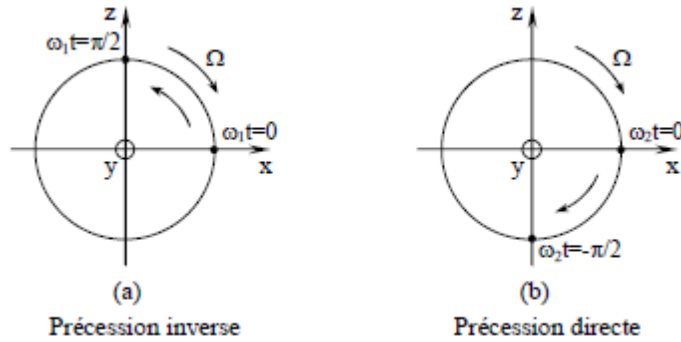


Fig (3.9) orbite du rotor.

3.3.2 Diagramme de Campbell

Pour le rotor défini par les équations du système (3.3.1), l'équation caractéristique

Est donnée suit :

$$\omega^4 + (3,95118 \cdot 10^5 + 2,5675 \cdot 10^{-2} \Omega^2) \omega^2 + 3,9029 \cdot 10^{10} = 0 \quad (3.3.27)$$

La fréquence à l'arrêt :

$$\omega_{10} = \omega_{20} = 444,48 \text{ rd/s} \quad (3.3.28)$$

Les fréquences en rotation sont :

$$\omega_1 = \sqrt{19,75589 \cdot 10^4 + 1,2837 \cdot 10^{-3} \Omega^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{307,78 \cdot 10^6}{\Omega^2}} \right)} \quad (3.3.29)$$

$$\omega_2 = \sqrt{19,75589 \cdot 10^4 + 1,2837 \cdot 10^{-3} \Omega^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{307,78 \cdot 10^6}{\Omega^2}} \right)} \quad (3.3.30)$$

Par le diagramme de Campbell (voir figure 3.10) les fonctions $\omega_1 = \omega_1(\Omega)$ et $\omega_2 = \omega_2(\Omega)$ sont représentées coupées par les droites $\omega = \Omega$ (cas synchrone) et $\omega = s\Omega$ (cas asynchrone avec $s = 0,5$) et donnant les points d'intersections A et B pour le premier C et D pour le deuxième. Les valeurs des fréquences correspondantes à ces points sont obtenues en substituant $\omega = s\Omega$ dans (3.3.9), ce qui donne :

$$S^4 m^2 \Omega^4 - (2km + a^2 \Omega^2) s^2 \Omega^2 + k^2 = 0 \quad (3.3.31)$$

Soit : $s^2(s^2m^2-a^2)\Omega^4-2kms^2\Omega^2+k^2 = 0$ (3.3.32)

Les solutions de (3.3.32) sont alors :

$\Omega_1 = \sqrt{\frac{k}{s(sm+a)}}$ (3.3.33)

$\Omega_2 = \sqrt{\frac{k}{s(sm-a)}}$ (3.3.34)

ou bien (avec $\omega = s \Omega$) :

$\omega_1 = s \sqrt{\frac{k}{s(sm+a)}}$ (3.3.35)

qui correspond aux points A(s=1) et C(s=0.5) :

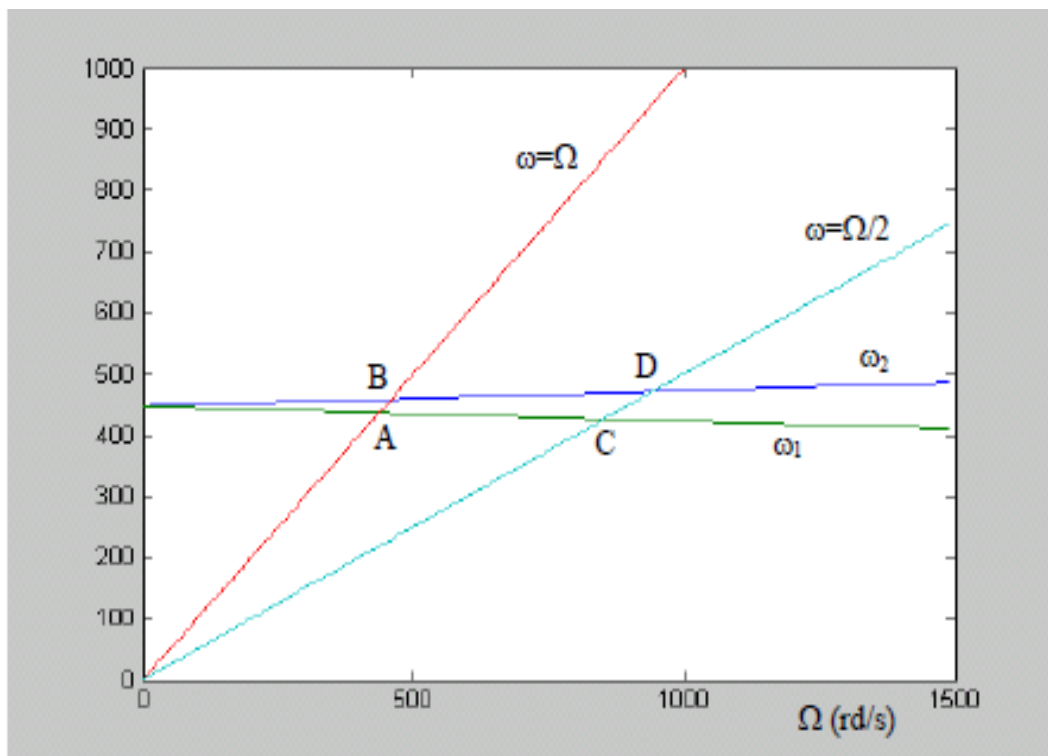
$\omega_2 = s \sqrt{\frac{k}{s(sm-a)}}$ (3.3.36)

qui correspond aux points B(s=1) et D(s=0.5) :

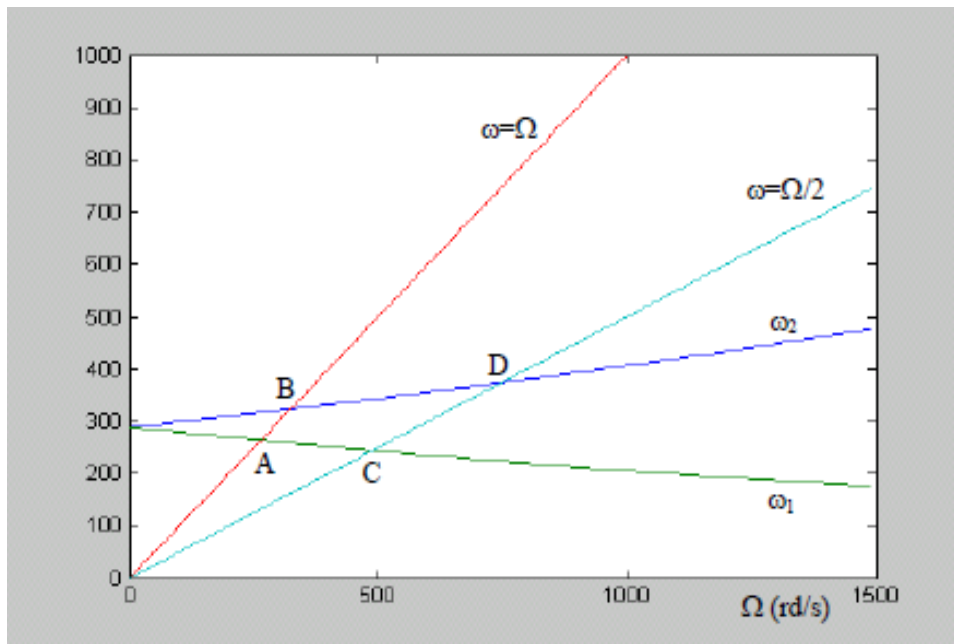
pour le cas étudié on a :

pour A : $\Omega_{c1} = 433,63$ rd/s pour B : $\Omega_{c2} = 456,18$ rd/s

pour C : $\Omega_{c1} = 847,07$ rd/s pour D : $\Omega_{c2} = 937,74$ rd/s



Modèle étudié.



Modèle lalanne-ferraris.

Fig (3.10) diagramme de Campbell.

3.3.3 REPONSE AUX FORCES D'EXCITATION

il s'agit ici de réponse en régime permanent seule la solution particulière des équations complètes (3.3.2) est considérée c'est -à- dire que les forces d'excitations peuvent être dues soit par l'effet du balourd soit par l'effet de forces asynchrones [7].

a) Réponse au balourd

Dans le cas de la présence d'une force d'excitation telle que le balourd, l'étude de la solution particulière se fait en considérant le système avec second membre.

Comme il n'y a pas d'amortissement pour le système d'équations (3.3.2) on cherche des solutions de la forme :

$$\begin{cases} q_{1p} = A_{e1} \cos(\Omega t + \phi_{e1}) \\ q_{2p} = A_{e2} \cos(\Omega t + \phi_{e2}) \end{cases} \quad (3.3.37)$$

Qu'on peut mettre sous la forme complexe :

$$\begin{cases} \underline{q}_{1p} = \underline{A}_{e1} \exp j\Omega t \\ \underline{q}_{2p} = \underline{A}_{e2} \exp j\Omega t \end{cases} \quad (3.3.38)$$

et que l'on reporte dans le système inhomogène complexe :

$$\begin{cases} m \underline{\ddot{q}}_{1p} - a \Omega \underline{\dot{q}}_{2p} + k \underline{q}_{1p} = C \Omega^2 \exp j \left(\Omega t - \frac{\pi}{2} \right) \\ m \underline{\ddot{q}}_{2p} + a \Omega \underline{\dot{q}}_{1p} + k \underline{q}_{2p} = C \Omega^2 \exp j(\Omega t) \end{cases} \quad (3.3.39)$$

Pour avoir :

$$\begin{bmatrix} k - m\Omega^2 & -ja\Omega^2 \\ ja\Omega^2 & k - m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_{e1} \\ \underline{A}_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\Omega^2 \exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right) \\ C\Omega^2 \end{bmatrix} \quad (3.3.40)$$

Cette dernière équation représente un système linéaire de deux équations à deux inconnues qui sont \underline{A}_{e1} et \underline{A}_{e2} avec un paramètre qui est Ω . Les solutions dépendent de ce dernier et la méthode du déterminant nous donne :

$$\begin{aligned} \underline{A}_{e1} &= \frac{\begin{vmatrix} C\Omega^2 e^{-j\pi/2} & -ja\Omega^2 \\ C\Omega^2 & k - m\Omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k - m\Omega^2 & -ja\Omega^2 \\ ja\Omega^2 & k - m\Omega^2 \end{vmatrix}} = \frac{C\Omega^2(k - m\Omega^2)e^{-j\pi/2} + jaC\Omega^4}{[(k - m\Omega^2)^2 - a^2\Omega^4]} \\ &= \frac{jC\Omega^2(-k - m\Omega^2 + a\Omega^2)}{[(k - m\Omega^2) + a\Omega^2][(k - m\Omega^2) - a\Omega^2]} = \frac{-jC\Omega^2}{[k + (a - m)\Omega^4]} \end{aligned} \quad (3.3.41)$$

$$\begin{aligned} \underline{A}_{e2} &= \frac{\begin{vmatrix} k - m\Omega^2 & C\Omega^2 e^{-j\pi/2} \\ ja\Omega^2 & C\Omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k - m\Omega^2 & -ja\Omega^2 \\ ja\Omega^2 & k - m\Omega^2 \end{vmatrix}} = \frac{C\Omega^2(k - m\Omega^2) + jaC\Omega^4 e^{-j\pi/2}}{[(k - m\Omega^2)^2 - a^2\Omega^4]} \\ &= \frac{C\Omega^2(k - m\Omega^2 - a\Omega^2)}{[(k - m\Omega^2) + a\Omega^2][(k - m\Omega^2) - a\Omega^2]} = \frac{-jC\Omega^2}{[k + (a - m)\Omega^4]} \end{aligned} \quad (3.3.42)$$

Des relations (3.3.41) et (3.3.42) on obtient $\varphi_{e1} = -\pi/2$, $\varphi_{e2} = 0$

$$\text{Et} \quad \underline{A}_{e1} = \underline{A}_{e2} = \frac{C\Omega^2}{[k + (a - m)\Omega^4]} \quad (3.3.43)$$

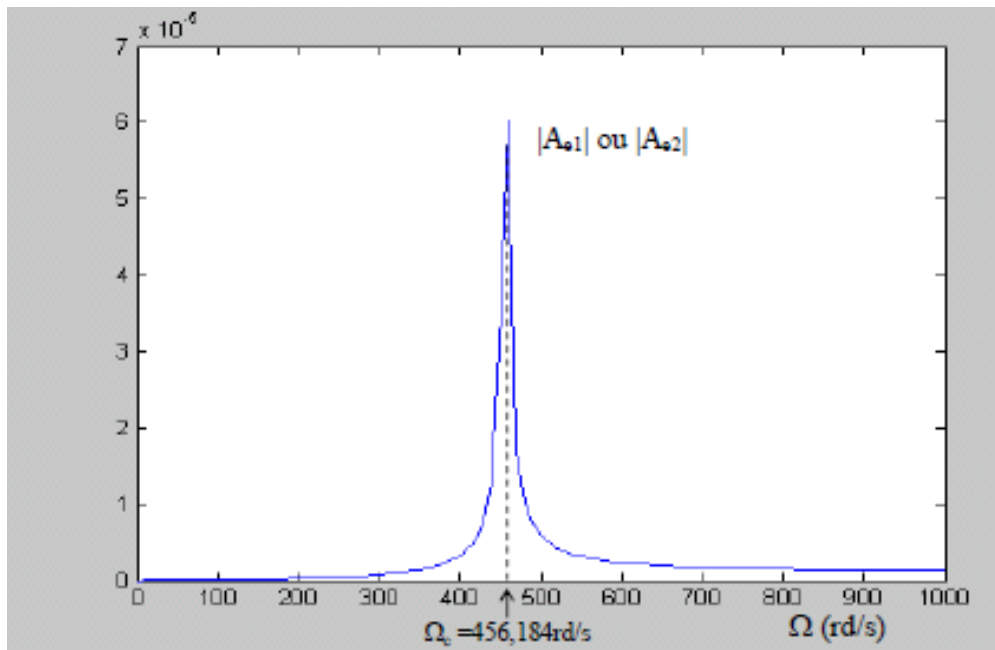
D'où $q_{1p} = \underline{A}_{e1} \sin \Omega t$ et $q_{2p} = \underline{A}_{e2} \cos \Omega t$

La vitesse critique Ω_c correspond à la vitesse qui rend les déplacements indéfinis.

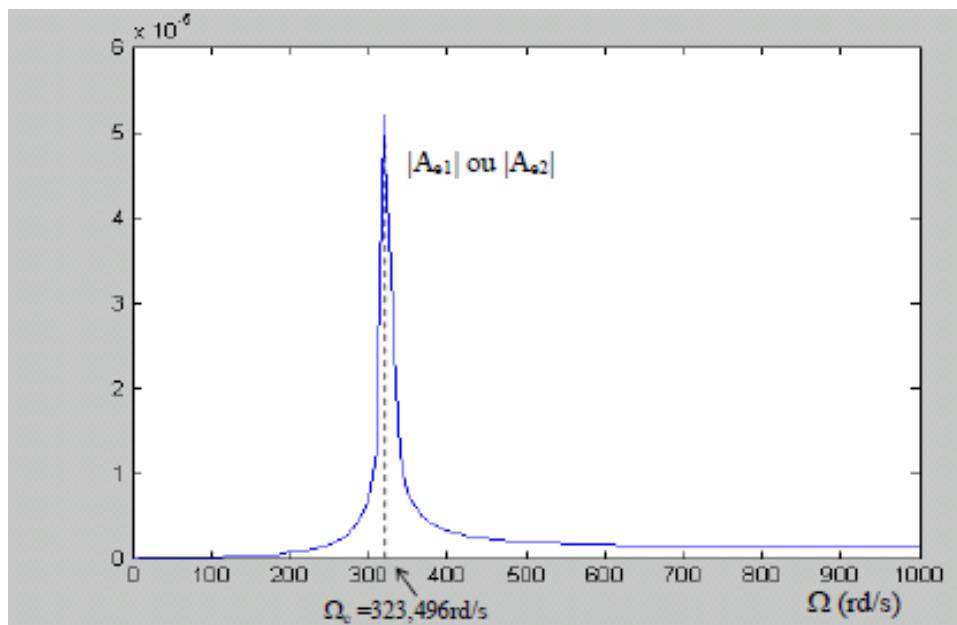
L'annulation du dénominateur de (3.3.43) donne $\Omega_c = \sqrt{k/(m - a)}$. Celle-ci montre qu'il y a une seule valeur critique qui correspond à Ω_2 pour $s=1$.

La valeur qui correspondant à ce cas est celle du point B. Et comme $\underline{A}_{e1} = \underline{A}_{e2}$ et $\underline{A}_{e1}\underline{A}_{e2} > 0$, les orbites décrites par l'axe du rotor sont des cercles et de précession directe.

Pour le cas étudié on a $\underline{A}_{e1} = \underline{A}_{e2} = \frac{1,377 \cdot 10^{-5} \Omega^2}{2,914 \cdot 10^6 - 14 \Omega^2}$ et dont l'allure est représentée sur la figure (3.11) avec celle obtenue par Lalanne et Ferraris. On remarque que lorsque Ω croit la valeur limite du déplacement est : $|\underline{A}_{e1}| = |\underline{A}_{e2}| = \left| \frac{c}{a-m} \right|$, Ce qui donne pour notre cas : $|\underline{A}_{e1}| = |\underline{A}_{e2}| = 9,8357 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.



Modèle étudié.



Modèle Lalanne-Ferraris .

