





REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
جامعة محمد بوضياف بالمسيلة  
UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA  
كلية الرياضيات و الإعلام الآلي  
Faculté des Mathématiques et de l' Informatique



## MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière** : Mathématiques

**Option** : Equation aux Dérivées Partielles et applications

Présenté par :

**CHAIMA Djaber**

Sujet

---

### Problème de la digue avec des conditions de Fuite

---

**Date de soutenance : 27-06-2019**

**devant le jury composé de:**

<b>MOKHTARI Abdelhak</b>	<b>Université de M'sila</b>	<b>Président</b>
<b>SAADI Abderachid</b>	<b>Université de M'sila</b>	<b>Encadreur</b>
<b>DECHOUCHA Nouredine</b>	<b>Université de M'sila</b>	<b>Examineur</b>
<b>YAHIAOUI Mohamed Eladel</b>	<b>Université de Blida</b>	<b>Examineur</b>

**Année universitaire: 2018/2019**

# *Remerciements*

*Avant toute chose, je remercie mon dieu*

*de mous donnée la force*

*Et le courage d'aboutir à ce travail.*

*Je remercie notre encadreur*

*«Saadi Abderachid.*

*Je remercie tous les membres de jury d'avoir*

*accepter*

*présider et examiner Notre Travail*

*Merci pour toutes les personnes*

*Qui nous on aidée.*

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Notations</b>	<b>4</b>
<b>1 Rappels et définitions</b>	<b>5</b>
1.1 Espaces de Banach . . . . .	5
1.2 Espaces de Hilbert . . . . .	5
1.3 Opérateurs monotones . . . . .	6
1.4 La mesure de Lebesgue . . . . .	7
1.5 Espaces $L^p$ . . . . .	8
1.6 Espace de Sobolev . . . . .	9
1.7 Inégalités de Base . . . . .	9
1.7.1 Inégalité de Poincaré . . . . .	9
1.7.2 Inégalité de Hölder . . . . .	10
1.7.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz . . . . .	10
1.8 Fonctions convexes . . . . .	10
1.9 Topologie faible, faible * . . . . .	11
<b>2 Position du problème, existence de solution</b>	<b>12</b>
2.1 Déclaration du Problème . . . . .	12
2.2 Formulation forte . . . . .	14
2.3 Formulation faible . . . . .	16

2.4	Existence d'une Solution . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Résultats complémentaires</b>	<b>27</b>
3.1	Quelques propriétés des solutions . . . . .	27
3.2	Quelques exemples particuliers . . . . .	34
	<b>Conclusion</b>	<b>39</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>39</b>

# Introduction

Henri Philibert Gaspard Darcy, est né en 1803 à Dijon, ayant entres établi la loi de Darcy et l'équation de Darcy-Weibach ; Ingénieur général des ponts et chaussées.

Les l'équation de Navier - Stokes sont en pratique inapplicables dans les millieux poreux, puisqu'on ne connait pas ce qui se passe au niveau microscopique, mais on peut les modifier et éliminer quelques termes négligeables. pour arriver à une loi simple c'est la loi de Darcy [11].

Considérons, alors l'équation de Navier-Stokes incompressible dans  $\mathbb{R}^n$  :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(v) = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (\nabla v) \cdot v = -\nabla(gx_n) - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta v. \end{cases}$$

ou  $p$  est la pression, et  $v$  est la vitesse.

donc par conséquence (voir [11] ), la loi de Darcy dans  $\mathbb{R}^n$  s'écrit :

$$v = -k(x) \nabla(p + x_n).$$

Etudié dans la dimension  $\mathbb{R}^2$ , donc la loi de Darcy est donner par :

$$v = -k \nabla(p + y).$$

Avec  $k$  est le coeffécient de perméabilité et si le milieu est homogéne alor  $k$  est constante qui est strictement positive.

Le problème de la digue a été étudié sur tout par J.carillo et M.chipot [3] (le cas condition de Dirichlet) et [4] (la cas des conditions de Neumann, notre article de base).

Soit  $\Omega$  un domaine borné avec une frontière  $\partial\Omega = S$ , continue localement lipschitzienne,

(  $\Omega$  représente la partie de milieu poreux ) et  $S_1, S_2, S_3 = (S_{3,i})_{1 \leq i \leq N}$  des sous ensembles de  $S$  tels que  $S_1$  est fermé, et  $S_3$  est ouvert dans le complément de  $S_1$  dans  $S$ .

Notre travail est composé de trois chapitres :

- Dans le premier chapitre, rappels et définitions.
- Dans le second chapitre, déclaration du problème, et démontrons l'existence de la solution de le problème suivant :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (p, \chi) \in H^1(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \text{ telque} \\ (i) \ p \geq 0, \ 0 \leq \chi \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega, \ \chi = 1 \text{ sur } [p > 0], \\ (ii) \ p = 0 \text{ sur } S_2, \\ (iii) \ \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla \xi + \chi \xi_y dX - \int_{S_3} \beta(X, \varphi - p) \cdot \xi d\sigma(X) \leq 0, \\ \forall \xi \in H^1(\Omega), \ \xi \geq 0 \text{ sur } S_2. \end{array} \right.$$

- Dans le troisième chapitre, nous donnons quelques résultats préliminaires concernant la solution du problème faible et nous montrons que le caractère unique ne peut contenir que des « bassin », c'est-à-dire des fonctions particulières.

# Notations

$\Omega$  : domaine borné de  $\mathbb{R}^2$

Si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction, le support de  $f$  est  $\text{supp}f = \overline{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \neq 0\}}$ .

$C^k(\Omega)$  : fonctions  $k$  fois continûment différentiables sur  $\Omega$  ( $k \geq 0$ ).

$\mathcal{D}(\Omega)$  : l'espace des fonctions  $C^\infty(\Omega)$  à support compact.

$f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$[f \leq g] = \{(x, y) \in \Omega \mid f(x, y) \leq g(x, y)\},$$

$$[f < g] = \{(x, y) \in \Omega \mid f(x, y) < g(x, y)\}.$$

$$\xi \wedge \frac{p_\epsilon}{\delta} \in V.$$

$\frac{\partial u}{\partial \nu}$  : dérivée normale extérieure.

$\nabla$  est un opérateur définie par  $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ .

p.p. : presque partout.

$|\Omega|$  : mesure (de Lebesgue) de l'ensemble  $\Omega$ .

$( )^+$  désigne la partie positive d'un fonctions.

$\chi_A$  : désigne la fonction caractéristique d'un ensemble  $A$ .

$\xi_y$  : désigne la dérive Partielle de  $\xi$  par rapport  $y$  d'un fonctions  $\xi$ .

$\rightarrow$  convergence forte.

$\rightharpoonup$  convergence faible.

$\langle , \rangle$  produit de dualité  $V', V$ .

$L^\infty$  :  $u$  mesurable sur  $\Omega$  et il existe  $C$  tel que  $|u(x)| \leq C$  p.p. sur  $\Omega$ .

$W^{1,p}(\Omega), H^1(\Omega)$  : espaces de Sobolev.

$H'$  La dual d'un espace de Hilbert  $H$ .

$\gamma_0$  : désigne l'opérateur de trace usuel.

# Chapitre 1

## Rappels et définitions

### 1.1 Espaces de Banach

**Définition 1.1.** (*espace vectoriel normé*) Tout couple  $(E, \|\cdot\|)$  où  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $E$ , s'appelle un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé.

**Définition 1.2.** (*espace de Banach*)  $(E, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé,  $E$  est un Banach si toute suite de Cauchy de  $E$  est convergente ( dans  $E$  ).

**Définition 1.3.** (*espaces réflexifs*)[1] Soit  $E$  un espace de Banach et soit  $J$  l'injection canonique de  $E$  dans  $E''$ . On dit que  $E$  est réflexif si  $J(E) = E''$ .

**Définition 1.4.** (*espaces séparables*)[1] On dit qu'un espace métrique est séparable s'il existe un sous-ensemble  $D \subset E$  dénombrable et dense.

### 1.2 Espaces de Hilbert

**Définition 1.5.** [1] Soit  $F$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Un produit scalaire  $(u, v)$  est une forme bilinéaire de  $F \times F$  dans  $\mathbb{R}$ , symétrique, définie positive c'est-à-dire  $(u, u) > 0$  si  $u \neq 0$

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé espace pré-hilbertien.

Un espace pré-hilbertien et complet est un espace de Hilbert.

**Définition 1.6.** [1] Soit  $H$  un espace de Hilbert, On dit qu'une forme bilinéaire  $a(u, v) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$  est

(i) *continue* s'il existe une constante  $C$  telle que

$$|a(u, v)| \leq C |u| |v|, \quad \forall u, v \in H.$$

(ii) *coercive* s'il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que

$$a(u, u) \geq \alpha |u|^2, \quad \forall u \in H.$$

**Théorème 1.1.** (Lax-Milgram) [1] soit  $H$  un espace de Hilbert, muni d'un produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$ ,  $f \in H'$ , et  $a(u, v)$  une forme bilinéaire continue, coercive dans  $H$ , soit  $K$  un ensemble non vide, fermé de  $H$ . Alors, il existe solution unique  $u \in K$  de

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

**Théorème 1.2.** (Stampacchia) [1] Soit  $a(u, v)$  une forme bilinéaire continue et coercive. Soit  $K$  un convexe, fermé et non vide.

Étant donné  $\varphi \in H'$  il existe  $u \in K$  unique tel que

$$a(u, v - u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle \quad \forall v \in K.$$

De plus, si  $a$  est symétrique, alors  $u$  est caractérisé par la propriété

$$u, v \in K, \quad \frac{1}{2}a(u, v) - \langle \varphi, u \rangle = \min \left\{ \frac{1}{2}a(u, v) - \langle \varphi, u \rangle \right\}.$$

**Théorème 1.3.** (Point fixe de Schauder) Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel topologique séparé et  $C$  un convexe fermé non vide de  $E$ . Si  $T$  est une application continue de  $C$  dans  $C$  telle que  $T(C)$  soit relativement compact, alors  $T$  a un point fixe.

**Théorème 1.4.** (Point fixe Brouwer) Toute application continue d'une boule fermée d'un espace euclidien dans elle-même admet un point fixe.

### 1.3 Opérateurs monotones

Soit  $V$  est un espace de Banach réflexif et séparable, et  $A$  une application de  $V$  dans  $V'$  (en général non linéaire).

