MINISTÈRE D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF - M'SILA
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

1985
جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

N° d'ordre: ....

T H È S E

Présentée pour l'obtention du diplôme de

Doctorat en Mathématiques

Option:
Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs

par:

SMATI Abdellatif

Thème

Etude des conditions entre les opérateurs compacts, normaux et positifs

Soutenue publiquement le :01/07/2018, devant le jury :

Abdelkader GASMI	**Prof.,**	**Université de M'sila**	**Président**
Mostefa NADIR	**Prof.,**	**Université de M'sila**	**Rapporteur**
Belkacem LAKEHALI	**MCA,**	**Université de M'sila**	**Examinateur**
Bachir GAGUI	**MCA,**	**Université de M'sila**	**Examinateur**
Madani CHEMCHAM	**MCA,**	**Université de Biskra**	**Examinateur**

Année 2017/2018

À

Mes très chers parents et mes frères

Ma femme qui a été patiente et compréhensive tout le long de mon travail

Mes enfants Sohaib, Mouad et Abdelbari

Je dédie ce travail

Remerciements

Je tiens à exprimer tout d'abord mes remerciements aux membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de thèse.

Merci à M. Abdelkader Gasmi (Prof.), Professeur à l'Université de M'sila, d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

En particulier, mes profonds remerciements vont à mon directeur de thèse M. le Professeur Mostefa Nadir (Prof.), qui a guidé avec beaucoup d'attention, de gentillesse et de patience mes premiers pas en recherche en tant que directeur de mémoire de master et de thèse de doctorat.

Merci également à Mrs. les Professeurs, Belkacem Lakehali (M.C.A) et Bachir Gagui (M.C.A), de l'Université de M'sila, et M. le Professeur Madani Chemcham (M.C.A) de l'Université de Biskra, pour avoir accepté d'examiner ce travail de thèse.

J'adresse aussi mes remerciements les plus vifs aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail de thèse. En particulier, mon père Brahim, mon oncle Mabrouk, Djamel Ghouzi et Mon collègue Fayçal Benmabrouk. Enfin à tous mes professeurs qui ont contribué à ma formation.

Abdellatif Smati

smatilotfi@gmail.com

Notation

$L(E,F)$	L'ensemble des applications linéaires de E dans F.
$\mathcal{L}(E,F)$	L'ensemble des applications linéaires continus de E dans F.
$C(\mathbb{R})$	L'espace des fonctions continus sur $\mathbb{R}$.
$C^n([a,b])$	L'espace des fonctions continûment dérivables n-fois, sur $[a,b]$.
$D(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$	L'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact.
$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$	L'espace des fonctions de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ dont le support est un sous ensemble compact de $\mathbb{R}^n$.
$L^2([a,b])$	L'espace des fonctions de carrés integrables sur $[a,b]$.
$L^\infty([a,b])$	L'espace des fonctions bornées sur $[a,b]$.
$l^2(\mathbb{R})$	L'espace des suites réelles $(x_n)_n$ de carrés sommables ,i.e vérifiant $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$.
$H^k(\mathbb{R})$	L'espace des fonctions f vérifiant $f^{(n)} \in L^2(\mathbb{R})$ pour toute $0 \leq n \leq k$.
A^{-1}	L'inverse de l'opérateur A.
A^*	L'adjoint de l'opérateur A.
$D(A)$	Le domaine de l'opérateur A.
$R(A)$	L'image de l'opérateur A.
$Ker(A)$	Le noyau de l'opérateur A.
$G(A)$	Le graphe de l'opérateur A.
$\\|.\\|_A$	La norme du graphe de l'opérateur A.
$\overline{A}$	La fermeture de l'opérateur A.
$\rho(A)$	L'ensemble résolvante de l'opérateur A.
$R_\lambda(A)$	La résolvante de l'opérateur A.
$W(A)$	Le rang numérique de A ,i.e $W(A) = \{\langle Ax, x\rangle : x \in H, \\|x\\| = 1\}$.
$\sigma(A)$	Le spectre de l'opérateur A.
$\sigma_p(A)$	Le spectre ponctuel de l'opérateur A.
$\sigma_r(A)$	Le spectre résiduel de l'opérateur A.
$\sigma_c(A)$	Le spectre continu de l'opérateur A.
$r(A)$	Le rayon spectral de l'opérateur A.
$s_j(A)$	La valeur singuliaire de A, $s_j(A) \overset{def}{=} (\lambda_j(A^*A))^{1/2}$

Table des matières

Introduction

Il est clair que les opérateurs compacts et les opérateurs normaux sur un espace de Hilbert forment des classes plus importantes dans les opérateurs linéaires bornés ; les opérateurs compacts ont des propriétés plus proches de celles des opérateurs linéaires dans un espace de dimension finie et la classe des opérateurs normaux est la plus grande classe pour laquelle le théorème spectral existe (le théorème spectral est indispensable à la physique du xxe siècle, par exemple en mécanique quantique), alors il est très important de tenir compte des conditions dans lesquelles un opérateur linéaire compact est normal.

En 2000, Sadkane dans [42] présente trois conditions nécessaires et suffisantes pour une matrice $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ deviendra normal. Comme les matrices carrées complexes peuvent être considérés comme la classe des opérateurs linéaires compacts sur un espace de Hilbert $\mathbb{C}^n$, il est naturel de s'interroger si ces résultats restent valables pour tous les opérateurs compacts linéaires dans un espace de Hilbert complexe séparable. En 2002, J.Yang et H.-K.Du dans [45] donnent une réponse affirmative à cette question.

Mais la plupart des opérateurs linéaires importants utilisés dans la physique mathématique ne sont pas bornés comme les opérateurs différentiels et quelques opérateurs utilisés dans la mécanique quantique, il est donc nécessaire d'étendre la recherche dans le cas des opérateurs bornés au cas des opérateurs non bornés.

La définition des opérateurs normaux se généralise naturellement dans certaines classes des opérateurs non bornés. Explicitement, on dit que l'opérateur fermé A est normal si $AA^* = A^*A$.Ici, l'existence de l'adjoint A^* implique que le domaine de A est dense et l'égalité implique que le domaine de A^*A est égal à celui de AA^*, ce qui n'est pas forcément le cas en général.

Le but de cette thèse est d'étudier une nouvelle classe d'opérateurs, c'est l'opérateur de Nadir (Un opérateur non borné N est dit opérateur de Nadir, s'il écris sous la forme $N = AB^* - BA^*$ t.q A et B sont deux opérateurs non bornés densément définis), et chercher des conditions sur A et B pour lesquelles l'opérateur de Nadir est compact, fermé, anti-hermitien et normal (plus précisément anti-autoadjoint) dans les trois cas :

A et B sont deux opérateurs bornés.

A est un opérateur borné et B non borné.

A et B sont deux opérateurs non bornés.

L'étude de l'opérateur de Nadir non borné est difficile par apport au cas borné car par exemple, si A et B sont deux opérateurs bornés, la somme $A+B$ et le produit AB le sont aussi, et également $(A+B)^* = A^* + B^*$, $(AB)^* = B^*A^*$ et $A^{**} = A$. Mais dans le cas non borné, les résultats ne sont pas meilleurs, voir par exemple à [1], [13], [41], [43], [46].

Donnons maintenant un aperçu du contenu des chapitres.

- Dans le *premier chapitre*, on commence par rappeler quelques résultats fondamentaux et notions portant sur la théorie des opérateurs bornés, en mettant l'accent sur l'importance de quelques classes des opérateurs normaux et l'opérateur compact comme la diagonalisation des opérateurs compacts auto-adjoints et normaux
- Le *deuxième chapitre* est consacré aux opérateurs fermés et fermables. On commence par donner un rappel sur les opérateurs non bornés avec leurs opérations algébriques et la notion de l'opérateur adjoint non borné. Ensuite on introduit la notion de l'opérateur fermé. On donne plusieurs caractérisations de cet opérateur, on s'intéresse particulièrement à la somme, le produit et aussi l'inversibilité des opérateurs fermés. Comme je l'ai mentionné la notion de graphe d'un opérateur.
- Dans le *troisième chapitre*, on va étudier quelques classes des opérateurs fermés non bornés. On commence par faire des comparaisons entre les opérateurs symétriques et les opérateurs auto-adjoints avec des exemples. On continue par introduire la classe des opérateurs normaux non bornés, on s'intéresse aux théorèmes et propositions qui nous donnent la normalité du produit AB et somme $A+B$ avec des conditions imposées sur les deux opérateurs A et B. Et enfin une application du fameux théorème de Fugled-Putnam dans le cas non borné.
- Dans *le dernier chapitre* "qui constitue l'objet de cette thèse" nous introduisons une nouvelle classe des opérateurs, c'est l'opérateur de Nadir ($N = AB^* - BA^*$), et cher-

chons des conditions sur les opérateurs A et B pour lesquelles l'opérateur de Nadir est compact, fermé, anti-hermitien et normal (plus précisément anti-autoadjoint).

On termine par des perspectives de la recherche ainsi que la bibliographie.

N.B. Tous les opérateurs sont considérés comme linéaires, s'ils sont bornés on supposera qu'ils sont définis sur un espace de Hilbert tout entier, s'ils ne sont pas bornés, ils seront automatiquement considérés comme définis sur un domaine dense.

Chapitre 1

Théories des opérateurs linéaires bornés (compacts et normaux)

On présente dans ce chapitre les notions portant dans la théorie des opérateurs bornés, en mettant l'accent sur l'importance de quelques classes des opérateurs normaux et l'opérateur compact comme la diagonalisation des opérateurs compacts auto-adjoints et normaux.

1.1 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.1.1 (Opérateur linéaire)

Soit E et F deux espaces vectoriel sur le corps $\Bbbk$, et $A : E \longrightarrow F$. On dit que l'opérateur A est linéaire si

1) $\forall\ x, y \in E$, $\forall \lambda \in \Bbbk \quad A(x+y) = A(x) + A(y)$

2)$A(\lambda x) = \lambda A(x)$

Définition 1.1.2 (Opérateur continu) *Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur un sous ensemble $S \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de S si on a la propriété suivante :*

Pour toute suite x_n de S converge vers x_0, la suite $A(x_n)$converge vers $A(x_0)$ c'est à dire

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} A(x_n) = A(\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n) = A(x_0).$$

Remarque 1.1.1

L'opérateur linéaire A est dit continu sur S, s'il est continu en chaque point de l'ensemble S.

Théorème 1.1.1

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $S \subset E$ dans F est dit continu partout sur S s'il est continu en point x_0 de S.