Fig (3.11) Réponse au balourd.

b) Réponse a une force asynchrone

Le rotor peut aussi être excité, pendant son fonctionnement, par une force asynchrone. C'est une force d'amplitude constante F_0 et une vitesse Ω_s différente de celle du rotor. Si la force est appliquée en L3 nous aurons :

$$F_{q1} = F_0 f(l_3) \sin s\Omega t = F \sin s\Omega t \quad (3.3.44)$$

$$\text{Et } F_{q2} = F_0 f(l_3) \cos s\Omega t = F \cos s\Omega t \quad (3.3.45)$$

Les équations à résoudre seront donc :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 + a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = F \sin s\Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = F \cos s\Omega t \end{cases} \quad (3.3.46)$$

Comme pour le cas précédant on cherche des solutions de la forme :

$$\begin{cases} q_{1p} = A_{e1} \cos(\Omega t + \phi_{e1}) \\ q_{2p} = A_{e2} \cos(\Omega t + \phi_{e2}) \end{cases} \quad (3.3.47)$$

qu'on peut mettre sous la forme complexe :

$$\begin{cases} \underline{q}_{1p} = \underline{A}_{e1} \exp js\Omega t \\ \underline{q}_{2p} = \underline{A}_{e2} \exp js\Omega t \end{cases} \quad (3.3.48)$$

Avec $A_{e1} = A_{e1} \exp j\phi_{e1}$ et $A_{e2} = A_{e2} \exp j\phi_{e2}$.

qu'on peut mettre sous la forme complexe :

$$\begin{cases} m\ddot{\underline{q}}_{1p} - a\Omega\dot{\underline{q}}_{2p} + k\underline{q}_{1p} = F j \left(s\Omega t - \frac{\pi}{2} \right) \\ m\ddot{\underline{q}}_{2p} + a\Omega\dot{\underline{q}}_{1p} + k\underline{q}_{2p} = F j(s\Omega t) \end{cases} \quad (3.3.49)$$

Pour avoir :

$$\begin{bmatrix} k - m\Omega^2 & -ja\Omega^2 \\ ja\Omega^2 & k - m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_{e1} \\ \underline{A}_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right) \\ F \end{bmatrix} \quad (3.3.50)$$

Cette dernière équation représente un système linéaire de deux équations à deux inconnues qui sont \underline{A}_{e1} et \underline{A}_{e2} avec un paramètre qui est Ω . Les solutions dépendent de ce dernier et la méthode du déterminant nous donne :

$$\begin{aligned} \underline{A}_{e1} &= \frac{\begin{vmatrix} F e^{-j\frac{\pi}{2}} & -ja\Omega^2 \\ F & k - ms^2\Omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k - ms^2\Omega^2 & -ja\Omega^2 \\ ja\Omega^2 & k - ms^2\Omega^2 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{F(k - ms^2\Omega^2)e^{-j\pi/2} + jaF\Omega^2}{\left[(k - ms^2\Omega^2)^2 - a^2s^2\Omega^4 \right]} = \frac{-jF}{\left[K + (as - ms^2)\Omega^2 \right]} \end{aligned} \quad (3.3.51)$$

$$\underline{A}_{e2} = \frac{\begin{vmatrix} k - ms^2\Omega^2 & Fe^{-j\pi/2} \\ jaS\Omega^2 & F \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} K - ms^2\Omega^2 & -jas\Omega^2 \\ jas\Omega^2 & K - ms^2\Omega^2 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{F(k - ms^2\Omega^2) - jaF\Omega^2 e^{-j\pi/2}}{[(K - ms^2\Omega^2)^2 - a^2s^2\Omega^4]} = \frac{F}{[K + (as - ms^2)\Omega^2]} \quad (3.3.52)$$

Des relations (3.3.41) et (3.3.42) on obtient $\varphi_{e1} = -\pi/2$, $\varphi_{e2} = 0$

$$\text{Et } \underline{A}_{e1} = \underline{A}_{e2} = \frac{F}{[K + (as - ms^2)\Omega^2]} \quad (3.3.53)$$

D'où $q_{1p} = A_{e1} \sin s\Omega t$ et $q_{2p} = A_{e2} \cos s\Omega t$

La valeur critique Ω_c correspond à la vitesse qui rend le déplacement infini, l'annulation donc du dénominateur de (3.3.53) nous ramène à :

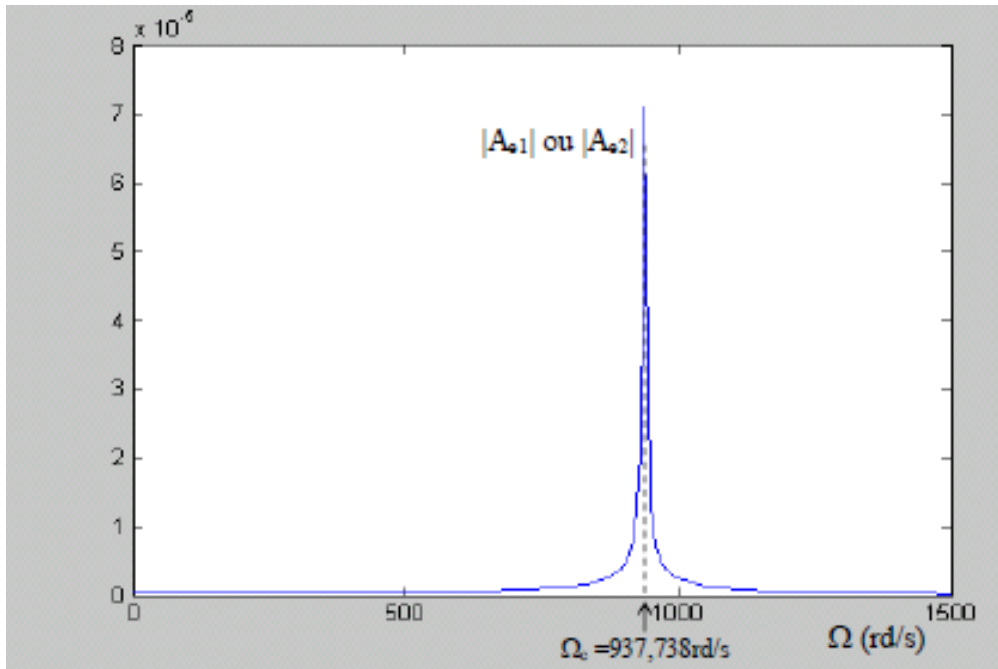
$$\Omega_c = \sqrt{\frac{k}{s(ms - a)}} \quad (3.3.54)$$

on remarque d'après le résultat qu'on a une seule vitesse critique qui correspond à Ω_2 qui est donné par l'équation (3.3.32) et comme $A_{e1} = A_{e2}$, les orbites décrites par l'axe du rotor sont des cercles et de précession directe. Pour le rotor étudié $s = 0,5$ on a :

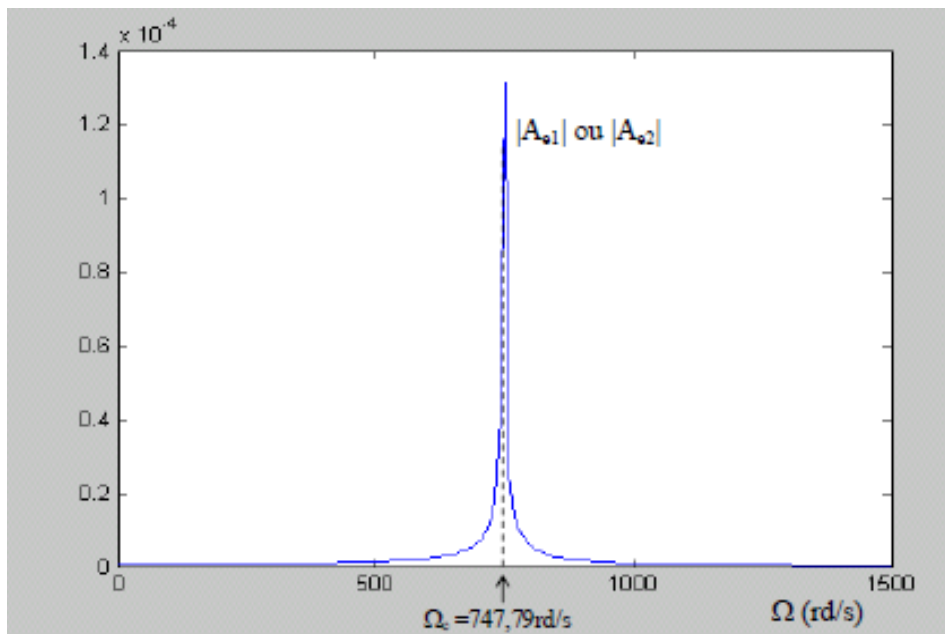
$$A_{e1} = A_{e2} = \frac{F}{2,914 \cdot 10^6 - 3,3138\Omega^2} \quad (3.3.55)$$

la vitesse correspondante à Ω_c est celle du point D.

L'amplitude $A_{e1} = A_{e2}$ est représentée pour $F = 1N$ sur la figure (3.12) pour le modèle étudié et celui de Lalanne-Ferraris.



Modèle étudié



Modèle Lalanne / Ferraris.

Fig (3.12)Modèle Réponse à la force asynchrone .

3.4 ETUDE DU MODELE DISSYMETRIQUE

La dissymétrie est introduite par la présence de la raideur du palier k_{zz} et l'utilisation de l'équation (3.2.14) donne :

$$k_1=k \text{ et } k_2= k+k_{xx}f^2(i_2)$$

Le système d'équations (3.3.1) devient :

$$14.75\ddot{q}_1 - 0.7474\Omega\dot{q}_2 + 2.914*10^6q_1 = 1.377 * 10^{-5}\Omega^2\sin\Omega t \tag{3.4.1}$$

$$14.75\ddot{q}_2 - 0.7474\Omega\dot{q}_1 + 2.962*10^6q_2 = 1.377 * 10^{-5}\Omega^2\sin\Omega t \tag{3.4.2}$$

qu'on peut les mettre sous la forme générale suivante

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 + a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = C\Omega^2\sin\Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = C\Omega^2\cos\Omega t \end{cases} \tag{3.4.3}$$

3.4.1 Détermination des fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation

Pour avoir les fréquences naturelles on cherche les solutions du système (3.4.3) lorsqu'il est homogène (sans second membre), c'est-à-dire des solutions de la forme :

$$\begin{cases} q_{1h} = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) \\ q_{2h} = A_2 \cos(\omega t + \phi_2) \end{cases} \tag{3.4.4}$$

Qu'on peut mettre sous la forme complexe :

$$\begin{cases} \underline{q}_{1h} = \underline{A}_1 \exp j\omega t \\ \underline{q}_{2h} = \underline{A}_2 \exp j\omega t \end{cases} \tag{3.4.5}$$

Avec: $\underline{A}_1 = A_1 \exp j\phi_1$ et $\underline{A}_2 = A_2 \exp j\phi_2$

et que l'on reporte dans le système homogène complexe :

$$\begin{cases} m\underline{\ddot{q}}_{1h} + a\Omega\underline{\dot{q}}_{2h} + k_1\underline{q}_{1h} = 0 \\ m\underline{\ddot{q}}_{2h} + a\Omega\underline{\dot{q}}_{1h} + k_2\underline{q}_{2h} = 0 \end{cases} \tag{3.4.6}$$

Pour avoir:

$$\begin{bmatrix} k_1 - m\omega^2 & -ja\Omega\omega \\ ja\Omega\omega & k_2 - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_1 \\ \underline{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.4.7}$$

Cette dernière équation représente un système linéaire de deux équations à deux inconnues qui sont

A_1 et A_2 avec un paramètre qui est Ω . Les solutions de celui-ci se discutent donc selon Ω où l'on peut utiliser la méthode du déterminant. Alors :

si $\det \neq 0$, on a $\underline{A}_1 = \underline{A}_2 = 0$ d'où $\underline{q}_{1h} = \underline{q}_{2h} = 0$

C'est la solution triviale qui est sans intérêt

si $\det = 0$, on a $\underline{A}_1 = 0/0$ et $\underline{A}_2 = 0/0$.

Ceux sont des formes indéterminées, d'où la possibilité d'avoir des solutions non nulles.

Dans ce cas on a :

$$\text{Det} = \begin{bmatrix} k_1 - m\omega^2 & ja\Omega\omega \\ ja\Omega\omega & k_2 - m\omega^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.4.8)$$

qui ramène à l'équation caractéristique :

$$m^2\omega^4 - ((k_1 + k_2)m + a^2\Omega^2)\omega^2 + k_1k_2 = 0 \quad (3.4.9)$$

On remarque que si $\Omega = 0$ (à l'arrêt), les racines de (3.4.8) seront égales à :

$$\omega_{10} = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \quad (3.4.10)$$

$$\omega_{20} = \sqrt{\frac{k_2}{m}} \quad (3.4.11)$$

Tandis que pour $\Omega \neq 0$ (rotor tournant), l'équation bicarrée (3.4.9) a un discriminant positif d'où l'on tire deux valeurs réelles positives pour ω égales à :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\omega_{10}^2}{2} + \frac{\omega_{20}^2}{2} + \frac{a^2\Omega^2}{2m^2} - \sqrt{\left(\frac{\omega_{10}^2}{2} + \frac{\omega_{20}^2}{2} + \frac{a^2\Omega^2}{2m^2}\right)^2 - \omega_{10}^2\omega_{20}^2}} \quad (3.4.12)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\omega_{10}^2}{2} + \frac{\omega_{20}^2}{2} + \frac{a^2\Omega^2}{2m^2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_{10}^2}{2} + \frac{\omega_{20}^2}{2} + \frac{a^2\Omega^2}{2m^2}\right)^2 - \omega_{10}^2\omega_{20}^2}} \quad (3.4.13)$$

On obtient facilement l'encadrement de ces valeurs :

$$\omega_1 < \omega_{10} < \omega_{20} < \omega_2 \quad (3.4.14)$$

-pour le premier mode ou $\omega = \omega_1$ on a :

$$\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}} = \frac{ja\Omega\omega_1}{k_1 - m\omega_1^2} = \frac{ja\Omega\omega_1}{m(\omega_{10}^2 - \omega_1^2)} \quad (3.4.15)$$

Qui donne :

$$\frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{a\Omega\omega_1}{m(\omega_{10}^2 - \omega_1^2)} \quad \text{et} \quad \phi_{21} = \phi_{11} - \frac{\pi}{2} \quad (3.4.16)$$

$$D'où \quad q_{1h1} = A_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_{11}) \quad (3.4.17)$$

$$q_{2h1} = A_{21} \cos(\omega_1 t + \phi_{21}) = A_{21} \sin(\omega_1 t + \phi_{11}) \quad (3.4.18)$$

$$U(y, t) = q_{1h1} f(y) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_{11}) [\sin \beta_n y + \alpha \operatorname{sh} \beta_n y] \quad (3.4.19)$$

$$\text{Et} \quad w(y, t) = q_{2h1} f(y) = A_{21} \sin(\omega_1 t + \phi_{11}) [\sin \beta_n y + \alpha \operatorname{sh} \beta_n y] \quad (3.4.20)$$

-pour le deuxième mode ou $\omega = \omega_2$, on a :

$$\frac{A_{12}}{A_{22}} = \frac{ja\Omega\omega_1}{k_1 - m\omega_2^2} = \frac{ja\Omega\omega_2}{m(\omega_{10}^2 - \omega_2^2)} \quad (3.4.21)$$

Qui donne :

$$\frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{a\Omega\omega_1}{m(\omega_2^2 - \omega_{10}^2)} \quad \text{et} \quad \phi_{22} = \phi_{12} + \frac{\pi}{2} \quad (3.4.22)$$

$$D'où \quad q_{1h2} = A_{12} \cos(\omega_2 t + \phi_{12}) \quad (3.4.23)$$

$$\text{et} \quad q_{2h2} = A_{22} \cos(\omega_2 t + \phi_{21}) = -A_{12} \sin(\omega_2 t + \phi_{12}) \quad (3.4.24)$$

$$U(y, t) = q_{1h2} f(y) = A_{12} \cos(\omega_2 t + \phi_{12}) [\sin \beta_n y + \alpha_a \operatorname{sh} \beta_n y] \quad (3.4.25)$$

$$\text{Et} \quad w(y, t) = q_{2h2} f(y) = A_{22} \sin(\omega_2 t + \phi_{22}) [\sin \beta_n y + \alpha_a \operatorname{sh} \beta_n y] \quad (3.4.26)$$

Comme on a $A_1 \neq A_2$, les orbites décrites par le rotor sont des ellipses de précession inverse pour le premier mode et de précession directe pour le deuxième [7].

3.4.2 Digramme de Campbell

L'équation caractéristique du système d'équations (3.4.1) est

$$\omega^4 - \left(\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{m^2} \right) \omega^2 + \omega_{20}^2 \omega_{10}^2 = 0 \quad (3.4.27)$$

Ou bien :

$$\omega^4 (3,9837 \cdot 10^5 + 2,5675 \cdot 10^{-3} \Omega^2) \omega^2 + 3,967 \cdot 10^{10} = 0 \quad (3.4.28)$$

Les fréquences à l'arrêt sont :

$$\omega_{10} = \sqrt{\frac{k_1}{m}} = 444.48 \text{ rd/s} \quad (3.4.29)$$

$$\omega_{20} = \sqrt{\frac{k_2}{m}} = 448.12 \text{ rd/s} \quad (3.4.30)$$

Quand le rotor est en rotation ($\Omega \neq 0$) les fréquences sont :

$$\omega_1 = \sqrt{199,185 \cdot 10^3 + 1,284 \cdot 10^{-3} - \sqrt{(199,185 \cdot 10^{-3} + 1,284 \cdot 10^{-3} \Omega^2)^2 - 3,96726 \cdot 10^{10}}} \quad (3.4.31)$$

$$\omega_2 = \sqrt{199,185 \cdot 10^3 + 1,284 \cdot 10^{-3} + \sqrt{(199,185 \cdot 10^{-3} + 1,284 \cdot 10^{-3} \Omega^2)^2 - 3,96726 \cdot 10^{10}}} \quad (3.4.32)$$

Par le diagramme de Campbell (voir Fig. 3.13) les fonctions $\omega_1 = \omega_1(\Omega)$ et $\omega_2 = \omega_2(\Omega)$ sont représentées coupées par les droites $\omega = \Omega$ (cas synchrone) et $\omega = S\Omega$ (cas asynchrone avec $s = 0,5$) et donnant les points d'intersections A et B pour le 1er, et C et D pour le 2nd.

Les valeurs des fréquences correspondantes à ces points sont obtenues en substituant $\omega = S\Omega$ (3.2.10) dans (3.4.8), ce qui donne:

$$S^4 m^2 \Omega^4 (k_1 m + k_2 m + a^2 \Omega^2) s^2 \Omega^2 + k_1 k_2 = 0 \quad (3.4.33)$$

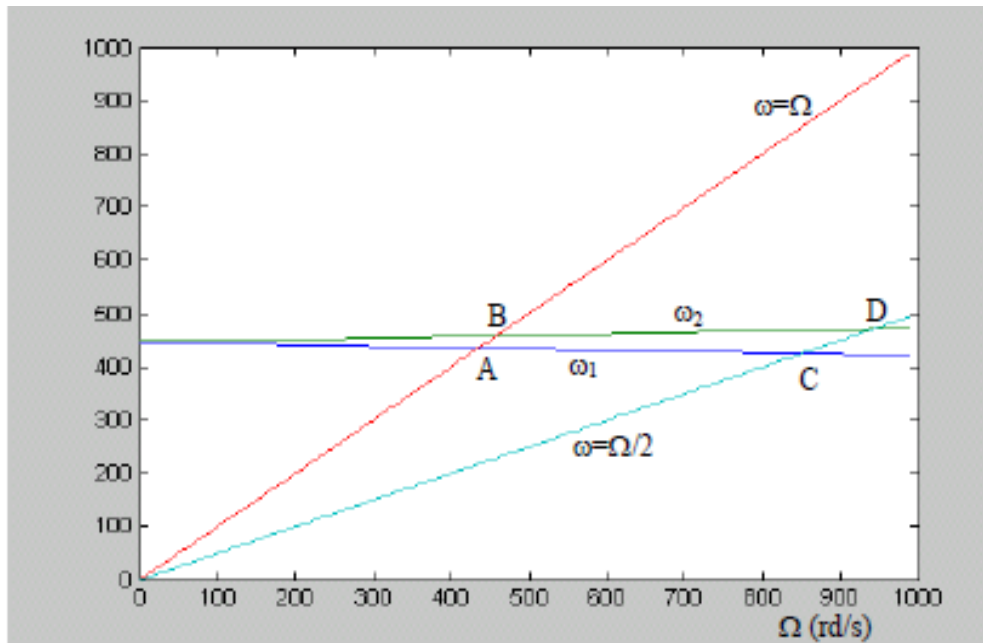
Soit :

$$S^4 (s^2 m^2 - a^2) \Omega^4 - m(k_1 + k_2) s^2 \Omega^2 + k_1 k_2 = 0 \quad (3.4.33)$$

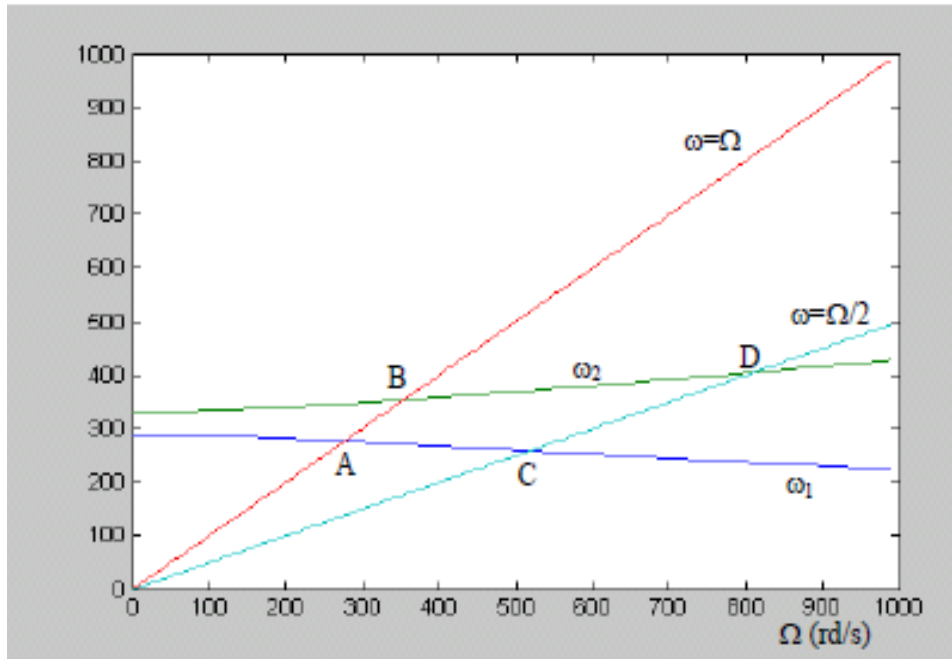
Avec laquelle on obtient Ω_c :

Pour A : $\Omega_{c1} = 435,38$ rd/s . pour B : $\Omega_{c2} = 458,09$ rd/s

Pour C : $\Omega_{c1} = 850,45$ rd/s et pour D : $\Omega_{c2} = 941,65$ rd/s



Modèle étudié



Modèle Lalanne /Ferrairs

Fig (3.13) Diagramme de campbell.