**Définition 1.7.** *On dit que*

i) *A est un monotone si*

$$\forall u, v \in V, \langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq 0.$$

ii) *A est strictement monotone si de plus  $\langle A(u) - A(v), u - v \rangle > 0 \forall u, v \in V$ , avec  $u \neq v$ .*

iii) *A est hémicontinue si pour tous  $u, v \in V$ , l'application  $t \mapsto \langle A(u + tv), v \rangle$  est continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .*

## 1.4 La mesure de Lebesgue

**Théorème 1.5.** *Il existe une unique mesure positive  $\sigma$  sur  $(\mathbb{R}^n; B(\mathbb{R}^n))$  ayant les deux propriétés suivantes :*

— *la mesure du pavé fermé borné  $[0, 1]^n$  est égale à 1.*

— *si  $A$  est un borélien de  $\mathbb{R}^n$  et  $x$  un élément de  $\mathbb{R}^n$ , les ensembles  $A$  et*

$$A + x := \{a + x; a \in A\}.$$

*sont tels que  $\sigma(A) = \sigma(A + x)$  (on dit que la mesure  $\sigma$  a la propriété d'invariance par translation).*

**Définition 1.8.** ( *$\sigma$ -presque partout*) *Soit  $\Omega$  un ensemble,  $T$  une tribu sur  $\Omega$ , et  $\sigma$  une mesure positive  $\sigma : T \mapsto [0, +\infty]$ . On dit qu'un sous-ensemble  $N$  de  $\Omega$  est  $\sigma$ -négligeable si et seulement si  $N$  est inclus dans un sous-ensemble  $B$  appartenant à  $T$  et tel que  $B$  vérifie  $\sigma(B) = 0$ .*

Tout sous-ensemble d'un sous-ensemble  $\sigma$ -négligeable est encore  $\sigma$ -négligeable et l'on dira d'une propriété  $P(x)$  satisfaite pour tout  $x$  dans  $\Omega$ , excepté lorsque  $x$  appartient à un sous-ensemble négligeable, qu'elle est satisfaite  $\sigma$ -p.p.

**Théorème 1.6.** (*théorème de Lebesgue*) *Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée en valeur absolue sur un segment de  $\mathbb{R}$ . La fonction  $f$  est intégrable au sens de Riemann sur*

$[a, b]$  si et seulement si elle est mesurable et intégrable au sens de Lebesgue sur  $[a, b]$  et si, de plus, l'ensemble des points de discontinuité de  $f$  est négligeable relativement à la mesure de Lebesgue. Les intégrales calculées au sens de Riemann et de Lebesgue dans ce cas coïncident.

## 1.5 Espaces $L^p$

**Définition 1.9.**  $L^1(\Omega)$ , L'ensemble des fonctions intégrables sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  tels que  $\int_{\Omega} |f(x)| < \infty$   
On note

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)|.$$

**Définition 1.10.** [1] Soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p < \infty$ , on pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

On a  $\|\cdot\|_{L^p}$  est une norme.

**Définition 1.11.**  $L^\infty(\Omega)$ , L'ensemble des fonctions sur  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $f$  mesurable, et il existe une constante  $C$  telle que  $|f(x)| < C$  p.p. sur  $\Omega$

On note :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\text{ess } x \in \Omega} |f(x)|.$$

**Théorème 1.7.** (Théorème de convergence dominée de Lebesgue) : Soit  $(X; \sigma)$  un espace mesuré, et soit  $(f_n)_{n \geq 1}$  une suite d'applications mesurables  $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , on suppose que

1. la suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge presque partout vers une fonction mesurable  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
2. Il existe une fonction intégrable  $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  positive, telle que l'on ait la condition de domination

$$|f_n| < g, \text{ p.p. } \forall n \geq 1.$$

Alors, les fonctions  $f_n$  et  $f$  sont intégrables et  $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . En particulier, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\sigma = \int \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\sigma = \int f d\sigma$$

## 1.6 Espace de Sobolev

**Définition 1.12.** [1] L'espace de Sobolev d'ordre 1,  $W^{1,p}(\Omega)$  est l'ensemble suivant :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in L^p(\Omega) \right\},$$

En particulier  $W^{1,p}(\Omega) = H^1(\Omega)$ .

**Définition 1.13.** [1] Pour  $m \in \mathbb{N}$ ,  $W^{m,p}(\Omega)$  est l'ensemble suivante :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega), D^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\},$$

L'espace  $W^{m,p}(\Omega)$  est muni de la norme

$$\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|\cdot\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{\alpha=1}^m \|D^\alpha \cdot\|_{L^p(\Omega)},$$

En particulier  $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$  et  $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ .

**Théorème 1.8.** (Formule de Green)[1] Soit  $\Omega$  un ouvert borné, régulier de  $\mathbb{R}^2$ , sa frontière  $\partial\Omega = \Gamma, \eta$  le vecteur normale unitaire vers l'extérieur, et  $\eta_i(x)$  les composantes de  $\eta(x)$ .

On a

$$i) \quad \forall f \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx = \int_{\Gamma} f \cdot \eta_i(x) d\Gamma(x).$$

$$ii) \quad \forall f, g \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g dx = - \int_{\Omega} f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} f \cdot g \cdot \eta_i(x) d\Gamma(x).$$

## 1.7 Inégalités de Base

### 1.7.1 Inégalité de Poincaré

Soit  $p$ , tel que  $1 \leq p < \infty$  et  $\Omega$  un ouvert de largeur finie (borné dans une direction). Alors il existe une constante  $C$ , dépendant uniquement de  $\Omega$  et  $p$ , telle que, pour toute fonction  $u$  de l'espace de Sobolev  $W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

### 1.7.2 Inégalité de Hölder

Soient  $f \in L^p(\mathbb{R})$  et  $g \in L^q(\mathbb{R})$  avec  $1 \leq p, q \leq +\infty$ , on pose  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ , alors :

$$f, g \in L^r, \text{ et} \\ \|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q,$$

### 1.7.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

soit  $(E, (\cdot, \cdot))$  un espace pré-hilbertien réel. Alors ; pour tout  $u, v \in E$

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}} (v, v)^{\frac{1}{2}}.$$

## 1.8 Fonctions convexes

On suppose maintenant que  $E$  est un espace vectoriel.

**Définition 1.14.** [1] soit  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction numérique, L'épigraphe de  $\varphi$  est l'ensemble

$$\text{epi}\varphi = \{[x, \lambda] \in E \times \mathbb{R}; \varphi \leq \lambda\}.$$

**Définition 1.15.** [1] Une fonction  $\varphi : E \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  est dite convexe si

$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) \quad \forall x, y \in E, \forall t \in ]0, 1[$  *Voient propriétés élémentaires des fonctions convexes :*

1. Si  $\varphi$  est une fonction convexe, alors **epi**  $\varphi$  est un ensemble convexe dans  $E \times \mathbb{R}$  ;  
et réciproquement.
2. Si  $\varphi$  est une fonction convexe, alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  l'ensemble  $[\varphi \leq \lambda]$  est convexe ;  
mais la réciproque n'est pas vraie.
3. Si  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont des fonctions convexes, alors  $\varphi_1 + \varphi_2$  est convexe.
4. Si  $(\varphi_i)_{i \in I}$  est une famille de fonctions convexes alors l'enveloppe supérieure des  
 $(\varphi_i)$  est convexe.

## 1.9 Topologie faible, faible \*

Soit  $E$  un espace de Banach,  $E'$  son dual

**Définition 1.16.** [1] La topologie faible  $\sigma(E, E')$  sur  $E$  est la topologie la moins fine sur  $E$  telle que toutes les applications,

$$\varphi_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$$

avec  $f \in E'$ , soient continues.

**Définition 1.17.** [1] La topologie faible \* désignée aussi par  $\sigma(E', E)$  est la topologie la moins fine sur  $E'$  telle que toute application

$$\varphi_x : E' \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \longmapsto \varphi_x(f) = \langle f, x \rangle$$

avec  $x \in E$ , soient continues.

**Théorème 1.9.** [1] Soit  $C \subset E$  convexe. Alors  $C$  est faiblement fermé pour  $\sigma(E, E')$  si et seulement s'il est fortement fermé.

# Chapitre 2

## Position du problème, existence de solution

### 2.1 Déclaration du Problème

Soit  $\Omega$  un domaine borné, localement lipschitzien de  $\mathbb{R}^2$ , (dans la nature  $\Omega$  représente une section d'une digue), la frontière  $\partial\Omega = S$  continue, subdivisée aux sous-ensembles suivants (voir la Figure (2.1)) :

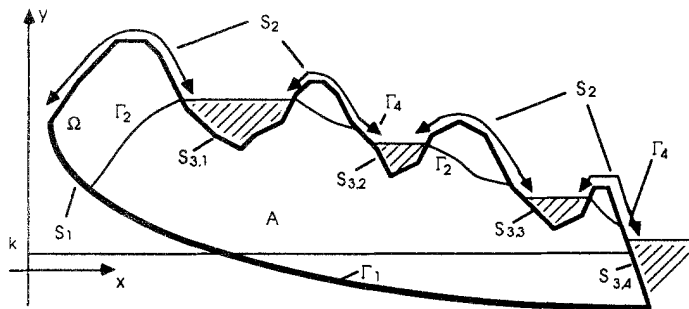


FIGURE 2.1 –

- $S_1$  ; la partie imperméable de la digue ,
- $S_2$  ; la partie de la frontières  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  en contact avec l'air,
- $S_3$  ; la partie du digue sous l'eau (sous réservoir) .

Nous supposons que  $S_1$  est un sous-ensemble fermé de  $\Omega$ , et que  $S_3$  est ouvert dans le complément de  $S_1$  dans  $S$ .

De plus, dans le cas de plusieurs réservoirs, nous noterons également  $S_{3,1}, S_{3,2}, \dots, S_{3,n}$  les différentes composantes connectées de  $S_3$  (dans la figure  $S_3 = S_{3,1} \cup S_{3,2} \cup S_{3,3} \cup S_{3,4}$ ).

Nous supposons aussi que le domaine  $\Omega$  est verticalement convexe, c'est-à-dire :

$$\forall(x, y), (x, y') \in \Omega, \text{ le segment } \{x\} \times [y, y'] \subset \Omega \quad (2.1)$$

De plus, nous supposons que :

$$S_1 \text{ est un sous-ensemble fermé connexe de } S, \text{ qui entoures sous } \Omega. \quad (2.2)$$

$$S_2 \cup S_3 \text{ entoure } \Omega \text{ en haut}. \quad (2.3)$$

Pour plus précise, si on note par  $\Pi_x$  la projection de  $\mathbb{R}^2$  sur l'axe  $x$  pour  $x \in \Pi_x$ ,

$$S^+(x) = \sup \{y | (x, y) \in \Omega\}, S^-(x) = \inf \{y | (x, y) \in \Omega\}, \quad (2.4)$$

(2.1) est équivalent à

$$\Omega = \{(x, y) | x \in \Pi_x(\Omega), S^-(x) < y < S^+(x)\} \quad (2.5)$$

Maintenant (2.2), (2.3) signifient respectivement que :

$S_1$  est un morceau connexe de  $S$  qui contient tous les points  $(x, y)$  de  $S$ , tels que  $y \leq S^-(x, y)$ .

