DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
AND POPULAR MINISTRY OF HIGHER
EDUCATION AND SCIENTIFIC
RESEARCH

University Mohamed Boudiaf of M'sila
Faculty of Mathematics and Computer Science
Department of Mathematics

Mémoire de Master

Specialité: Mathématiques
Option: Algèbre et Mathématiques Discrètes

Title

Méthode de Laplace pour l'estimation asymptotique des intégrales

---

By M^{iss} Kenza Zerig

Le jury composé de

President: **Zedam Lemnaouar. Prof.**
Encadreur: **Moussa Benoumhani. MCA**
Examinateur: **Lacene Ladjalet . MAB**

Academic year 2019/2020

Méthode de Laplace pour le calcul asymptotique des intégrales

Zerig Kenza

16 septembre 2020

Je voudrais dans un prmier temps remercier, mon directeur de mémoire **Benoumhani Moussa** ; pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma reflexion.

Mes remerciements s'adressent à tout les enseignants du département de mathématiques, pour leurs dévouement et leurs générosité et je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont aidée lors de la rédaction de ce mémoire .

Je tiens ici à exprimer mes sentiments respectueux à mes chers parents à qui je dédie ce travail pour leur grand soutien.

Un grand merci à ma famille, à mes proches et à mes collègues pour leurs encouragements et pour leurs amitiés, et tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.

Table des matières

Introduction

Le théorème fondamentale du calcul différentiel affirme que si f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, et si a et b $\in I$, et F une primitive de f alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b).$$

Malheureseument pas toutes les fonctions continues peuvent avoir une primitive simple pour pouvoir calculer simplement l'intégrale précedente.
Aussi, il est possible que le bornes ne soient pas finies, ou que la primitive n'est pas une fonction elementaire, etc.
Alors que faire si on a à connître l'intégrale ou du mois on est obliger de connaitre son comportement dans un cerain domaine ? Dans ce cas, il est possible, parexemple d'utiliser des méthodes numériques ou des méthodes théoriques nous donnant des approximations satisfaisantes des intégrales considerées. Parmi les méthodes classiques des évaluations on en compte, la méthode de Laplace, dans le cas reel, la méthode de la phase stationnaire et la méthode du col dans le cas complexe. Le but de ce memoire est de presenter en details, la méthode de Laplace, et de l'appliquer à quelques exemples.
Premierement, cette methode traite les integrales de la forme

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x)e^{\lambda g(x)}dx,$$

où f et g sont des fonctions réelles, et λ un parametre reel assez grand. On cherche un equivalent de $F(\lambda)$ pour λ assez grand.
L'idee generale, est comme suit : supposer que la fonction g est de classe c^2, et qu'elle n'a qu nseul maximum au voisinage au point x_0, et fonc $g"(x_0) < 0$, et que x_0 n est pas un point frontiere de l'integrale. Dans ce cas, on ecrit le developpement de Taylor de g et de f au voisinage de x_0, et on aura

$$F(\lambda) = \int_a^b \left(f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} x_0)f"(x_0) + O(x - x_0)^2 \right) e^{\lambda g(x)}dx.$$

En rempacant le developpement de g au voisingae de x_0, on obtient

$$F(\lambda) = \int_a^b \left(f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} x_0)f"(x_0) \right) e^{\lambda((g(x_0) - \frac{(x-x_0)^2}{2} x_0)|g"(x_0))|)}(1+O(x-x_0)^2)d$$

Après un changement de variable, on obtient des integrales de types

$$Constante. \int_{-\infty}^{\infty} x^{2l} e^{-\lambda \frac{x^2}{2}} dx.$$

qui sont des integrales facilement calculables, via les integrales de Gauss.
Le premier exemple, est la formule de Stirling, qui donne un equivalent asymptotique de $n!$.

Chapitre 1

Préliminaires

Nous commençons par définir les notions asymptotiques et l'expansion asymptotique. Ce sont utiles en décrivant le comportement limite d'une fonction quand l'argument devient plus près d'un nombre complexe particulier, en général 0 ou ∞.

Soient $f,\ g$ deux fonctions définies dans le domaine $D \in \mathbb{C}$

Dfinition 1.1 Soient $f,\ g$ deux fonctions définies dans le domaine $D \in \mathbb{C}$. Nous disons que f est grand O de g au voisinage de z_0 et on ecrit

$$f = O(g), \tag{1.1}$$

s'il existe un voisinage V de z_0 et une constante $M > 0$ tels que

$$\mid f(z) \mid \leq M \mid g(z) \mid, z \in V.$$

Dfinition 1.2

Soient f et g des fonctions définies dans un voisinage aigu dez_0. Nous disons que f est petit o de g au vousinage de z_0, et on écrit

$$f(z) = o(g), \text{ au voisinage de } z_0 \tag{1.2}$$

s'il existe un voisinage U de z_0 tel que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 0 \tag{1.3}$$

Quelques propriétés utiles des symboles o et O sont donn ées dans le théorème 1. La notation est celle habituellement utilisée dans l'analyse asymptotique ; quand nous écrivons $O(g)$ nous voulons dire une certaine fonction f qui est $O(g)$.