Preuve. Voir [33] ■

Définition 1.1.3 (Opérateur borné) *Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$ telle que*

$$\|A(x)\|_F \leq C \|x\|_E , \forall x \in E.$$

Exemple 1.1.1 ***1.*** *Soit $H = L^2(]0;1[)$ et $Tf(x) = xf(x)$. Alors :*

$$\|Tf\|_2^2 = \int_0^1 |Tf(x)|^2 \, dx = \int_0^1 x^2 |f(x)|^2 \, dx \leq \|f\|_2^2$$

Donc T est borné sur H :

2. *Soit H un Hilbert. L'opérateur I est borné car*

$$\forall x \in H : \|I(x)\| = \|x\| .$$

3. *$H = l^2$, l'opérateur S (shift à droite) défini par :*

$$S : H \to H$$

$$x \to S(x) = (0, x_1, x_2, x_3, ...)$$

est borné.

4. Soit $H = l^2$, *l'opérateur :*

$$A : H \to H$$

$$x \to A(x) = (x_1, 3x_2, x_3, 3x_4, ...)$$

est borné car

$$\|A(x)\|^2 = |x_1|^2 + 9\,|x_2|^2 + |x_3|^2 ... + 9\,|x_n|^2 + ...$$

Donc

$$\|A(x)\|^2 \leq 9\,|x_1|^2 + 9\,|x_2|^2 + 9\,|x_3|^2 ... + 9\,|x_n|^2 + ...$$

par conséquent

$$\|A(x)\|^2 \leq 9\,\|x\|^2$$

D'où $\exists C = 3 \geq 0$ *tel que* $\|A(x)\| \leq C\,\|x\|$.

Théorème 1.1.2

Un opérateur linéaire A est continu, si et seulement si, il est borné.

Preuve. Voir [33, p4] ■

Remarque 1.1.2

- Soit E *et* F *deux espaces normés, l'ensemble de tous les opérateurs linéaires continus de* E *dans* F *est notée* $\mathcal{L}(E, F)$.

- L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ *est un sous-espace vectoriel de* $L(E, F)$, *de plus* $\mathcal{L}(E, F)$ *muni de la norme* $\|A\|$ *est un espace normé.*

1.1.1 Théorie spectral des opérateurs bornés

Etant donné un opérateur linéaire A défini dans un espace de Hilbert H, nous allons étudier les propriétés de l'opérateur $A - \lambda I$ où λ est un nombre complexe quelconque et I l'opérateur identité.

Comme H est complet, le théorème des isomorphismes de Banach dit que si $A \in \mathcal{L}(E)$ est bijectif, alors A^{-1} est automatiquement continu, A est donc inversible, en tant qu'élément de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.

Définition 1.1.4

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, on appelle ensemble résolvant de l'opérateur linéaire A, et on le note $\rho(A)$, l'ensemble des valeurs de λ telles que $A - \lambda I$ est inversible, i.e.

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ (A - \lambda I) \text{ est inversible (ou, de façon équivalente, bijectif)}\}$$

On notera que si $\lambda \in \rho(A)$, l'inverse $R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1}$ est défini sur tout l'espace et est fermé. Par le théorème du graphe fermé, il est borné, i.e.

$$R(\lambda, A) \in \mathcal{L}(H)$$

*Cet opérateur est appelé **la résolvante de** A (au point λ).*

L'ensemble résolvant $\rho(A)$ est un ouvert du plan complexe et l'application

$$\lambda \mapsto R(\lambda, A)$$

est analytique sur chaque composante connexe de $\rho(A)$. La résolvante satisfait à l'équation fonctionnelle suivante dite **identité de la résolvante**

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A), \lambda, \mu \in \rho(A).$$

Définition 1.1.5 *On appelle spectre de A et on note $\sigma(A)$ le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de $\rho(A)$ i.e $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$. Le spectre de A est donc l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $A - \lambda I$ n'est pas bijectif).*

Cette propriété peut être réalisée de trois façons différentes, ce qui correspond à trois types de spectre distincts.

Le spectre ponctuel $\boldsymbol{\sigma}_p(\mathbf{A})$, est l'ensemble des λ tels que $A - \lambda I$ n'est pas injectif i.e :

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \ker(A - \lambda I) \neq 0\}$$

Le spectre continu $\boldsymbol{\sigma}_c(\mathbf{A})$, est l'ensemble des λ tels que $A - \lambda I$ est injectif, non surjectif, mais son image est dense dans H, i.e.

$$\sigma_c(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \ \ker(A - \lambda I) = 0, \mathrm{Im}((A - \lambda I) \neq H, \overline{\mathrm{Im}((A - \lambda I)} = H\right\}$$

Le spectre résiduel $\boldsymbol{\sigma}_r(\mathbf{A})$,est l'ensemble des λ tels que $A - \lambda I$ est injectif, non surjectif, et son image n'est pas dense dans H, i.e.

$$\sigma_r(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \ \ker(A - \lambda I) = 0, \mathrm{Im}((A - \lambda I) \neq H, \overline{\mathrm{Im}((A - \lambda I)} \neq H\right\}$$

Le spectre $\sigma(A)$ est la réunion disjointe de $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$ et $\sigma_r(A)$

Les éléments du spectre discret sont appelés les valeurs propres de A.

En dimension finie n, le spectre est exactement l'ensemble des valeurs propres. En effet, si $A - \lambda I$ est injectif, il est de rang n et donc bijectif.

La situation est très différente en dimension infinie, où l'inclusion $\sigma_p(A) \subset \sigma(A)$ peut être stricte, on peut exister λ tel que :

$$N(A - \lambda I) = \{0\} \ \textit{et} \ R(A - \lambda I) \neq X \ \left(\begin{array}{c}\text{Un tel } \lambda \text{ appartient au spectre mais} \\ \text{n'est pas valeur propre}\end{array}\right)$$

Théorème 1.1.3 *Le spectre de l'opérateur $A \in B(H)$ est un compact non vide du disque $|\mu| \leq \|A\|$*

Preuve. Voir [10] ■

Remarque 1.1.3 *Si* λ *est une valeur propre de* A *le noyau de l'opérateur* $A - \lambda I$ *n'est pas* $\{0\}$ *ou oncore, l'équation* $Ax = \lambda x$ *a une solution* $x \neq 0$*. Une telle solution est appelée vecteur propre de* A *associé à la valeur propre* λ*.*

Définition 1.1.6 *Le rayon spectral est défini comme*

$$r(A) = \sup \{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\}$$

1.2 Opérateurs normaux

On commence avec la notion d'adjoint, plusieurs classes particulières d'opérateurs bornés seront définies à l'aide de cette notion.

Théorème 1.2.1 (Théorème de représentation de Riesz)

Soit F *une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert* H*. Alors il existe un (unique) vecteur* $f \in H$ *tel que, pour tout* $\varphi \in H$, $F(\varphi) = \langle \varphi, f \rangle$

Théorème 1.2.2

Soit H *un espace de Hilbert et soit* A *un opérateur linéaire borné défini sur* H *à valeur dans* H*, alors il existe un unique opérateur linéaire borné noté* A^* *défini de* H *dans* H *par* $\langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A^*\psi \rangle$ *pour tout* φ *et* $\psi \in H$*, de plus on a* $\|A\| = \|A^*\|$*.*

L'opérateur A^* *ainsi défini est appelé adjoint de* A*.*

Exemple 1.2.1 *Soient un intervalle fermé borné* $[a, b]$*, une fonction* k *continue sur* $[a, b] \times [a, b]$ *à valeurs complexes et* K *l'opérateur intégral de Fredholm de noyau* k *défini, pour* $f \in L^2([a, b], dx)$*, par*

$$Kf(x) = \int_a^b k(x, y) f(y) dy$$

C'est un opérateur linéaire borné sur E. Pour f et g dans E, on a

$$\begin{aligned}
\langle Kf, g\rangle &= \int_a^b \left(\int_a^b k(x,y) f(y)dy \right) \overline{g(x)}dx \\
&= \int_a^b f(y) \left(\int_a^b k(x,y)\overline{g(x)}dx \right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\left(\int_a^b \overline{k(x,y)} g(x)dx \right)} dy \\
&= \langle f, K^* g\rangle .
\end{aligned}$$

On en déduit que K^* est l'opérateur intégral de Fredholm de noyau k^*, avec $k^*(x,y) = k(y,x)$. Autrement dit

$$K^* f(x) = \int_a^b \overline{k(x,y)} f(y)dy$$

Proposition 1.2.1

Soient A et B deux opérateurs linéaires continus définis sur H à valeur dans H, et soit $\alpha \in \mathbb{C}$ on a :

1. $(A+B)^* = A^* + B^*$
2. $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$
3. $(A^*)^* = A$
4. $id_H^* = id_H$
5. $(AB)^* = B^* A^*$
6. $\|A^* A\| = \|A\|^2$
7. *Si A est inversible d'inverse A^{-1}, alors A^*est inversible et* $\left(A^*\right)^{-1} = (A^{-1})^*$

Preuve. Voir [8, p127] ■

Corollaire 1.2.1

Si A est un opérateur linéaire borné défini sur H dans H, alors

$\forall n \in \mathbb{N}, (A^n)^* = (A^*)^n$

Théorème 1.2.3

Soit E et F deux espaces de Hilbert et A un opérateur linéaire borné, alors

1. $(\operatorname{Im} A)^{\perp} = \ker\, A^*$
2. $(\operatorname{Im} A^*)^{\perp} = \ker\, A$
3. $\operatorname{Im} A$ *est dense dans F si et seulement si A^* est injectif*
4. $\operatorname{Im} A^*$ *est dense dans F si et seulement si A est injectif*

1.2.1 Opérateurs auto-adjoints, normaux et positifs

Opérateurs auto-adjoints

Définition 1.2.1 *Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est dit auto-adjoint (ou hermitien) si $A = A^*$ c'est-à-dire :*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \ \ \forall x, y \in H$$

Exemple 1.2.2 *1. Un opérateur intégral de Fredholm est auto-adjoint si et seulement si son noyau k vérifie $\overline{k(y,x)} = k(x,y)$*

2. Considérons l'opérateur A défini sur $L^2(\mathbb{R})$ par :

$$(Ax)(t) = e^{-|t|}x(t)$$

A est un opérateur borné auto-adjoint, car

$$\langle Ax, y\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}x(t)\overline{y(t)}d(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{e^{-|t|}y(t)}d(t) = \langle x, Ay\rangle$$

Remarque 1.2.1 – *Tout opérateur borné A sur un espace de Hilbert a la représentation $T + iS$, où T et S sont deux opérateurs auto-adjoints, de plus $A^* = T - iS$.*

En effet, il suffit de prendre

$$T = \frac{1}{2}(A^* + A) \text{ et } S = \frac{i}{2}(A^* - A)$$

Proposition 1.2.2 *Si A et B sont deux opérateurs auto-adjoints, alors*

1. *$\alpha A + \beta B$ est un opérateur auto-adjoint pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*
2. *AB est auto-adjoint si et seulement si $AB = BA$.*

Remarque 1.2.2 *Si A est un opérateur quelconque alors $A\ A^{\ *}$ et $A + A^*$ sont auto-adjoints.*

Proposition 1.2.3 *Soient H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint, alors*

$$\langle Ax; x\rangle \in \mathbb{R}, \forall x \in H.$$

Preuve. Voir [8, p130] ou [11, p33] ■

Théorème 1.2.4 *Soient H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{L}(H)$.*

Si $\langle Ax, x\rangle = 0\ \forall x \in H$, alors $A = 0$.