3.4.3 Réponses aux forces d'excitations

a) Réponse au balourd

Dans le cas où l'on considère la force d'excitation due au balourd, l'étude de la solution particulière se fait en considérant le système avec second membre. Pour cela on cherche des solutions de la forme :

$$\begin{cases} q_{1p} = A_{e1} \cos(\Omega t + \phi_{e1}) \\ q_{2p} = A_{e2} \cos(\Omega t + \phi_{e2}) \end{cases} \quad (3.4.34)$$

qu'on peut mettre sous la forme complexe :

$$\begin{cases} \underline{q}_{1p} = \underline{A}_{e1} \exp j\Omega t \\ \underline{q}_{2p} = \underline{A}_{e2} \exp j\Omega t \end{cases} \quad (3.4.35)$$

Avec: $\underline{A}_{e1} = A_{e1} \exp j\phi_{e1}$ et $\underline{A}_{e2} = A_{e2} \exp j\phi_{e2}$.

et que l'on reporte dans le système inhomogène complexe :

$$\begin{cases} m \underline{\ddot{q}}_{1p} - a \Omega \underline{\dot{q}}_{2p} + k_1 \underline{q}_{1p} = C \Omega^2 \exp j \left(\Omega t - \frac{\pi}{2} \right) \\ m \underline{\ddot{q}}_{2p} + a \Omega \underline{\dot{q}}_{1p} + k_2 \underline{q}_{2p} = C \Omega^2 \exp j(\Omega t) \end{cases} \quad (3.4.36)$$

Pour avoir

$$\begin{bmatrix} k_1 - m\Omega^2 & -ja\Omega^2 \\ ja\Omega^2 & k_2 - m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_{e1} \\ \underline{A}_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\Omega^2 \exp \left(-j \frac{\pi}{2} \right) \\ C\Omega^2 \end{bmatrix} \quad (3.4.37)$$

Cette dernière équation représente un système linéaire de deux équations à deux inconnues qui sont A_{e1} et A_{e2} avec un paramètre qui est Ω . Les solutions dépendent de ce dernier et la méthode du déterminant nous donne :

$$\underline{A}_{e1} = \frac{\begin{vmatrix} C\Omega^2 e^{-j\pi/2} & -ja\Omega^2 \\ C\Omega^2 & k_2 - m\Omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_1 - m\Omega^2 & -ja\Omega^2 \\ ja\Omega^2 & k_2 - m\Omega^2 \end{vmatrix}} = \frac{C\Omega^2(k_2 - m\Omega^2)e^{-j\pi/2} + jaC\Omega^4}{[(k_1 - m\Omega^2)(k_2 - m\Omega^2) - a^2\Omega^4]}$$

$$= \frac{jC\Omega^2(k_2 - m\Omega^2 + a\Omega^4)}{[(k_1 - m\Omega^2)(k_2 - m\Omega^2) - a^2\Omega^4]} \quad (3.4.38)$$

$$\underline{A}_{e2} = \frac{\begin{vmatrix} k_1 - m\Omega^2 & C\Omega^2 e^{-j\pi/2} \\ ja\Omega^2 & C\Omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_1 - m\Omega^2 & -ja\Omega^2 \\ ja\Omega^2 & k_2 - m\Omega^2 \end{vmatrix}} = \frac{C\Omega^2(k_1 - m\Omega^2) + jaC\Omega^4 e^{-j\pi/2}}{[(k_1 - m\Omega^2)(k_2 - m\Omega^2) - a^2\Omega^4]}$$

$$= \frac{C\Omega^2(k_1 - m\Omega^2 + a\Omega^2)}{[(k_1 - m\Omega^2)(k_2 - m\Omega^2) - a^2\Omega^4]} \quad (3.4.39)$$

Des relations (3.4.38) et (3.4.39) on obtient $\varphi_{e1} = -\pi/2, \varphi_{e2} = 0$

$$A_{e1} = \frac{[k_2 - (m+a)\Omega^2]C\Omega^2}{(k_1 - m\Omega^2)(k_2 - m\Omega^2) - a^2\Omega^4} \quad (3.4.40)$$

Et

$$A_{e2} = \frac{[k_1 - (m+a)\Omega^2]C\Omega^2}{(k_1 - m\Omega^2)(k_2 - m\Omega^2) - a^2\Omega^4} \quad (3.4.41)$$

D'où $q_{2p} = A_{e1}\sin\Omega t$ et $q_{1p} = A_{e2}\cos\Omega t$

Comme A_{e1} et A_{e2} sont différentes les orbites décrites par le rotor sont des ellipses. Les expressions des vitesses critiques correspondent à l'annulation du dénominateur de (3.4.40) et de (3.4.41) c'est-à-dire :

$$(k_1 - m\Omega^2)(k_2 - m\Omega^2) - a^2\Omega^4 = 0 \quad (3.4.42)$$

Qui : se réécrit :

$$(m^2 - a^2)\Omega^4 - m(k_1 + k_2)\Omega^2 + k_1 k_2 = 0 \quad (3.4.43)$$

On remarque que cette équation est conforme avec l'équation (3.4.33) pour le cas où $s = 1$. les deux vitesses de rotations critiques correspondent aux points A et B. Cependant le sens de précession est donné par le produit des amplitudes. En effet si $A_{e1} \cdot A_{e2} > 0$ la précession est directe et si $A_{e1} \cdot A_{e2} < 0$ la précession est inverse.

Pour connaître le signe de $A_{e1} \cdot A_{e2}$, il est suffi de connaître le signe de la fonction suivante

$$f(\Omega^2) = [k_1 - (m + a)\Omega^2][k_2 - (m + a)\Omega^2] \tag{3.4.44}$$

qui s'annule pour les deux valeurs : $\Omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m+a}}$ $\Omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m+a}}$

Ces dernières permettent d'avoir le sens de la précession pour chaque valeur de la vitesse de rotation (voir Fig. 3.14).

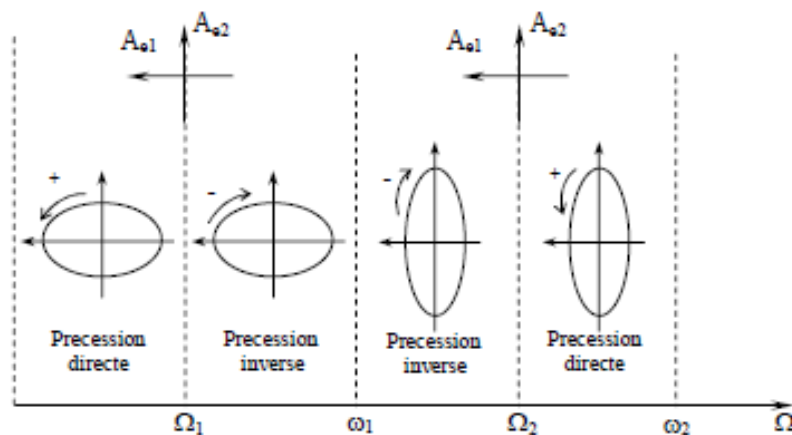


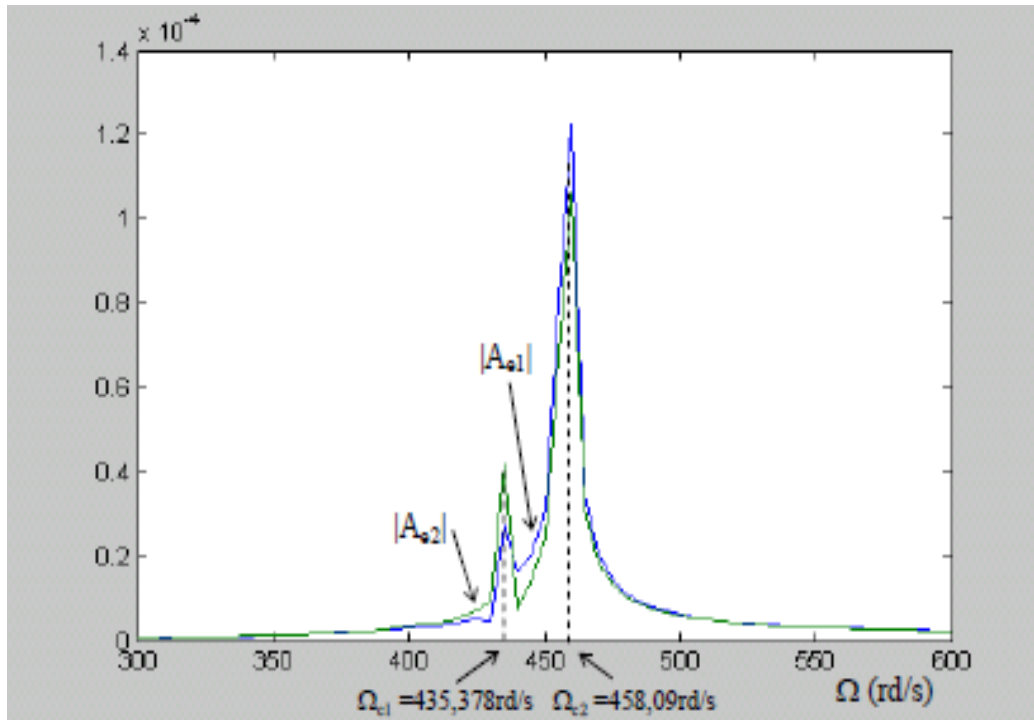
Fig (3.14) variation du sens de la précession.

Pour le modèle de rotor défini par les équations (3.4.1) et (3.4.2) on a :

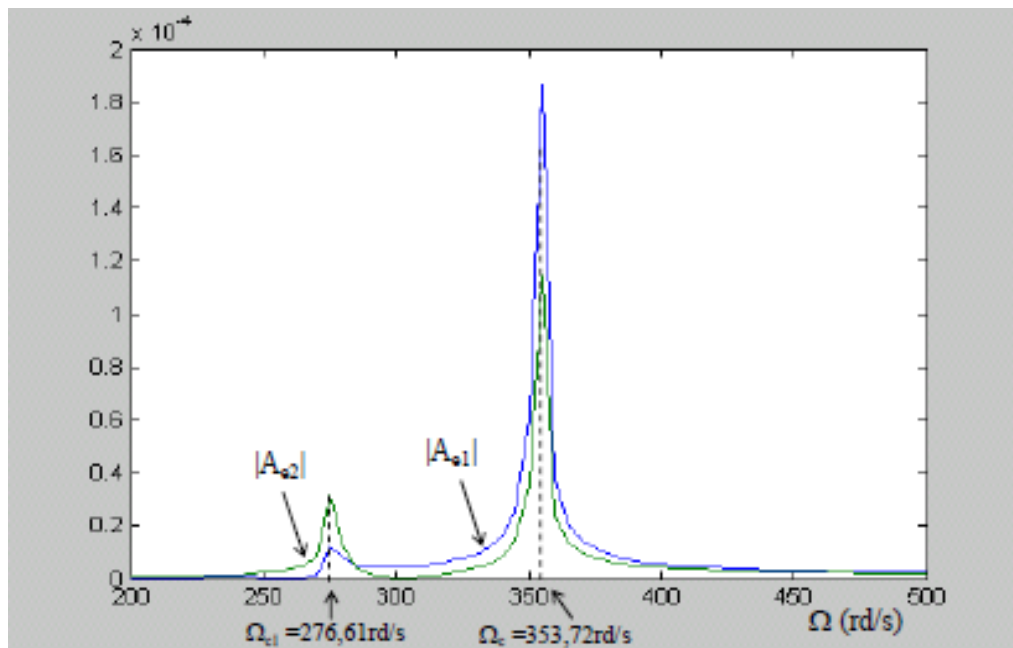
$$A_{e1} = \frac{[2,962 \cdot 10^6 - 15,497 \Omega^2] 1,377 \cdot 10^{-5} \Omega^2}{217 \Omega^4 - 8,667 \cdot 10^7 \Omega^2 + 8,63 \cdot 10^{12}} \tag{3.4.45}$$

$$A_{e2} = \frac{[2,914 \cdot 10^6 - 15,497 \Omega^2] 1,377 \cdot 10^{-5} \Omega^2}{217 \Omega^4 - 8,667 \cdot 10^7 \Omega^2 + 8,63 \cdot 10^{12}} \tag{3.4.46}$$

A_{e1} et A_{e2} sont représentés, en valeur absolue, sur la figure (3.15) où l'on voit que le phénomène de résonance se produit pour deux valeurs critiques contrairement au cas symétrique où il se produit pour une seule valeur. D'autre part quand $\Omega \gg$ les amplitudes A_{e1} et A_{e2} seront égales et tendent vers la valeur constante $9,8338 \cdot 10^{-7} m$.



Modèle étudié



Modèle Lalanne /Ferraris.

Fig(3.15) Réponse au balourd .

b) Réponse a une force asynchrone

en prenons la même forme de force que pour le modèle symétrique, les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 + a\Omega\dot{q}_2 + k_1q_1 = F\sin\Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + k_2q_2 = F\cos\Omega t \end{cases} \quad (3.4.47)$$

En procédant de la même manière que précédemment, c'est-à-dire en cherchant des solutions de la forme :

$$\begin{cases} q_{1p} = A_{e1} \cos(\Omega t + \phi_{e1}) \\ q_{2p} = A_{e2} \cos(\Omega t + \phi_{e2}) \end{cases} \quad (3.4.48)$$

Les calculs nous amènent à :

$$A_{e1} = \frac{[k_2 - (ms^2 + as)\Omega^2]F}{s^2(s^2m^2 - a^2)\Omega^4 - ms^2(k_1 + k_2)\Omega^2 + k_1k_2} \quad (3.4.49)$$

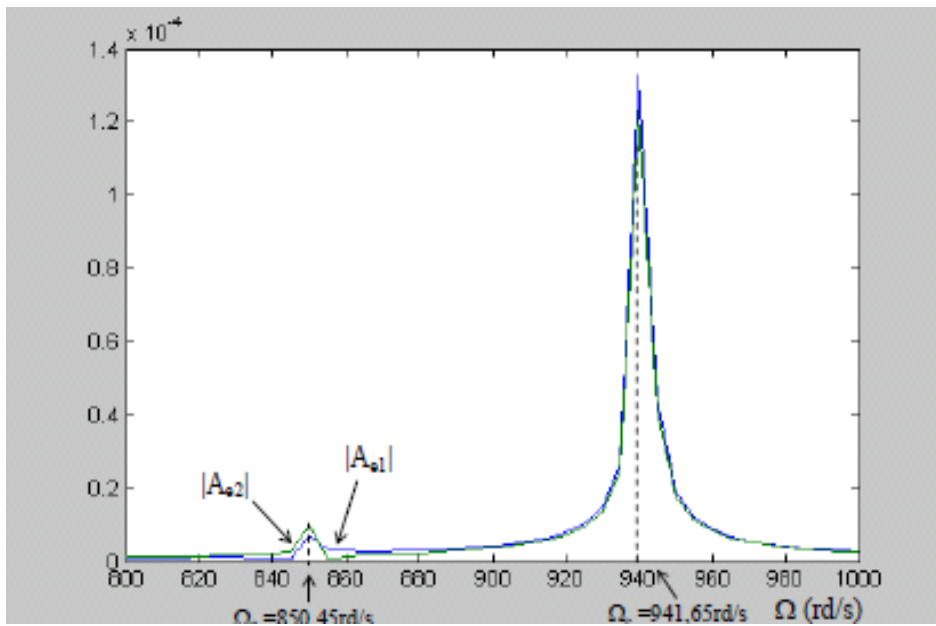
$$A_{e2} = \frac{[k_1 - (ms^2 + as)\Omega^2]F}{s^2(s^2m^2 - a^2)\Omega^4 - ms^2(k_1 + k_2)\Omega^2 + k_1k_2} \quad (3.4.50)$$

Les vitesses critiques sont données par la même équation (3.4.43) les orbites décrites sont des ellipses vue que $Q_1 \neq Q_2$. Le sens de précession est donné par le signe du produit de $Q_1.Q_2$ pour notre cas on a :

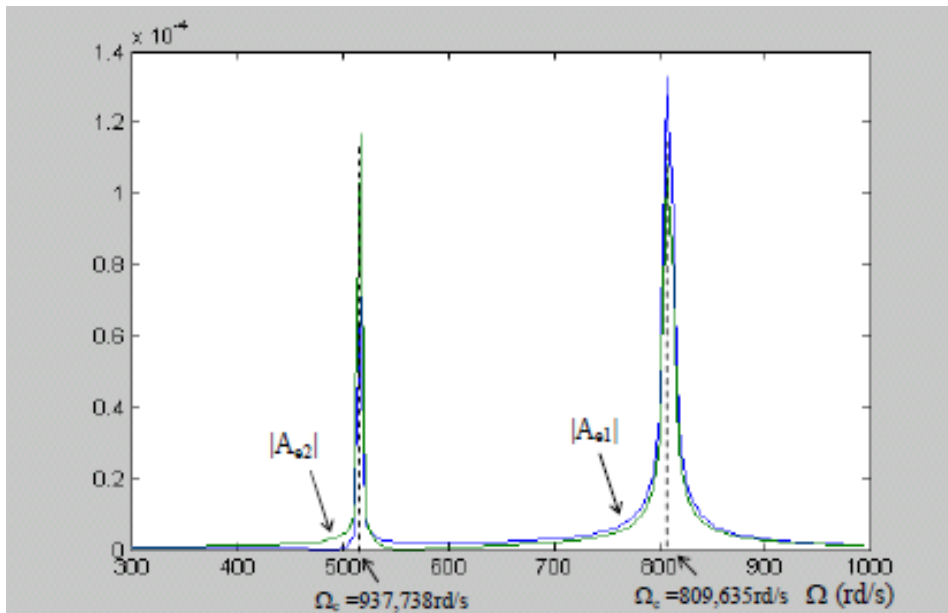
$$A_{e1} = \frac{(2,962.10^6 - 4,0612\Omega^2)F}{13,45795\Omega^4 - 21,667.10^6\Omega^2 + 8,631.10^{12}} \quad (3.4.51)$$

$$A_{e2} = \frac{(2,914.10^6 - 4,0612\Omega^2)F}{13,45795\Omega^4 - 21,667.10^6\Omega^2 + 8,631.10^{12}} \quad (3.4.52)$$

L'amplitude maximale pour A_{e1} ou A_{e2} est représentée pour $F= 1$ N sur la figure (3.16.) Les vitesses critiques sont les vitesses qui rendent l'amplitude infini et le dénominateur nul.



Modèle étudié .



Modèle Lalanne /Ferraris

Fig(3.16) Réponse à une force asynchrone .