Exemples 1.1

Soient $f(z) = \sin(z)$, et $g(z) = z$. Alors nous avons, par la rè gle des L'Hospital

$$\lim_{z \to 0+} \left[\frac{\sin z}{z} \right] = 1, \tag{1.4}$$

de sorte que

$$\sin z = O(z) \text{ au voisinage de } 0 \tag{1.5}$$

Quelques propriétés simples et utiles des symboles o et O sont regroup ées dans le théorème suivant. La notation est celle habituellement utilisée dans l'analyse asymptotique. Quand nous écrivons $O(g)$ nous voulons dire une certaine fonction f qui est $O(g)$.

Thorme 1.1 *Soient f, g des fonctions et c_1, c_2 des constantes, alors on a :*

1. $c_1O(g) + c_2O(g) = O(g)$.
2. $c_1o(g) + c_2o(g) = o(g)$.
3. $O(O(g)) = O(g)$.
4. $O(o(g)) = o(O(g)) = o(o(g)) = o(g)$.
5. $O(f)O(g) = O(fg)$.
6. $O(f)o(g) = o(fg)$.

Dfinition 1.3 Les fonctions f et g sont dites asymptotiquement équivalente au voisinage de z_0 si

$$f(z) - g(z) = o(g(z))\text{au voisinage de } z_0$$

Dans ce cas-ci nous écrivons

$$f(z) \sim g(z)\text{au voisinage de } z_0. \tag{1.6}$$

On peut facilement voir que la relation $\sim$ est symétrique. Aussi $f \sim g$ au voisinage de z_0 , est équivalent à

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 1. \tag{1.7}$$

Donnons un exemple

Exemple 1.2 Si f est différentiable au point z_0, alors on a

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + o(\mid z - z_0 \mid), \text{ au voisinage de} z_0$$

Dans le cas où $f\prime(z_0) \neq 0$, on peut alors écrire

$$f(z) - f(z_0) \sim (z - z_0)f'(z_0) \text{ au voisinage de } z_0.$$

1.1 Développement asymptotique

Avant de donner la définition rigoureuse d'un développement asymptotique d'une fonction f, au un voisinage d'un point, disons tout simplement tout simplement que c'est une somme finie de fonctions de référence, donnant une bonne approximation du comportement de la fonction f dans le voisinage considéré. Commencons par un exemple célèbre

Exemple 1.3 (L'intégrale d'Euler)

Considérons l'intégrale suivante (Euler, 1754) :

$$I(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+zt} dt,\ z \geq 0 \tag{1.8}$$

D'une facon formelle, en utilisant le déveleppement en série entière de la fonction $\frac{1}{1+y}$, on obtient

$$\frac{1}{1+zt} = 1 - zt + z^2t^2 + ... + (-1)^n z^n t^n + ... \tag{1.9}$$

En intègrant le résultat terme à terme, et en se souvenant que,

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} dz = n! \tag{1.10}$$

on obtient

$$I(z) \sim 1 - z + 2!z^2 + ... + (-1)^n n! z^n \tag{1.11}$$

Le rayon de convergence de la série précedente est nul, par conséquent, elle est partout divergente,excepté en $z = 0$.

1.2 Dévelloppement asymptotique

Donnons maintenant la définition rigoureuse du sens mathëmatique de develeppoement asymptotique.

Dfinition 1.4 *Soit F une fonction d'une variable réelle ou complexe z ; soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ une série entière (convergente ou divergente), pour laquelle la somme des premiers n termes est désignée par $S_n(z)$; soit*

$$R_n(z) = F(z) - S_n(z), n \geq .0 \tag{1.12}$$

Alors,

$$F(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + ... + \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}} + R_n(z), n \geq 0,$$

avec $F(z) = R_0(z)$, et $R_n(z) = O(z^{-n}), z \to \infty$ est appelé développement asymptotique de la fonction $F(z)$ au voisinage de ∞ , et on écrit

$$F\left(z\right) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, z \to \infty, \tag{1.13}$$

Cette définition est due à Poincaré (1886), et peut être donnée pour n'importe quele valeur finie z_0.

Remarquons que nous n'avons pas supposé que la série infinie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ est convergente.

1.3 Intégration par parties

L'intégration par parties est une méthode qui permet de transformer l'intégrale d'un produit de fonctions en d'autres intégrales, dans un but de simplification du calcul.

La formule est la suivante, où u et v sont deux fonctions dérivables, de dérivées continues sur l'intervalle $[a.\ b]$; alors :

$$\int_a^b u(x)v^{'}(x)dx = [uv]_a^b - \int_a^b u^{'}(x)v(x)dx,$$

ou encore, en remarquant que $u\prime(x)dx$ et $v\prime(x)dx$ sont respectivement les différentielles de u et de v :

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b \ - \int_a^b vdu$$

Preuve.
La démonstration de résultat découle immédiatement de la règle du produit :

$$(uv)' = u'v \ - uv\prime$$

On a donc

$$uv\prime = (uv)' - u'v$$

puis

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b (uv)'(x) \ - \int_a^b u^{'}(x)v(x)dx.$$

D'après le second théorème fondamental de l'analyse, on a l'égalité voulue . ■

1.4 Un premier exemple : intégrale exponentielle

L'exemple classique est l'intégrale exponentielle $E_1(z)$ écrite sous la forme

$$E_1(z) = \int_z^\infty t^{-1}e^{-t}dt$$

$$f(z) = ze^z E_1(z) = z\int_z^\infty t^{-1}e^{z-t}dt \tag{1.14}$$

où z est un réel positif. En utilisant à plusieurs reprises l'intégration par parties, on obtient

$$f(z) = 1 - \frac{1}{z} + \frac{2!}{z^2} - .... + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{z^{n-1}} + (-1)^n n! z \int_z^\infty \frac{e^{z-t}}{t^{n+1}} dt \tag{1.15}$$