Preuve. Voir [5, p6] ou [21, p3] ■

Remarque 1.2.3 *Si H est un Hilbert sur $\mathbb{R}$, le corollaire précédent n'a pas été vérifié.*

Exemple 1.2.3 *Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \mathbb{R}^2$*

On a $\langle Ax; x\rangle = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, mais $A^* \neq A$.

Proposition 1.2.4 *Si A est auto-adjoint, alors*

$$\|A\| = sup\{|\langle Ax, x\rangle| : \|x\| = 1\}$$

Preuve. Voir [11, p34] ■

Corollaire 1.2.2 *Si $A = A^*$ et si $\langle Ax; x\rangle = 0$ pour tout x, alors $A = 0$.*

Opérateurs positifs

Définition 1.2.2 *Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert H dans lui même, on dit que A est un opérateur positif et que l'on note $A \geq 0$ si pour tout $x \in H$, on a*

$$\langle Ax, x\rangle \geq 0$$

Proposition 1.2.5 *Soient A_1 et A_2 deux opérateurs linéaires positifs définis sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, toute combinaison linéaire $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ à coefficients réels positifs $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ est un opérateur positif.*

Preuve. En effet, pour tout x$\in H$, on a
$\langle (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)\, x, x\rangle = \alpha_1 \langle A_1 x, x\rangle + \alpha_2 \langle A_2 x, x\rangle \geq 0$ ■

Proposition 1.2.6 *Soit A un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, A est un opérateur auto adjoint.*

Preuve. En effet, car l'opérateur A est auto adjoint si et seulement si pour tout $x \in H$, on a $\langle Ax; x\rangle$ un réel. ■

Définition 1.2.3 (Comparaison des opérateurs) *Soient A et B deux opérateurs linéaires définis sur un espace de Hilbert H dans lui même, on dit que $A \geq B$ si la différence $A - B$ est positif. Autrement dit, pour tout $x \in H$, on a*

$$\langle (A - B)\, x, x\rangle \geq 0.$$

Lemme 1.2.1 *Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, les opérateurs AA^* et A^*A sont des opérateurs positifs.*

En effet, il suffit de voir que pour tout $x \in H$, on a

$$\begin{aligned} \langle A^*Ax, x\rangle &= \langle Ax, Ax\rangle \\ &= \|Ax\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \langle AA^*x, x\rangle &= \langle A^*x, A^*x\rangle \\ &= \|A^*x\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Corollaire 1.2.3 *Soit A un opérateur linéaire auto adjoint défini sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, l'opérateur carré A^2 est un opérateur positif.*

En effet, en vertu du lemme précédent, on a $A^2 = A^*A = AA^*$ un opérateur positif.

Théorème 1.2.5 *Soit A un opérateur linéaire auto adjoint défini sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, l'opérateur puissance A^n est un opérateur positif pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.*

Preuve. Voir [32, p2] ■

Racine carrée d'un opérateur Soit A un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, l'opérateur positif R est dit racine carrée de l'opérateur A si, on a la relation

$$A = R^2 \text{ ou encore } R = A^{1/2}$$

Théorème 1.2.6 *Soit A un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, l'opérateur A admet une racine carrée positif unique $R = A^{1/2}$. De* *plus, l'opérateur R commute avec tout opérateur commutant avec l'opérateur A. Autrement dit, pour tout opérateur linéaire borné D tel que $AD = DA$, on a*

$$RD = DR \text{ ou encore } A^{1/2}D = DA^{1/2}.$$

Preuve. Voir [32, p9] ■

Proposition 1.2.7 *Soit A, $B \in \mathcal{L}(H)$ positifs. Si $AB = BA$, alors AB est aussi positif.*

Preuve. On a :
$A \geq 0 \Rightarrow \exists R \geq 0$, tq : $R^2 = A$
Et puisque B commute avec A, alors B commute aussi avec R, d'où

$$\langle ABx, x\rangle = \left\langle R^2Bx, x\right\rangle = \langle RBx, Rx\rangle = \langle BRx, Rx\rangle$$

On pose $y = Rx$, donc $\langle By; y\rangle \geq 0$ (car B est positif)
Alors AB est positif. ■

Proposition 1.2.8 *Soit $A \geq 0$ est inversible, alors $R = A^{1/2}$ est aussi inversible.*

Preuve. Soit A un opérateur positif et inversible, alors

$$(A^{-1}R)R = A^{-1}R^2 = A^{-1}A = I$$

et

$$R(A^{-1}R) = (RA^{-1})R = (RA^{-1})ARA^{-1} = R^2A^{-1} = I$$

car $AR = RA$ c'est-à-dire $R = A^{-1}RA$
donc R est inversible d'inverse $A^{-1}R$. ■

Exemple 1.2.4 ***1.*** *Soit A l'opérateur défini par $Af : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ tel que :*

$$Af(x) = xf(x)$$

on a, A est positif car

$$\langle Af; f\rangle = \int_0^1 x f(x)\overline{f(x)}dx = \int_0^1 x\left|f(x)\right|^2 dx \geq 0$$

donc il existe S tel que $S^2 = A$

on remarque que

$$\begin{aligned} S \quad &: \quad L^2[0;1] \to L^2[0;1] \\ f \quad &\to \quad Sf(x) = \sqrt{x}f(x) \end{aligned}$$

et que $S^2 = A$. Mais puisque la racine carrée est unique, alors $A^{1/2} = S$

2. *Trouvons $A^{1/2}$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$*

A est un opérateur positif car : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\rangle = 2x^2 + y^2 \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

On remarque que $B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

vérifie que $B^2 = A$. Puisque la racine carrée est unique, alors :

$$A^{1/2} = B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Opérateurs normaux

Un opérateur normal sur un espace complexe de Hilbert H est un opérateur linéaire continu $A : H \to H$ qui commute avec son adjoint A^*, c'est-à-dire : $AA^* = A^*A$.

Les opérateurs auto-adjoints et unitaires sont normaux.

Exemple 1.2.5 (Opérateurs de multiplication) *[7, p12] Soit* (Ω, Σ, μ) *un espace mesurable et soit* $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ *une fonction essentiellement bornée. Alors l'opérateur de multiplication* $M_\varphi : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ *donné par*

$$M_\varphi(f)(z) \equiv \varphi(z)f(z) \text{ pour } z\ \mu - p.p.\ (f \in L^2(\mu))$$

Tout d'abord, on compose l'adjoint M_φ^**, pour tout* $f, g \in L^2(\mu)$*,*

$$\begin{aligned} \left\langle M_\varphi^* f, g \right\rangle &= \langle f, M_\varphi g \rangle = \int_\Omega f(z)\overline{\varphi(z)g(z)}d\mu(z) \\ &= \int_\Omega \overline{\varphi(z)}f(z)\overline{g(z)}d\mu(z) = \langle M_{\overline{\varphi}} f, g \rangle , \end{aligned}$$

où $\overline{\varphi} : \Omega \to \mathbb{C}$ *donné par* $\overline{\varphi}(z) \equiv \overline{\varphi(z)}$ $(z \in \Omega)$*est essentiellement borné avec* $\|\overline{\varphi}\|_{\mu,\infty} = \|\varphi\|_{\mu,\infty}$ *. Donc* $M_\varphi^* = M_{\overline{\varphi}}$*.*
Pour la normalité de M_φ*, en effet*

$$(M_\varphi)^* M_\varphi = M_{\overline{\varphi}} M_\varphi = M_{\overline{\varphi}\varphi} = M_\varphi M_{\overline{\varphi}} = M_\varphi (M_\varphi)^*$$

Proposition 1.2.9 *Soit* $A \in \mathcal{L}(H)$*, alors* A *est normal, si et seulement si,*
$\|Ax\| = \|A^*x\|$ *pour tout* $x \in H$

Preuve.

$$\begin{aligned} A \text{ est normal } &\Leftrightarrow A^*A - AA^* = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle (A^*A - AA^*)\, x, x \rangle = 0 \ \text{ pour tout } x \in H \\ &\Leftrightarrow \langle A^*Ax, x \rangle = \langle AA^*x, x \rangle \ \text{ pour tout } x \in H \\ &\Leftrightarrow \|Ax\|^2 = \|A^*x\|^2 \ \text{ pour tout } x \in H. \end{aligned}$$

■

Corollaire 1.2.4 *Si* $A \in \mathcal{L}(H)$ *est normal on a* $\ker A^* = \ker A$.

Proposition 1.2.10 *Si* $A \in \mathcal{L}(H)$ *est normal, on a* $H = ker(A) \oplus \overline{im(A)}$, *et la somme est une somme orthogonale.*

Proposition 1.2.11 *Si* $Ax = \lambda x$, *alors on a* $A^* x = \overline{\lambda} x$.

Preuve. Il est clair que $(A - \lambda I)^* = A^* - \overline{\lambda} I$.

Supposons que si A est normal, alors $A - \lambda I$ est aussi normal, on a donc

$$\begin{aligned} \ker(A - \lambda I) &= \ker(A - \lambda I)^* \\ &= \ker\left(A^* - \overline{\lambda} I\right) \end{aligned}$$

Si x vérifie $Ax = \lambda x$, alors

$$x \in \ker(A - \lambda I) \Longleftrightarrow x \in \ker\left(A^* - \overline{\lambda} I\right) \Longleftrightarrow A^* x = \overline{\lambda} x$$

■

Rappelons que $\|A^*\| = \|A\|$ pour tout $A \in L(E, F)$, $A^{**} = A$ et $(BA)^* = A^* B^*$ pour $B \in L(F, G)$.

Proposition 1.2.12 *Soit* E *et* F *deux espaces de Hilbert. Si* $A \in L(E, F)$, *alors*

$$\|A^* A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2$$

Preuve. Pour $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= \langle Ax, Ax \rangle = \langle A^* Ax, x \rangle \leq \|A^* A\| \|x\|^2, \\ \|A\|^2 &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|^2 \leq \|A^* A\| \leq \|A^*\| \|A\| = \|A\|^2. \end{aligned}$$

Donc $\|A\|^2 = \|A^* A\|$.

De même, on obtient $\|A\|^2 = \|A^*\|^2 = \|AA^*\|$. ■

Ou voir des autres preuves dans [15] ou [20]

Corollaire 1.2.5 *1. Si $A^*A = 0$ alors, $A = 0$.*

2. Si A est symétrique alors $\|A^2\| = \|A\|^2$.

Proposition 1.2.13 *Si A est normal alors, $\|A^n\| = \|A\|^n$*

Preuve. Voir [20, p55]. ■

Corollaire 1.2.6 *Si A est normal alors $r(A) = \|A\|$, et ainsi $A = 0$ si $\sigma(A) = \{0\}$.*

On revient au cas normal $AA^* = A^*A$. L'élément AA^*est hermitien et il s'ensuit que l'on a :

$$\begin{aligned} r(A) &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|A\|^{n.\frac{1}{n}} = \|A\| \end{aligned}$$

Si $\sigma(A) = \{0\}$ alors, $r(A) = \{0\} = \|A\|$ et donc $A = 0$.