3.5 ETUDE DE MODEL AMORTIS

Les rotors qui sont généralement supportés par des paliers hydrodynamiques, sont amortissement, qui peut être important, est de type visqueux. Le modèle étudié comporte deux raideurs k_{xx} , k_{zz} (avec $k_{xz} = k_{zx} = 0$) et deux amortissements c_{xx} et c_{zz} (avec $c_{xz} = c_{zx} = 0$). [20]

L'application des équations de Lagrange conduit aux équations du mouvement :

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 + a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 &= -k_{xx}f^2(y_2)q_1 - C_{xx}f^2(y_2)\dot{q}_1 + m * d\Omega^2 \sin\Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 &= -k_{zz}f^2(y_2)q_2 - C_{zz}f^2(y_2)\dot{q}_2 + m * d\Omega^2 \cos\Omega t \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

Qu'on peut les mettre sous la forme générale :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 + a\Omega\dot{q}_2 + c_1\dot{q}_1 + k_1q_1 = C\Omega^2 \sin\Omega t \\ m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + c_2\dot{q}_2 + k_2q_2 = C\Omega^2 \cos\Omega t \end{cases} \tag{3.5.2}$$

Avec $k_1 = k_{xx} f^2(y_2) + k$ $k_2 = k_{zz} f^2(y_2) + k$
 $c_1 = c_{xx} f^2(y_2)$ $c_2 = c_{zz} f^2(y_2)$ et $C = m*d$

3.5.1 Déterminations des fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation

L'étude des solutions homogènes permet d'avoir les fréquences qui permettent de localiser les vitesses critiques à l'aide du diagramme de Campbell. Pour cela on cherche les solutions du système homogène (sans second membre), c'est-à-dire :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_{h1} + a\Omega\dot{q}_{h2} + C_1\dot{q}_{h1} + k_1q_{h1} = 0 \\ m\ddot{q}_{h2} + a\Omega\dot{q}_{h1} + C_2\dot{q}_{h2} + k_2q_{h2} = 0 \end{cases} \tag{3.5.3}$$

Puisqu'il est amorti on cherche des solutions de la forme :

$$\begin{cases} q_1 = A_1 \exp rt \\ q_2 = A_2 \exp rt \end{cases} \tag{3.5.4}$$

Après substitution on aura des équations qu'on peut les mettre sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} mr^2 + c_1r + k_1 & -a\Omega r \\ a\Omega r & mr^2 + c_2r + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.5.5}$$

Les solutions triviales $A_1 = A_2 = 0$ sont sans intérêt; On s'intéresse donc aux solutions non triviales qui rendent le déterminant nulle. Pour cela on cherche les valeurs de r qui annulent le déterminant, soit :

$$m^4 r^4 + m(c_1 + c_2)r^3 + (k_1m + k_2m + a^2\Omega^2 + c_1c_2)r^2 + (k_1c_1 + k_2c_2)r + k_1k_2 = 0 \tag{3.5.6}$$

Les racines de cette équation des paires de quantités complexes conjuguées de la forme :

$$r_i = -\lambda_i \pm j\omega_i \tag{3.5.7}$$

Où ω_i est la $i^{\text{ème}}$ fréquence et λ_i le facteur d'amortissement visqueux correspondant. Ainsi la solution aura la forme :

$$\begin{cases} q_1 = A_1 \exp(-\lambda_1 t) \cos(\omega_1 t + \varphi_1) = 0 \\ q_2 = A_2 \exp(-\lambda_2 t) \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = 0 \end{cases} \tag{3.5.8}$$

Avec $i = 1,2$ dans ce cas d'étude.

Considérons le modèle étudié avec les caractéristiques du palier suivantes ($\beta = \text{cte}$)

k_{xx}	k_{zz}	c_{xx}	c_{zz}
10^5 N/m	5.10^5 N/m	$100\beta \text{ Ns/m}$	$500\beta \text{ Ns/m}$

3.5.2 Diagramme Campbell

Les équations du système homogène s'écrivent :

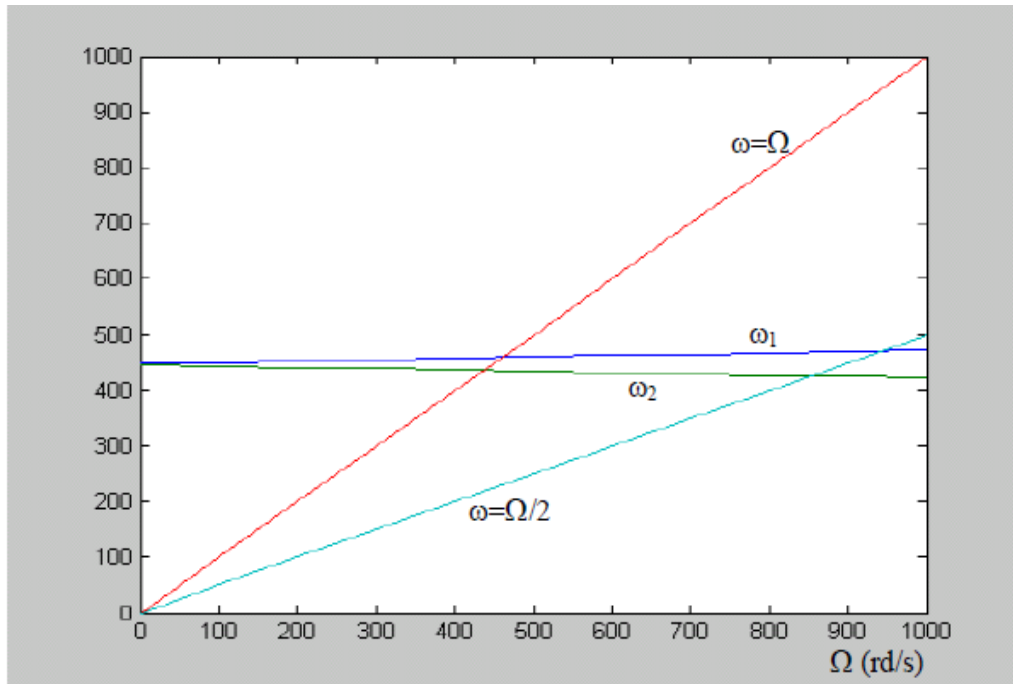
$$14.75\ddot{q}_1 - 0.7474\Omega\dot{q}_2 + 2.914 \cdot 10^6 q_1 + 9.61\beta\dot{q}_1 = 0 \tag{3.5.9}$$

$$14.75\ddot{q}_2 - 0.7474\Omega\dot{q}_1 + 2.962 \cdot 10^6 q_2 + 9.61\beta\dot{q}_2 = 0$$

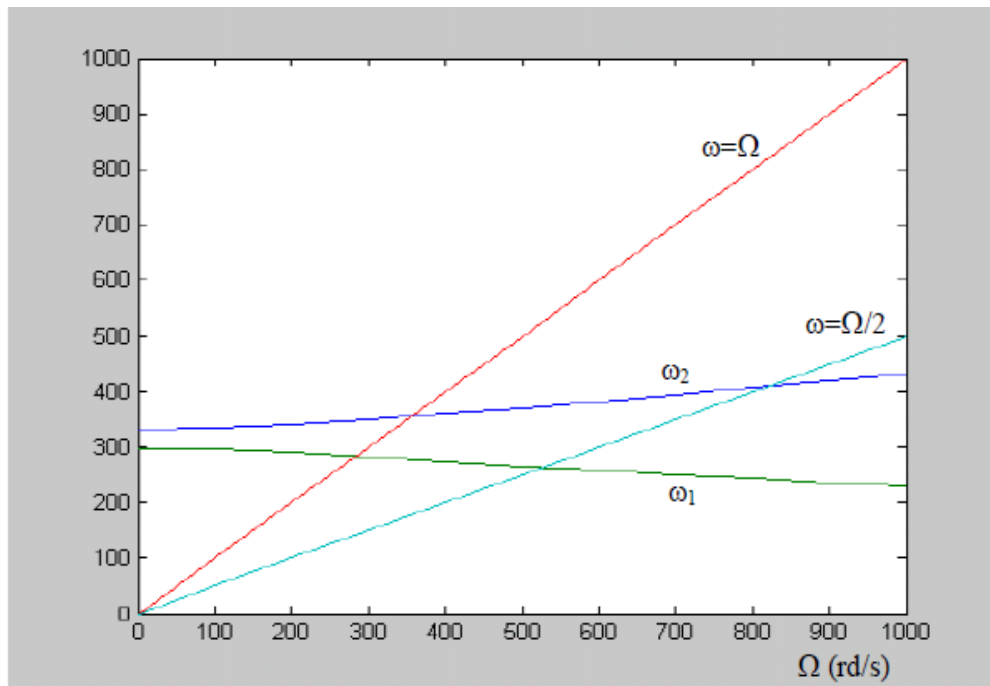
Et l'équation aux valeurs homogènes s'écrit :

$$217,5624r^4 + 850,485r^3 + (86,8126 \cdot 10^6 + 641,76\beta^2 + 0,5586\Omega^2)r^2 + 168,944 \cdot 10^6\beta r + 8,6597 \cdot 10^{12} = 0 \tag{3.5.10}$$

Les racines de cette équation ont été déterminées numériquement et sont présentées dans l'annexe 2 avec celles de Lalanne-Ferraris pour des valeurs de β correspondantes à des amortissements très faibles, faibles, critiques et forts. À partir de celles-ci les valeurs des fréquences qui correspondent aux parties imaginaires sont tirées et représentées en fonction de la vitesse de rotation par le diagramme de Campbell. Elles sont données sur les figures (3.17a) (3.17b) (3.17c) (3.17d) pour le modèle étudié et le modèle de Lalanne-Ferraris. Parmi les racines trouvées certaines valeurs ont des parties réelles positives ($-\lambda_i$) ce qui correspond à des formes exponentielles croissantes avec le temps d'où des instabilités du rotor. D'autre part quelques valeurs sont des réels négatifs d'où l'on a le régime aperiodique qui est sans oscillations [21].

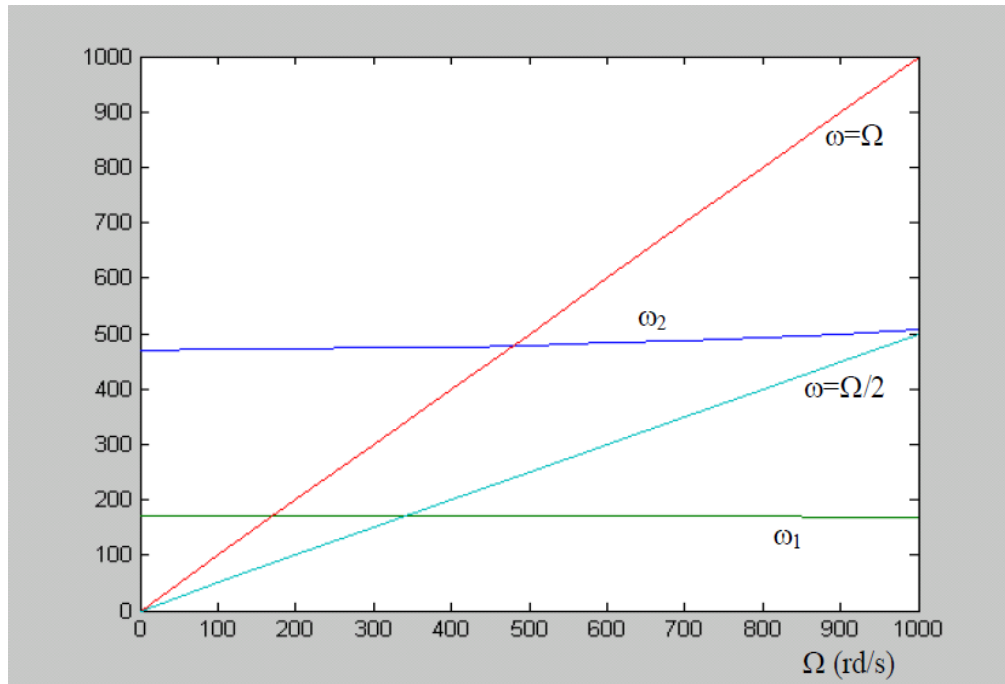


Modèle étudié ($\beta=1$)

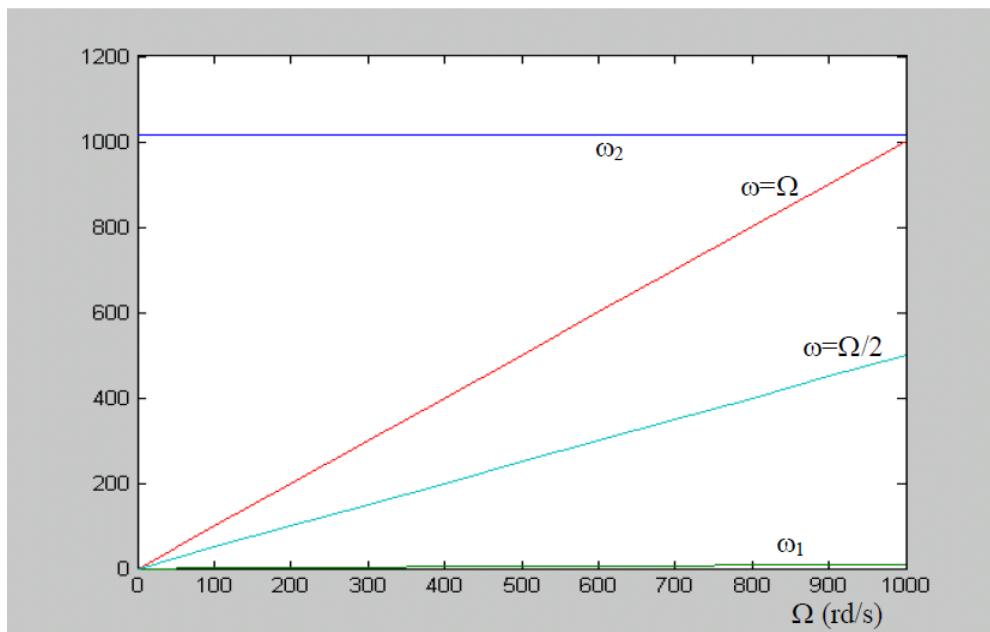


Modèle Lalande-Ferraris ($\beta=1$)

Fig. (3.17a) Diagramme de Campbell pour un amortissement très faible.

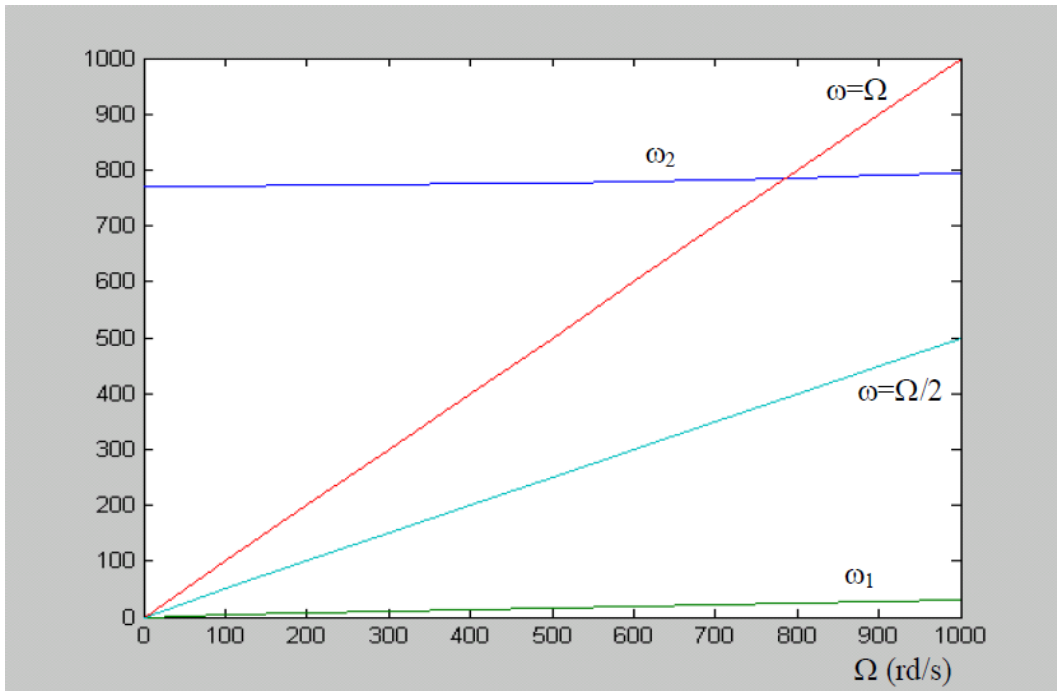


Modèle étudié ($\beta=15$)

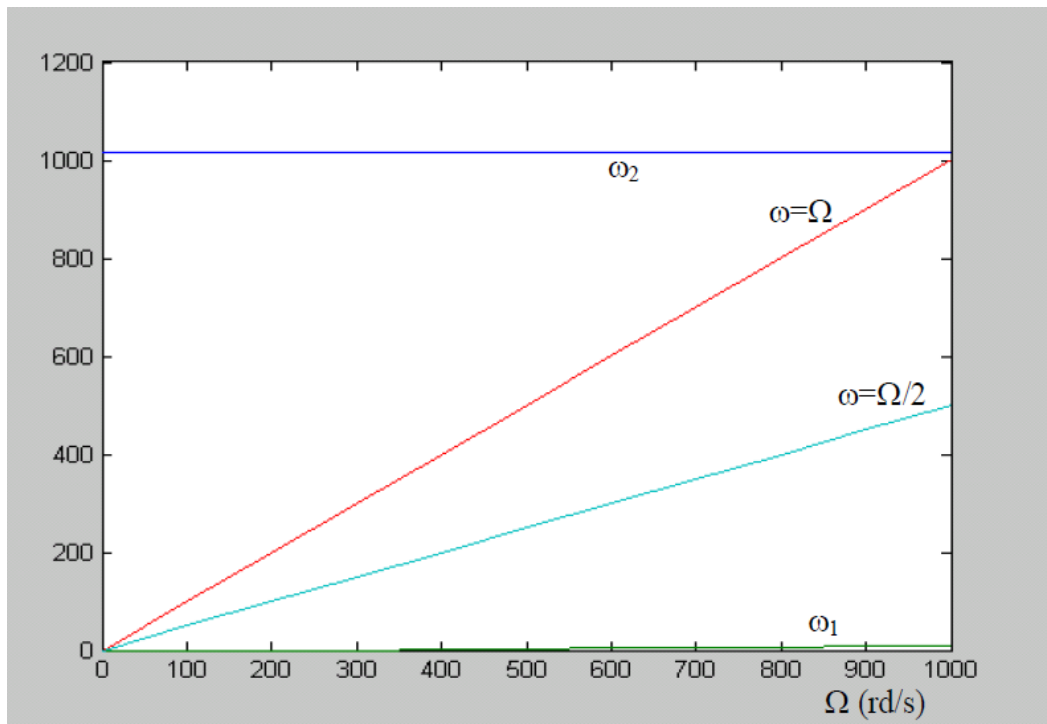


Modèle Lallane-Ferraris ($\beta=15$)

Fig. (3.17b) Diagramme de Campbell pour un amortissement faible

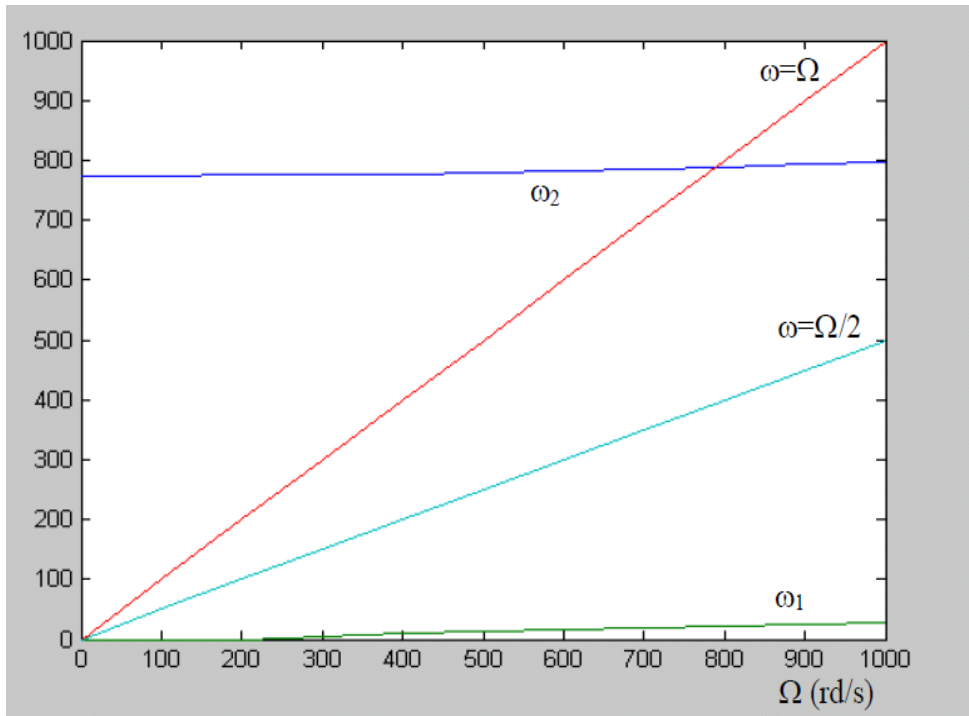


Modèle étudié ($\beta=512,245$)

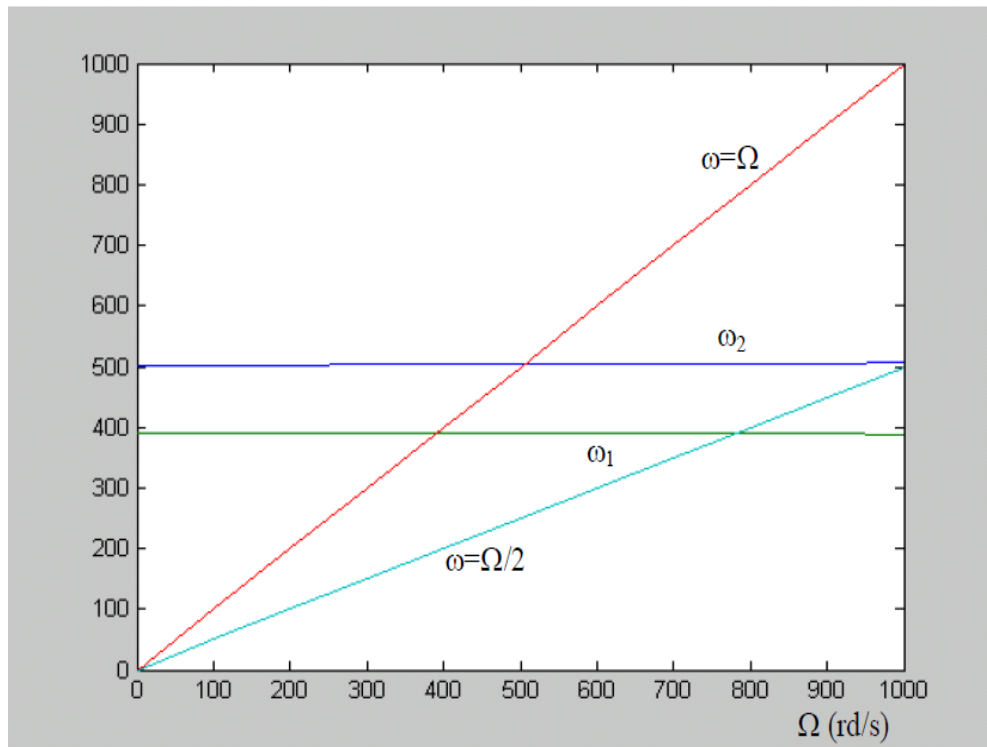


Modèle Lalande-Ferraris ($\beta=51,7275$)

Fig. (3.17c) Diagramme de Campbell pour un amortissement critique.