Dans ce cas, nous avons, puisque $t \geq z$,

$$(-1)^n R_n(z) = n! z \int_z^\infty \frac{e^{z-t}}{t^{n+1}} dt \leq \frac{n!}{z^n} \int_z^\infty e^{z-t} dt = \frac{n!}{z^n} \tag{1.16}$$

En effet, $R_n(z) = O(z^{-n})$ puisque $z \to \infty$. Par conséquent

$$z \int_z^\infty t^{-1} e^{z-t} dt \sim \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{n!}{z^n}, \text{ pour } z \text{ assez grand.} \tag{1.17}$$

Cette série est divergente pour toute valeur finie de$z$. Cependant, lorsque$z$ est suffisamment grand et n est fixe, la partie finie de la série $Sn(z)$ donnée par

$$S_n(z) = F(z) - R_n(z) \tag{1.18}$$

rapproche suffisamment bien la fonction $F(z)$.

1.5 Propriétés des séries entières asymptotiques

D'abord nous observons que les coefficients dans la définition 1.5 s'obitiennent comme des limites

$$a_0 = \lim_{z\to\infty} f(z), \ a_n = \lim_{z\to\infty} z^n (f(z) - \sum_{m=0}^{n-1} a_m z^{-m}) \tag{1.19}$$

Du fait de l'unicité de la limite, nous concluons que si f possède un developpement asymptotique, alors il est unique ; symboliquement, si

Proposition 1.1 *Le developpement asymptotique d'une fonction, s'l existe est unique.*

Preuve. La preuve est basée sur le fait que la limite est unique :

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^\infty a_n z^{-n} \text{ et } f(z) \sim \sum_{n=0}^\infty b_n z^{-n}, z \to \infty, \tag{1.20}$$

à l'intérieur du même domaine D, alors

$$a_n = b_n, \ n = 0, \ 1, \ 2, \ ...$$

ce qui achève la preuve. ■

Signalons au contraire, que deux fonctions différentes peuvent avoir le même developpement asymptotique.

Exemple 1.4

1.5.1 Opérations sur les développement asymptotiques

Thorme 1.2 *Supposons que f et g possèdent des developpements asymptotiques :*

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n},\ g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} \qquad z \to \infty,\, z \in D$$

alors pour toutes constantes α, β, la fonction $\alpha f(x) + \beta g(x)$ a le développement asymptotique suivant

$$\alpha f(z) + \beta g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) z^{-n} \tag{1.21}$$

Preuve.
Soient

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \ldots\ldots + \frac{a_n}{z^n} + R_n(z) \text{ et} \\ g(z) &= b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \ldots\ldots + \frac{b_n}{z^n} + R'_n(z) \end{aligned}$$

et soient α,β deux constantes, alors

$$\begin{aligned} \alpha f(z) &= \alpha a_0 + \alpha\frac{a_1}{z} + \alpha\frac{a_2}{z^2} + \alpha\frac{a_3}{z^3} + \ldots\ldots + \alpha\frac{a_n}{z^n} + R_n(z) \text{ et} \\ \beta g(z) &= \beta b_0 + \beta\frac{b_1}{z} + \beta\frac{b_2}{z^2} + \ldots\ldots + \beta\frac{b_n}{z^n} + R'_n(z) \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\alpha f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n z^{-n}$$

et

$$\beta g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$$

Alors
$\alpha f(z)+\beta g(z) = (\alpha a_0+\alpha\frac{a_1}{z}+\alpha\frac{a_2}{z^2}+\ldots\ldots+\alpha\frac{a_n}{z^n})+(\beta b_0+\beta\frac{b_1}{z}+\beta\frac{b_2}{z^2}+\ldots\ldots\beta\frac{b_n}{z^n})+O(z^{-n})$
On obtient alors

$$\begin{aligned} \alpha f(z) + \beta g(z) &= \alpha a_0 + \beta b_0 + \alpha\frac{a_1}{z} + \beta\frac{b_1}{z} + \alpha\frac{a_2}{z^2} + \beta\frac{b_2}{z^2} + \ldots\ldots + \alpha\frac{a_n}{z^n} + \beta\frac{b_n}{z^n} + O(z^{-n}) \\ &= \alpha a_0 + \beta b_0 + (\alpha a_1 + \beta b_1) z^{-1} + (\alpha a_2 + \beta b_2) z^{-2} + \ldots\ldots + (\alpha a_n + \beta b_n) z^{-n} + \\ &\quad O(z^{-n}) \\ &\sim \sum_{k=0}^{n} (\alpha a_n + \beta b_n) z^{-n} \end{aligned}$$

donc

$$\alpha f(z) + \beta g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) z^{-n}$$

Ce qui achève la preuve. ■

On obtient aussi le développement asymptotique du produit de deux fonctions :

Thorme 1.3 *Soient f et g deux fonctions ayant les développements asymptotiques :*

$$f(z) \sim \sum_{j=0}^{n} a_j z^{-j} \; g(z) \sim \sum_{j=0}^{n} b_j z^{-j} \; z \to \infty, \; z \in D$$

alors on a

$$f(z)g(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^{-j}, \text{ avec} c_k = \sum_{i+j=k}^{k} a_i b_j. \tag{1.22}$$

Preuve. Suppsons que

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + ...$$

et

$$g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + ...$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} f(z)g(z) &= (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + ...)(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + ...) \\ &= a_0 b_0 + a_0 b_1 z^{-1} + ... + a_1 b_0 z^{-1} + a_1 b_1 z^{-2} + ... \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z^{-1} + ... \\ &\sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}. \end{aligned}$$

Ce qui achéve la preuve du théorème. ■

Le résultat suivant donne le developpement asymptotique de l'inverse d'une fonction f.