$S_2 \cup S_3$  contient tous les points  $(x, y)$  de  $S$  tels que  $y \geq S^+(x, y)$ .

Le problème fondamental est maintenant de trouver la pression  $p = p(x, y)$  du fluide dans  $\Omega$ , et la partie de  $\Omega$  qui est mouillée - c'est-à-dire l'ensemble humide  $A$ .

## 2.2 Formulation forte

La frontière  $\partial A$  de  $A$  est divisée en quatre parties : une partie imperméable  $\Gamma_1$ , La frontière libre  $\Gamma_2$ , une partie recouverte par le fluide  $\Gamma_3$ , et enfin  $\Gamma_4$  est l'humide partie de la digue qui touche l'air, où le fluide s'écoule à l'extérieur de  $\Omega$ , mais n'y reste pas en quantité significative pour modifier la pression .

La vitesse  $v$  du fluide dans  $A$  est donnée, selon la loi de Darcy, par :

$$v = -k\nabla(p + y), \quad (2.6)$$

où  $p$  est la pression ,  $k$  la coefficient de perméabilité du milieu,

Nous supposons que le milieu est homogène, alors  $k$  est constante, strictement positive .

Nous supposons par exemple, que le fluide de l'eau avec un poids spécifique égal à 1.

Ensuite, si le fluide est incompressibles , nous avons

$$\operatorname{div}(v) = 0 \text{ dans } A,$$

Mais

$$\operatorname{div}(v) = \operatorname{div}(-k\nabla(p + y)) = -k\Delta p$$

Alors

$$\Delta p = 0 \text{ dans } A \quad (2.7)$$

Ensuite, sur  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  il n'y a pas de flux de fluide à travers cette partie de La frontière, donc :

$$\nu \cdot v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

telle que  $\nu = (\nu_x, \nu_y)$  indique l'unité extérieure normale à  $\partial A$  .

D'ou , par (2.6), et

$$\nabla(p + y) \cdot \nu = \frac{\partial}{\partial \nu}(p + y) , \text{ on a}$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(p + y) = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \quad (2.8)$$

Sur  $\Gamma_4$ , le fluide est libre de sortir du milieu poreux , et nous avons

$$\nu \cdot v \geq 0 \quad \text{sur } \Gamma_4.$$

Alors, puisque  $k$  est strictement positive et par conséquent :

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(p + y) \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_4 \quad (2.9)$$

Dans la suite, nous supposons que la pression atmosphérique est égale à 0 , et nous négligerons les effets de capillarité et d'évaporation, la pression de l'air et de l'eau sur  $\Gamma_2 \cup \Gamma_3$  est donnée par la fonction de Lipschitz continu ;

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) \in S_2, \\ h_i - y & \text{si } (x, y) \in S_{3,i} \quad , i=1, \dots, n., \end{cases} \quad (2.10)$$

où  $h_i$  désigne le niveau du réservoir couvrant  $S_{3,i}$ .

Outre (2.8), il existe une deuxième condition sur  $\Gamma_2$  , à savoir que la pression  $p$  coincide avec la pression atmosphérique, est donnée par

$$p = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_4. \quad (2.11)$$

Dans le cas de la condition aux limites de Dirichlet (voir [3]), c'est-à-dire :

$$p = \varphi \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (2.12)$$

Dans ce cas là, nous supposons que ;

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(p + y) = \beta(X, \varphi - p) \quad \text{sur } S_3. \quad (2.13)$$

Ici,  $X = (x, y)$  désigne un point de  $\mathbb{R}^2$ , on peut supposer par exemple,

$$\beta(X, 0) \in L^2(S_3), \quad (2.14)$$

et que

$$X \rightarrow \beta(X, u) \quad \text{est mesurable pour chaque } u \in \mathbb{R}, \quad (2.15)$$

Aussi, il existe une constante  $C > 0$ , telle que :

$$|\beta(X, u_1) - \beta(X, u_2)| \leq C|u_1 - u_2| \quad \sigma\text{-p.p.} \quad X \in S_3, \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \quad (2.16)$$

$$u \rightarrow \beta(X, u) \text{ est croissante pour } \sigma\text{-p.p.} \quad X \in S_3, \quad (2.17)$$

$$\beta(X, u) \geq 0 \quad \sigma\text{-p.p.} \quad X \in S_3, \quad \forall u \geq 0. \quad (2.18)$$

Donc, le problème est maintenant de trouver le  $(p, \chi)$  qui vérifié (2.7),(2.8),(2.9),(2.11), et (2.12), cette équivalent à :

$$(I) \left\{ \begin{array}{ll} \Delta p = 0 & \text{dans } A, \\ p = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \quad p = \varphi \text{ sur } \Gamma_3, \\ \frac{\partial}{\partial \nu}(p + y) = 0 & \text{sur } \Gamma_i, i = 1, 2, 3., \\ \frac{\partial}{\partial \nu}(p + y) \leq 0 & \text{sur } \Gamma_4. \end{array} \right.$$

C'est ce que l'on appelle la formulation forte .

## 2.3 Formulation faible

Notons d'abord que trouver le couple  $(p, A)$  est équivalent ou trouver le couple  $(p, \chi_A)$ , le couple  $(p, A)$  qui représente la solution de la problème (I),

Pour la fonction test  $\xi \in C^1(\bar{\Omega})$

$$\Delta(p + y) = 0 \text{ alors } \Delta(p + y) \cdot \xi = 0$$

Supposons que  $\partial A$  est assez régulière , et intégrant dans domaine A, et utilisant la formule

de Green :

$$\begin{aligned} \int_A \nabla p \cdot \nabla \xi + \xi_y dX &= \int_A \nabla(p + y) \cdot \nabla \xi dX \\ &= \int_A \frac{\partial(p + y)}{\partial \nu} \cdot \xi d\sigma(X) - \int_A \Delta(p + y) \cdot \xi dX \\ &= \int_{\partial A} \frac{\partial(p + y)}{\partial \nu} \cdot \xi d\sigma(X) - \int_A \Delta p \cdot \xi dX. \end{aligned}$$

Donc, si nous supposons que  $P$  est une fonction régulière satisfaisante (2.7)-(2.13), nous obtenons, par (2.7) ,

$$\int_A \nabla p \cdot \nabla \xi + \xi_y dX = \int_{\partial A} \frac{\partial(p+y)}{\partial \nu} \cdot \xi d\sigma(X),$$

en utilisant (2.8) et (2.13) cela implique

$$\int_A \nabla p \cdot \nabla \xi + \xi_y dX = \int_{S_3} \beta(X, \varphi - p) \cdot \xi d\sigma(X) + \int_{\Gamma_4} \frac{\partial(p+y)}{\partial \nu} \cdot \xi d\sigma(X),$$

i.e.

$$\int_A \nabla p \cdot \nabla \xi + \xi_y dX - \int_{S_3} \beta(X, \varphi - p) \cdot \xi d\sigma(X) = \int_{\Gamma_4} \frac{\partial(p+y)}{\partial \nu} \cdot \xi d\sigma(X).$$

Supposons que

$$\xi \geq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_4, \quad (2.19)$$

alors, on obtient d'après (2.9),

$$\int_A \nabla p \cdot \nabla \xi + \xi_y dX - \int_{S_3} \beta(X, \varphi - p) \cdot \xi d\sigma(X) \leq 0. \quad (2.20)$$

Maintenant, nous étendons  $p$  par 0 en extérieur de  $A$ , et on désigne toujours cette extension par  $p$ . Ensuite, clairement, si  $p$  est lisse on déduit, de (2.20) que :

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla \xi + \chi_A \xi_y dX - \int_{S_3} \beta(X, \varphi - p) \cdot \xi d\sigma(X) \leq 0, \quad \forall \xi \geq 0 \quad \text{sur} \quad S_2. \quad (2.21)$$

Donc, le problème est donné par

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (p, \chi) \in H^1(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \text{ tel que} \\ (i) \quad p \geq 0, \quad 0 \leq \chi \leq 1 \text{ p.p. dans } \Omega, \quad \chi = 1 \text{ sur } [p > 0], \\ (ii) \quad p = 0 \text{ sur } \Gamma_2, \\ (iii) \quad \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla \xi + \chi \xi_y dX - \int_{S_3} \beta(X, \varphi - p) \cdot \xi d\sigma(X) \leq 0, \\ \forall \xi \in H^1(\Omega), \quad \xi \geq 0 \text{ sur } S_2. \end{array} \right.$$

Nous appelons  $(P)$  la formulation faible de notre problème initial. Clairement, si (2.7)-(2.13) a une solution  $(p, A)$  et si  $p$  désigne également l'extension de  $p$  par 0 en extérieur de  $A$ , alors nous avons montré ci-dessus que  $(p, \chi_A)$  est une solution de  $(P)$  et donc toute solution forte de notre problème initial sera trouvée parmi celles de  $(P)$ .

Étudions maintenant la question de l'existence d'une solution à  $(P)$ .

## 2.4 Existence d'une Solution

Nous introduisons d'abord le problème approximatif suivant,

$$(P_\epsilon) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouve } p_\epsilon \in H^1(\Omega) \text{ telle que,} \\ p_\epsilon = 0 \text{ sur } S_2 \\ \text{et} \\ \int_{\Omega} \nabla p_\epsilon \nabla \xi + H_\epsilon(p_\epsilon) \cdot \xi_y dX - \int_{S_3} \beta(X, \varphi - p_\epsilon) \cdot \xi d\sigma(X) = 0, \\ \forall \xi \in H^1(\Omega), \xi = 0 \text{ sur } S_2. \end{array} \right.$$

Ici  $H_\epsilon$  est l'approximation du graphe de Heaviside, défini par

$$H_\epsilon(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \geq \epsilon, \\ \frac{p}{\epsilon} & \text{si } 0 \leq p \leq \epsilon, \\ 0 & \text{si } p \leq 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

**Théorème 2.1.** [4] .Supposons que  $\beta(X, u)$  est une fonction vérifiant (2.14) – (2.18). Alors, sous les hypothèses ci-dessus, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une solution unique  $p_\epsilon$  à  $(P_\epsilon)$ . De plus, nous avons

$$p_\epsilon \geq 0 \quad p.p. \quad \text{sur } \Omega \quad (2.23)$$

**Preuve.** on va sure la démonstration trouvée dans [4].

Soit l'ensemble  $V$ , donne par

$$V = \{v \in H^1(\Omega) | v = 0 \text{ sur } S_2\}.$$

pour  $p \in V$ , on considère l'application de  $V$  en  $\mathbb{R}$  :

$$\xi \rightarrow \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla \xi dX - \int_{S_3} \beta(X, \gamma_0(\varphi - p)) \cdot \xi d\sigma(X), \quad (2.24)$$

Par souci de simplicité, nous omettons parfois la notation  $\gamma_0$  dans la seconde intégrale de (2.24).