Modèle étudié ($\beta=512,4$)



Modèle Lalanne-Ferraris ($\beta=52$)

Fig. (3.17d) Diagramme de Campbell pour un amortissement fort.

3. 5.3 REPONSES AUX FORCES D'EXCITATIONS

a) REPONSES AU BALOURD

Dans le cas de la présence d'une force d'excitation du au balourd, l'étude de la solution particulière se fait en considérant le système avec second membre, c'est-à-dire [21]:

$$\begin{cases} 14,75\ddot{q}_1 - 0,7474\Omega\dot{q}_2 + 2,9236 \cdot 10^6 q_1 + 9,61\beta\dot{q}_1 = 1,377 \cdot 10^{-5} \Omega^2 \sin\Omega t \\ 14,75\ddot{q}_2 - 0,7474\Omega\dot{q}_2 + 2,962 \cdot 10^6 q_2 + 48,05\beta\dot{q}_2 = 1,377 \cdot 10^{-5} \Omega^2 \cos\Omega t \end{cases} \quad (3.5.12)$$

Les solutions particulières dépendent de la nature de l'excitation. Puisque cette dernière est sinusoïdale de fréquence Ω elles sont de la forme :

$$\begin{cases} q_{1p} = A_{e1} \cos(\Omega t + \phi_{e1}) \\ q_{2p} = A_{e2} \cos(\Omega t + \phi_{e2}) \end{cases} \quad (3.5.13)$$

qu'on peut mettre sous la forme complexe :

$$\begin{cases} \underline{q}_{1p} = \underline{A}_{e1} \exp j\Omega t \\ \underline{q}_{2p} = \underline{A}_{e2} \exp j\Omega t \end{cases} \quad (3.5.14)$$

avec: $\underline{A}_{e1} = A_{e1} \exp j\phi_{e1}$ et $\underline{A}_{e2} = A_{e2} \exp j\phi_{e2}$.

et que l'on reporte dans le système inhomogène complexe :

$$\begin{cases} m\ddot{\underline{q}}_{1p} - a\Omega\dot{\underline{q}}_{2p} + c_1\dot{\underline{q}}_{2p} + k_1\underline{q}_{1p} = C\Omega^2 \exp j \left(\Omega t - \frac{\pi}{2} \right) \\ m\ddot{\underline{q}}_{2p} + a\Omega\dot{\underline{q}}_{1p} + c_2\dot{\underline{q}}_{2p} + K_2\underline{q}_{2p} = C\Omega^2 \exp j(\Omega t) \end{cases} \quad (3.5.14)$$

Pour avoir

$$\begin{bmatrix} k_1 - m\Omega^2 + jc_1\Omega & -ja\Omega^2 \\ ja\Omega^2 & k_2 - m\Omega^2 + jc_2\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_{e1} \\ \underline{A}_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\Omega^2 \exp \left(-j\frac{\pi}{2} \right) \\ C\Omega^2 \end{bmatrix} \quad (3.5.15)$$

Cette dernière équation représente un système linéaire de deux équations à deux inconnues qui sont A_{e1} et A_{e2} avec un paramètre qui est Ω . Les solutions dépendent de ce dernier et la méthode du déterminant nous donne :

$$\underline{A}_{e1} = \frac{\begin{vmatrix} C\Omega^2 e^{-j\frac{\pi}{2}} & -ja\Omega^2 \\ C\Omega^2 & k_2 - m\Omega^2 + jc_2\Omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_1 - m\Omega^2 + jc_1\Omega & -ja\Omega^2 \\ ja\Omega^2 & k_2 - m\Omega^2 + jc_2\Omega \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-jC\Omega^2(k_2 - m\Omega^2 + jc_2\Omega)e^{-j\pi/2} + jaC\Omega^4}{[(k_1 - m\Omega^2 + jc_1\Omega)(k_2 - m\Omega^2 + jc_2\Omega) - a^2\Omega^4]} \quad (3.5.16)$$

$$\underline{A}_{e2} = \frac{\begin{vmatrix} k_2 - m\Omega^2 + jc_2\Omega & C\Omega^2 e^{-j\pi/2} \\ ja\Omega^2 & C\Omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_1 - m\Omega^2 + jc_1\Omega & -ja\Omega^2 \\ ja\Omega^2 & k_2 - m\Omega^2 + jc_2\Omega \end{vmatrix}}$$

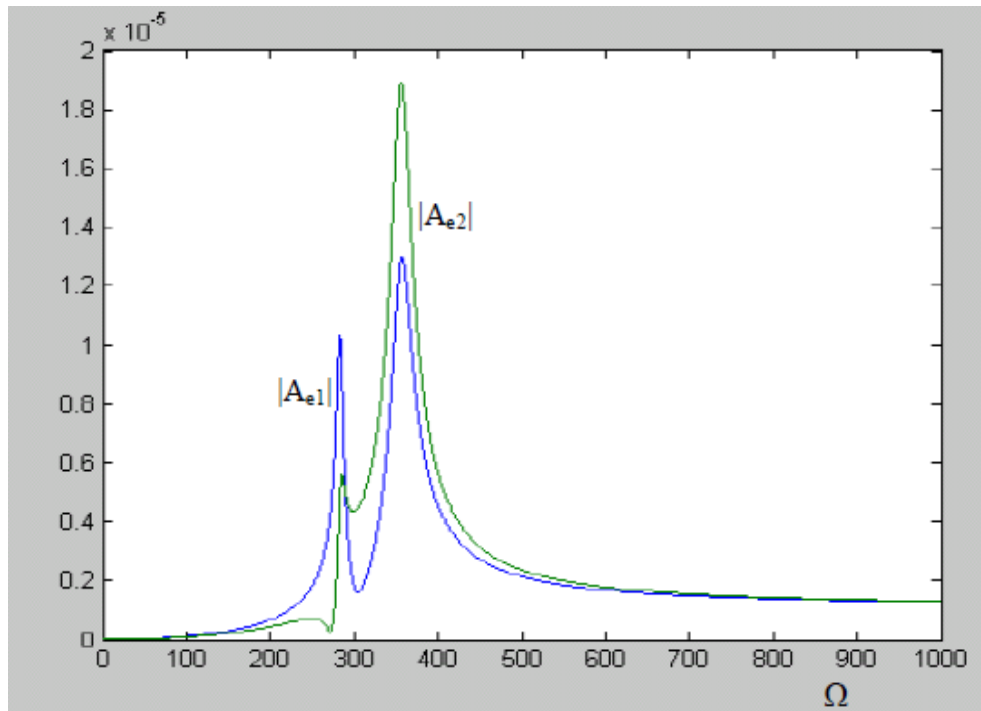
$$= \frac{C\Omega^2(k_2 - m\Omega^2 + jc_2\Omega) + aC\Omega^4}{[(k_1 - m\Omega^2 + jc_1\Omega)(k_2 - m\Omega^2 + jc_2\Omega) - a^2\Omega^4]} \quad (3.5.17)$$

Pour le modèle de rotor défini par les équations (3.5.11) on a :

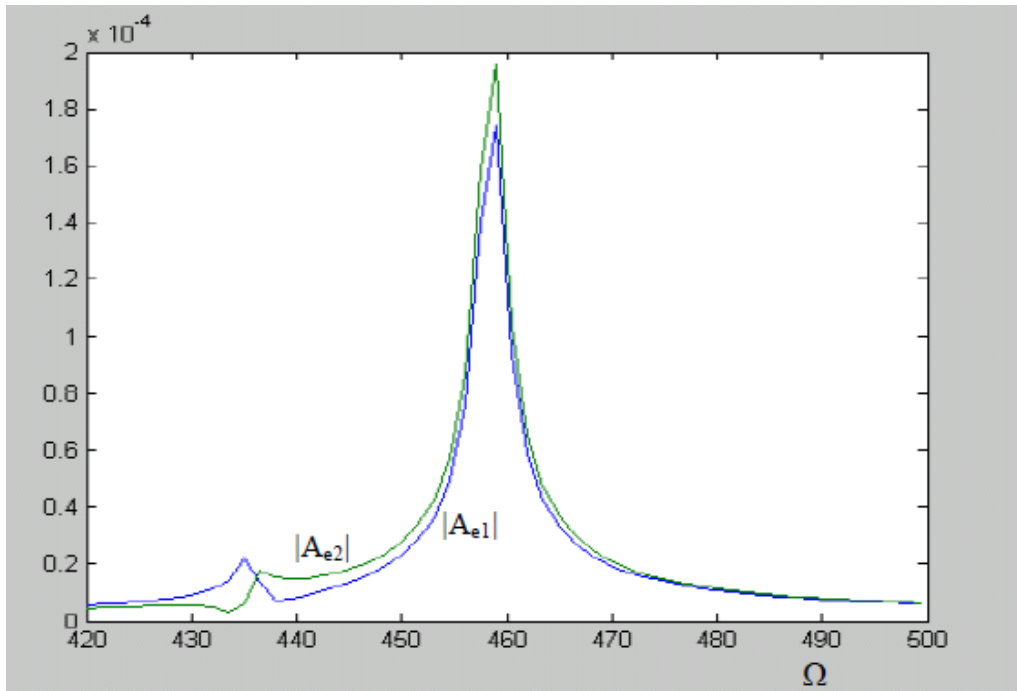
$$\underline{A}_{e1} = \frac{-j1,377 \cdot 10^{-5}\Omega^2(2,962 \cdot 10^6 - 14,75\Omega^2 + j48,05\beta\Omega) + j1,029 \cdot 10^{-5}\Omega^4}{(2,9236 \cdot 10^6 - 14,75\Omega^2 + j9,61\beta\Omega)(2,962 \cdot 10^6 - 14,75\Omega^2 + j48,05\beta\Omega) - 0,558\Omega^4} \quad (3.5.18)$$

$$\underline{A}_{e2} = \frac{1,377 \cdot 10^{-5}\Omega^2(2,9632 \cdot 10^6 - 14,75\Omega^2 + j9,61\beta\Omega) - 1,029 \cdot 10^{-5}\Omega^4}{(2,9236 \cdot 10^6 - 14,75\Omega^2 + j9,61\beta\Omega)(2,962 \cdot 10^6 - 14,75\Omega^2 + j48,05\beta\Omega) - 0,558\Omega^4} \quad (3.5.19)$$

Les modules des amplitudes A_{e1} et A_{e2} sont représentés sur la figure (3.18 (a, b, c et d)) pour différentes valeurs de l'amortissement. On remarque clairement la diminution du pic de résonance jusqu'à sa disparition avec l'augmentation de l'amortissement.

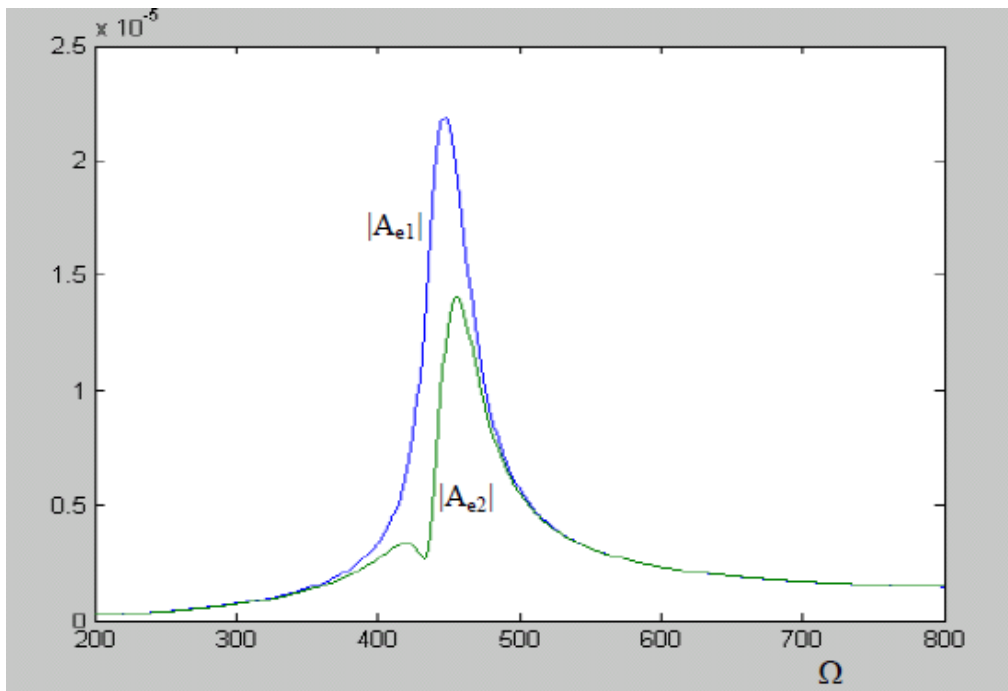


Modèle Lalanne-Ferraris ($\beta=1$)

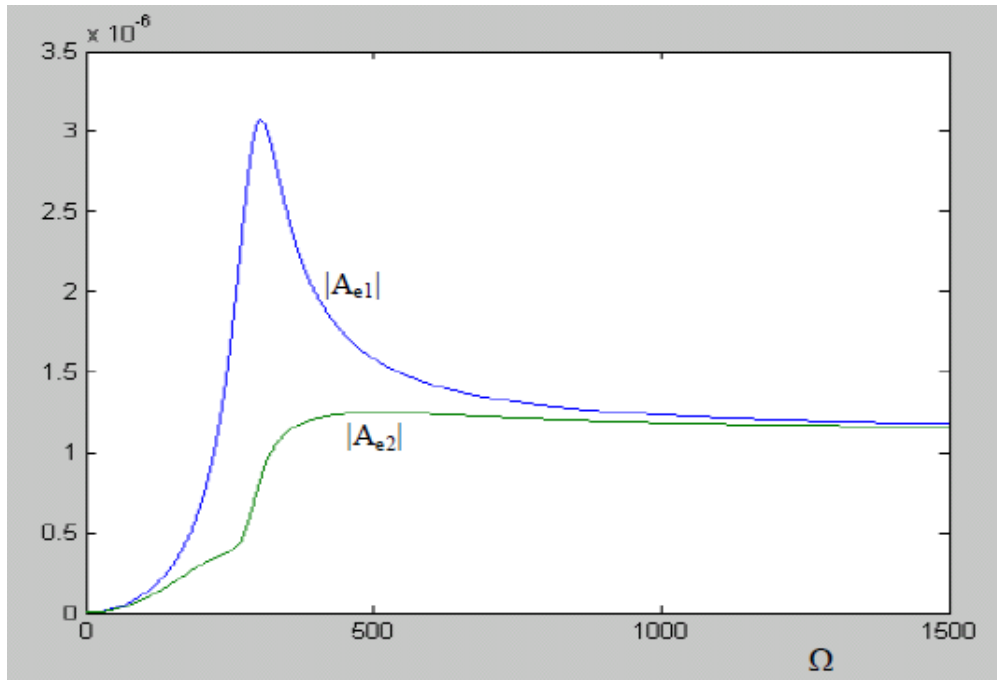


Modèle étudié ($\beta=1$)

Fig. (3.18a) Réponse au balourd pour un amortissement très faible.

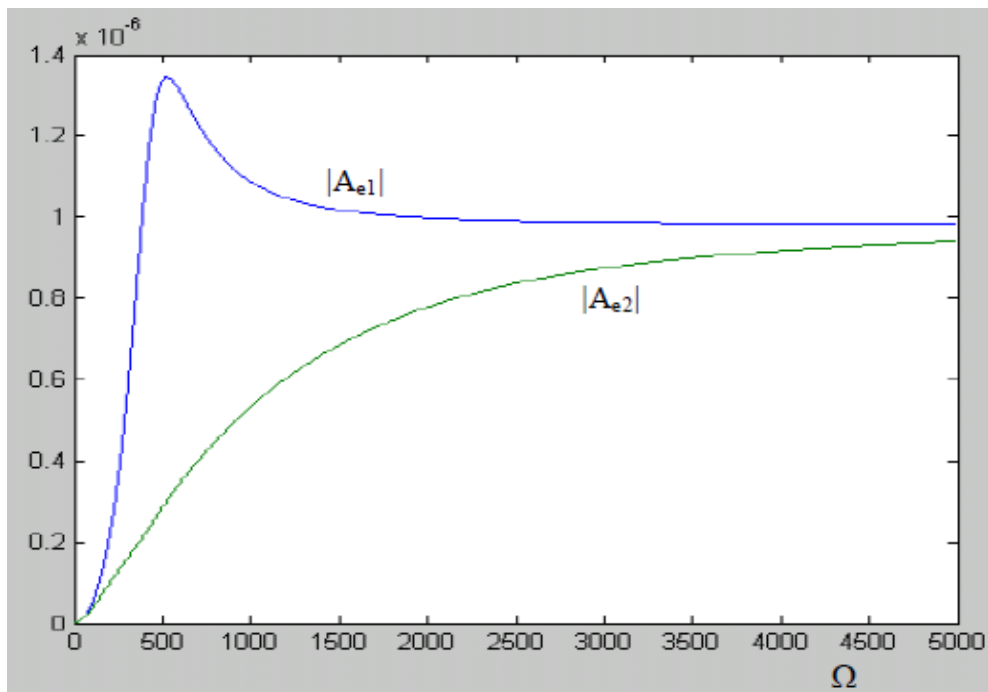


Modèle étudié ($\beta=15$)

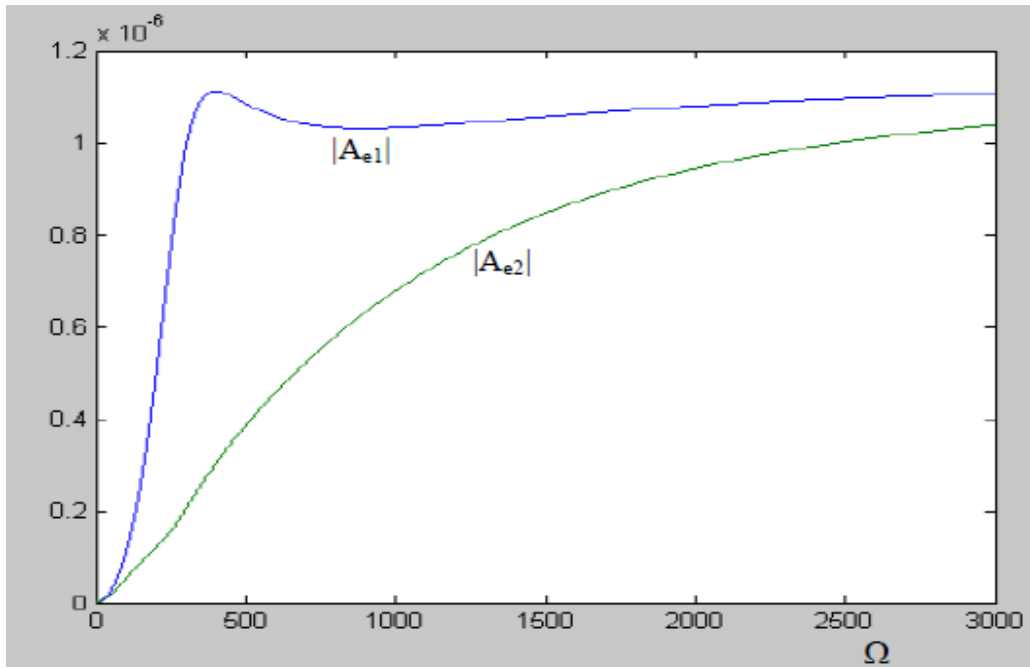


Modèle Lalanne-Ferraris ($\beta=15$)

Fig.(3.18b)Réponse au balourd pour un amortissement faible.