Remarque 1.2.4 *Dans $X = \mathbb{C}^2$, la matrice de Jordan $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a le spectre $\sigma(A) = \{0\}$, mais $\|A\| = 1$. L'égalité $\|A\| = r(A)$ seront la clé des propriétés plus profondes des opérateurs auto-adjoints (ou normaux).*

1.2.2 Le théorème de Fuglede sur les opérateurs bornés

Le théorème de Fuglede-Putname présente un interêt très pratique dans la théorie des opérateurs normaux avec toutes ses applications.

Ce théorème de Fuglede fut établit en 1950 par B.Fuglede.

Théorème 1.2.7 (Théorème de Fuglede) *Soient A et T deux opérateurs bornés sur un Hilbert tels que :*

$$AT = TA$$

où T est normal alors :

$$AT^* = T^*A.$$

Puis en 1951 C.R.Putnam a fait la généralisation au cas de deux opérateurs normaux

Théorème 1.2.8 (théorème de Fuglede-Putnam) *Soient A, T et S trois opérateurs bornés sur un Hilbert avec T, S sont normaux et*

$$AT = SA$$

alors :

$$AT^* = S^*A$$

Preuve. Voir [40] ou [5, p42] ■

Remarque 1.2.5 *Les hypothèses du théorème précédent n'impliquent pas que $A^*T = SA^*$ même lorsque S et T sont auto-adjoints et A normal*
si $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
alors $AN = SA$ mais $A^*T \neq SA^*$.

La somme de deux opérateurs normaux n'est pas généralement un opérateur normal.

Exemple 1.2.6 *Considérons les matrices A et B définies comme*
$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$,
$AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$, $BB^* = B^*B = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$

$(A+B)(A+B)^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 52 \end{pmatrix}, (A+B)^*(A+B) = \begin{pmatrix} 36 & 24 \\ 24 & 16 \end{pmatrix}$

Alors,

$$(A+B)(A+B)^* \neq (A+B)^*(A+B)$$

Théorème 1.2.9

1) Si A et B sont normaux et commutent entre eux, alors

1.1) AB est normal, et

1.2) $A+B$ est normal.

2) Si $a \in \mathbb{C}$ et B est normal, alors $a.B$ est aussi normal.

Preuve. 1.1) Nous avons besoin de montrer que $(AB)(AB)^* = (AB)^*(AB)$. On a

$$(AB)(AB)^* = (AB)(B^*A^*) = ABB^*A^*$$

et

$$(AB)^*(AB) = (B^*A^*)(AB) = B^*A^*AB$$

Mais puisque chacun de A, A^*, B et B^* commute avec tous les autres, en conséquence de le théorème de Fuglede, les deux produits sont égaux.

1.2) Nous avons

$$(A+B)(A+B)^* = (A+B)(A^*+B^*) = AA^* + AB^* + BA^* + BB^*,$$

et de même,

$$(A+B)^*(A+B) = (A^*+B^*)(A+B) = S^*A + S^*B + B^*A + B^*B.$$

Pour la même raison que dans 1.1), ces valeurs sont les mêmes.

2) Nous avons :

$$(aB)(aB)^* = (aB)\overline{a}(B^*) = a\overline{a}BB^*$$

et

$$(aB)^*(aB) = \overline{a}(B^*)(aB) = \overline{a}aB^*B$$

Puisque B est normal, ils sont égaux. ■

1.3 Théorie des opérateurs compacts

Beaucoup d'opérateurs qui apparaissent dans l'étude des équations intégrales sont compacts. Cela explique leur importance du point de vue des applications. Ils sont, à certains égards, semblables aux opérateurs linéaires sur des espaces à dimension finie, comme l'on a le droit d'attendre des opérateurs sur des espaces dimensionnels infinis. Comme nous le verrons, ces similitudes apparaissent fortement dans leurs propriétés spectrales.

Définition 1.3.1 *Soient E et F deux espaces normés et A un opérateur linéaire de E dans F. On dit que A est un opérateur compact si l'image par A de tout sous ensemble borné J de E est relativement compact.*

Rappel :

$A(J)$ est relativement compact signifie $\overline{A(J)}$ est compact, $\overline{A(J)}$ est la fermeture de $A(J)$.

Théorème 1.3.1

Soient E et F deux espaces normés et l'opérateur $A : E \to F$. L'opérateur A est compact alors pour toute suite bornée $\{\varphi_n\}_n \subset E$, on peut extraire de la suite $\{A\varphi_n\} \subset F$ une sous suite $\{A\varphi_{n_k}\}_k$ qui converge dans F .

Proposition 1.3.1

- *Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des deux opérateurs compacts A_1et A_2 est un opérateur compact pour tous les scalaires α et β.*

– *Le produit AB de deux opérateurs bornés A et B est compact si l'un des deux opérateurs A ou B est compact.*

Preuve. Voir [44, p18] ■

Définition 1.3.2 (Opérateur de rang fini) *L'opérateur linéaire A de l'espace normé E dans l'espace normé F est de rang fini si la dimension de l'image de A est finie.*

Résultat immédiat

Si la dimension de F est finie, alors l'opérateur A est de dimension finie.

Théorème 1.3.2 (Rang de dimension finie) *Soit A un opérateur borné de E dans F. Si le rang de A est de dimension finie ; dim $A(E) < \infty$, alors l'opérateur A est compact.*

Preuve. Comme A est borné, il transforme tout ensemble borné $J \subset E$ on un ensemble borné $A(J)$, et l'ensemble borné dans un espace de dimension finie est relativement compact, d'où A est compact. ■

Théorème 1.3.3 (Domaine de dimension finie) *Soit A un opérateur borné de E dans F avec le domaine E est de dimension finie dim $E < \infty$, alors l'opérateur A est compact.*

Preuve. En effet, l'espace E est de dimension finie *dim* $E < \infty$, implique que le rang $A(E)$ est de dimension finie, c'est à dire

$$dimA(E) \leq dimE < \infty,$$

ce qui implique que l'opérateur A est compact. ■

Théorème 1.3.4 *L'opérateur identique I d'un espace normé E dans lui même est compact si et seulement si E est de dimension finie.*

Corollaire 1.3.1 *La boule unité de l'espace normé E n'est pas compacte si E est de dimension infinie.*

Théorème 1.3.5 *Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.*

Preuve. Soit $J \subset E$ un ensemble borné quelconque, alors $A(J)$ étant relativement compact, donc borné et d'après la définition d'un opérateur linéaire borné, A est borné.

Comme il est connu, l'opérateur identique I de E dans E est borné mais il n'est pas compact. ■

Théorème 1.3.6 *L'inverse A^{-1} d'un opérateur compact n'est pas borné si l'espace E est de dimension infinie.*

Preuve. Si A^{-1} est borné alors AA^{-1} est compact (le produit d'un compact et un borné).

Et puisque $AA^{-1} = I$, cela veut dire que I est compact dans un espace de dimension infinie. Contradiction. ■

Théorème 1.3.7 (Schauder) *Un opérateur $A \in L(E, F)$ est compact, si et seulement si, $A^* \in L(F^*, E^*)$ est compact.*

Preuve. Voir [44, p19] ou [2, p90] ■

Théorème 1.3.8 (Arzela-Ascoli) *A ensemble, $A \subset C(G)$est un relativement compact si et seulement si*

(i) *bornée i.e s'il existe une constante M telle que :*

$$|\varphi(x)| \quad \leq M \ \forall x \in G, \ \forall \varphi \in A$$

(ii) *équicontinu ie : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ telle que $\forall \varphi \in A$, nous avans*

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon \ \ \forall x, y \in G \ \ et \ \ |x - y| < \delta$$

Exemple 1.3.1 *L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$à noyau continu est un opérateur compact*

$$A\varphi(x) = \int_G K(x,y)\varphi(y)dy$$

En effet, soit E un ensemble borné de $C(G)$alors, on a

$$\|\varphi\| \leq M \quad \textit{pour tout} \quad \varphi \in E$$

de plus

$$|A\varphi(x)| \leq M\,|G| \max_{x,y\in G} |K(x,y)|$$

Cela veut dire que $A(E)$ est borné. (1)

L'opérateur K est uniformément continu sur le compact $G \times G$, d'où

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, y, z \in G,$

$$|x-y| < \delta \Longrightarrow |K(x,z) - K(y,z)| < \frac{\varepsilon}{M\,|G|}$$

d'où

$$|A\varphi(x) - A\varphi(y)| < \varepsilon \quad \textit{pour tout} \quad \varphi \in E \quad \textit{et} \quad x, y \in G \text{ , } \textit{avec} \quad |x-y| < \delta$$

Ceci exprime que l'ensemble $A(E)$ est équicontinu (2)

D'après (1) *et* (2) *et le théorème d'Arzela-Ascoli, $A(E)$ est relativement compact, donc A est compact*

Définition 1.3.3 *Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'opérateurs bornés sur un Hilbert H. On dit que (A_n) converge*

1. ***Uniformément*** *vers $A \in B(H)$ ssi : $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$ (appelée convergence en norme), et on note :*

$$A_n \xrightarrow{U} A$$

2. ***Fortement*** *vers* $A \in B(H)$ *ssi :* $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n(x) - A(x)\| = 0 \ \forall x \in H$, *et on note :*

$$A_n \to A \ (ou \ A_n \xrightarrow{S} A)$$

3. ***Faiblement*** *vers* $A \in B(H)$ *ssi :* $\lim\limits_{n\to\infty} \langle A_n x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle$ *et on note :*

$$A_n \rightharpoonup A \ (ou \ A_n \xrightarrow{W} A)$$

Remarque 1.3.1 *Si* $(A_n)_{n\geq 0}$ *une suite d'opérateurs bornés sur un Hilbert* H, *alors on a :*

$$A_n \xrightarrow{U} A \Rightarrow A_n \to A \Rightarrow A_n \rightharpoonup A$$

Preuve. On a

$$0 \leq \|A_n x - Ax\| = \|(A_n - A)x\|_H \leq \|A_n - A\|_{B(H)} \|x\|_H \ , \ \forall x \in H$$

donc

$$A_n \xrightarrow{U} A \Rightarrow A_n \to A$$

On a aussi

$$0 \leq |\langle A_n x, y\rangle - \langle Ax, y\rangle| = \langle (A_n - A)\, x, y\rangle \leq \|(A_n - A)\, x\| \, \|y\| \quad \forall x, y \in H$$

donc

$$A_n \to A \Rightarrow A_n \rightharpoonup A$$

■

Proposition 1.3.2

Soit A *un opérateur continu de l'espace de Hilbert* H_1 *dans l'espace de Hilbert* H_2. *Les deux énoncés suivants sont équivalents :*

(i) L'opérateur A *est compact.*

(ii) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H_1$, on a $(x_n \rightharpoonup x) \Rightarrow (A(x_n) \to A(x))$

Preuve. Voir [8, p142] ■

1.4 Diagonalisation des opérateurs compacts auto-adjoints et normaux

Rappelons que l'opérateur A est diagonalisable s'il existe une base de H constitue en vecteurs propres de A. Les meilleurs opérateurs sur V sont ceux qui sont diagonalisables par rapport à une base orthonormée de V. Le théorème spectral pour les espaces complexes montre que ce sont précisément les opérateurs normaux.