Thorme 1.4 *Supposons que la fonction f a le développemnt asymptotique*

$$f(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + ... \text{ pour } z \to \infty$$

avec $a_0 \neq 0$ $f(z) \neq 0$ pour z près de z_0 alors

$$\frac{1}{f(z)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{-n}$$

où

$$d_0 = 1/a_0, \; a_0 d_n = -\sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} d_m, n = 1, 2, 3, ...$$

Preuve. Pour la preuve, il suffit d'ecrire

$$g = \frac{1}{f} \quad \text{equivaut \{`a } fg = 1.$$

Et on applique le théorème pour le produit. ■

Sous certaine conditions, on peut deduire le développement asymptotique de la derivee d'une fonction dérviable

Thorme 1.5 *Supposons que que f est dérivable sur D et possède un D.A sur D :*

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \; z \to \infty, \; z \in D.$$

Si f a une dérivée continue f' alors

$$f'(z) \sim -\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{-n-1} \quad z \to \infty \;\; z \in D \tag{1.23}$$

Exemple 1.5 Supposns que

$$f(z) \sim a_1 e^{-z} + a_2 e^{-2z} + ..., \text{ pour } z \to \infty$$

et

$$g(z) \sim b_1 e^{-z} + b_2 e^{-2z} + ..., \text{ pour } z \to \infty$$

Alors

$$f(z)g(z) \sim a_1 b_1 e^{-2z} + (a_1 b_2 + a_2 b_1) e^{-3z} + ..., \text{ pour} z \to \infty$$

Exemples 1.6 Soit

$$f(z) \sim \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + ..., \text{ pour} z \to \infty$$

et

$$g(z) \sim b_1 e^{-z} + b_2 e^{-2z} + ..., \text{ [pour z} \to \infty.$$

Après multiplication, les quantités $b_2 e^{-2z}$, $b_3 e^{-3z}$, etc., sont nulles pour z assez grand. On obient donc

$$f(z)g(z) \sim \frac{a_1 b_1 e^{-z}}{z} + \frac{a_2 b_1 e^{-2z}}{z^2} + ..., \text{ pour } z \to \infty$$

Chapitre 2

Méthode de Laplace

La méthode de Laplace, est due à Pierre-Simon de Laplace. sC'estt une méthode pour l'évaluation numérique d'intégrales de la forme :

$$\int_a^b e^{\lambda f(z)} dz$$

où f est une fonction deux fois dérivable, λ est un paramétre réel assez grand. Les bornes a et b peuvent être infinies.

2.1 Principe de la méthode

Pour $\lambda > 0$, si l'on suppose que la fonction f admet un unique maximum au point z_0 alors pour λ grand, seuls les points au voisinage de z_0 contribuent de façon significative à l'intégrale :

$$\int_a^b e^{\lambda f(z)} dz.$$

Si λ est négatif, l'intégrale est trait'ee similairement, en considérant $-\lambda$ et $-f$, et dans e cas les maximums de $-f$ sont juste les minimumsde f.

2.2 Méthode de Laplace, cas général

Pour appliquer la méthode de Laplace, un certain nombre de conditions doivent etre satisfaites. Le point z_0 doit être différent de l'une des bornes de l'intégrale et $f(z)$ ne peut s'approcher de la valeur $f(z_0)$ qu'au voisinage de z_0.
Par application du théorème de Taylor, au voisinage dez_0 ,$f(z_0)$ s'écrit :

$$f(z) = f(z_0) + f^{'}(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(z - z_0)^2 + O((z - z_0)^3)$$

Puisque f admet un maximum en z_0 , qui n'est pas l'une des bornes de l'intégrale,$f^{'}(z_0) = 0$ et $f^{''}(z_0) \leq 0$, on a alors dans un voisinage dez_0 :

$$f(z) \approx f(z_0) - \frac{1}{2} \mid f^{''}(z_0) \mid (z - z_0)^2$$

Et l'intégrale devient :

$$\int_a^b e^{\lambda f(z)} dz \approx e^{\lambda f(z_0)} \int_a^b e^{-\lambda |f^{''}(z)|(z-z_0)^2/2}$$

La deuxième intégrale peut être estimée à l'aide d'une intégrale de Gauss en remplaçant les bornes a et b par$-\infty$ et $+\infty$. uisque les restes sont negligeables, on obitent alors :

$$\int_a^b e^{\lambda f(z)} dz \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda \mid f''(z_0) \mid}} e^{\lambda f(z_0)} \quad \text{quand } \lambda \to +\infty$$

Le remplacement des bornes par $-\infty$et $+\infty$ est valide puisque, quel que soit $k \in \mathbb{N}$ on a

$$e^{-\lambda |f^{''}(z)|(z-z_0)^2/2} = O((z - z_0)^{-k}).$$

Les autres cas où les conditions demandées pour effectuer cette méthode ne sont pas satisafiates, peuvent etre traitées autrement. Par exemple dans le cas où z_0 est l'une des bornes on utilise un développement au premier ordre autour de z_0 . Aussi, si on a plus d'un maximum, on découpe l'intégrale en plusieurs intégrales, et on applique la méthode precédente.