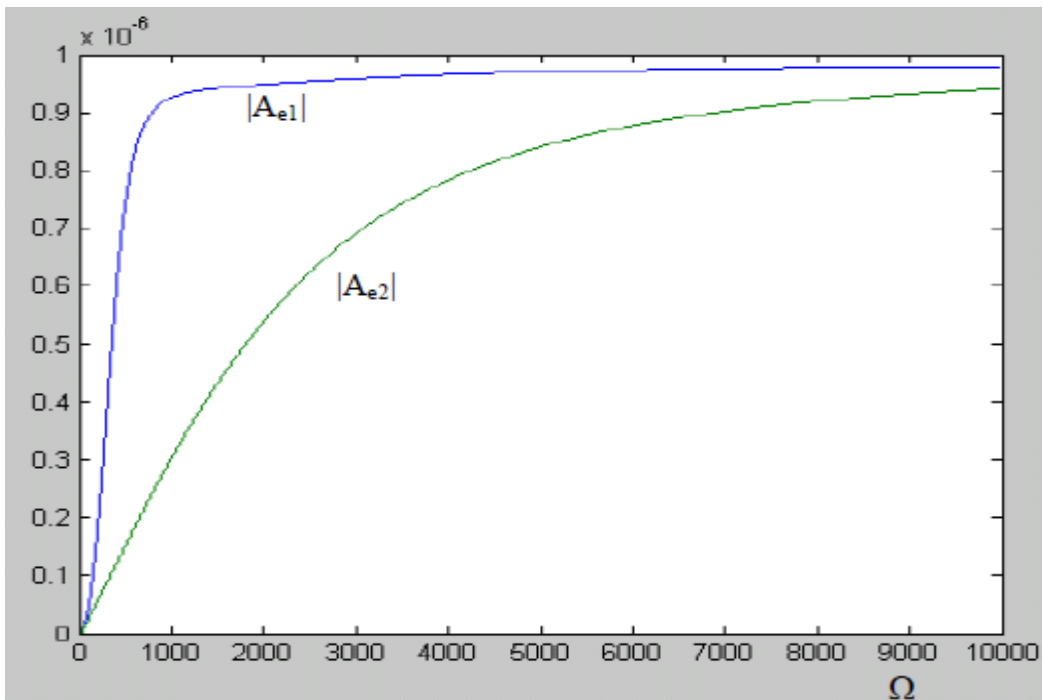


Modèle étudié ($\beta=512$)

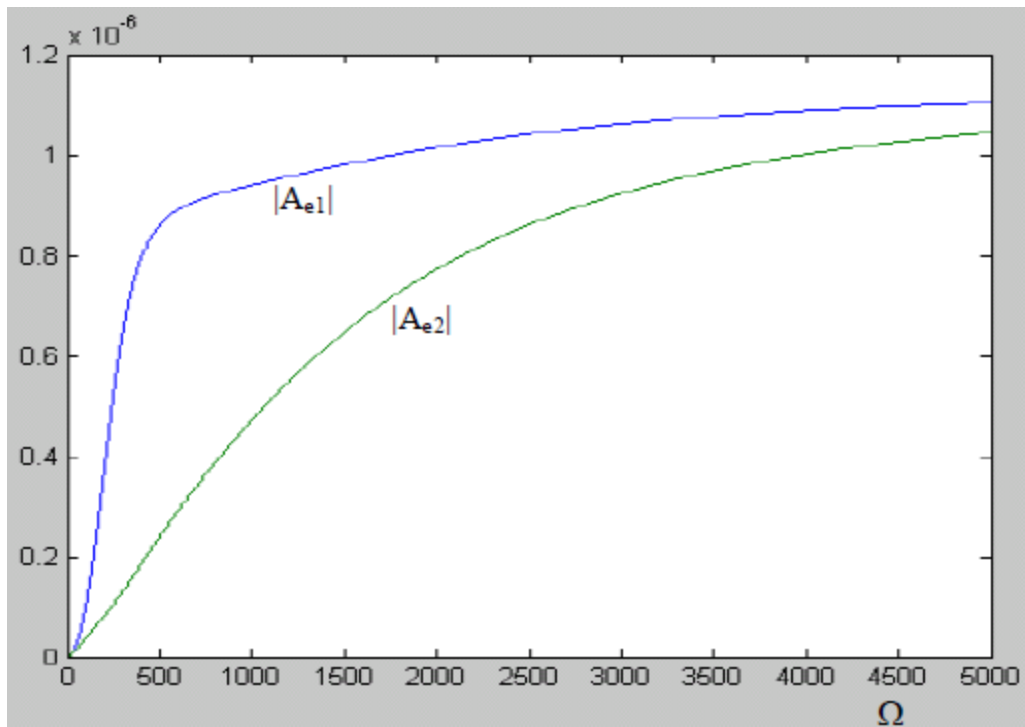


Modèle Lalanne-Ferraris ($\beta=52$)

Fig. (3.18c) Réponse au balourd pour un amortissement intermédiaire.



Modèle étudié ($\beta=950$)



Modèle Lalanne-Ferraris ($\beta=80$)
 Fig. (3.18d) Réponse au balourd pour un amortissement très fort.

b) Réponses a la force asynchrone

On prend dans ce cas la même forme de l'excitation prise pour l'étude du système non amorti. C'est à dire on cherche des solutions particulières pour le système :

$$\begin{cases} 14,75\ddot{q}_1 - 0,7474\Omega\dot{q}_2 + 2,9236 \cdot 10^6 q_1 + 9,61\beta \dot{q}_1 = F \sin s\Omega t \\ 14,75\ddot{q}_2 - 0,7474\Omega\dot{q}_1 + 2,962 \cdot 10^6 q_2 + 48,05\beta\dot{q}_2 = F \cos s \Omega t \end{cases} \quad (3.5.20)$$

On procède de la même façon que pour le cas du balourd et cela par la recherche de Solutions de la forme :

$$\begin{cases} q_{1p} = A_{e1} \cos(s\Omega t + \phi_{e1}) \\ q_{2p} = A_{e2} \cos(s\Omega t + \phi_{e2}) \end{cases} \quad (3.5.21)$$

qu'on peut mettre sous la forme complexe :

$$\begin{cases} \underline{q}_{1p} = \underline{A}_{e1} \exp js\Omega t \\ \underline{q}_{2p} = \underline{A}_{e2} \exp js\Omega t \end{cases} \quad (3.5.22)$$

Avec: $\underline{A}_{e1} = A_{e1} \exp j\phi_{e1}$ et $\underline{A}_{e2} = A_{e2} \exp j\phi_{e2}$.

et que l'on reporte dans le système inhomogène complexe :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_{1p} - a\Omega\dot{q}_{2p} + c_1\dot{q}_{2p} + k_1q_{1p} = F \exp j \left(s\Omega t - \frac{\pi}{2} \right) \\ m\ddot{q}_{2p} + a\Omega\dot{q}_{1h} + c_2\dot{q}_{2p} + k_2q_{2p} = F \exp j(s\Omega t) \end{cases} \quad (3.5.23)$$

Pour avoir

$$\begin{bmatrix} k_1 - ms^2\Omega^2 + jc_1s\Omega & -jas\Omega^2 \\ jas\Omega^2 & k_2 - ms^2\Omega^2 + jc_2s\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_{e1} \\ \underline{A}_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \exp \left(-j\frac{\pi}{2} \right) \\ F \end{bmatrix} \quad (3.5.24)$$

Cette dernière équation représente un système linéaire de deux équations à deux inconnues qui sont \underline{A}_{e1} et \underline{A}_{e2} avec un paramètre qui est Ω . Les solutions dépendent de ce dernier et la méthode du déterminant nous donne :

$$\begin{aligned} \underline{A}_{e1} &= \frac{\begin{vmatrix} Fe^{-j\frac{\pi}{2}} & -jas\Omega^2 \\ F & k_2 - ms^2\Omega^2 + jc_2s\Omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_1 - ms^2\Omega^2 + jc_1s\Omega & -jas\Omega^2 \\ jas\Omega^2 & k_2 - ms^2\Omega^2 + jc_2s\Omega \end{vmatrix}} \\ &= \frac{-jF(k_2 - ms^2\Omega^2 + jc_2s\Omega) + jasF\Omega^2}{[(k_1 - ms^2\Omega^2 + jc_1s\Omega)(k_2 - ms^2\Omega^2 + jc_2s\Omega) - a^2s^2\Omega^4]} \end{aligned} \quad (3.5.25)$$

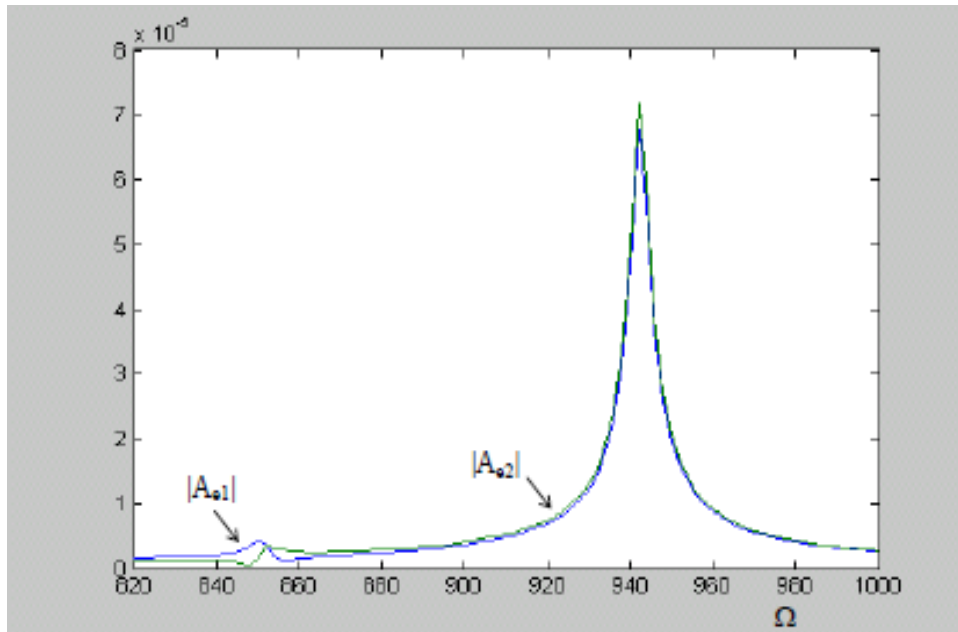
$$\begin{aligned} \underline{A}_{e2} &= \frac{\begin{vmatrix} k_2 - ms^2\Omega^2 + jc_2s\Omega & Fe^{-j\frac{\pi}{2}} \\ jas\Omega^2 & F \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_1 - ms^2\Omega^2 + jc_1s\Omega & -jas\Omega^2 \\ jas\Omega^2 & k_2 - ms^2\Omega^2 + jc_2s\Omega \end{vmatrix}} \\ &= \frac{F(k_1 - ms^2\Omega^2 + jc_2s\Omega) - asF\Omega^4}{[(k_1 - ms^2\Omega^2 + jc_1s\Omega)(k_2 - ms^2\Omega^2 + jc_2s\Omega) - a^2s^2\Omega^4]} \end{aligned} \quad (3.5.26)$$

our le modèle de rotor défini par les équations (3.5.20) on a :

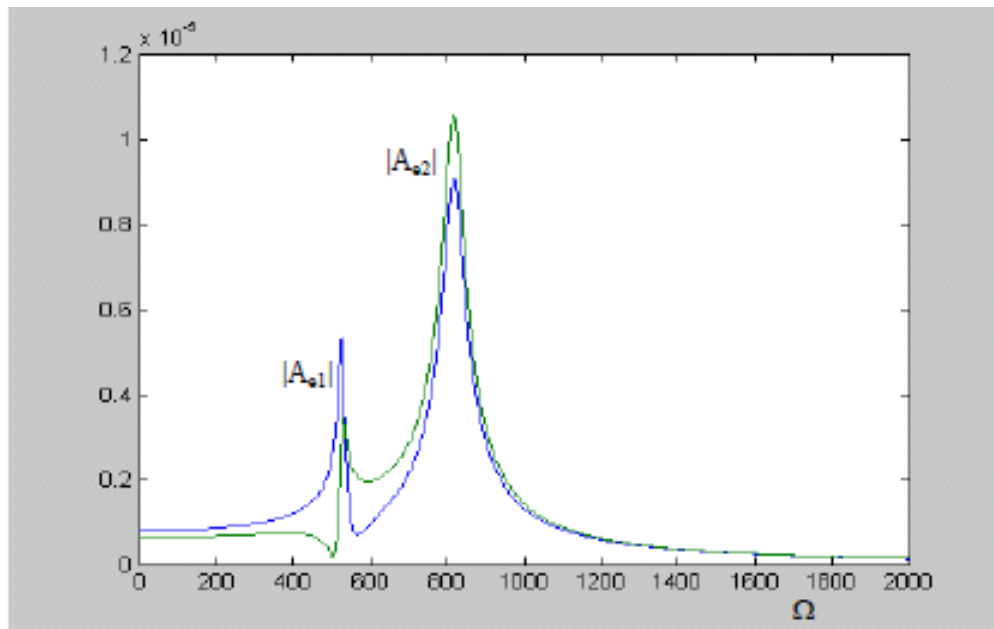
$$\underline{A}_{e1} = \frac{-jF(2,962 \cdot 10^6 - 3,68\Omega^2 + j24,025\Omega) + j0,3737F\Omega^2}{(2,9236 \cdot 10^6 - 3,687\Omega^2 + j4,8\beta\Omega)(2,962 \cdot 10^6 - 3,867\Omega^2 + j24,02\beta\Omega) - 0,139\Omega^4} \quad (3.5.27)$$

$$\underline{A}_{e2} = \frac{F(2,9632 \cdot 10^6 - 3,687\Omega^2 + j4,8\beta\Omega) - 0,558F\Omega^2}{(2,9236 \cdot 10^6 - 3,687\Omega^2 + j4,8\beta\Omega)(2,962 \cdot 10^6 - 3,867\Omega^2 + j24,02\beta\Omega) - 0,139\Omega^4} \quad (3.5.28)$$

Les modules des amplitudes \underline{A}_{e1} et \underline{A}_{e2} sont représentés sur la figure (3.19 (a, b, c et d)) pour $F= 1N$ et pour différentes valeurs de l'amortissement. Les mêmes constatations que pour le cas du balourd sont faites c'est-à-dire on diminue du pic de résonance jusqu'à sa disparition avec l'augmentation de l'amortissement.

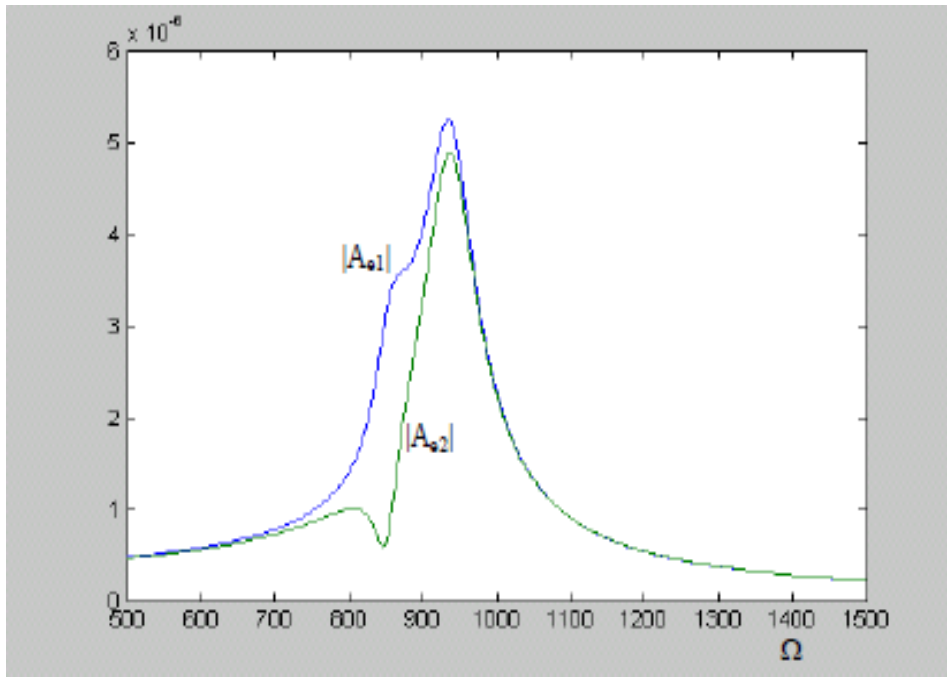


Modèle étudié($\beta=1$)

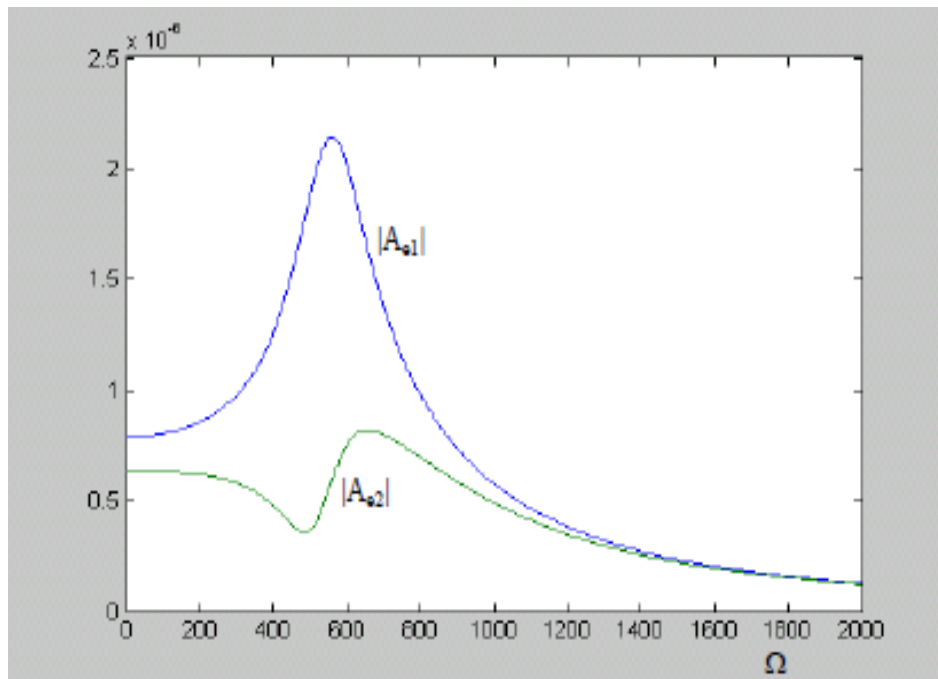


Modèle Lalanne/Ferraris ($\beta =1$)

Fig (3.19.a) Réponse à une force asynchrone pour un amortissement très faible .