Théorème 1.4.1 (Théorème spectral) *Soit V un espace de dimension finie dans $\mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{L}(V)$, alors A est normal, si et seulement si, il existe une base orthonormée de V composé de vecteurs propres de A.*

Preuve. Voir [21, p4] ■

Le corollaire suivant est la meilleure décomposition possible de l'espace vectoriel complexe V en sous-espaces invariables sous un opérateur normal A.

Corollaire 1.4.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(V)$ un opérateur normal, alors*

1. *Dénotant $\lambda_1, ..., \lambda_m$ les valeurs propres distinctes de A,*

$$V = \ker(A - \lambda_1 I) \oplus ... \oplus \ker(A - \lambda_m I).$$

2. *Si $i \neq j$, alors* $\ker(A - \lambda_i I) \perp \ker(A - \lambda_j I)$.

Exemple 1.4.1 *Prenez la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$$

Il est clair que la matrice A est hermitien, et ses valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$, et $\lambda_2 = 4$. Alors $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 &= \ker(A - I) \oplus \ker(A - 4I) \\ &= span(-1-i, 1) \oplus span(1+i, 2) \end{aligned}$$

Maintenant, on applique la procédure de Gram-Schmidt pour obtenir les colonnes de U.

$$\begin{aligned} A &= UDU^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1-i}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1-i}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-1-i}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarque 1.4.1 *Notant que la décomposition diagonale nous permet de calculer les puissances et l'exponentielle.*

Malheureusement, si l'espace H n'est pas de dimension finie, on ne peux rien affirmer à propos de l'existance des valeurs propres, par exemple dans l'espace $L^2([a, b])$, où $[a, b]$ est un intervalle borné dans $\mathbb{R}$, l'opérateur linéaire continu qui applique la fonction $f(x)$ sur la fonction $xf(x)$ n'a pas de valeur propre, puisque l'équation $xf(x) = \lambda f(x)$ n'admet que la solution triviale $f(x) = 0$. Il est nécessaire alors d'ajouter une hypothèse de compacité et donc de considérer des opérateurs auto-adjoints compacts. En revanche, le cas d'un opérateur compact intervient fréquemment dans les problèmes de Mécanique des fluides ou des structures où il est usuel de travailler sur des domaines bornés.

Commençons par un rappel sur le spectre d'un opérateur compact.

Théorème 1.4.2 (F. Riesz, 1918) *Soient E un espace de Banach de dimension infinie, et A un opérateur compact dans E. Alors :*

1. $0 \in \sigma(A)$.

2. *Toute valeur spectrale non nulle de A est une valeur propre de A . $\sigma(A) = \{0\} \cup \sigma_p(A)$, et le sous-espace propre associé $E = ker(A - \lambda I)$ est de dimension finie.*
3. *$\sigma(A)$ est dénombrable, et, s'il est infini, on peut indexer les éléments de $\sigma(A)\backslash\{0\}$ en une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ tendant vers 0.*

Remarque 1.4.2 *Dans le 2), rien n'empêche que 0 soit aussi une valeur propre.*

Preuve. Voir [22, p13] ■

Proposition 1.4.1 *Si A est auto-adjoint, alors*

$$\|A\| = \sup\{|\langle Ah, h\rangle| : \|h\| = 1\}$$

Lemme 1.4.1 *Si A est un opérateur compact auto-adjoint, alors l'un des deux nombres $\pm\|A\|$est une valeur propre de A.*

Preuve. Voir [12, p192] ■

Théorème 1.4.3 *Soit A un opérateur hermitien compact sur un espace de Hilbert H de dimension infinie.*

1. *Le spectre de A est réel. Il est de la forme $\sigma(A) = (\mu_n) \cup \{0\}$ où (μ_n) est ou bien une suite finie de valeurs propres réelles, ou bien une suite dénombrable de valeurs propres réelles convergeant vers 0.*
2. *Pour chaque valeur propre λ non nulle, l'espace propre E_λ est de dimension finie.*
3. *Le réel 0 est éventuellement valeur propre (selon que A est injectif ou non) et l'espace propre associé (le noyau de A) peut alors être de dimension finie ou infinie. Si le réel 0 n'est pas valeur propre (i.e. n'est pas dans le spectre discret), il est dans le spectre continu. Dans tous les cas, c'est l'unique élément du spectre essentiel de A.*
4. *Les espaces propres E_λ sont orthogonaux deux à deux, et H est la somme directe hilbertienne des E_λ :*

$$H = \oplus_{\lambda\in\sigma(A)} E_\lambda$$

Autrement dit, les espaces propres E_λ engendrent un sous-espace vectoriel dont l'adhérence est H.

5. *Du coup, l'opérateur A peut s'écrire comme la somme pondérée des opérateurs de projection PE_λ sur chaque sous-espace propre E_λ :*

$$A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda PE_\lambda.$$

Preuve. Voir [4, p378] ■

Remarque 1.4.3 *Les mêmes propriétés sont vraies dans le cas où l'opérateur compact ou d'inverse compact, n'est pas supposé auto-adjoint, mais normal, c'est-à-dire s'il commute avec son adjoint.*

Proposition 1.4.2 *Soit H un espace de Hilbert complexe et $A \in \mathcal{L}(H)$, normal est compact, alors A est auto-adjoint si $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$, et A est positif si $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$.*

Preuve. Voir [6, p157] ■

Chapitre 2

Opérateurs fermés et fermables et leurs graphes

Les opérateurs fermés et fermables forment des classes important d'opérateurs linéaires non bornés sur les espaces vectoriels normés qui sont assez grands pour couvrir tous les opérateurs intéressants qui se produisent dans les applications. Les opérateurs fermés sont plus vaste que celle des opérateurs bornés. Ils ne sont donc pas nécessairement continus, mais il leur reste suffisamment de bonnes propriétés pour qu'on puisse définir pour eux le spectre et (sous certaines hypothèses) un calcul fonctionnel. Beaucoup d'opérateurs linéaires importants qui ne sont pas bornés sont fermés, comme l'opérateur de dérivation et bon nombre d'opérateurs différentiels.

2.1 Opérateurs non bornés

On a vu que dans le cas d'un opérateur borné A sur un espace de Hilbert H le domaine $D(A)$ toujours supposé égal à H tout entier (Si A est borné et $D(A) \subsetneq H$ on peut toujours prolonger A par 0 à H sans modifier sa norme)

Les opérateurs qui interviennent dans la théorie des équations différentielles ne sont jamais définis partout dans un espace hilbertien de type $L^2(X, \mu)$.

Considérons, par exemple, l'*opérateur différentiel* important A défini par

$$Af = f'' + qf$$

où q est une fonction continue réelle dans un interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Si la linéarité de A est parfaitement évidente, il n'est pas, a priori, de même en ce qui concerne le domaine de définition de A ; un certain choix est souvent imposé par la nature du problème à étudier. Ainsi, un problème fréquemment rencontré est la résolution de l'équation différentielle

$$Af = f'',$$

f est à déterminer de telle manière qu'elle vérifie aussi aux *conditions limites* (dites de *Dirichlet*) *homogènes*

$$f(a) = 0, f(b) = 0.$$

Un domaine de définition naturel pour A (pour l'étude du problème mentionné) serait

$$D = \left\{ f \in C^2([a,b] : f(a) = f(b) = 0 \right\}.$$

On peut considérer D comme un sous-espace vectoriel de l'espace hilbertien $L^2([a,b])$ mais alors l'application linéaire $A : D \subset L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ ne serait pas continue.

Considérer $a = 0$, $b = \pi$, $f_n(x) = \sin nx$, $f_n''(x) = -n^2 \sin nx, n = 1, 2, ...,$

$$\begin{aligned}
\|f_n\| &= \left(\int_0^\pi [\sin(nx)]^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_0^\pi \frac{1-\cos(2nx)}{2} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left[x - \frac{\sin 2nx}{2n} \right]_0^\pi \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|Af_n\| &= \|f_n''\| = \left(\int_0^\pi \left[-n^2 \sin(nx) \right]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= n^2 \left(\int_0^\pi \frac{1-\cos(2nx)}{2} dx \right)^{\frac{1}{2}} = n^2 \|f_n\|
\end{aligned}$$

de sorte qu'une inégalité de type

$$\|f''\| \leq C \|f\|$$

valable pour $f \in D$, avec $C < \infty$, est exclue.

On dit que A est un **opérateur non borné** dans l'espace hilbertien $L^2([a, b])$.

Dans le cas d'un opérateur non-borné (incomplètement définie) le domaine de l'opérateur devra toujours être précis et lorsqu'on effectuera des opérations algébriques sur des opérateurs non-bornés, les domaines associés devront être examinés avec soin donc, les opérateurs non-bornés sont liés à leurs domaines et nous avons la définition générale suivante :

Définition 2.1.1 (Opérateur non borné) *Un opérateur non borné sur un Hilbert H est un couple $(D(A), A)$ ou $D(A)$ est un sous espace vectoriel de H et A est un opérateur linéaire définie de $D(A)$ dans H. On dit que A est un opérateur non borné de domaine $D(A)$.*

Exemple 2.1.1

$$A : D(A) \subset L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$$

$$f \longrightarrow Af(x) = xf(x)$$

Avec le domaine

$$D(A) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) / xf \in L^2(\mathbb{R}) \right\}.$$

Alors A est un opérateur non borné appelé opérateur de multiplication par x.

Remarque 2.1.1 *[12, p202] Dans la pratique pour montrer que un opérateur A est non borné il suffit de trouver une suite $f_n \in D(A)$ telle que $\|f_n\| \leq M$ (pour une constante M et tout $n \in N$) et $\|Af_n\| \to \infty$. Comme pour les opérateurs linéaires la bornitude est équivalente avec la continuité, non bornitude est équivalente avec non continuité. Par conséquent on peut montrer qu'un opérateur A est non borné en trouvant une suite $\{f_n\} \in D(A)$ convergente vers 0 telle que la suite $\{Af_n\}$ ne converge pas vers 0.*

Exemple 2.1.2 *Soit A un opérateur compact dans un espace de Hilbert H de dimension finie. Si A est inversible, alors A^{-1} est non borné.*

En effet, soit $v_n \in H$ une suite orthonormal et soit $z_n = Av_n$. Alors $z_n \to 0$, mais $A^{-1}z_n \nrightarrow 0$.