2.3 Théorème fondamental de le méthode de Laplace

Nous allons tout d'abord considérer les integrales de type

$$F(\lambda) = \int_a^b f(z) e^{\lambda g(z)} dz, \tag{2.1}$$

où $g(z)$ est à valeurs réelles.

Thorme 2.1 *Soit $I =]a; b[$ un intervalle borné ou non. Soit $g \in C^2(I)$. On suppose que :*

1. *L'intégrale est bornée : $\int_a^b e^{\lambda g(z)} \mid f(z) \mid dz \leq \infty, \ \forall \lambda > 0$.*
2. *La dérivée g' s'annule en un seul point z_0 de I et $g^{''}(z_0) < 0$ (donc z_0 est un point maximum absolu strict de g).*

3. La fonction f vérifie $f(z_0) \neq 0$. Alors

$$F(\lambda) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda \mid f^{''}(z_0) \mid}} e^{\lambda g(z_0)} f(z_0) \tag{2.2}$$

Preuve. Nous avons supposé que g est à valeurs réelles. On applique la formule de Taylor avec reste intégral en z_0.

$$\begin{aligned} g(z) &= g(z_0) + g^{'}(z_0)(z - z_0) + \int_{z_0}^{z} g^{''}(\lambda)(\lambda - z) d\lambda \\ &= g(z_0) + [-\frac{g^{''}(\lambda)(z-\lambda)^2}{2}]_{z_0}^{z} + \underbrace{\int_{z_0}^{z} \frac{g^{'}(\lambda)(z-\lambda)}{2} d\lambda}_{=0} \\ &= g(z_0) + (z - z_0)^2 \frac{g^{''}(z_0)}{2} \\ &= g(z_0) + (z - z_0)^2 \Psi(z) \end{aligned}$$

où Ψ est une fonction continue sur I et de classe C^2 sur $I \backslash \{z_0\}$ et $\Psi(z_0) = \frac{1}{2}\ g^{''}(z_0)$.

Comme $g^{''}(z_0)0$, il existe un $\delta_1 > 0$ tel que, sur l'ensemble

$$j_1 =]z_0 - \delta,\ z_0 + \delta[\subset]a,\ b[,$$

la fonction

$$\Psi\,(z) < 0.$$

Introduisons la fonction

$$u(x) = (z - z_0)\sqrt{-\Psi(z)}.$$

On peut également poser

$$\Psi(z) = \frac{g(z) - g(z_0)}{(z - z_0)^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} u(x) = (z - z_0)\sqrt{-\Psi(z)} &= (z - z_0)\sqrt{\frac{g(z_0) - g(z)}{(z - z_0)^2}} \\ &= \frac{z - z_0}{\mid z - z_0 \mid} \sqrt{g(z_0) - g(z)} \\ &= \begin{cases} -\sqrt{g(z_0) - g(z)} & \text{si } z \leq z_0 \\ \sqrt{g(z_0) - g(z)} & \text{si } z \geq z_0 \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction u est continue sur J_1 car :

$$\lim_{z \to z_0^+} u(z) = \lim_{z \to z_0^+} \sqrt{g(z_0) - g(z)} = \lim_{z \to z_0^-} \sqrt{g(z_0) - g(z)} = 0.$$

Elle est aussi de classe C^2 sur $J_1\backslash\{z_0\}$.

On va montrer que u se prolonge en une fonction de classe C^1 sur J_1 telle que

$$u\prime(z_0) = \sqrt{-\frac{1}{2}g''(z_0)} > 0.$$

Evaluons $u\prime$. Si $z \geq z_0$, on a

$$u\prime(z) = \frac{-g^{'}(z)}{2\sqrt{g(z_0) - g(z)}} > 0,$$

et si $z \leq z_0$, on a

$$u\prime(z) = \frac{g^{'}(z)}{2\sqrt{g(z_0) - g(z)}} > 0.$$

Ecrivons la formule de Taylor de $g^{'}$ et g. On obtient pour $z \leq z_0$:

$$\begin{aligned}
u\prime(z) &= \frac{g'(z_0) + g^{''}(z_0)(z - z_0) + O((z - z_0)^2)}{\sqrt[2]{g(z_0) - g'(z_0)(z - z_0) - \frac{1}{2}g''(z_0)(z - z_0) + O((z - z_0)^3)}} \\
&= \frac{\sqrt{\left(g''(z_0)\right)^2 (z - z_0)^2}}{\sqrt[2]{-\frac{g''(z_0)^2(z-z_0)^2}{2} + O((z - z_0)^3)}} + O((z - z_0)^2) \\
&= \sqrt{\frac{-g''(z_0)^2(z - z_0)^2}{4\frac{g''(z_0)(z-z_0)^2}{2}}} + O((z - z_0)^2) \\
&= \sqrt{\frac{-g''(z_0)}{2}} + O((z - z_0)^2)
\end{aligned}$$