Puisque  $\beta$  est Lipschitzienne, continue, et satisfait (2.14), (2.16), on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_{S_3} \beta(X, \gamma_0(\varphi - p)) \cdot \xi d\sigma(X) \right| &\leq C |\gamma_0(\varphi - p)|_{L^2(S_3)} |\xi|_{L^2(S_3)} + |\beta(X, 0)|_{L^2(S_3)} |\xi|_{L^2(S_3)} \\ &\leq K |\xi|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

Nous supposons que  $V$  est muni de la norme. Nous déduisons de (2.24) que (2.25) définit une forme linéaire continue sur  $V$  que nous désignons par  $A(p)$ . Donc si  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit dual entre  $V'$  et  $V$ , nous avons défini un opérateur  $A$  de  $V$  en  $V'$  par la formule

$$\langle A(p), \xi \rangle = \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla \xi dX - \int_{S_3} \beta(X, \gamma_0(\varphi - p)) \cdot \xi d\sigma(X), \quad (2.26)$$

$A$  est une monotone sur  $V$ , puisque

$$\langle A(p) - A(p'), p - p' \rangle \geq \int_{\Omega} |\nabla(p - p')|^2 dX. \quad (2.27)$$

et  $A$  est coécive sur  $V$  (voir [9]).

Maintenant, si  $v \in L^2(\Omega)$ , alors

$$\xi \rightarrow - \int_{\Omega} H_{\epsilon}(v) \xi_y dX.$$

définit une forme linéaire continue sur  $V$ . Ainsi, pour tout  $v \in L^2(\Omega)$ , il existe un unique  $u_{\epsilon}$  a égale  $\tau_{\epsilon}(v)$  telle que

$$u_{\epsilon} \in V \quad \langle A(u_{\epsilon}), \xi \rangle = - \int_{\Omega} H_{\epsilon}(v) \xi_y dX, \quad \forall \xi \in V \quad (2.28)$$

Donc, pour prouver qu'il existe une solution à  $(P_{\epsilon})$ , il suffit maintenant de montrer que l'application  $(\tau_{\epsilon})$  admet un point fixe. Pour cela, si  $\varphi$  dénote une extension continue Lipschitzienne de  $\varphi$  à  $\Omega$ , nous notons que  $(u_{\epsilon} - \varphi) \in V$ , ainsi de (2.28) nous obtenons

$$\langle A(u_{\epsilon}), u_{\epsilon} - \varphi \rangle = - \int_{\Omega} H_{\epsilon}(v) (u_{\epsilon} - \varphi)_y dX,$$

Par conséquent, la constante  $C$  est indépendante de  $\epsilon$ ,

$$\begin{aligned}
\langle A(u_\epsilon) - A(\varphi), u_\epsilon - \varphi \rangle &= -\langle A(\varphi), u_\epsilon - \varphi \rangle - \int_{\Omega} H_\epsilon(v) \cdot (u_\epsilon - \varphi)_y dX \\
&= -\int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla (u_\epsilon - \varphi) dX + \int_{S_3} \beta(X, 0) (u_\epsilon - \varphi) d\sigma(X) \\
&\quad - \int_{\Omega} H_\epsilon(v) (u_\epsilon - \varphi)_y dX \\
&\leq (\|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} + |\Omega|^{1/2} + C|\beta(X, 0)|_{L^2(S_3)}) \|\nabla (u_\epsilon - \varphi)\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

$|\cdot|$  denote la mesure de lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ .

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\int_{\Omega} |\nabla (u_\epsilon - \varphi)|^2 \leq (\|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} + |\Omega|^{1/2} + C|\beta(X, 0)|_{L^2(\Omega)})^2 \tag{2.30}$$

et ainsi :

$$|u_\epsilon|_{H^1(\Omega)} \leq C, \tag{2.31}$$

ou  $C(\varphi)$  est une constante qui dépend de  $\varphi$  seulement, ainsi  $u_\epsilon$  est borné dans  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ , il résulte que  $\tau_\epsilon$  est continue.

Alors, pour  $r$  assez grand, applique  $\tau_\epsilon$  de la boule de centre 0 et de rayon  $r$  (dans  $L^2(\Omega)$ ) dans lui même. En appliquant Théorème de point fixe nous obtenons l'existence de  $p_\epsilon$  comme un point fixe de  $\tau_\epsilon$ .

pour prouver l'unicité, nous discutons comme pour des résultats plus généraux.

pour  $\delta > 0$ ,

$$f_\delta(x) = \begin{cases} (1 - \frac{\delta}{x})^+ & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases} \tag{2.32}$$

Alors,  $f_\delta(x)$  est une fonction continue de Lipschitz et si  $p_\epsilon, p'_\epsilon$  sont des solutions de  $(P_\epsilon)$ , alors  $f_\delta(p_\epsilon - p'_\epsilon)$  appartient  $V$ .

On déduit donc  $(P_\epsilon)$  écrit pour  $p_\epsilon$  et  $p'_\epsilon$ , que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \nabla (p_\epsilon - p'_\epsilon) \cdot \nabla f_\delta(p_\epsilon - p'_\epsilon) dX &= -\int_{\Omega} (H_\epsilon(p_\epsilon) - H_\epsilon(p'_\epsilon)) f_\delta(p_\epsilon - p'_\epsilon)_y dX \\
&\quad + \int_{S_3} (\beta(X, \varphi - p_\epsilon) - \beta(X, \varphi - p'_\epsilon)) \cdot f_\delta(p_\epsilon - p'_\epsilon) d\sigma(X).
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Par conséquent, de la monotone de  $\beta$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla(p_{\epsilon} - p'_{\epsilon}) \cdot \nabla f_{\delta}(p_{\epsilon} - p'_{\epsilon}) dX \leq - \int_{\Omega} (H_{\epsilon}(p_{\epsilon}) - H_{\epsilon}(p'_{\epsilon})) f_{\delta}(p_{\epsilon} - p'_{\epsilon})_y dX.$$

Donc, si on pose  $q_{\epsilon} = p_{\epsilon} - p'_{\epsilon}$  . sur  $[q_{\epsilon} > \delta]$ , on obtient facilement, en utilisant (2.32) et la

continuité de Lipschitz de  $H_{\epsilon}$ ,

$$\int_{[q_{\epsilon} > \delta]} \frac{|\nabla q_{\epsilon}|^2}{q_{\epsilon}^2} dX \leq \frac{1}{\epsilon} \int_{[q_{\epsilon} > \delta]} \frac{|\nabla q_{\epsilon}|}{q_{\epsilon}} dX \quad .$$

Ainsi, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\int_{\Omega} \left| \nabla \ln \left( 1 + \frac{(q_{\epsilon} - \delta)^+}{\delta} \right) \right|^2 dX = \int_{[q_{\epsilon} > \delta]} \frac{|\nabla q_{\epsilon}|^2}{q_{\epsilon}^2} dX \leq \frac{|\Omega|}{\epsilon^2}$$

Par l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\int_{\Omega} \left| \ln \left( 1 + \frac{(q_{\epsilon} - \delta)^+}{\delta} \right) \right|^2 dX \leq C,$$

où  $C$  est indépendant de  $\delta$ . Laisant  $\delta \rightarrow 0$  on en déduit

$$q_{\epsilon} \leq 0 \quad \text{p.p., dans } \Omega$$

et l'unicité de  $p_{\epsilon}$  s'ensuit en échangeant les rôles de  $p_{\epsilon}$  et de  $p'_{\epsilon}$ .

Prouver (2.23) : on pose  $\xi = (p_{\epsilon})^-$  en  $(p_{\epsilon})$  on obtient

$$- \int_{\Omega} |\nabla p_{\epsilon}^-|^2 dX - \int_{S_3} \beta(X, \varphi - p_{\epsilon}) \cdot p_{\epsilon}^- d\sigma(X) = 0,$$

donc, par (2.18),

$$\int_{\Omega} |\nabla p_{\epsilon}^-|^2 dX \leq 0$$

et (2.23) suit. □

**Remarque 2.1.** [4] *En fait, nous avons que si  $\varphi, \varphi'$  sont telles que*

$$\varphi \leq \varphi' \quad \text{en } S_2 \cup S_3,$$

*alors les solutions correspondantes  $p_{\epsilon}$  et  $p'_{\epsilon}$  sont telles que*

$$p_{\epsilon} \leq p'_{\epsilon} \quad \text{p.p. sur } \Omega,$$

En effet,  $f_{\delta}(p_{\epsilon} - p'_{\epsilon}) \in V$ , et la dernière intégrale de (2.33) écrite avec  $\varphi$  et  $\varphi'$  est nonpositivé.

En fait, l'existence d'une solution positive à  $(P_{\epsilon})$  lorsque  $u \rightarrow \beta(X, u)$  n'est pas supposé

être non décroissant peut également être prouvé.

En effet nous avons.

**Théorème 2.2.** [4] *Supposons que  $\beta(X, u)$  est une fonction de Carathéodori, c'est-à-dire mesurable dans  $X$  pour chaque  $u$ , et continue dans  $u$  pour  $\sigma$ -p.p.,  $x$  et telle que, pour une constante  $a, b$ , nous avons*

$$|\beta(X, u)| \leq a|u| + b \quad \sigma\text{-p.p.}, \quad X \in S_3 \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad (2.34)$$

Alors, si  $a$  est assez petit, il existe une solution pour  $(p_\epsilon)$  De plus, si (2.18) cales, alors nous avons

$$P_\epsilon \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Omega$$

**Preuve.** Pour  $v \in L^2(S_3)$ , il existe un unique  $u_\epsilon \in V$  telle que

$$\int_{\Omega} \nabla u_\epsilon \cdot \nabla \xi dX = - \int_{\Omega} H_\epsilon(u_\epsilon) \xi_y dX + \int_{S_3} \beta(X, \varphi - v) \cdot \xi d\sigma(X) \quad (2.35)$$

Ceci est une conséquence facile du théorème de points fixes de Schauder (voir la preuve ci-dessus).