2.1.1 Opérations sur les opérateurs non bornés

Supposons l'existence de deux opérateurs A et B, les domaines $D(A)$ et $D(B)$ représentent physiquement l'ensemble des informations sur A et B. Si on considère les opérateurs $A+B$ et AB, les domaines $D(A+B) = D(A) \cap D(B)$ et $D(AB) = A^{-1}D(B)$ vont certainement se rétrécir (physiquement ceci est connu par la perte de données) ou encore se réduire à $\{0\}$. Le phénomène de trivialité du domaine de la somme (ou du produit) constitue à lui seul un problème assez délicat. Certes, cette situation peut arriver, mais la littérature ne présente que très peu d'exemples la montrant.

Définition 2.1.2 *Si A et B sont deux opérateurs dans E à valeurs dans F, et C est un opérateur de F dans G tel que E, F et G sont des espaces de Banach. Alors*

1. *La somme $B+A$ est définit par :*

$$\begin{aligned} D(B+A) &= D(B) \cap D(A), \\ (B+A)x &= Bx + Ax, \forall x \in D(B+A). \end{aligned}$$

2. *L'opérateur produit (ou composition) CA est défini par :*

$$\begin{aligned} D(CA) &= \{x \in D(A) \mid Ax \in D(C)\}, \\ (CA)x &= C(Ax), \forall x \in D(CA). \end{aligned}$$

3. *La multiplication de A par un scalaire λ est définie comme l'opérateur :*

$$\begin{aligned} \lambda A \quad &: \quad D(A) \longrightarrow X \\ x \quad &\longrightarrow \quad \lambda A x. \end{aligned}$$

tel que :

$$\begin{aligned} si\ \lambda &= 0,\ alors\ D(\lambda A) = X, \\ si\ \lambda &\neq 0,\ alors\ D(\lambda A) = D(A). \end{aligned}$$

Définition 2.1.3 *Soient A un opérateur non-borné et B borné. On dit que B commute avec A si : $BA \subset AB$.*

Proposition 2.1.1 *Soient A, B et C trois opérateurs non bornés sur leurs domaines et $\alpha \in \mathbb{C}$, alors on a :*

1. $0A \subset 0$
2. $\begin{cases} (\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB) \ si \ \alpha \neq 0 \\ \quad (0A)B = 0(AB) \subset A(0B) \end{cases}$
3. $(A+B)C = AC + BC$
4. $C(A+B) \supset CA + CB$
5. $A + B - B \subset A$

Preuve. 1. Il est clair que

$$D(0) = H \text{ et } D(0A) = D(A),$$

Par conséquent $0A \subset 0$.

2. On a,

$$\begin{aligned} D\left[(\alpha A)B\right] &= \{x \in D(B) : Bx \in D(\alpha A)\} \\ &= \{x \in D(B) : Bx \in D(A)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D\left[(\alpha A)B\right] &= \{x \in D(\alpha B) : \alpha Bx \in D(A)\} \text{ (car } \alpha \neq 0) \\ &= D\left[A\left(\alpha B\right)\right] \text{ (car } D(A) \text{ et } D(B) \text{ sont des sous espaces vectoriels)} \end{aligned}$$

On obtient l'égalité $(\alpha A)\, B = \alpha(AB)$ par le même procédé.

3. On a,

$$\begin{aligned} D\left[(A+B)C\right] &= \{x \in D(C) : Cx \in D(A+B)\} \\ &= \{x \in D(C) : Cx \in D(A) \cap D(B)\} \\ &= \{x \in D(C) : Cx \in D(A) \text{ et } C(x) \in D(B)\} \\ &= \{x \in D(C) : Cx \in D(A)\} \cap \{x \in D(C) : Cx \in D(B)\} \\ &= D(AC) \cap D(BC) \\ &= D(AC + BC) \end{aligned}$$

4. On a,

$$\begin{aligned} D(CA + CB) &= D(CA) \cap D(CB) \\ &= \{x \in D(A) : Ax \in D(C)\} \cap \{x \in D(B) : Bx \in D(C)\} \\ &= \{x \in D(A) \cap D(B) : Ax, Bx \in D(C)\} \\ D(CA + CB) &\subset \{x \in D(A) \cap D(B) : Ax + Bx \in D(C)\} \text{ (car } D(C) \text{ est un espace vectoriel).} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$D\left[C(A+B)\right] \supset D(CA+CB) \text{ et } C(A+B) \supset CA+CB.$$

5. Il est clair que

$$D(A+B-B) = (D(A) \cap D(B)) \subset D(A)$$

et

$$(A+B-B)x = Ax, \forall x \in D(A) \cap D(B).$$

On déduit alors que

$$A+B-B \subset A.$$

■

2.1.2 Adjoint d'un opérateur non borné

Nous avons vu dans le premier chapitre que pour un opérateur borné A, la fonctionnelle $f \to \langle Af, g\rangle$ est bornée toujours, donc d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique A^* s'appelle l'adjoint de A et vérifie la relation suivante :

$$\langle Af, g\rangle_{H_2} = \langle f, A^* g\rangle_{H_1}, \forall f \in H_1, \forall g \in H_2.$$

Dans le cas des opérateurs non bornés, la fonctionnelle $f \to \langle Af, g\rangle$ n'est pas bornée en général. On peut définir l'adjoint A^* par

$$\langle Af, g\rangle_{H_2} = \langle f, A^* g\rangle_{H_1}, \forall f \in D(A), \forall g \in D(A^*)$$

L'application $f \to \langle f, A^* g\rangle$ étant continue dès que $A^* g$ est défini, le domaine $D(A^*)$ de A^* sera donc l'ensemble des vecteurs g de H_2 tels que l'application $f \to \langle Af, g\rangle$ soit continue. Toutefois, si $D(A)$ est quelconque $A^* g$ n'est pas défini de façon unique par la formule précédente car, en effet,

$$\begin{aligned}
\langle f, u\rangle &= \langle f, v\rangle, \forall f \in D(A) \\
&\Rightarrow \langle f, u\rangle - \langle f, v\rangle = 0, \forall f \in D(A) \\
&\Rightarrow \langle f, u - v\rangle = 0, \forall f \in D(A) \\
&\Rightarrow (u - v) \perp D(A)
\end{aligned}$$

d'autre par si f_0 est orthogonal à $D(A)$, on a :

$$\langle f, A^*g + f_0\rangle = \langle f, A^*g\rangle, \forall f \in D(A)$$

Afin d'éviter cet incovénient il faut, pour pouvoir définir l'adjoint A^* de A, que le seul vecteur orthogonal à $D(A)$ soit 0, ou encore, que $D(A)$ soit dense dans H_1.

Définition 2.1.4 *L'adjoint d'un opérateur $(A, D(A))$ à **domaine dense** est l'unique opérateur A^* ayant pour domaine*

$$D(A^*) = \{g \in H : D(A) \ni f \mapsto \langle Af, g\rangle \ \textit{ est continue}\}$$

et vérifiant

$$\forall f \in D(A), \forall g \in D(A^*), \langle Af, g\rangle = \langle f, A^*g\rangle.$$

Exemple 2.1.3 *Soit D l'opérateur différentiel défini de $C_0(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R})$ par :*

$$Df(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

(où $C_0(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ s'annulent à l'infini).

Alors D est un opérateur non borné et son adjoint D^* est

$$D^*f(x) = -Df(x)$$

En effet

$$\begin{aligned}
\langle Df, g\rangle &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{dx}\overline{g(x)}dx \\
&= -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f'x)\frac{\overline{dg(x)}}{dx}dx \quad (I.P.P) \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\left[-\frac{dg(x)}{dx}\right]}dx \\
&= \langle f, -Dg\rangle
\end{aligned}$$

Dans la suite, on suppose que $D(A)$ est dense dans H.

Proposition 2.1.2 *Soient A et B deux opérateurs linéaires de H_1 dans H_2 tel que $D(A)$ est dense dans H_1, alors :*

(i) $R(A)^{\perp} = N(A^*)$.

(ii) *Si $D(A^*)$ est dense dans H_2, alors $A \subseteq A^{**}$, avec $A^{**} := (A^*)^*$.*

(iii) *Si $A \subseteq B$, alors $B^* \subseteq A^*$.*

(iv) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$ *pour* $\lambda \in \mathbb{C}$.

(v) *Si $D(A + B)$ est dense dans H_1, alors $(A + B)^* \supseteq A^* + B^*$.*

(vi) *Si B est borné et $D(B) = H_1$, alors $(A + B)^* = A^* + B^*$.*

Preuve. Voir [43, p9] ■

Théorème 2.1.1 *A est inversible si et seulement si, A^* est inversible, dans ce cas* $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

Preuve. Voir [13] ou [16, p210] ■

Proposition 2.1.3 *Soient $A : H_1 \to H_2$ et $B : H_2 \to H_3$ deux opérateurs linéaires tel que $D(BA)$ est dense dans H_1,*

(i) *Si $D(B)$ est dense dans $H_{2,}$ alors $(BA)^* \supseteq A^*B^*$.*

(ii) $(BA)^* = A^*B^*$ *si* $\begin{cases} \textbf{a)} B \textit{ est borné.} \\ \qquad \textit{ou} \\ \textbf{b)}\ A \textit{ est inversible} \end{cases}$

Preuve.

(i) Notant que $D(A) \supseteq D(BA)$, par conséquent $D(A)$ est dense dans H_2. Supposons que $y \in D(A^*B^*)$. Soit $x \in D(BA)$. Alors on a $Ax \in D(B)$, $y \in D(B^*)$, et

$$\langle BAx, y\rangle = \langle Ax, B^*y\rangle = \langle x, A^*B^*y\rangle .$$

Par conséquent, $y \in D((BA)^*)$ et $(BA)^*y = A^*B^*y$.

(ii) **a**) En raison de (i), il est suffisante de montrer que $D((BA)^*) \subseteq D(A^*B^*)$. Supposons que $y \in D((BA)^*)$ et $x \in D(A)$, puisque B est borné et $D(B) = H_1$, on a $x \in D(BA)$ et $y \in D(B^*) = H_{2,}$ alors

$$\langle Ax, B^*y\rangle = \langle BAx, y\rangle = \langle x, (BA)^*y\rangle .$$

Par conséquent, $B^*y \in D(A^*)$, et donc $y \in D(A^*B^*)$.

b) On a toujours $(BA)^* \supset A^*B^*$

Montrons que $(BA)^* \subset A^*B^*$, on a :

$$BAA^{-1} = B \Rightarrow (A^{-1})^*(BA)^* \subset (BAA^{-1})^* = B^*$$

alors :

$$(BA)^* \subset A^*B^*$$

Donc :

$$(BA)^* = A^*B^*$$

■

2.1.3 Le graphe d'un opérateur

La notion du graphe d'un opérateur est très importante parce que cela nous permet de traiter avec la fermeture d'un opérateur.