D'où,

$$\lim_{z \to z_0} u'(z) = \sqrt{\frac{-g''(z_0)}{2}}.$$

On retrouve le meme résultat si $z \geq z_0$. Maintenant décomposons $F(\lambda)$ en deux intégrales comme suit

$$F(\lambda) = \underbrace{\int_a^b e^{\lambda g(z)}\theta(z)f(z)dz}_{=F_1(\lambda)} + \underbrace{\int_a^b e^{\lambda g(z)}(1 - \theta(z))f(z)dz}_{=F_2(\lambda)}$$

Etudions maintenant les deux parties de l'integrale $F(\lambda)$:

Etude de $F_1(\lambda)$:

Comme θ est nulle à l'exterieur de $]a, b[$, on peut écrire,

$$F_1(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda g(z_0) - \lambda u^2(z)}\theta(z)f(z)dz.$$

Posons$t = u(z)$. Comme u est monotone, u^{-1} existe et $z = u^{-1}(t)$. On a démontré précedemment que u est un difféomorphisme, donc notre changement de variable a un sens. On a

$$dt = u'(z)dz,$$

et par conséquent

$$dz = \frac{dt}{u'(u^{-1}(t))}.$$

. Il s'en suit alors que

$$F_1(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda g(z_0)} e^{\lambda t^2} \underbrace{\theta(u^{-1}(t) f(u^{-1}(t)) \frac{dt}{u'(u^{-1}(t))}}_{=h(t)}$$

Observons que $h(t)$ est continue et à support compact dans $\mathbb{R}$. Posons

$$\sqrt{\lambda} t = y;\ dt = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} dy.$$

Il vient alors :

$$F_1(\lambda) = e^{\lambda g(z_0)} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \sqrt{\lambda} h(\frac{y}{\sqrt{\lambda}}) dy.$$

Appliquons le théeorème de Lebesgue à $\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} h(\frac{y}{\sqrt{\lambda}}) dy$. Pour cela, vérifions les hypothéses :
- Pour y fixé,

$$e^{-y^2} h\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda}}\right) \longrightarrow e^{-y^2} h(0),$$

quand t tend vers ∞.
- On a aussi :

$$\mid e^{-y^2} h(\frac{y}{\sqrt{\lambda}}) \mid \leq \mid e^{-y^2} \mid\mid h(\frac{y}{\sqrt{\lambda}}) \mid \leq e^{-y^2} \sup_{\mathbb{R}} \mid h \mid \in L^1.$$

Donc, d'aprés le théorème de Lebesgue,

$$e^{-\lambda g(z_0)} \sqrt{\lambda} F_1(\lambda) \to h(0) \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = h(0)\sqrt{\lambda}.$$

Calculons

$$h(0) = \theta(u^{-1}(0))f(u^{-1}(0))\frac{1}{u'(u^{-1}(0))}.$$

On a $u^{-1}(0) = z_0$, d'où

$$h(0) = \theta(z_0)f(x_0)\frac{1}{u'(z_0)} = f(z_0)(\frac{-1}{2}g''(z_0))^{-1/2}.$$

Il vient donc,

$$\begin{aligned} F_1(\lambda) &\sim \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{2}f(z_0)(-g''(z_0))^{-1/2}}{e^{-\lambda g(z_0)}\sqrt{\lambda}} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\mid g''(z_0) \mid}}e^{-\lambda g(z_0)}f(z_0)\sqrt{\lambda} \end{aligned}$$

Ce qui nous donne le deuxiéme terme de l'équation du théorème.

Etude de $F_2(\lambda)$:

Par définition de θ, on a

$$1 - \theta \neq 0 \text{ si } \mid z - z_0 \mid \leq \delta/2,$$

c'est-à-dire

$$z - z_0 \leq \delta/2 \text{ ou } z - z_0 \geq \delta/2.$$

Par hypothèse, z_0 est le seul point critique de g, de plus z_0 est un maximum local donc on peut dire que $g' \geq 0$ lorsque $z < z_0$ et $g' \geq 0$ quand $z > z_0$. Il vient alors :

$$g(z_0) - g(z) = g(z_0) - g(z_0 - \delta/2) + g(z_0 - \delta/2) - g(z).$$

Si $z < z_0 - \delta/2$, on sait que $g\prime > 0$ c'est à dire que g est croissante . Et donc

$$g(z_0 - \delta/2) - g(z) > 0.$$

Par minoration, on obtient

$$g(z_0) - g(z) > g(z_0) - g(z_0 - \delta/2) > 0.$$

On a aussi,

$$g(z_0) - g(z) = g(z_0) - g(z_0 + \delta/2) + g(z_0 + \delta/2) - g(z).$$

D'un autre coté, si $z > z_0 - \delta/2$, on sait que $g' < 0$, donc g est décroissante. On obtient donc

$$g(z_0 + \delta/2) - g(z) > 0.$$

Ce qui donne la minoration suivante

$$g(z_0) - g(z) \geq g(z_0) - g(z_0 + \delta/2) > 0.$$

Il s'ensuit que sur le support de $1-\theta$, on a

$$\left\{\begin{array}{c} \text{si } z < z_0 - \delta/2 g(z) \leq g(z_0 - \delta/2 \leq g(z_0) - \mu \\ \text{si } z > z_0 + \delta/2 g(z) \leq g(z_0 + \delta/2 \leq g(z_0) - \mu \end{array}\right. ,$$