On pose  $\tau_\epsilon(v) = y_0(u_\epsilon)$

où  $y_0$  indique la trace sur  $S_3$ . Clairement,  $\tau_\epsilon$  est une application continue de  $L^2(S_3)$  en elle-même. On pose

$$K = \left\{ v \in L^2(S_3) \mid |v - \varphi|_{L^2(\Omega)} \leq R \right\}.$$

Alors  $K$  est un convexe fermé de  $L^2(S_3)$ . En prenant  $\xi = u_\epsilon - \varphi$  en (2.35) on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla |u_\epsilon - \varphi|^2 dX &= - \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla (u_\epsilon - \varphi) dX \\ &\quad - \int_{\Omega} H_\epsilon(u_\epsilon) \cdot (u_\epsilon - \varphi)_y dX \\ &\quad + \int_{S_3} \beta(X, \varphi - v) \cdot (u_\epsilon - \varphi) d\sigma(X) \end{aligned}$$

(on suppose que  $\varphi$  est prolongé à  $\Omega$  vers une fonction de Lipschitz, voir [6]). Appliquant

l'inégalité de Cauchy-Schwartz, et (2.34), on obtient :

$$\begin{aligned} \|\nabla(u_\epsilon - \varphi)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq (\|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} + |\Omega|^{1/2}) \|\nabla(u_\epsilon - \varphi)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + (a|v - \varphi|_{L^2(S_3)} + b|S_3|^{1/2}) |u_\epsilon - \varphi|_{L^2(S_3)} \end{aligned}$$

avec notations précédentes. Maintenant, pour certains  $C$  constant, nous avons

$$|u_\epsilon - \varphi|_{L^2(S_3)} \leq C \|\nabla(u_\epsilon - \varphi)\|_{L^2(\Omega)},$$

donc,

$$\|\nabla(u_\epsilon - \varphi)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} + |\Omega|^{1/2} + aC |v - \varphi|_{L^2(S_3)} + bC |S_3|^{1/2}) \|\nabla(u_\epsilon - \varphi)\|_{L^2(\Omega)},$$

et on en déduit

$$\|\nabla(u_\epsilon - \varphi)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} + |\Omega|^{1/2} + aC |v - \varphi|_{L^2(S_3)} + bC |S_3|^{1/2}, \quad (2.36)$$

et donc

$$|u_\epsilon - \varphi|_{L^2(S_3)} \leq C \|\nabla(u_\epsilon - \varphi)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} + C |\Omega|^{1/2} + aC^2 |v - \varphi|_{L^2(S_3)} + bC^2 |S_3|^{1/2}.$$

Si on choisit  $v \in K$ , alors  $u_\epsilon = \tau_\epsilon(v) \in K$  à condition

$$C \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} + C |\Omega|^{1/2} + bC^2 |S_3|^{1/2} + aC^2 R \leq R$$

c'est-à-dire, si  $aC^2 \leq 1$  à condition que

$$R \geq (1 - aC^2)^{-1} \cdot C \{ \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} + |\Omega|^{1/2} + bC |S_3|^{1/2} \} \quad (2.37)$$

Ainsi, si on suppose que  $aC^2 \leq 1$ , et (2.37) valables, alors  $\tau_\epsilon$  est un opérateur de  $K$  en  $K$ . De plus, par (2.36),  $u_\epsilon$  est uniformément borné dans  $H^1(\Omega)$ , et  $\tau_\epsilon$  est compact. L'existence d'un point fixe pour  $\tau_\epsilon$  est alors une conséquence du théorème de Schauder. Cela prouve l'existence de  $p_\epsilon$ . Pour prouver que  $p_\epsilon \geq 0$ , on utilise les mêmes argument du théorème précédant.  $\square$

**Remarque 2.2.** [4] On applique théorème 2.2, par exemple, lorsque, pour quelque constantes  $\alpha, \gamma$ ,

$$|\beta(X, u)| \leq \alpha |u|^{1-\epsilon} + \gamma \quad \sigma\text{-p.p.} \quad X \in S_3, \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad (2.38)$$

**Théorème 2.3.** [4] Supposons que  $\beta$  est une fonction vérifiant (2.14)- (2.18) ou (2.18) et (2.34), alors il existe une solution  $(p, \chi)$  du problème (P).

**Preuve.** Soit  $p_\epsilon$  la solution de  $(P_\epsilon)$ . De (2.31), (2.36) on déduit

$$|p_\epsilon| \leq C,$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\epsilon$ . Ainsi, en utilisant les arguments de compacité classiques (voir [10]), nous pouvons extraire une sous-séquence de  $\epsilon$ , toujours notée  $\epsilon$ , telle que, pour quelque  $p \in V$ ,

$$p_\epsilon \rightharpoonup p \text{ dans } H^1(\Omega), \quad p_\epsilon \rightarrow p \text{ dans } L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad p.p. \text{ sur } \Omega, \quad (2.39)$$

$$\gamma_0(p_\epsilon) \rightarrow \gamma_0(p) \text{ dans } L^2(S_3). \quad (2.40)$$

Puisque  $\{v \in V \mid v(x) \geq 0 \text{ p.p. sur } \Omega\}$  est fermé, convexe, il est faiblement fermé et donc  $p$  est dans cet ensemble de sorte que

$$p \geq 0 \text{ p.p. sur } \Omega. \quad (2.41)$$

Puisque  $H_\epsilon(p_\epsilon)$  est uniformément borné, il existe une fonction  $\chi$  telle que

$$H_\epsilon(p_\epsilon) \rightharpoonup \chi \text{ p.p., dans } \Omega \quad (2.42)$$

L'ensemble

$$\{ f \in L^\infty(\Omega) \mid 0 \leq f \leq 1 \text{ p.p., dans } \Omega \}$$

étant fermé, et convexe est faiblement fermé et, par (2.42), on a

$$0 \leq \chi \leq 1 \text{ p.p., dans } \Omega \quad (2.43)$$

Par (2.39) sur  $[p > 0]$  on a

$$H_\epsilon(p_\epsilon) \rightarrow 1 \text{ p.p. dans } \Omega.$$

et donc, par le théorème de Lebesgue,  $H_\epsilon(p_\epsilon) \rightarrow 1$  dans  $L^2([p > 0])$ ,

Depuis, par (2.42), nous avons aussi

$$H_\epsilon(p_\epsilon) \rightharpoonup \chi \text{ dans } L^2([p > 0]),$$

on en déduit

$$\chi = 1 \text{ sur } [p > 0], \quad (2.44)$$

et donc (P)(i), (ii) dans le problème  $P$ , suit.

Ensuite pour  $\xi \in H^1(\Omega)$ ,  $\xi \geq 0$  sur  $S_2$  nous avons pour tout  $\delta > 0$

Ainsi, Si on utilise  $\left(\xi \wedge \frac{p_\epsilon}{\delta}\right)$  comme une fonction test pour  $(P_\epsilon)$ , on obtient :

$$\int \nabla p_\epsilon \cdot \nabla \left(\xi \wedge \frac{p_\epsilon}{\delta}\right) + H_\epsilon(p_\epsilon) \left(\xi \wedge \frac{p_\epsilon}{\delta}\right)_y dX - \int_{S_3} \beta(X, \varphi - p_\epsilon) \cdot \xi \wedge \frac{p_\epsilon}{\delta} d\sigma(X) = 0.$$

Ainsi, nous avons aussi

$$\begin{aligned} & \int_{[\xi \leq p_\epsilon/\delta]} \nabla p_\epsilon \cdot \nabla \xi dX + \int_\Omega H_\epsilon(p_\epsilon) \left(\xi \wedge \frac{p_\epsilon}{\delta}\right)_y dX - \int_{S_3} \beta(X, \varphi - p_\epsilon) \cdot \left(\xi \wedge \frac{p_\epsilon}{\delta}\right) d\sigma(X) \\ &= - \int_{[p_\epsilon/\delta < \xi]} \frac{|\nabla p_\epsilon|^2}{\delta} dX \leq 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Maintenant, en utilisant le théorème de divergence. Notons que

$$\int_\Omega H_\epsilon(p_\epsilon) \left(\xi \wedge \frac{p_\epsilon}{\delta}\right)_y dX = - \int_\Omega (H_\epsilon(p_\epsilon))_y \cdot \xi \wedge \frac{p_\epsilon}{\delta} dX + \int_{\partial\Omega} H_\epsilon(p_\epsilon) \cdot \nu_y \cdot \xi \wedge \frac{p_\epsilon}{\delta} d\sigma(X), \quad (2.46)$$

où  $\nu_y$  représente la deuxième composante de la normale vers l'extérieur à  $\Omega$ . Notons que,

dans cette formule, ainsi que dans (2.45), nous utilisons le fait que

$$\gamma_0 \left(\xi \wedge \frac{p_\epsilon}{\delta}\right) = \gamma_0(\xi) \wedge \gamma_0 \left(\frac{p_\epsilon}{\delta}\right).$$

Laisser  $\delta \rightarrow 0$  dans (2.46) et de puis

$$\xi \wedge \frac{p_\epsilon}{\delta} \rightarrow \xi \quad p.p., \text{ sur } p_\epsilon > 0,$$

on obtient, par le théorème de Lebesgue,

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_\Omega H_\epsilon(p_\epsilon) \left(\xi \wedge \frac{p_\epsilon}{\delta}\right)_y dX &= - \int_\Omega (H_\epsilon(p_\epsilon))_y \cdot \xi dX + \int_{\partial\Omega} H_\epsilon(p_\epsilon) \cdot \nu_y \cdot \xi d\sigma(X), \\ &= \int_\Omega H_\epsilon(p_\epsilon) \cdot \xi_y dX \end{aligned}$$

Ensuite, par le passages à la limite en (2.45) on obtient,

pour tout  $\xi \in H^1(\Omega)$ ,  $\xi \geq 0$  sur  $S_2$ ,

$$\int_\Omega \nabla p_\epsilon \cdot \nabla \xi dX + \int_\Omega H_\epsilon(p_\epsilon) \xi_y dX - \int_{S_3} \beta(X, \varphi - p_\epsilon) \cdot \xi d\sigma(X) \leq 0. \quad (2.47)$$