Définition 2.1.5 (Graphe d'un opérateur) *Soit $(D(A), A)$ un opérateur non borné sur un espace de Hilbert H, **le graphe** de A est le sous espace vectoriel noté : $G(A)$ de $H \times H$ défini par :*

$$G(A) = \{(x, Ax), x \in D(A)\}.$$

Définition 2.1.6 (Norme du graphe) *Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$, la topologie des normes nous pouvons fournir $D(A)$ avec le soi-disant graphe topologie. Pour les espaces de Banach, il est habituellement défini par la **norme de graphe** suivante :*

$$\|x\|'_{D(A)} = \|x\|_E + \|Ax\|_F,$$

et pour les espaces de Hilbert par la norme équivalente (aussi appelée la norme de graphe)

$$\|x\|_{D(A)} = (\|x\|_E^2 + \|Ax\|_F^2)^{\frac{1}{2}},$$

qui a le produit scalaire associé

$$\langle x, y\rangle_{D(A)} = \langle x, y\rangle_E + \langle Ax, Ay\rangle_F.$$

Remarque 2.1.2 *Il n'est pas vrai que tout sous espace de $H \times H$ est un graphe d'un opérateur.*

On note $p_i : H \oplus H \to H, i = 1, 2$, les deux projections données respectivement par

$$p_1(x, y) = x \text{ et } p_2(x, y) = y.$$

Lemme 2.1.1 *Un sous espace $G \subset H \times H$ est un graphe d'un opérateur linéaire si et* *seulement si*

$$(0, y) \in G \Longrightarrow y = 0. \tag{2.1.1}$$

Preuve. Si la propriétée (2.1.1) est verifiée alors $(x, y_1) \in G$ et $(x, y_2) \in G$ implique que $y_1 = y_2$. Donc, l'application $A : p_1G \to H$ qui associe à $x \in p_1G$, l'unique $y \in H$ tel que $(x, y) \in G$ est bien définie et possède G comme son graphe. ■

2.2 Rappels sur les ensembles et les espaces fermés

Définition 2.2.1 (Ensembles ouverts) *Un sous ensemble S d'un espace normé E est dit ouvert, si pour tout $x \in S$, il existe une constante $\epsilon > 0$ telle que :*

$$B(x, \epsilon) \subseteq S$$

Définition 2.2.2 (Ensembles fermés) *Un sous ensemble S d'un espace normé E est dit fermé si son complémentaire est ouvert.*

Théorème 2.2.1 *Un sous ensemble S d'un espace normé E est dit fermé si et seulement si toute suite convergente $(x_n)_n$ d'éléments de S converge vers limite $x \in S$, i.e*

$$(x_n \longrightarrow x \text{ et } x_n \in S, \forall n) \Longrightarrow x \in S$$

Exemple 2.2.1 *Les boules ouvertes sont des ensembles ouverts. Les boules fermés sont des ensembles fermés.*

Exemple 2.2.2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit l'ensemble fermé $S_n = [\frac{1}{n+1}, \frac{n}{n+1}]$. Alors $\cup_{n=1}^{\infty} S_n =]0, 1[$, lequel n'est pas fermé. Mais $\cap_{n=1}^{\infty} Sn = \left\{\frac{1}{2}\right\}$, lequel est fermé.*

Lemme 2.2.1 *Tout espace de Banach $(E, \|.\|)$ est fermé.*

Preuve. Soit (f_n) une suite d'éléments dans E convergente vers f, alors cette suite est de Cauchy dans l'espace complet E car $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach.

La complitude de E donne la convergence de la suite de Cauchy f_n dans E. D'où E est fermé. ■

Proposition 2.2.1 *Tout sous-espace S complet d'un espace normé $(E, \|.\|)$ est fermé.*

Preuve. Soit $f \in \overline{S}$, alors il existe une suite (f_n) d'éléments de S telle que $f_n \to f$ dans E, comme la suite (f_n) est de Cauchy de E complet, donc elle est convergente dans E, comme la limite est unique donc $f \in S$, par consequent $S = \overline{S}$, d'où S est fermé. ■

Proposition 2.2.2 *Tout sous espace vectoriel fermé d'un espace complet est complet.*

Corollaire 2.2.1 *Tout sous espace vectoriel fermé d'un espace de Banach est un espace de Banach.*

Corollaire 2.2.2 *Tout sous espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert est un espace de Hilbert.*

2.3 Opérateurs fermés

Définition 2.3.1 (Opérateur fermé) *Soient E et F deux espaces de Banach. On dit que A est un opérateur fermé si son graphe $G(A)$ est fermé dans $E \times F$.*

$G(A)$ est fermé $\Leftrightarrow \underbrace{z = (x, y) \in \overline{G(A)}}_{(1)}$ implique $\underbrace{z \in G(A)}_{(2)}$

(1) $z = (x, y) \in \overline{G(A)}$ cela signifie qu'il existe $z_n = (x_n, Ax_n) \in G(A)$ tel que $z_n \to z$, par conséquent,

$$x_n \to x \text{ et } Ax_n \to y.$$

(2) $z = (x, y) \in G(A)$ cela signifie que

$$x \in D(A) \text{ et } y = A(x)$$

Cela permet d'écrire cette proposition :

Proposition 2.3.1 *Un opérateur $(A, D(A))$ est fermé si et seulement si pour toute suite x_n de $D(A)$ telle que $lim_n x_n = x$ et $lim_n Ax_n = y$ on a alors $x \in D(A)$ et $y = Ax$.*

Exemple 2.3.1 *L'opérateur différentiel $D : H^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ défini par :*

$$Df = f'$$

est fermé.

En effet, supposons que $f_n \in H^1(\mathbb{R})$ telle que $f_n \to f$ et $Df_n \to g$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Alors pour toute fonction de test φ, on a

$$\begin{aligned} \langle g, \varphi \rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle f'_n, \varphi \rangle \\ &= -\lim_{n\to\infty} \langle f_n, \varphi' \rangle \,(car\ f_n \in H^1(\mathbb{R})) \\ &= -\langle f, \varphi' \rangle \end{aligned}$$

Par conséquent $f \in H^1(\mathbb{R})$ et $Df = g$, alors D est fermé.

Remarque 2.3.1 *Si l'opérateur est fermé, on garde les mêmes définitions de spectre, résolvante. De plus si l'opérateur est défini sur un domaine dense, on conserve l'identité de la résolvante.*

Proposition 2.3.2 *Soit $A : D(A) \subset H_1 \to H_2$ un opérateur densément défini, alors l'opérateur A^* est fermé.*

Preuve. Soient $(g_n) \in D(A^*)$ tel que $g_n \to g$ dans H_2 et $A^*g_n \to h$ dans H_1, alors pour tout $h \in D(A)$ on a :

$$\begin{aligned} \langle Af, g \rangle_2 &= \lim_{n\to\infty} \langle Af, g_n \rangle_2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle f, A^*g_n \rangle_2 \\ &= \langle f, h \rangle_1 \end{aligned}$$

D'où d'après la définition précédente, $g \in D(A^*)$ et $h = A^*g$. Ceci montre que A^* est fermé. ■

2.3.1 Comparaison entre les opérateurs bornés et les opérateurs fermés

Notons soigneusement la différence entre les opérateurs continus et les opérateurs fermés. Pour un opérateur continu A, la convergence de la suite (f_n) implique la convergence de la suite (Af_n), et

$$\underset{n\to\infty}{lim} Af_n = A \underset{n\to\infty}{lim} f_n = A(f) \tag{2.3.2}$$

Pour un opérateur fermé A, la convergence de la suite (f_n) n'implique pas la convergence de la suite (Af_n), mais si tous les deux (f_n) et (Af_n) sont convergentes, alors (2.3.2) est vérifiée. Autrement dit :

$$\text{L'opérateur } A \text{ est fermé si :} \begin{cases} f_n \in D(A) \\ f_n \to f \\ Af_n \to g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f \in D(A) \\ Af = g \end{cases}$$

$$\text{L'opérateur } A \text{ est continu si :} \begin{cases} f_n \in D(A) \\ f_n \to f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f \in D(A) \\ Af_n \to g \\ Af = g \end{cases}$$

Théorème 2.3.1 (Théorème du graphe fermé) *Soient E et F deux espaces de Banach et A un opérateur fermé de E dans F. Alors A est borné (i.e., $\|Ax\| \leq c\,\|x\|$, $\forall x \in D(A)$), si et seulement si, $D(A)$ est fermé dans E.*

En particulier, si A est fermé et $D(A) = E$, alors A est borné.

Preuve. Voir [44, p5] ■

2.3.2 Inversibilité des opérateurs fermés

Définition 2.3.2 (Inverse d'un opérateur non borné) *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $A : D(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur linéaire bijectif. On dit que A est in-*

versible s'il existe un opérateur B borné défini de H_2 dans H_1 tel que : $\begin{cases} AB = I \\ BA \subset I \end{cases}$ *. On désigne l'inverse de A par A^{-1}, alors on peut écrire :*

$$AA^{-1}g = g, \forall g \in H_2 \text{ et } A^{-1}Af = f, \forall f \in D(A).$$

On note aussi qu'il est unique.

Exemple 2.3.2 *Soit l'opérateur* $A : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$

$f \to Af(x) = (x^2 + 1)f(x)$

défini sur son domaine maximal

$$D(A) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : (x^2 + 1)f \in L^2(\mathbb{R}) \right\}$$

Soit l'opérateur B tel que :

$$Bf(x) = \frac{1}{x^2 + 1} f(x)$$

B est bien borné et $D(B) = L^2(\mathbb{R})$ et

$$ABf(x) = A\left[\frac{1}{x^2 + 1} f(x)\right] = (x^2 + 1)\frac{1}{x^2 + 1} f(x) = f(x)$$

et

$$\begin{aligned} D(AB) &= \{f \in D(B) : Bf \in D(A)\} \\ &= \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \frac{1}{x^2 + 1} f \in D(A) \right\} \\ &= \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \left(x^2 + 1\right) \frac{1}{x^2 + 1} f \in L^2(\mathbb{R}) \right\} \\ &= L^2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

il est clair que $BAf = f$ et

$$
\begin{aligned}
D(BA) &= \{f \in D(A) : Af \in D(B)\} \\
&= \left\{f \in L^2(\mathbb{R}) : \left(x^2+1\right) f \in L^2(\mathbb{R})\right\} \\
&= D(A) \subsetneqq L^2(\mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

D'où A est inversible avec $A^{-1} = B$.

Remarque 2.3.2 [24] *Si A et B sont deux opérateurs non bornés et inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Définition 2.3.3

A est inversible à droite $\Leftrightarrow \exists\ B \in B(H)$ tel que $AB = I$

A est inversible à gauche $\Leftrightarrow \exists\ C \in B(H)$ tel que $CA \subset I$

Proposition 2.3.3 [24]

Si A est inversible à gauche et à droite simultanément, alors A est inversible.