où

$$\mu = \min(g(z_0) - g(z_0 - \delta/2),\ g(z_0) + g(z_0 + \delta/2)).$$

Et par conséquent

$$g(z_0) - g(z) \geq \mu > 0.$$

Alors pour tout$\lambda > 1$, on a

$$\lambda g(z) = g(z) + (\lambda - 1) g(z) \leq g(z) + (\lambda - 1) g(z_0) - (\lambda - 1)\mu.$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \mid F_1(\lambda) \mid &\leq \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda g(z_0) + g(z) - g(z_0) - (\lambda-1)\mu} \mid f(z) \mid dz \\ &= e^{\lambda g(z_0)} \int_{\mathbb{R}} e^{g(z) - g(z_0) - (\lambda-1)\mu} \mid f(z) \mid dz. \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \mid F_2(\lambda) \mid e^{-\lambda g(z_0)} &\leq e^{-\lambda\mu} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{g(z) - g(z_0) + \mu} \mid f(z) \mid dz}_{=M} \\ &\leq M e^{-\lambda\mu}. \end{aligned}$$

On a donc montré que $F_1(\lambda) e^{-\lambda g(z_0)}$ décroit en $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ et $F_2(\lambda) e^{-\lambda g(z_0)}$ décroit exponentiellement. Comme conséquence, on obtient que $F(\lambda) \sim F_1(\lambda)$ et le théorème est prouvé. ■

Chapitre 3

Application

3.1 Application : formule de Stirling

La formule de Stirling donne un équivalent asymptotique de la factorielle au voisinage de l'infini réel (quand n tend vers l'infini) :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

Cette formule c el'ebre s ecrit sous la forme suivante :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Rappelons que la factorielle, est un cas partuclier de la fonction Γ d'Euler, lorsque l'argumet n est un entier.

La formule a d'abord été découverte par Abraham de Moivre sous la forme :

$$n! \sim cn^{n+1/2}e^{-n} \text{ où } c \text{ est une constante réelle(nonnulle)}$$

Stirling fut de donner un développement de $\ln(n!)$ à tout ordre et d'attribuer la valeur à la constante c.

Nous utiliserons la fonction $\Gamma(t)$ d'Euler pour retrouver cette constante. Pour cela, commençons par retrouver une estimation de $\Gamma(t+1)$ pour t grand.

Cette fonction est définie de la maniére suivante :

$$\Gamma(\lambda+1) = \int_0^\infty z^\lambda e^{-z}dz = \int_0^\infty e^{\lambda\log\lambda-\lambda}dz$$

On effectue le changement de variable

$$z = \lambda y$$

on aura

$$dz = \lambda dy$$

Il veient alors :

$$\begin{aligned}\Gamma(\lambda+1) &= \int_0^\infty e^{\lambda \log \lambda y - \lambda y} \lambda dy \\ &= \int_0^\infty e^{\lambda \log \lambda} e^{\lambda \log y} e^{-\lambda y} \lambda dy \\ &= \lambda^{\lambda+1} \int_0^\infty e^{\lambda(\log y - y)} dy\end{aligned}$$

Vérifions que l'on peut appliquer le théorème 1 à

$$\int_0^\infty e^{\lambda(\log y - y)} dy$$

pour cela posons

$$g(y) = logy - y et f \equiv 1$$

1. L'intégrale $\int_0^\infty e^{\lambda \log \lambda} e^{\lambda \log y} e^{-\lambda y} dy$ est bornée car $\int_0^\infty y^\lambda e^{-\lambda y} dy < \infty$
2. la dérivée de g est $g\prime(y) = \frac{1}{y} - 1$. On a alors :

$$g\prime(y) = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{et } g''(1) = -1$$

Donc g a un seul maximum au point 1.

1. on a aussi $f(1) = 1 \neq 0$ On

peut appliquer le théorème.

$$\int_0^\infty e^{\lambda(\log y - y)} dy \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\mid g''(z_0) \mid}} e^{\lambda g(z_0)} f(z_0) \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

le point $z_0 = 1$dans notre cas. Donc

$$g(z_0) = -1 \text{et } f(z_0) = 1$$

D'où :

$$\int_0^\infty e^{\lambda(\log y - y)} dy \sim \sqrt{2\pi} e^{-\lambda} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

On peut en déduire :

$$\begin{aligned}\Gamma(\lambda+1) &= \lambda^{\lambda+1}\int_0^\infty e^{\lambda(\log y - y)}dy \\ &\sim \lambda^{\lambda+1}\sqrt{2\pi}e^{-\lambda}\lambda^{-1/2} \\ &\sim \lambda^{\lambda+1/2}\sqrt{2\pi}e^{-\lambda}\end{aligned}$$

Explicitons $\Gamma(n+1)$ pour n entier. Pour $\lambda > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\Gamma(\lambda+1) &= \int_0^\infty z^\lambda e^{-z}dz \\ &= \underbrace{\left[-z^\lambda e^{-z}\right]_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty \lambda z^{\lambda-1}e^{-z}dz \\ &= \lambda\int_0^\infty z^{\lambda-1}e^{-z}dz \\ &= \lambda\Gamma(\lambda)\end{aligned}$$

Donc,

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)....\Gamma(1) = n!\Gamma(1)$$

Or,

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty z^0 e^{-z}dz = \left[-e^{-z}\right]_0^\infty = 1$$

On en conclut que :

$$\Gamma(n+1) = n! \sim \sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-\lambda}\text{pour } n \text{ grand}$$

La fonction $\Gamma(\lambda)$ est donc généralement perçue comme un prolongement complexe de la factorielle à l'ensemble des nombres complexes exceptés les entiers
négatifs ou nuls.