La seule difficulté application être de la passages à la limite dans la dernière intégrale du côté gauche de (2.45). Pour cela, Notez que

$$\begin{aligned} & - \int_{S_3} \beta(X, \varphi - p_\epsilon) \cdot \left(\xi \wedge \frac{p_\epsilon}{\delta}\right) d\sigma(X) \\ &= - \int_{S_3 \cap [p_\epsilon > 0]} \beta(X, \varphi - p_\epsilon) \cdot \left(\xi \wedge \frac{p_\epsilon}{\delta}\right) d\sigma(x) - \int_{S_3 \cap [p_\epsilon = 0]} \beta(X, \varphi) \cdot (\xi \wedge 0) d\sigma(X) \\ &\geq - \int_{S_3 \cap [p_\epsilon > 0]} \beta(X, \varphi - p_\epsilon) \cdot \left(\xi \wedge \frac{p_\epsilon}{\delta}\right) d\sigma(X) - \int_{S_3 \cap [p_\epsilon = 0]} \beta(X, \varphi) \cdot \xi d\sigma(X). \end{aligned}$$

Puisque  $\beta(X, \varphi) \geq 0$ . En laissant  $\delta \rightarrow 0$  par le théorème de Lebesgue, on en déduit

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} - \int_{S_3} \beta(X, \varphi - p_\epsilon) \cdot \left( \xi \wedge \frac{p_\epsilon}{\delta} \right) d\sigma(X) \geq - \int_{S_3} \beta(X, \varphi - p_\epsilon) \cdot \xi d\sigma(X)$$

et (2.47) suit

En laissant ensuite  $\epsilon \rightarrow 0$  dans (2.47) et en utilisant (2.39) , (2.40) et (2.42) , nous obtenons,

pour tout  $\xi \in H^1(\Omega)$  ,  $\xi \geq 0$  sur  $S_2$

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \xi dx + \int_{\Omega} \chi \xi_y dX - \int_{S_3} \beta(x, \varphi - p) \cdot \xi d\sigma(X) \leq 0$$

et (P)(iii) suit..

□

# Chapitre 3

## Résultats complémentaires

### 3.1 Quelques propriétés des solutions

Dans cette section, nous présentons quelques propriétés utiles de toute solution  $(p, \chi)$  à  $(P)$ . D'abord, on a ;

**Proposition 3.1.** [4] Soit  $(p, \chi)$  une couple de solution de  $(P)$ . Alors, nous avons au sens de la distribution :

$$\Delta p + \chi_y = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.1)$$

$$\Delta p \geq 0, \quad \chi_y \leq 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.2)$$

*Preuve.* soit  $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , alors  $\pm\xi$  est une fonction test pour  $(P)(iii)$ , puisque  $\xi = 0$  on  $\partial\Omega$ , on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla \xi + \chi \xi_y dy = 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

En appliquant la formule de green, on obtient (3.1).

Ensuite, si  $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,  $\xi \geq 0$ , alors  $\pm H_\epsilon(p)\xi$  est une fonction test pour  $(P)(iii)$ . ( $H_\epsilon$  est défini par (2.22).) De  $(P)(iii)$ , on en déduit :

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla (H_\epsilon(p)\xi) + \chi \cdot (H_\epsilon(p)\xi)_y dX = 0.$$

Par conséquent, puisque, sur  $[p = 0]$ ,  $H_\epsilon(p) = 0$  et, sur  $[p > 0]$ ,  $\chi = 1$ ,

$$\int_{\Omega} H_{\epsilon}(p) \nabla p \cdot \nabla \xi + (H_{\epsilon}(p) \xi)_y dX = - \int_{\Omega} H'_{\epsilon}(p) \xi \cdot |\nabla p|^2 dX \leq 0.$$

Puisque  $H_{\epsilon}(p) \xi = 0$  sur  $\partial\Omega$ , on obtient, en appliquant la formule de green pour la seconde intégrale,

$$\int_{\Omega} H_{\epsilon}(p) \nabla p \cdot \nabla \xi dX \leq 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \xi \geq 0.$$

En laissant  $\epsilon \rightarrow 0$ , par le théorème de convergence de Lebesgue, nous obtenons

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla \xi dX \leq 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \xi \geq 0. \quad (3.3)$$

La première inégalité de (3.2) suit, la seconde résulte de (3.1) □

En conséquence, nous avons,

**Proposition 3.2.** [5] *Soit  $(p, \chi)$  une solution de (P). Si  $(x_0, y_0) \in [p > 0]$ , alors il existe  $\epsilon > 0$  tel que le demi-cercle*

$$C_{\epsilon} = \{(x, y) \in \Omega \mid |x - x_0| < \epsilon, y < y_0 + \epsilon\}$$

*est incluse dans l'ensemble  $[p > 0]$ .*

**Preuve.** Si  $(x_0, y_0) \in [p > 0]$ , pour  $\epsilon$  assez petit le carré

$$Q_{\epsilon} = \{(x, y) \in \Omega \mid |x - x_0| < \epsilon, |y - y_0| < \epsilon\}$$

est également inclus dans  $[p > 0]$ . Nous avons donc  $\chi = 1$  sur  $Q_{\epsilon}$ , et par monotonie de  $\chi$ ,  $\chi = 1$  sur  $C_{\epsilon}$  (nous avons utilisé ici le fait que par (3.2),  $C_{\epsilon}$  est connexe par des segments verticaux). Mais à d'après Proposition 3.1, on obtient maintenant  $\Delta p = 0$  sur  $C_{\epsilon}$ , et si  $p$  prend la valeur 0 sur  $C_{\epsilon}$  par le principe maximum  $p$  est identique 0 sur  $C_{\epsilon}$ , ce qui contradiction  $Q_{\epsilon} \subset [p > 0]$ . □

Dans le cas des conditions aux limites de Dirichlet-et dans un cas comme, par exemple, à la figure 2.1 - la pression reste positive en dessous de  $S_3$  (voir [3]).

Nous voudrions montrer que ce n'est plus le cas dans la situation actuelle.

Tout d'abord, nous devons montrer :

**Proposition 3.3.** [4] *Supposons que  $\beta \equiv 0$ . Alors chaque solution à (P) est donnée par*

$$(p, \chi) = (h - y, 1) \quad (3.4)$$

sur chaque composante connexe de  $[p > 0]$ ,

$$(p, \chi) = (0, 0) \quad (3.5)$$

en outre

**Preuve.** Si  $\beta \equiv 0$  nous avons

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla \xi + \chi \xi_y dX \leq 0, \quad \forall \xi \geq 0 \text{ sur } S_2.$$

pose  $\xi = \pm p$ , on en déduit

$$\int_{\Omega} |\nabla p|^2 + \chi p_y dX = 0. \quad (3.6)$$

on pose  $\xi = k + y$  pour  $k$  assez grand de telle sorte que  $k + y \geq 0$  sur  $S_2$ , on a

$$\int_{\Omega} (p_y + \chi) dX \leq 0,$$

Puisque  $\chi = 1$  sur  $[p > 0]$ , et  $0 \leq \chi \leq 1$

on a :

$$\int_{\Omega} (\chi p_y + \chi^2) dX \leq 0. \quad (3.7)$$

En ajoutant (3.6) et (3.7) on obtient

$$\int_{\Omega} (|\nabla p|^2 + 2\chi p_y + \chi^2) dX \leq 0,$$

par conséquent

$$\int_{\Omega} (p_x^2 + (p_y + \chi)^2) dX \leq 0, \quad (3.8)$$

Ainsi on a

$$\nabla p = (0, -\chi) \quad p.p., \text{ sur } \Omega$$

En particulier, sur tout composant connexe de  $[p > 0]$ ,

$$\nabla p = (0, -1)$$

et donc  $p = (h - y)$ . à l'extérieur

$$(0, 0) = \nabla p = (0, -\chi),$$

et fait suite à la proposition.

**Remarque 3.1.** [3] Il est clair que chaque paire donnée par (3.4), (3.5) définit une solution (P) pour  $\beta = 0$ . Par exemple, dans le cas de (Figure 2.1) la couple

$$(p, \chi) = ((k - y)^+, \chi_{[y < k]})$$

est une solution à (P) pour  $\beta = 0$  autant que  $k$  est assez petit (voir Figure 2.1), de toute évidence, différentes valeurs de  $k$  sont adaptés ici afin que (P) n'a pas de solution unique. Nous rencontrons des solutions de « bassin » comme dans le cas du problème de barrage avec la condition aux limites de Dirichlet - (voir [3]). Nous verrons cela à nouveau dans le Théorème 3.1.

**Proposition 3.4.** [4] La région en dessous de  $S_3$  n'est pas saturée en général, c'est-à-dire qu'il n'ya pas en général  $p > 0$  en dessous de  $S_3$ .

**Preuve.** Considérons  $\beta$  satisfaisant les hypothèses du Théorème 2.3, Pour tout ( $0 < \eta < 1$ ), il existe une solution  $(p_\eta, \chi_\eta)$  de (P) correspondant à  $\eta\beta$ . En particulier (P)(iii)

$$\int_{\Omega} (\nabla p_\eta \nabla \xi + \chi_\eta \xi_y) dX - \int_{S_3} (\eta\beta(X, \varphi - p_\eta) \cdot \xi) d\sigma(X) \leq 0 \quad (3.9)$$

Pour tout  $\xi \in H^1(\Omega)$ ,  $\xi \geq 0$  sur  $S_2$ , en prenant  $\xi = p_\eta - \varphi$  dans cette inégalité, on en déduit très (comparer avec (2.31) et (2.36)), que

$$|p_\eta|_{H^1(\Omega)} \leq C,$$

Où (C) est indépendant de  $\eta$ . Par conséquent, jusqu'à une sous-séquence,

$$p_\eta \rightharpoonup p \quad \text{sur } H^1(\Omega), \quad p_\eta \rightarrow p \quad \text{sur } L^2(\Omega), \quad p_\eta \rightarrow p \quad \text{sur } L^2(S_3),$$

$$p_\eta \rightarrow p \quad \text{p.p.}, \quad \text{sur } \Omega, \quad \chi_\eta \rightharpoonup \chi \quad \text{sur } L^2(\Omega)$$

quand  $\eta \rightarrow 0$ . En passage à la limite en (3.9) on obtient :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left( \int_{\Omega} (\nabla p_\eta \nabla \xi + \chi_\eta \xi_y) dX - \int_{S_3} \eta\beta(X, \varphi - p_\eta) \cdot \xi d\sigma(x) \right) = \int_{\Omega} (\nabla p \cdot \nabla \xi + \chi \xi_y) dX \leq 0.$$

Donc

$$\int_{\Omega} (\nabla p \cdot \nabla \xi + \chi \xi_y) dX \leq 0 \quad \forall \xi \in H^1(\Omega), \quad \xi \geq 0 \quad \text{sur } S_2 \quad (3.10)$$

Par prouve du Théorème 2.3, nous avons clairement,

$$p \geq 0, \quad p \in V, \quad 0 \leq \chi \leq 1, \quad \chi = 1 \quad \text{sur } [p > 0].$$

et donc  $(p, \chi)$  est une solution de  $(P)$  pour  $\beta \equiv 0$ .