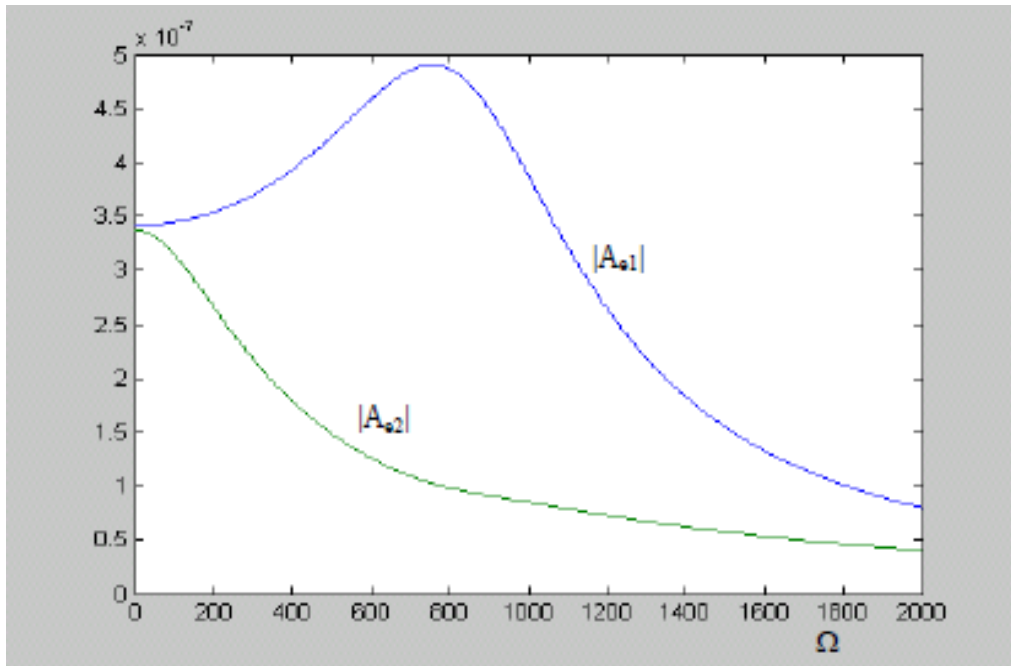


Modèle étudié($\beta=15$)

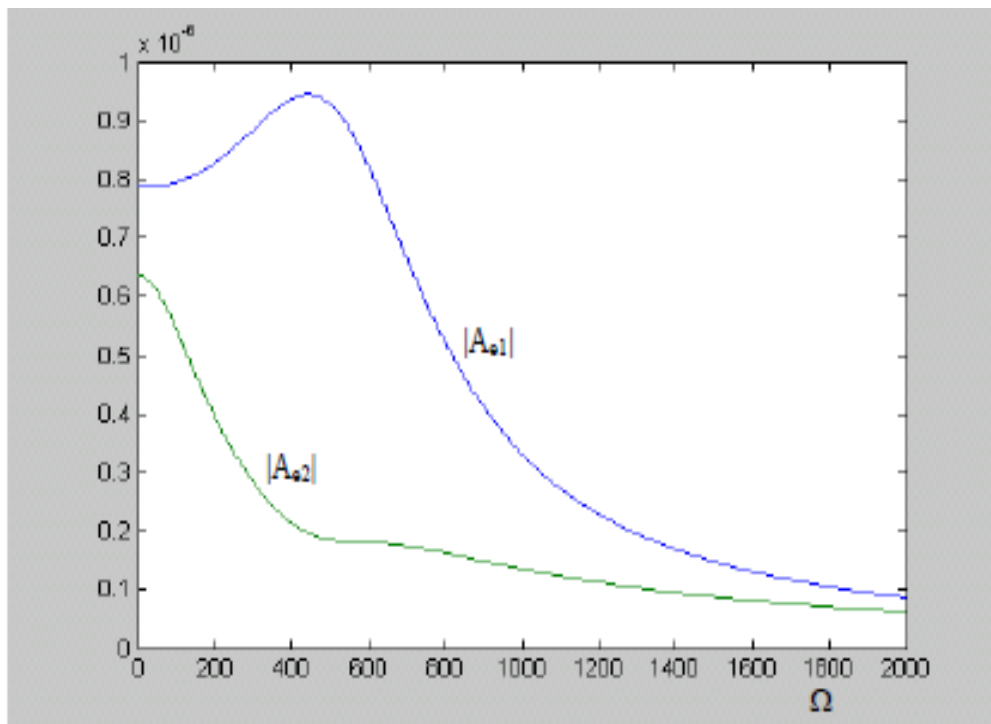


Modèle Lalanne/Ferraris ($\beta = 15$)

Fig (3.19.b) Réponse à une force asynchrone pour un amortissement faible .

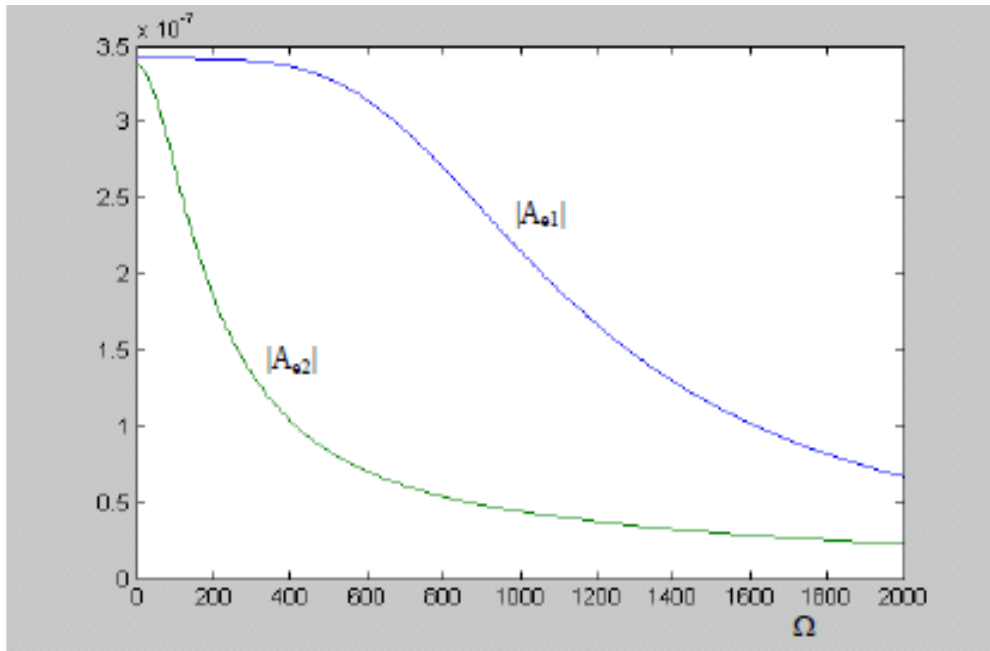


Modèle étudié($\beta=512$)

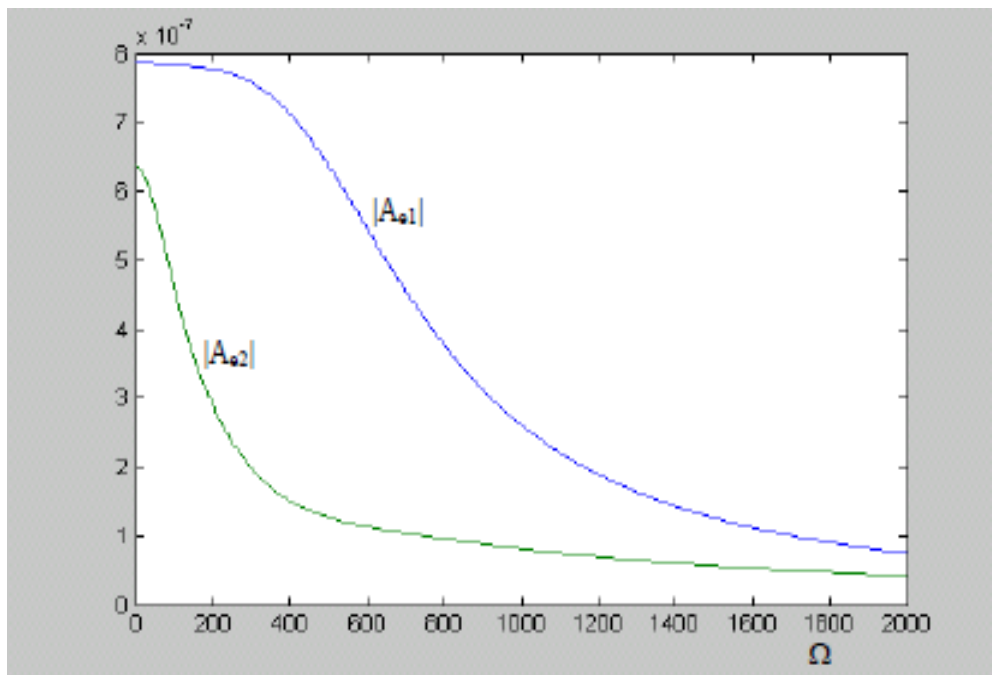


Modèle Lalanne/Ferraris ($\beta =512$)

Fig (3.19.c) Réponse à une force asynchrone pour un amortissement intermédiaire .



Modèle étudié($\beta=950$)



Modèle Lalande/Ferraris ($\beta =950$)

Fig (3.19.d) Réponse à une force asynchrone pour un amortissement très fort .

CHAPITRE IV

MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS

MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS

Connue depuis les années 1950, la méthode des éléments finis a vit son apparition pour le calcul de contraintes et n'a cessé de se développer. Aujourd'hui, son champ d'application dépasse le cadre du génie mécanique. Désormais, elle est utilisée pour résoudre des problèmes d'écoulement de fluides ou de transferts de chaleur, d'électromagnétisme ou d'hydrologie.

Elle est considérée comme une généralisation et amélioration de la méthode de Rayleigh Ritz qui Permet de traiter facilement des systèmes d'équations complexes ou de hauts degrés causés par une complexité des formes géométriques et des conditions aux limites. Son principe est le même dans tous les cas de figures : dans un premier temps la structure étudiée est maillée c'est à dire divisée en petits éléments de géométries simples, puis dans un second temps un ou plusieurs champs (déplacement, contrainte, température, pression, ou autre) sont approchés localement, sur chaque élément du maillage, par des fonctions de forme (ou fonctions d'interpolation) [16].

En dynamique des structures, l'utilisation des éléments finis permet de transformer les équations aux dérivées partielles qui modélisent le mouvement en des équations différentielles temporelles (on passe du cas continu au cas discret pour les variables spatiales).

4.1 EXPRESSIONS DES ENERGIES DES ELEMENTS DU ROTOR

La méthode des éléments finis, très utilisée pour le calcul des structures complexes, est également efficace en dynamique des rotors. L'effet gyroscopique doit être pris en compte et des méthodes de résolution spécifiques peuvent être avantageusement employées [19]. On calcule les énergies cinétiques, de déformation et de dissipation de l'élément en fonction des déplacements des nœuds.

Si la structure est composée de N éléments alors :

$$U = \sum_{i=1}^N U_i \quad (4.1.1)$$

$$T = \sum_{i=1}^N T_i \quad (4.1.2)$$

$$R = \sum_{i=1}^N R_i \quad (4.1.3)$$

Où U_i est l'énergie de déformation ; T_i est l'énergie cinétique et R_i est la fonction de dissipation de l'élément i . Les forces généralisées sont déterminées en exprimant le travail virtuel des forces extérieures. Dans la dynamique des rotors R_i sont négligés quand les systèmes tournent à grandes vitesses.

4.1.1 Energie de déformation d'un élément de rotor

L'expression générale de l'énergie de déformation d'un élément est donnée par :

$$U_i = \frac{1}{2} \int_{(\tau)} \varepsilon^t \sigma d\tau \quad (4.1.4)$$

Le vecteur de déplacement d d'un point de l'élément est relié au vecteur δ regroupant tous les déplacements nodaux de l'élément par l'intermédiaire d'une matrice N , résultat de l'hypothèse sur les déplacements à l'intérieur de l'élément. Ceci donne une relation de la forme :

$$d = N(y) \delta \quad (4.1.5)$$

qui donne après dérivation :

$$\varepsilon = \frac{\partial d}{\partial y} = B(y) \delta \quad (4.1.6)$$

C'est la relation qui relie les déformations aux déplacements nodaux.

La relation qui relie les contraintes et les déformations est :

$$\sigma = D\varepsilon \quad (4.1.7)$$

où D est une matrice carré symétrique dont les termes dépendent des caractéristiques mécaniques des matériaux, généralement le module de Young E et le coefficient de poisson ν . En substituant les équations (4.1.6) et (4.1.7) dans (4.1.4) on obtient l'équation :

$$U_i = \frac{1}{2} \int_{(\tau)} (B(y) \delta)^T D B(y) \delta d\tau \quad (4.1.8)$$

$$= \frac{1}{2} \delta^t \left[\int_{(\tau)} B^T D B d\tau \right] \delta \quad (4.1.9)$$

Qui peut se mettre sous la forme :

$$U_i = \frac{1}{2} \delta^t K \delta \quad (4.1.10)$$

Ou: $k = \int_{(\tau)} B^T D B d\tau$

C'est la matrice raideur de l'élément qui est symétrique car la matrice D est symétrique ainsi que la matrice produit $B^T D B$.

4.1.2 Energie cinétique d'un élément de rotor

L'expression générale de l'énergie cinétique d'un élément est :

$$T = \frac{1}{2} \int_{(\tau)} \rho v^2 \quad (4.1.12)$$

En substituant (4.1.12) dans (4.1.11) et en considérant que $v^2 = (N\dot{\delta})^T N \dot{N} \dot{\delta}$, On aura :

$$T = \frac{1}{2} \int_{(\tau)} p (N\dot{\delta})^T N\dot{\delta} d\tau \quad (4.1.13)$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\delta}^T \left[\int_{(\tau)} \rho N^T N d\tau \right] \dot{\delta} \quad (4.1.14)$$

qui s'écrit sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} \dot{\delta}^T m \dot{\delta} \quad (4.1.15)$$

Ou $m = \frac{1}{2} \int_{(\tau)} \rho N^T N d\tau$

C'est la matrice masse d'un élément d'arbre qui est aussi symétrique comme la matrice k.

4.2 FORMULATION MATRICIELLE

4.2.1 Formulation matricielle des équations du disque

Le disque est modélisé par un nœud possédant quatre degrés de liberté ; deux translations u et w et deux rotations θ et ψ respectivement autour des axes x et z (voir figure 4.1).

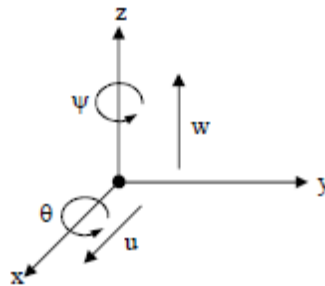


Fig (4.1) Degrés de liberté du disque.

Le vecteur des déplacements nodaux δ s'écrit sous la forme : $d=[u,w,\Theta,\psi]^T$ La matrice masse et la matrice gyroscopique sont obtenues en appliquant les équations de Lagrange à l'expression (4.1.10), soit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_d}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \frac{\partial T_d}{\partial \delta_i} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{\delta}_i} \left[\frac{1}{2} M_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx'} (\dot{\Theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy'} (\Omega^2 + 2\dot{\psi}\Theta) \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial \delta_i} \left[\frac{1}{2} M_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx'} (\dot{\Theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy'} (\Omega^2 + 2\dot{\psi}\Theta) \right] \quad (4.2.1)$$

on aura donc :

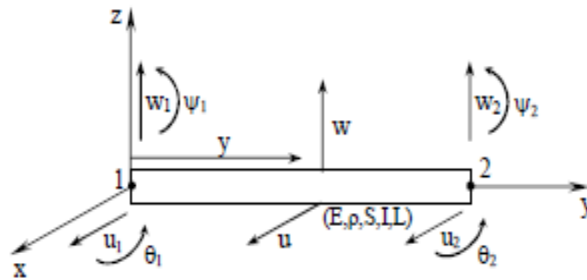
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_d}{\partial \dot{\delta}_i} \right) - \frac{\partial T_d}{\partial \delta_i} = \begin{bmatrix} M_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{dy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{dy} \\ 0 & 0 & I_{dy} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (4.2.2)$$

M_d G_d

M_d : étant la matrice masse. G_d : la matrice gyroscopique.

4.2.2 Formulation matricielle des équations de l'arbre

Les résultats présentés concernent le cas d'un élément arbre symétrique qui est modélisé par un élément poutre de section constante. L'élément fini utilisé a deux nœuds et quatre degrés de liberté voir figure (4.2).



Fig(4.2)Degrés de liberté d'un élément arbre.

La fonction de déplacement w qui est normale à la poutre (arbre) est donnée par le polynôme d'interpolation du 3^{ième} degré.

$$W = a_1 + a_2 y + a_3 y^2 + 3a_4 y^3 \quad (4.2.3)$$

L'inclinaison ou la rotation autour de z est donnée par la dérivée de la fonction de déplacement w .

$$\Theta = \frac{\partial w(y)}{\partial y} = a_2 + 2a_3 y + 3a_4 y^2 \quad (4.2.4)$$

Les constantes a_1, a_2, a_3, a_4 sont déterminées on appliquant les conditions aux limites sur les Polynômes (4.2.3) et (4.2.4).

Pour $y=0$ (nœud 1) on a $\begin{cases} w_1 = a_1 \\ \theta_1 = a_2 \end{cases}$ système (a)

$$\text{pour } y=L \text{ (nœud 2) on a } \begin{cases} w_2 = a_1 + a_2L + a_3L^2 + a_4L^3 \\ \Theta_2 = a_2 + 2a_3L + 3a_4L^2 \end{cases} \quad \text{système (a)}$$

Après avoir résolu le système (b) et en remplaçant les constantes a_1 et a_2 par leurs valeurs on trouve :

$$a_1 = w_1 \quad \text{et} \quad a_2 = w_2$$

$$a_3 = 3 \frac{w_2 - w_1}{L^3} - \frac{\Theta_2 + 2\Theta_1}{L} \quad \text{et} \quad a_4 = 3 \frac{w_2 - w_1}{L^3} - \frac{\Theta_2 + \Theta_1}{L^2}$$

On remplace les valeurs des constantes a_1, a_2, a_3, a_4 dans w pour avoir :

$$W(y) = \left(1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}\right) w_1 + \left(y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}\right) \Theta_1 + \left(\frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}\right) w_2 + \left(-\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}\right) \Theta_2 \quad (4.2.5)$$

Ou bien

$$W(y) = \sum_{i=1}^4 \varphi_i(y) \delta_i \quad (4.2.6)$$

Le vecteur des déplacements nodaux est :

$$\delta = [u_1, w_1, \Theta_1, \psi_1, u_2, w_2, \Theta_2, \psi_2]^t \quad (4.2.7)$$

qui est à son tour séparé en deux vecteurs de déplacements dont chacun correspond à une direction :

$$\delta u = [u_1, \psi_1, u_2, \psi_2]^t \quad (4.2.8)$$

$$\delta w = [w_1, \Theta_1, w_2, \Theta_2]^t \quad (4.2.9)$$

Les déplacements sont exprimés à partir des expressions suivantes :

$$u = N_1(y) \delta u \quad (4.2.10)$$

$$\text{et} \quad w = N_2(y) \delta w \quad (4.2.11)$$

où N_1 et N_2 sont les vecteurs des fonctions de forme classiques d'un élément de poutre en flexion [5] :

$$N_1(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}\right] \quad (4.2.12)$$

$$N_2(y) = \left[1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}\right] \quad (4.2.13)$$

où $N_1(y)$ et $N_2(y)$ sont obtenues en posant $u(y) = a_1 + a_2y + a_3y^2 + a_4y^3$ avec la rotation autour de

$$x \text{ données par } \psi = -\frac{\partial u(y)}{\partial y}$$

Les relations exprimant donc les déplacements et les pentes sont :

$$\Theta = \partial w / \partial y \quad (4.2.14)$$

$$\Psi = -\partial u / \partial y \quad (4.2.15)$$

Le nombre total de degrés de liberté pour chaque nœud est de quatre ; les matrices élémentaires de l'arbre sont donc de taille 8*8 qui sont obtenues en remplaçons u, w, θ, ψ par leurs expressions dans les énergies cinétique et de déformation de l'arbre.

a) Energies cinétique

L'utilisation de l'expression de l'énergie cinétique de l'arbre (3.1.15) pour un élément conduit à :

$$T_a = \frac{\rho S}{2} \int_0^L [\delta \dot{u}^t N_1^t N_1 \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^t N_1^t N_1 \delta \dot{w}] dy + \frac{\rho S}{2} \int_0^L \left[\delta \dot{u}^t \frac{dN_1^t}{dy} \frac{dN_1}{dy} \delta \dot{u} + \delta \dot{w}^t \frac{dN_2^t}{dy} \frac{dN_2}{dy} \delta \dot{w} \right] + \rho I L \Omega^2 - 2 \rho I L \Omega \int_0^L \delta \dot{u}^t \frac{dN_1^t}{dy} \frac{dN_1}{dy} \delta w dy \quad (4.2.16)$$