3.2 Application 2

Considérer la représentation intégrale

$$K_v(x) = \int_0^\infty e^{-x\cosh t}\cosh vt dt$$

de la fonction Bessel Modifiée, $K_v(x)$. Quand $x \gg 1$, ceci est sous la forme $\int_a^b e^{\lambda f(t)} g(t)dt$ avec $f(t) = -\cosh t$ et $g(t) = \cosh vt$.

La valeur maximum de $f(t) = -\cosh t$ est à $t = 0$, où $f(t) = g(t) = 1$.

Pour$t = 1$,$\cosh t \sim 1 + \frac{1}{2}t^2$, et nous peut donc employer la méthode de Laplace pour rapprocher $K_v(x)$ comme

$$K_v(x) \sim \int_0^\infty e^{-x(1+\frac{1}{2}t^2)} dt = e^{-x} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}xt^2} dt$$

Après fabrication de la substitution $t = \check{t}\sqrt{2/x}$, ceci devient

$$F_v(x) \sim \sqrt{\frac{2}{x}} e^{-x} \int e^{-\check{t}^2} d\check{t} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \text{ pour } x \gg 1$$

3.3 Application 3

Considérer l'intégrale

$$I(\lambda) = \int_0^{10} \frac{e^{-\lambda t}}{1+t} dt$$

Dans ce cas-ci,$f = -t$ et $g = 1(1+t)$. Puisque $f(t) = -1 \neq 0$ et la valeur maximum de f se produit à $t = 0$ pour $t \in [0, 10]$,

En fait nous pouvons employer l'expansion binomiale

$$I(\lambda) \sim \int_0^{10} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-10\lambda}) \sim \frac{1}{\lambda}, \lambda \to \infty$$

En fait nous pouvons employer l'expansion binomiale

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + ...$$

quoique ce soit seulement convergent pour$|t| < 1$, puisque la fonction à intégrer est exponentiellement petite à partir de$t = 0$.

Nous pouvons également développer la gamme de l'intégration à l'infini sans affecter le résultat, pour donner

$$I(\lambda) \sim \sum_{n=0}^{N} \int_0^\infty (-1)^n t^n e^{-\lambda t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{\lambda^{n+1}}, \lambda \to \infty$$

puisque,utilise $\tau = \lambda t$

$$\int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^{n+1}} \int_0^\infty \tau^n e^{-t} dt = \frac{1}{\lambda^{n+1}} \Gamma(n+1) = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$$

Noter que, comme nous avons trouvé pour $E_i(x)$, c'est un asymptotique, plutôt que le convergent, représentation de série d'$I(x)$.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a vu une méthode (la m ethode de Laplace) pour calculer asymptotiquement des intégrales de la forme

$$\int_a^b e^{\lambda f(z)} dz$$

oùf est une fonction deux fois dérivable,λ est un paramétre réel assez grand. Les bornes a et b peuvent être infinies. Cette méthode, appellée méthode de Laplace, au

nom de celui qui l'a decouvert. On a aussi donn e quelques applications, surtout la plus célébre, en l'occurrence la formule de Stirling. Reste à noter que la m ethode de

Laplace a d'autre generalisations importantes :

La méthode de la phase stationnaire, qui traite l'evaluation des integrales de type $\int_a^b f(z)e^{ig(z)}dz$, où f et g sont des fonctions reelles et λ un reel positif assez grand.

La m ethode du col, dite aussi méthode de la plus grande pente ou méthode de la descente rapide (saddle point method en anglais). C'est la variante complexe de la

m ethode de Laplace. Elle permet de trouver le developpement asymptotique d'une

integrale complexe du type :$\int_c f(z)e^{\lambda g(z)}dz$, où f et g sont des fonctions analytiques et c est le chemin d'int egration, λun reel positif assez grand ;

Bibliographie

[1] A. Erdelyi, Asymptotic Expansions, Dover, 1956

[2] E. T. Copson ASYMPTOTIC EXPANSIONS

[3] http ://fr.wikipedia.org/wiki/Méthode de Laplace.

[4] http ://fr.wikipedia.org/wiki/Formule de Stirling.

[5] https ://fr.wikipedia.org/wiki/Méthodemde_Laplace

[6] https ://fr.wikipedia.org/wiki/Intégration_par_parties.

[7] https ://fr.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9veloppement_asymptotique

[8] https ://perso.math.u-pem.fr/fradelizi.matthieu/pdf/ter-paul-08.pdf.

[9] Nico M. Temme, Asymptotic Methods for Integrals.

[10] P. Deift, X. Zhou, A steepest descent method for oscillatory Riemann-Hilbert problems. Asymptotics for the MKdV equation, Ann. of Math. (2), v.137 (1993), no. 2, 295–368.

[11] Richard A. Handelsman, Asymptotic Expansion of Integrals.

[12] Ram P. Kanwal, Asymptotic Analysis .