Si, pour tout  $\eta$ , nous avons  $p > 0$  inférieur à  $S_3$ , nous aurions  $\chi_\eta \equiv 1$  inférieur à  $S_3$  et donc à la limite  $\chi \equiv 1$  inférieur à  $S_3$ .  $\square$

Ainsi, si  $\beta$  est suffisamment petit, une région non saturée pourrait se développer.

Puisque les propriétés de  $(p, \chi)$  dans le modèle que nous examinons diffèrent considérablement de celles de  $(p, \chi)$  dans le cas de conditions aux limites de Dirichlet, il est utile de vérifier que le problème  $(P)$  est un problème de frontière libre.

Pour cela nous pouvons prouver

**Théorème 3.1.** [4] *Supposons que  $\beta$  est choisi comme dans le Théorème 2.3. De plus, on suppose que*

$$\beta(X, u) \cdot u \geq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad \sigma\text{-p.p.} \quad X \in S_3 \quad (3.11)$$

*Soit  $(p, \chi)$  une solution de  $(P)$  et désignons par  $h_1$  le niveau du plus haut réservoir. Ensuite nous avons,*

$$(p, \chi) = (k - y, 1),$$

*sur tout composant connexe  $[p > 0]$  qui intersecté  $[y > h_1]$ . De plus, à l'extérieur de ces composants connexes, nous avons*

$$p \leq (h_1 - y)^+. \quad (3.12)$$

**Preuve.** Soit  $(p, \chi)$  une solution de  $(P)$ . On pose

$$\xi = (p - (h_1 - y)^+)^+,$$

dans  $(P)(iii)$ , on obtient

$$\int_{\Omega} (\nabla p \cdot \nabla (p - (h_1 - y)^+)^+ + \chi (p - (h_1 - y)^+)_y^+) dX - \int_{S_3} \beta(X, \varphi - p) (p - (h_1 - y)^+)^+ d\sigma(X) \leq 0.$$

Intégrent uniquement sur  $p > (h_1 - y)^+ > \varphi$ , donc sur cet ensemble, par (3.11), nous avons

$$\beta(X, \varphi - p) \leq 0,$$

et l'inégalité ci-dessus former suivent

$$\int_{\Omega} (\nabla p \cdot \nabla (p - (h_1 - y)^+)^+ + \chi (p - (h_1 - y)^+)_y^+) dX \leq 0.$$

Maintenant, sur l'ensemble  $p > (h_1 - y)^+$ , on a  $p$  supérieure a 0, et donc  $\chi$  égale 1,

on obtient

$$\int_{\Omega} (\nabla p \cdot \nabla (p - (h_1 - y)^+)^+ + (p - (h_1 - y)^+)_y^+) dX \leq 0$$

ce qu'on peut écrire ,

$$\int_{[y \leq h_1]} |\nabla (p - (h_1 - y)^+)^+|^2 dX + \int_{[y > h_1]} (|\nabla p|^2 + p_y) dX \leq 0. \quad (3.13)$$

En prenant maintenant  $\xi = (y - h_1)^+$  dans (P)(iii), on obtient , puisque  $\xi = 0$  sur  $S_3$ ,

$$\int_{[y > h_1]} (p_y + \chi) dX \leq 0.$$

Notant que  $\chi^2 \leq \chi$  et  $\chi p_y = p_y$  p.p., alors

$$\int_{[y > h_1]} (\chi p_y + \chi^2) dx \leq 0. \quad (3.14)$$

Additionner (3.13) et (3.14) on obtient

$$\int_{[y \leq h_1]} |\nabla (p - (h_1 - y)^+)^+|^2 dX + \int_{[y > h_1]} (p_x^2 + (p_y + \chi)^2) dX \leq 0, \quad (3.15)$$

dont on déduit

$$\nabla p = (0, -\chi) \quad \text{sur } [y > h_1]. \quad (3.16)$$

Ainsi, sur toute composante connexe  $C$  de  $[p > 0]$  qui intersection  $[y > h_1]$ , nous avons

$$p = k - y.$$

En effet,  $p = k - y$  de la part de  $C$  intersection  $[y > h_1]$ . Par prolongement analytique (puisque de (3.1)  $\Delta = 0$  dans  $C$ ) et donc  $p$  est analytique dans  $C$ , nous avons  $p = k - y$  sur  $C$ . En extérieur de ces composants connexes , nous avons  $p = 0$  et donc (3.12) ou, par (3.15),

$$\nabla (p - (h_1 - y)^+)^+ = 0,$$

quand  $y \leq h_1$ . Ainsi, sur toute composante connexe de l'ensemble  $[y < h_1]$ , nous avons

$$(p - (h_1 - y)^+)^+ = Cst.$$

Cependant, tout composant de ce type touche la ligne  $y = h_1$  quelque part, où la constante

est 0 puisque  $p = 0$  (si  $p$  n'était pas égal à 0, nous serions sur un composant  $C$  de  $[p > 0]$  intersection  $[y > h_1]$ ). Si la constante est nulle, alors clairement (3.12).  $\square$

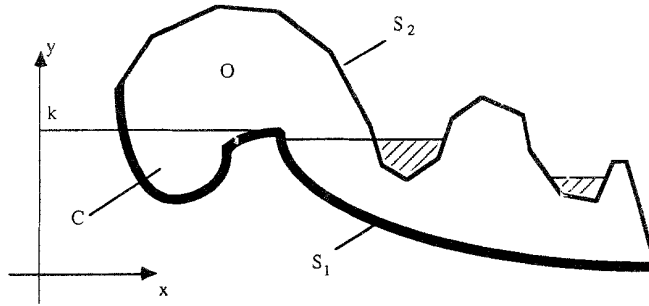


FIGURE 3.1 –

**Remarque 3.2.** [4] *Considérons, par exemple, la situation illustrée à la Figure 3.1. Alors pour  $y > k$  nous avons  $p = 0$ . Si non, nous aurions  $p = h - y$  pour  $h > k$  et cela conduirait à une contradiction avec  $p = 0$  sur  $S_2$ . Pour la même raison, nous avons  $(p, \chi) = (0, 0)$  dans  $O$  (voir Figures 3.1 et (3.16)).*

En prenant  $\xi = \pm p \chi_c$  ( $\chi_c$  est la fonction caractéristique de  $C$ ) dans (P)(iii) on obtient :

$$\int_C |\nabla p|^2 + \chi p_y dX = 0.$$

En prenant  $\xi = (y - k) \chi_c$  on obtient :

$$\int_C p_y + \chi dX \leq 0.$$

et en procédant comme ci-dessus, nous obtenons

$$\nabla p = (0, -\chi) \quad \text{sur } C,$$

et ainsi

$$p = (h - y)^+ \quad \text{sur } C. \tag{3.17}$$

pour certains  $h \leq k$ . Inversement, toute fonction  $((h - y)^+, \chi_{[y < h]})$  sur  $C$  étendue de  $(p, \chi)$  en dehors de  $C$  est une solution de  $(P)$ . Par conséquent, comme dans le cas des conditions aux limites de Dirichlet, les résultats d'unicité pour ce problème ne concerneront que des « bassin » i.e., fonctions  $((h - y)^+, \chi_{[y < h]})$ , (voir [3]).

## 3.2 Quelques exemples particuliers

Le premier cas que nous considérons est décrit dans la Figure 3.2, où on suppose que  $S_1 = \phi$  et  $\beta$  sont indépendants de  $x$ .

Ensuite, nous voudrions montrer que dans cette facilité quand

$$0 \leq \frac{\beta(\varphi)}{\nu_y} \leq 1. \quad (3.18)$$

la seule solution à  $(P)$  est donnée par

$$(p, \chi) = \left( 0, \left( \frac{\beta(\varphi)}{\nu_y} \right) \chi_I \right),$$

où  $\chi_I$  désigne la fonction caractéristique de la région en dessous de  $S_3$ , notée  $I$  sur la Figure 3.2, et  $\nu_y$  est l'entrée  $y$  de l'unité normale vers l'extérieur à  $\Gamma$  sur  $S_3$  (nous avons noté  $\beta(\varphi)/\nu_y$  la fonction indépendante de  $y$  égale à  $\beta(\varphi)/\nu_y$  sur  $S_3$ ).

Il s'agit donc d'un cas particulier dans lequel l'unicité est valable. Cependant, nous voyons que nous ne pouvons pas, en général, nous attendre à ce que  $\chi$  soit une fonction caractéristique d'un ensemble ( $\chi$  ne l'est pas si  $\beta(\varphi)/\nu_y < 1$ ). De plus, le milieu poreux est complètement insaturé. La situation est donc assez différente de celle du problème de la digue classique (voir [3]).

**Proposition 3.5.** [4] *Supposons que (3.18) soit vrai et que  $\beta$  ne diminue pas avec  $\beta(0) = 0$ . Alors le problème  $(P)$  correspondant à la Figure 3.2 a une solution unique donnée par*

$$(p, \chi) = \left( 0, \left( \frac{\beta(\varphi)}{\nu_y} \right) \chi_I \right), \quad (3.19)$$

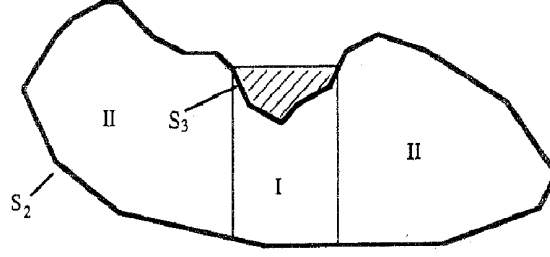


FIGURE 3.2 –

**Preuve.** Vérifions d'abord que  $(p, \chi)$  donné par (3.19) satisfait à  $(P)$ . Il suffit de vérifier  $(P)(iii)$ . Pour cette Proposition, puisque  $\beta(\varphi)/\nu_y$  est une fonction dépend de  $x$  uniquement