En substituant (4.2.10) et (4.2.11) ainsi que leurs dérivées dans (4.2.16) on aura la forme compacte suivante :

$$T_a = \frac{1}{2} \delta \dot{u}^t M_1 \delta \dot{u} + \frac{1}{2} \delta \dot{w}^t M_2 \delta \dot{w} + \frac{1}{2} \delta \dot{u}^t M_3 \delta \dot{u} + \frac{1}{2} \delta \dot{w}^t M_4 \delta \dot{w} + \frac{1}{2} \delta \dot{u}^t M_5 \delta w + \rho I L \Omega^2 \quad (4.2.17)$$

Les matrices obtenues sont de l'ordre 4*4. M₁ et M₂ sont les matrices classiques de masse, M₃ et M₄ représentant l'effet secondaire d'inertie de rotation de la section par rapport à un diamètre et la matrice M₅ représente l'effet gyroscopique. Le terme qui est une constante à une contribution nulle lors de l'application des équations de Lagrange. L'expression (4.2.17)[22] se réduit à :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_a}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial T_a}{\partial \delta} = (M_c + M_g) \ddot{\delta} + G \dot{\delta} \quad (4.2.18)$$

où M_c et M_g sont déduites respectivement de M₁, M₂, M₃ et M₄ et G est déduite de M₅. Les matrices sont donc les suivantes :

$$M_1 = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L & 54 & 13L \\ -22L & 4L^2 & -13L & -3L^2 \\ 54 & -13L & 156 & -22L \\ 13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.19)$$

$$M_2 = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L & 54 & -13L \\ -22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.20)$$

$$M_3 = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & -3L & -36 & -3L \\ -3L & 4L^2 & 3L & -L^2 \\ -36 & 3L & 36 & 3L \\ -3L & -L^2 & 3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.21)$$

$$M_4 = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} -36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.22)$$

$$M_5 = \frac{\rho I \Omega}{15L} \begin{bmatrix} -36 & 3L & 36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.23)$$

Rassemblons les matrices qui ont les mêmes propriétés $M_c = M_1 + M_2$ et $M_g = M_3 + M_4$ d'où :

$$M_c = \frac{\rho s L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22l & 54 & 0 & 0 & 13l \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 0 & 54 & -13l & 0 \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 0 & 13l & -3l^2 & 0 \\ -22l & 0 & 0 & 4l^2 & -13l & 0 & 0 & -3l^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13l & 156 & 0 & 0 & 22l \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 0 & 156 & -22l & 0 \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & 0 & -22l & 4l^2 & 0 \\ 13l & 0 & 0 & -3l^2 & 22l & 0 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.2.24)$$

$$M_g = \frac{\rho s L}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3l & -36 & 0 & 0 & -3l \\ 0 & 36 & 3l & 0 & 0 & -36 & 3l & 0 \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & 0 & -3l & -4l^2 & 0 \\ -3l & 0 & 0 & 4l^2 & 3l & 0 & 0 & -l^2 \\ 36 & 0 & 0 & 3l & 36 & 0 & 0 & 3l \\ 0 & -36 & -3l & 0 & 0 & 36 & -3l & 0 \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & 0 & -3l & 4l^2 & 0 \\ -3l & 0 & 0 & -l^2 & 3l & 0 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.2.25)$$

$$ET G = \frac{\rho I \Omega}{15L} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3l & 0 & 0 & 36 & -3l & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3l & -36 & 0 & 0 & -3l \\ 3l & 0 & 0 & -4l^2 & -3l & 0 & 0 & l^2 \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & 0 & -3l & -l^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3l & 0 & 0 & -36l & 3l & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3l & 36 & 0 & 0 & 3l \\ 3l & 0 & 0 & l^2 & -3l & 0 & 0 & -4l^2 \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & 0 & -3l & 4l^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.26)$$

a) Energie de déformation

L'application des expressions (4.2.12) et (4.2.13) sur l'équation de l'énergie de déformation donnée par la formule (4.1.10) donne [23]

$$U_a = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\delta u^t \frac{d^2 N_1^t}{dy} \frac{d^2 N_1}{dy} \delta u + \delta w^t \frac{d^2 N_2^t}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} \delta w \right] dy \quad (2.2.27)$$

$$\text{Ou} \quad U_a = \frac{EI}{2} \left[\delta u^t \left(\int_0^L \frac{d^2 N_1^t}{dy} \frac{d^2 N_1}{dy} dy \right) \delta u + \delta w^t \left(\int_0^L \frac{d^2 N_2^t}{dy^2} \frac{d^2 N_2}{dy^2} dy \right) \delta w \right] \quad (2.2.28)$$

Qui peut s'écrire sous la forme réduite :

$$U_a = \frac{1}{2} \delta u^t k_1 \delta u + \frac{1}{2} \delta w^t k_2 \delta w \quad (4.2.29)$$

ou

$$k_1 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.30)$$

$$\text{et} \quad k_2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ -6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.31)$$

k_1 et k_2 sont les matrices classiques de raideur.

La matrice global K est :

$$k = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 2L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 0 & -6L & 4L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & 2L^2 & 6L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ \psi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \quad (4.2.32)$$

Dans le cas où nous tiendrons compte de l'effet de cisaillement notre matrice prend la forme suivante :

$$k = \frac{EI}{(1+a)L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ 0 & 6L & (4+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2+a)L^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6L & 12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 0 & 12 & -6L & 0 \\ 0 & 6L & (2+a)L^2 & 0 & 0 & -6L & (4+a)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & 0 & (2+a)L^2 & 6L & 0 & 0 & (4+a)L^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.33)$$

La quantité caractérisant le cisaillement est $a = \frac{12EI}{GS_r L^2}$, où $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ est le module de cisaillement et ν est le coefficient de poisson et $S_r \approx S$ (section réduite)

4.2.3 Formulation matricielle des équations du palier

En général, l'influence des pentes et des moments est négligée pour les paliers et on ne tient compte que des forces généralisées F_u et F_w qui sont liées aux déplacements u et w . En tenant compte de (3.1.30) on a

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_\psi \\ F_w \\ F_\theta \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & K_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{zx} & 0 & K_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \psi \\ w \\ \theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{xx} & 0 & C_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{zx} & 0 & C_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\psi} \\ \dot{w} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (4.2.34)$$

La première matrice est une matrice de raideur et la seconde est une matrice d'amortissement. Ces matrices sont en général asymétriques et peuvent varier de manière significative en fonction de la vitesse de rotation.

4.2.4 Formulation matricielle des équations du balourd

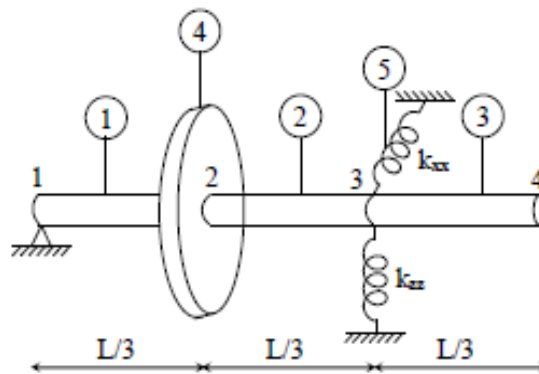
L'application des équations de Lagrange sur l'équation de l'énergie cinétique d'un balourd (3.1.33) donne :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{T_b}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{T_b}{\partial \delta} = -m_b d\Omega^2 \begin{bmatrix} \sin\Omega t \\ \cos\Omega t \end{bmatrix} \tag{4.2.35}$$

Avec $\delta = [u \ w]^t$.

4.3 EXEMPLE DE MONTAGE DE MATRICES GLOBALES

Considérons le modèle de rotor étudié qui est schématisé sur la figure (4.3) ayant quatre nœuds et cinq éléments : un élément disque, un élément palier et trois éléments arbre de même longueur[24]
 $l = l_1 = l_2 = l_3 = L/3$.



Fig(4.3) Modèle de rotor avec éléments et nœuds.

Dans le modèle au-dessus, les nœuds de chaque élément de l'arbre, du palier ou du disque sont en rapport avec les nœuds du rotor d'après la table ci-dessous :

Nombres d'éléments	Type d'élément	Nœuds du rotor	Vecteurs de déplacement δ
1	Arbre	1-2	$u_1, w_1, \theta_1, \psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \psi_2$
2	Arbre	2-3	$u_2, w_2, \theta_2, \psi_2, u_3, w_3, \theta_3, \psi_3$
3	Arbre	3-4	$u_3, w_3, \theta_3, \psi_3, u_4, w_4, \theta_4, \psi_4$
4	Disque	2	$u_2, w_2, \theta_2, \psi_2$
5	palier	3	u_3, w_3

Tableau (4.1)les nœuds des éléments rotor

Les matrices globales de masse, de rigidité et de Coriolis sont obtenues en superposant les matrices élémentaires selon le tableau. Chaque type de matrice globale est obtenu en sommant les trois matrices des trois éléments.

a) Matrice globale classique de masse

$$M_{ct} = \frac{psl}{420} \begin{pmatrix} 156 & 0 & 0 & -22l & 54 & 0 & 0 & 13l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 0 & 54 & -13l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 0 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -122 & 0 & 0 & 4l^2 & -13l & 0 & 0 & -3l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 54 & 0 & 0 & -13l & 312 & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 0 & 13l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 0 & 312 & 0 & 0 & 0 & 54 & -13l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & 0 & 0 & 8l^2 & 0 & 0 & 13l & -3l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13l & 0 & 0 & -3l^2 & 0 & 0 & 0 & 8l^2 & -13l & 0 & 0 & -3l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 0 & -13l & 312 & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 0 & 13l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 13l & 0 & 0 & 312 & 0 & 0 & 0 & 54 & -13l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13l & -3l^2 & 0 & 0 & 0 & 8l^2 & 0 & 0 & 13l & -3l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -13l & 0 & 0 & -3l^2 & 0 & 0 & 0 & 8l^2 & -13l & 0 & 0 & -3l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 0 & -13l & 156 & 0 & 0 & 22l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & 13l & 0 & 0 & 156 & -22l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13l & 3l^2 & 0 & 0 & -22l & 4l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13l & 0 & 0 & -3l^2 & 22l & 0 & 0 & 4l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{w}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\psi}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\psi}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{w}_3 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\psi}_3 \\ \dot{u}_4 \\ \dot{w}_4 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\psi}_4 \end{pmatrix} \quad (4.3.1)$$

où $r = 7800 \text{ kg/m}^3$, $s = 3,142 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ et $l = 0,1333 \text{ m}$

b) Matrice globale représentant l'effet secondaire d'inertie de rotation

$$M_{gt} = \frac{pI}{30l} \begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 & -3l & -36 & 0 & 0 & -3l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3l & 0 & 0 & -36 & 3l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & 0 & -3l & -l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 4l^2 & 36l & 0 & 0 & -l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3l & 72 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & -3l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 3l & 0 & 0 & 72 & 0 & 0 & 0 & -36 & -13l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & 0 & 0 & 8l^2 & 0 & 0 & -3l & -3l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3l & 0 & 0 & -l^2 & 0 & 0 & 0 & 8l^2 & 3l & 0 & 0 & -3l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & 3l & 72 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & -3l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & -3l & 0 & 0 & 72 & 0 & 0 & 0 & -36 & 3l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3l & -l^2 & 0 & 0 & 0 & 8l^2 & 0 & 0 & -3l & -l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3l & 0 & 0 & -l^2 & 0 & 0 & 0 & 8l^2 & 3l & 0 & 0 & -l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & 3l & 36 & 0 & 0 & 3l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & 13l & 0 & 0 & 36 & -3l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3l & -l^2 & 0 & 0 & -3l & 4l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3l & 0 & 0 & -l^2 & 3l & 0 & 0 & 4l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{w}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\psi}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\psi}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{w}_3 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\psi}_3 \\ \dot{u}_4 \\ \dot{w}_4 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\psi}_4 \end{pmatrix} \quad (4.3.2)$$

$$l_1 = l_2 = l_3 = l = L/3 = 0,13333$$

c) Matrice globale représentant l'effet gyroscopique

$$C_t = \frac{pI\Omega}{15l} \begin{pmatrix} 0 & -36 & -3l & 0 & 0 & 36 & -3l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3l & -36 & 0 & 0 & -3l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3l & 0 & 0 & -4l^2 & -3l & 0 & 0 & l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & 0 & -3l & l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3l & 0 & 0 & 72 & 0 & 0 & 0 & 36 & -3l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3l & 72 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & -3l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3l & 0 & 0 & l^2 & 0 & 0 & 0 & -8l^2 & -3l & 0 & 0 & 4l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & 0 & 0 & 8l^2 & 0 & 0 & -3l & -l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 3l & 0 & 0 & -72 & 0 & 0 & 0 & 36 & -3l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & 3l & 72 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & -3l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3l & 0 & 0 & l^2 & 0 & 0 & 0 & -8l^2 & -3l & 0 & 0 & l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3l & -l^2 & 0 & 0 & 0 & 8l^2 & 0 & 0 & -3l & -l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 3l^2 & 0 & 0 & -36 & 3l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & 3l & 36 & 0 & 0 & 3l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3l & 0 & 0 & l^2 & -3l & 0 & 0 & -4l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3l & l^2 & 0 & 0 & -3l & 4l^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{w}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\psi}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\psi}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{w}_3 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\psi}_3 \\ \dot{u}_4 \\ \dot{w}_4 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\psi}_4 \end{pmatrix} \quad (4.3.3)$$

d) Matrice de rigidité totale de l'énergie de déformation

$$k_t = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6l & -12 & 0 & 0 & -6l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 3l & 0 & 0 & -12 & 6l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & 0 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6l & 0 & 0 & 4l^2 & 6l & 0 & 0 & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 0 & 6l & 24 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & -6l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & -12 & 6l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 8l^2 & 0 & 0 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6l & 0 & 0 & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 8l^2 & 6l & 0 & 0 & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 6l & 24 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & -6l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6l & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & -12 & 6l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6l & -2l^2 & 0 & 0 & 0 & 8l^2 & 0 & 0 & -6l & 2l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6l & 0 & 0 & -2l^2 & 0 & 0 & 0 & 8l^2 & 6l & 0 & 0 & -l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 6l & 12 & 0 & 0 & 6l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 6l & 0 & 0 & 12 & -6l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6l & -2l^2 & 0 & 0 & -6l & 4l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6l & 0 & 0 & 2l^2 & 6l & 0 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ \psi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ \psi_2 \\ u_3 \\ w_3 \\ \theta_3 \\ \psi_3 \\ u_4 \\ w_4 \\ \theta_4 \\ \psi_4 \end{Bmatrix} \quad (4.3.4)$$

e) Matrice du palier

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \\ F_\theta \\ F_\psi \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 10^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ w_3 \\ \theta_3 \\ \psi_3 \end{Bmatrix} \quad (4.3.5)$$

$k_{xx} = 10^5 \text{ N/m}$

$k_{zz} = 5.10^5 \text{ N/m}$

f) Matrice du balourd

$$\begin{Bmatrix} F_U \\ F_W \end{Bmatrix} = 1,5.10^{-5} \Omega^2 \begin{bmatrix} \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{bmatrix} \quad (4.3.6)$$

où $m_b.d = 1,5.10^{-5} \text{ kg.m}$

g) Matrice globale du disque (masse et gyroscopique)

$$M_d = \begin{bmatrix} 16,47 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16,47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9,247.10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9,247.10^{-2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_2 \\ \dot{w}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\psi}_2 \end{Bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,1861 \\ 0 & 0 & 0,1861 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\psi}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.3.7)$$

avec $M_d = 16,47 \text{ kg}$; $I_{dx} = 9,247.10^{-2} \text{ kg.m}^2$; $I_{dy} = 0,1861 \text{ kg.m}^2$

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Nous constatons que la recherche dans ce domaine (la dynamiques des machines tournantes) est complexe, car elle nécessite non seulement une maîtrise des technologies relatives aux dynamiques des corps solides, mais aussi une très bonne connaissance des applications et de leurs environnements.

Dans le cadre du projet nous avons développés une méthodologie de calcule des caractéristiques pour un système monorotor. La démarche théorique suivie est récapitulée comme suis : « spécification de l'oscillation libre et la détermination de tous les éléments de monorotor avec une étude théorique, étude architecturale détaillée,». Durant le processus étude, nous avons constaté que malgré les progrès réalisés dans le domaine

Des machines tournantes, les outils et moyens de faire la maintenance de machines tournantes de grande dimension comme les machines tournantes des porteur de navires non pas atteignent leurs maturité. Nous avons démontré dans ce mémoire la faisabilité de la modélisation numérique par éléments finis. Sachons que le développement des systèmes de progiciels dans ce Domain est bien avancé et reste encore très dépendant de la technologique de programmation informatique, nos résultats attestent que les machines tournantes constituent une alternative sérieuse à la maintenance. Donc, cette étude est un moyen d'améliorer les performances de contrôle avec un gain économique et un autre du temps de développement.

Finalement, l'approche traitée au cours de ce travail peut-être avantageusement améliorée et facilement étendue sur d'autres types de machines et les chercheurs du domaine vont donc devoir relever des défis encore plus importants.

REFERENCE

- [1] K. B. Blair, C. M. Krousgrill, and T. N. Farris. Harmonic balance and continuation techniques in the dynamic analysis of Du_{ng}'s equation. *Journal of Sound and Vibration*, 202(5):717{731, 1997.
- [2] J. Bonini and M. Berthillier. M_{ethodes} en dynamique non-lin_{eaire} des rotors pour l'_{etude} du comportement d'un moteur d'avion. *Revue Fran_{caise} de M_{ecanique}*, 3:221{226, 1999
- [3] Thompson, W.T. and Dillon, M., " Theory of Vibrations with Applications ", Prentice Hall, New Jersey, 1998.
- [4] Timoshenko, S. " Vibration Problems in Engineering ", 4th Edition, John Wiley & Sons, 1974.
- [5] Timoshenko, S., J. Goodler, " Theory of elasticity ", McGraw-Hill, (1970).
- [6] Gorman, D. J., " Free Vibration Analysis of Beams and Shafts ", John Wiley & Sons, NewYork, 1975.
- [7] Ewins, D.J., 1998, " Modal Analysis for Rotating Machinery ", presented at the International Conference on Rotor Dynamics, Darmstadt, September, 1998.
- [8] Kaman Instrumentation Corporation. KDM-8200, Instruction manual, 1991.
- [9] KTR France. Rotex GS, Catalogue 3-GS-F-f-4/97.
- [10] B. O. Al-Bedoor. Transient torsional and lateral vibrations of unbalanced rotors with rotor-to-stator rubbing. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 229(3):627{645, 2000.
- [11] J. Argyris and H. P. Mlejnek. Texts on computational mechanics. Volume V Dynamics of structure. North-Holland, 1991.
- [12] G. Asch. Les capteurs en instrumentation industrielle. Dunod, fourth edition, 1996.
- [13] C. D. Bailey. Application of Hamilton's law of varying action. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 13(9):1154{1157, Septembre 1975.
- [14] C. D. Bailey. Comment on "When is Hamilton's principle an extremism principle ?". *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 13(11):1539{1540, Novembre 1975.
- [15] Tondl, A., " Some Problems of Rotor Dynamics ", Publishing House of the Czechoslovak, Academy of Sciences: Prague, 1965.
- [16] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor., "The finite element method", Volume1. Basic formulation and linear problems. McGraw-Hill, fourth edition, 1994.
- [17] Jeffcott, H. H., " The Lateral Vibration of Loaded Shafts in the Neigh bourhood of a Whirling Speed ", *Phil. Mag.*, Vol. 6, no. 37, pp. 304-314, 1919.
- [18] Vance, J.M., " Rotordynamics of Turbomachinery ", John Wiley & Sons, New York, 1988
- [19] LALANNE M., FERRARIS G. – Rotordynamics Prediction in Engineering. J. Wiley (G.B.), 198 p. (1990).

- [20] Lee, C., " Vibration analysis of rotors ", Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [21] BELAHRACHE Saliha, ANALYSE DYNAMIQUE DES CORPS CONTINUS EN ROTATION :APPLICATION AUX ARBRES MOTEURS", These de magister, 2007.
- [22] Ghanem A., Contributions à la modélisation avancée des machines tournantes en dynamique transitoire dans le cadre Arlequin, 2013, thèses, France.
- [23] Roisse H., Contribution à la modélisation des systèmes électrotechniques par la méthode des réseaux de perméances couplés. Application aux machines synchrones à aimants, 1998, thèses, France.
- [24] Gmür T., [LIVRE] Dynamique des structures: analyse modale numérique, 1997, ISBN 2-88074-333-8.