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla \xi + \chi \xi_y dX - \int_{S_3} \beta(\varphi - p) \cdot \xi d\sigma(X) \\
&= \int_I \frac{\beta(\varphi)}{\nu_y} \xi_y dX - \int_{S_3} \beta(\varphi) \cdot \xi d\sigma(X), \\
&= \int_I \left( \frac{\beta(\varphi)}{\nu_y} \cdot \xi \right)_y dX - \int_{S_3} \beta(\varphi) \cdot \xi d\sigma(X), \\
&= \int_{\partial I \setminus S_3} \frac{\beta(\varphi)}{\nu_y} \cdot n_y \cdot \xi d\sigma(X) \leq 0, \tag{3.20}
\end{aligned}$$

pour tout  $\xi > 0$  sur  $S_2$ ,  $n_y$  désigne l'entrée  $y$  de l'unité sortante normale à  $\partial I \setminus S_3$  et donc  $n_y \leq 0$  (voir la Figure 3.2).  $\partial I$  désigne la frontière de  $I$ . Donc,  $(p, \chi)$  donné par (3.19) est une solution de  $(P)$ . Notons que de (3.20), on déduit :

$$\int_{\Omega} \chi \cdot \xi_y dX - \int_{S_3} \beta(\varphi) \xi d\sigma(X) = 0, \quad \forall \xi \in H^1(\Omega), \quad \xi = 0 \quad \text{sur} \quad \partial I \cap S_2. \tag{3.21}$$

Notons maintenant  $(p', \chi')$  une autre solution à  $(P)$ . Ainsi, nous avons

$$\int_{\Omega} \nabla p' \cdot \nabla \xi + \chi' \xi_y dX - \int_{S_3} \beta(\varphi - p') \cdot \xi d\sigma(X) \leq 0, \quad \forall \xi \in H^1(\Omega), \quad \xi \geq 0 \quad \text{sur} \quad S_2. \tag{3.22}$$

En prenant  $\xi = p'$  dans (3.22) et  $\xi = -p'$  dans (3.21) et en ajoutant on obtient :

$$\int_{\Omega} |\nabla p'|^2 + (\chi' - \chi) \cdot p'_y dX - \int_{S_3} (\beta(\varphi - p') - \beta(\varphi)) \cdot p' d\sigma(X) \leq 0. \tag{3.23}$$

Cependant :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (\chi' - \chi) p'_y dX &= \int_{\Omega} (1 - \chi) p'_y dX \\
&= \int_I \left(1 - \frac{\beta(\varphi)}{\nu_y}\right) p'_y dX + \int_{II} p'_y dX \\
&= \int_I \left( \left(1 - \frac{\beta(\varphi)}{\nu_y}\right) p' \right)_y dX \\
&= \int_{S_3} \left(1 - \frac{\beta(\varphi)}{\nu_y}\right) \cdot \nu_y \cdot p' d\sigma(X) \geq 0.
\end{aligned}$$

donc

$$\int_{\Omega} (\chi' - \chi) p'_y dX = \int_{S_3} \left(1 - \frac{\beta(\varphi)}{\nu_y}\right) \cdot \nu_y \cdot p' d\sigma(X) \geq 0. \quad (3.24)$$

De plus, du fait que  $\beta$  non décroissant nous avons :

$$- \int_{S_3} (\beta(\varphi - p') - \beta(\varphi)) \cdot p' d\sigma(X) \geq 0, \quad (3.25)$$

en combinant (3.23), (3.24) et (3.25), on en déduit :

$$\int_{\Omega} |\nabla p'|^2 dX \leq 0,$$

et donc  $p' = p = 0$ . Cependant, pour (3.22) on a,

$$\int_{\Omega} \chi' \xi_y dX - \int_{S_3} \beta(\varphi) \cdot \xi d\sigma(X) \leq 0, \quad \forall \xi \in H^1(\Omega), \quad \xi \geq 0 \quad \text{sur } S_2. \quad (3.26)$$

En prenant  $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , ou en utilisant (3.1), on en déduit

$$\chi'_y = 0 \quad \text{ou} \quad \chi' = \chi'(x).$$

Alors, si on note  $T$  et  $B$  respectivement les parties haute et les dessous de  $\Gamma$ , on en déduit

(3.26), pour  $\xi \in H^1(\Omega), \xi \geq 0$  sur  $S_2$ ,

$$\begin{aligned}
0 &\geq \int_{\Omega} (\chi' \xi)_y dX - \int_{S_3} \beta(\varphi) \cdot \xi d\sigma(X) \\
&= \int_T \chi' \cdot \xi \cdot \nu_y d\sigma(X) + \int_B \chi' \cdot \xi \cdot \nu_y d\sigma(X) - \int_{S_3} \beta(\varphi) \cdot \xi d\sigma(X). \quad (3.27)
\end{aligned}$$

En prenant (3.27) tout  $\xi$  qui disparaît sur  $S_2$  on obtient :

$$\int_{S_3} (\chi' \nu_y - \beta(\varphi)) \cdot \xi d\sigma(X) = 0.$$

pour un tel que  $\xi$ . D'où  $\chi' = \beta(\varphi)/\nu_y$  sur  $S_3$ . Alors (3.27) devient

$$0 \geq \int_{\Gamma \setminus S_3} \chi' \cdot \xi \cdot \nu_y d\sigma(X), \quad \forall \xi \in H^1(\Omega), \quad \xi \geq 0 \quad \text{sur } S_2.$$

En prenant  $\xi \geq 0$  sur  $T$ ,  $\xi = 0$  sur  $B$  on en déduit

$$0 \geq \int_{T \setminus S_3} \chi' \cdot \xi \cdot \nu_y d\sigma(X),$$

d'où  $\chi' = 0$  sur  $T \setminus S_3$  et le résultat suit. (Nous avons supposé que  $\nu_y > 0$  sur  $T$ ).  $\square$

**Remarque 3.3.** [4] *En général, nous ne savons pas si l'unicité d'une solution à (P) détient modulo « bassin ». Cependant, l'exemple ci-dessus et celui ci-dessous semblent indiquer que c'est le cas.*

**Remarque 3.4.** [4] *Si l'on suppose qu'une partie de  $B$  est imperméable, alors  $p = 0$  n'est plus une solution. En effet, si c'était le cas, alors nous aurions (3.26) et donc (3.19), voir la preuve ci-dessus. Cependant, il est clair que nous n'aurions pas (P)(iii), donc dans ce cas, la solution est saturée, c'est-à-dire que l'ensemble  $[p > 0]$  a une mesure positive. La même chose se produit lorsque  $\beta(\varphi)/\nu_y > 1$  sur un ensemble de mesures positives.*

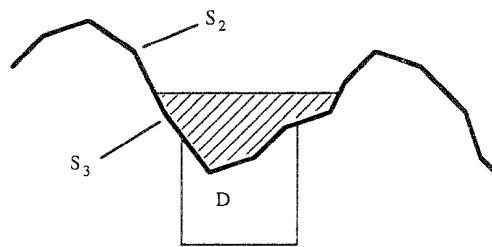


FIGURE 3.3 –

**Remarque 3.5.** [4] *Si  $p = 0$  sur un "rectangle"  $D$  inférieur à  $S_3$ , comme illustré à la*

Figure 3.3, nous avons nécessairement

$$\chi = \frac{\beta(\varphi)}{\nu_y} \quad \text{sur } D. \quad (3.28)$$

En particulier, en raison de (P)(i), cette situation est impossible (voir aussi (2.13))

lorsque

$$\frac{\beta(\varphi)}{\nu_y} > 1 \quad \text{sur } \partial D \cap S_3.$$

Pour prouver (3.28), notons que si  $\xi$  est une fonction disparaissant sur  $\partial D \setminus S_3$  et que nous étendons cette fonction de 0 en extérieur de  $D$ , on obtient :

$$\int_D \chi \cdot \xi_y - \int_{S_3 \cap \partial D} \beta(\varphi) \cdot \xi d\sigma(X) = 0. \quad (3.29)$$

Ainsi

$$\chi_y = 0 \quad \text{sur } D \quad \text{ou} \quad \chi = \chi(x) \quad \text{sur } D.$$

Par (3.29) on a

$$\int_{S_3 \cap \partial D} (\chi \nu_y - \beta(\varphi)) \cdot \xi d\sigma(X) = 0,$$

pour tout  $\xi$  disparaître sur  $\partial D \setminus S_3$ . et le résultat suit.

# Conclusion

Nous avons présenter une étude sur un problème de barrage avec des conditions de fuite.

L'étude du problème a été adoptée au chapitre deusième dans [3] et [4], et dans le dernier chapiter [4], mais la base de article est [4] . C'était une vue partielle du problème, mais elle ouvrait la porte à d'autre recherches dans ce domaine :

1. L'unicité de la solution,
2. Surmontrer cette restriction dans le cas à  $\mathbb{R}^n, n > 2$ .

# Bibliographie

- [1] Haïm. Brezis : *Analyse Fonctionnelle*, Masson, Paris, 1987.
- [2] H. Brezis : *Problèmes Unilatéraux* . Math. Pures Appl. 51 (1972), 1-168.
- [3] J.Carrillo, M.Chipot : *On the dam problem*. J. Differential Equations 45 (1982), 234-271.
- [4] J.Carrillo, M.Chipot : *The Dam Problem with Leaky Boundary Conditions*. Appl. Math.Optim 28,(1993),57-85.
- [5] M.Chipot : *Variational inequalities and Flow in Porous Media* . Springer-Verlag, New york , 1984 .
- [6] I. Ekeland, R. Temam : *Convex Analysis and Variational Problems*. North-Holland,Amsterdam, 1976.
- [7] P. Grisvard : *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Pitman, London, 1985.
- [8] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia : *An Introduction to Variational Inequalities*. Academic Press, New York, 1980.
- [9] J.L.Lions : *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*.Dunod-Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [10] J. Nečas : *Introduction to the Theory of Nonlinear Elliptic Equations*. Wiley Interscience, New York, 1986.
- [11] A. Saadi : *Sur une classe de problème de frontières libres, avec des conditions aux limites de Neumann*. Thèse do-dorait, ENS Koubar, Alger, 2016.

## الملخص :

نهتم في هذه المذكرة بمسألة السد الترابي تحت شروط التدفق . انها مسألة حدية ذات حافة حرة وفقا لشروط نيومان. سندرس وجود الحل وبعض الخصائص والأمثلة.  
الكلمات المفتاحية : مسائل الحافة الحرة, تدفق السوائل, وسط مسامي.

---

## Résumé:

Dans ce mémoire, on s'intéresse au problème de la digue avec des conditions de fuite, c'est un problème aux limites de frontière libre avec de conditions aux forts de Neumann. Nous étudient l'existence, et quelques propriétés et exemples.

Les mots clés : Problèmes de limites libres, fuite d'un fluide, milieux poreux

---

## Abstract:

In this memoir, we are interested in the problem of the dike with leakage conditions, it is a problem to the limited free frontier with conditions to the Neumann forts. We study existence, and some properties and examples.

The Key works: Free boundary problems, Fluid flow, Porous media.