- Un opérateur auto-adjoint non borné inversible à droite ou à gauche est inversible.

- Un opérateur normal non borné inversible à droite ou à gauche est inversible.

Théorème 2.3.2 *Tout opérateur A non-borné inversible est fermé.*

Preuve. Soit A un opérateur non-borné inversible de domaine $D(A)$:

On a : $A^{-1} : ImA \to D(A)$

Soit $(x_n)_{n\geq 0} \subset D(A)$ tel que :

$$x_n \to x \text{ et } Ax_n \to y,$$

donc

$$x \leftarrow x_n = A^{-1}Ax_n \to\ A^{-1}y \ \ (\text{car } A^{-1} \text{ est borné}),$$

alors

$$x = A^{-1}y \in D(A) \text{ et } Ax = AA^{-1}y = y.$$

■

Lemme 2.3.1 *Soit A un opérateur linéaire injectif de E dans F, et on pose $D(A^{-1}) := R(A)$ alors,*

A est fermé sur E dans F, si et seulement si, A^{-1} est fermé sur F dans E.

Preuve. Voir [44, p5] ■

La notation $A(E \to F)$ signifie que A est un opérateur linéaire avec un domaine dans l'espace de Hilbert E et rang dans l'espace de Hilbert F.

Théorème 2.3.3 *[16, p283]Supposons que E et F sont deux espaces de Banach. Si $A(E \to F)$ est fermé avec les propriétés $\ker A = 0$ et $\operatorname{Im} A = F$, alors A^{-1} est borné .*

Preuve. Puisque $G(A) = \{(x, Ax) : x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$, $G(A^{-1}) = \{(Ax, x) : x \in E\}$ est fermé dans $F \times E$, i.e., A^{-1} est un opérateur linéaire fermé défini de F dans E.

par conséquent, A^{-1} est borné par le théorème du graphe fermé. ■

2.3.3 Somme et produit de deux opérateurs fermés

Le produit d'un opérateur fermé avec lui-même peut avoir un domaine qui se réduit à $\{0\}$. Ceci a d'abord été fait par Naimark dans [37] qui a donné une manière non explicite de construire de tels opérateurs. Puis Chernoff dans [9] a donné des opérateurs plus simples et plus explicites satisfaisant $D(A^2) = \{0\}$.

Cet exemple peut encore être exploité pour montrer une autre lacune de ce produit en ce qui concerne le droit distributif. Par exemple, l'inclusion $A(B + C) \supset AB + AC$ peut être stricte. Car s'il était vrai, on aurait d'une part $D(A(A - A)) = D(A)$ et d'autre part $D(A^2 - A^2) = D(A^2) = \{0\}$.

Enfin, l'opérateur AB ne peut avoir aucun sens si $D(A) \cap R(B) = \{0\}$ ("Chernoff" est un exemple de celui-ci).

En général le produit de deux opérateurs fermés n'est pas nécessairement fermé et ainsi pour la somme.

Exemple 2.3.3 *Considérons* A *et* B *définis comme*

$$Af(x) = f'(x) \text{ et } Bf(x) = -f'(x) \text{ dans } D(A) = D(B) = H^1(\mathbb{R})$$

où $H^1(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f' \in L^2(\mathbb{R})\}$ *est l'espace de Sobolev.*

Alors évidemment A *et* B *sont fermés. Cependant* $A + B = 0$ *n'est pas fermé sur* $H^1(\mathbb{R})$ *car il n'est pas égal à sa fermeture qui est* 0 *sur* $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème 2.3.4 *Soient* A *et* B *deux opérateurs fermés à domaine dense, alors :*

1. AB *est fermé si* $\begin{cases} \textbf{a)}\ A \text{ est inversible} \\ \qquad \text{ou} \\ \textbf{b)}\ B \text{ est borné.} \end{cases}$
2. $A + B$ *est fermé si* B *est borné.*

Preuve. Voir [3, p37] ■

Théorème 2.3.5 *Soient* A *et* B *deux opérateurs non bornés tel que* $AB = BA$. *Si* A *est inversible,* B *est fermé et* $D(BA^{-1}) \subset D(A)$, *alors* $A + B$ *est fermé dans* $D(B)$.

Preuve. Voir [23] ■

Définition 2.3.4 *Soient* A *et* B *deux opérateurs non bornés à domaines denses. On dit que* A *est* $B-$*borné si les conditions suivantes réalisées :*

1. $D(B) \subset D(A)$
2. $\exists a, b \in \mathbb{R}_+, \forall x \in D(A), \|A(x)\| \leq a \|B(x)\| + b \|x\|$

   La borne inférieure des "a" convenables est appelée la borne relative de A *(par rapport à* B*)*

Théorème 2.3.6 *[36]Soit B un opérateur fermé. Si A est $B-$borné avec la borne relative "a" telle que $a < 1$, alors $A + B$ est fermé.*

Il est clair que si B est un opérateur borné inversible et A un opérateur fermé, alors BA est fermé.

Proposition 2.3.4 *[27]Soient B un opérateur borné et A un opérateur non borné fermé avec son domaine $D(A)$. Si pour un certain $r > 0$ on a : $\|rB - I\| < 1$, alors BA est fermé sur $D(A)$.*

Une idée semblable peut être employée pour établir la fermeture de l'opérateur BA dans le cas où les deux opérateurs A, B sont non bornés. On a

Théorème 2.3.7 *Soient A et B deux opérateurs non bornés à domaines denses $D(A)$ et $D(B)$ respectivement. On suppose que $D(A) \subset D(BA)$, A est fermé et pour un certain $a < 1$ et $b > 0$*

$$\exists r > 0 : \|(rB - I)Ax\| \leq a \|Ax\| + b \|x\|, \forall x \in D(A).$$

Alors BA est fermé.

Preuve. Voir [27] ∎

Remarque 2.3.3 *On remarque que dans le théorème précédent la fermeture de l'opérateur B n'est pas supposé.*

2.4 Opérateurs fermables

Bien souvent un problème se traduit par la donnée d'un opérateur qui n'est pas fermé. Le but essentiel de la théorie des opérateurs non-bornés est de construire des prolongements fermés de l'opérateur donné, puis d'étudier leurs propriétés.

Définition 2.4.1 *Soient A et B deux opérateurs dans E, on dit que B est un prolongement de A, noté $A \subset B$, si $D(A) \subset D(B)$ et $A = B_{|D(A)}$.*

Exemple 2.4.1 *[18, p246]Soient $A_k f = f''$ avec $k = 1, 2, 3, 4$ des opérateurs différentiels dans $L^2([0,1])$ avec leurs domaines :*

$$\begin{aligned} D(A_1) &= \left\{f \in C^2([0,1]) : f(0) = f(1) = 0\right\}, \\ D(A_2) &= C^2([0,1]), \\ D(A_3) &= \left\{f \in H^2([0,1]) : f(0) = f(1) = 0\right\}, \\ D(A_4) &= H^2([0,1]). \end{aligned}$$

Le théorème d'inclusion de sobolev implique que $H^2([0,1]) \subset C^1([0,1])$, il est donc logique d'utiliser les valeurs ponctuelles de f pour définir $D(A_3)$.

Et comme $C^2([0,1]) \subset H^2([0,1])$, alors on a

$$A_1 \subset A_2 \subset A_4,$$

et

$$A_1 \subset A_3 \subset A_4$$

Définition 2.4.2 *On dit qu'un opérateur dans E est **fermable** si la fermeture $\overline{G(A)}$ de $G(A)$ dans $E \times F$ est le graphe d'un opérateur, évidemment fermé et prolongeant A, appelé la fermeture de A et noté $\overline{A}$.*

L'opérateur $\overline{A}$ est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{c} D(\overline{A}) = \{f \in E : \exists (f_n) \in D(A), f_n \to f, Af_n \ \textbf{\textit{c.v}}\}, \\ \overline{A}f = \lim\limits_{n \to \infty} Af_n, \forall f \in D(\overline{A}). \end{array} \right.$$

De la définition précédente, cette équivalence peut être écrite

(A est fermable) $\Leftrightarrow$ (Pour toute suite (f_n) de $D(A)$ telle que $f_n \to 0$ dans E, si $Af_n \to g$ dans F, alors : $g = 0$).

Proposition 2.4.1 *[38, p380]Soit A un opérateur dans E. Si A possède un prolongement fermé B, alors A est fermable, $\overline{A} \subset B$ et les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $B = \overline{A}$.

(ii) *B est le plus petit prolongement fermé de A.*

(iii) *$D(A)$ est dense dans $D(B)$.*

Proposition 2.4.2 *Si A est fermable alors :*

$$G(\overline{A}) = \overline{G(A)}.$$

Preuve. Pour toute extension B fermée de A, il en existe au moins une, on a $G(A) \subset G(B)$ avec $G(B)$ un fermé de $H \oplus H$. D'où, on a $\overline{G(A)} \subset G(B)$. De plus, par lemme 2.1.1 $\overline{G(A)}$ est le graphe d'un opérateur fermé, noté $\overline{A}$, puisque $(0, y) \in \overline{G(A)} \subset G(B)$ implique que $y = 0$. Enfin, il est claire que $\overline{A}$ est la plus petite extension fermée de A puisque $G(\overline{A}) = \overline{G(A)} \subset G(B)$ pour toute extension fermée B de A. ■

Exemple 2.4.2 *Dans l'exemple précédent :*

- *Les deux opérateurs A_1 et A_2 ne sont pas fermés car on peut choisir une suite des fonctions $f_n \in C^2([0;1])$ telle que $f_n \to f$ et $f_n'' \to g$ dans $L^2([0,1])$, où g n'est pas continue. D'où f n'est pas de classe C^2, alors f n'appartient pas à le domaine de A_1 ou A_2 .*
- *Les deux opérateurs A_3 et A_4 sont fermés.*
- *Les deux opérateurs A_1 et A_2 sont fermables, avec $\overline{A}_1 = A_3$, et $\overline{A}_2 = A_4$.*

Exemple 2.4.3 *Soit $A : D(A) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ défini par :*

$$Af = -\Delta f, \forall f \in D(\mathbb{R}^n)$$

où

$$D(A) = D(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : f \text{ s'anulle à l'infini}\}$$

Clairement, A est fermable et sa fermeture donnée par :

$$\begin{cases} D(\overline{A}) = H^2(\mathbb{R}^n), \\ \overline{A}f = \lim\limits_{n\to\infty} Af_n = -\Delta f, \forall f \in D(\overline{A}) = H^2(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Exemple 2.4.4 *Les opérateurs différentiels à coefficients constants sont fermables (voir par exemple [38])*

Remarque 2.4.1 *Tout opérateur fermé est fermable mais l'inverse est faux.*

Exemple 2.4.5

$$A = \frac{d}{dt} : L^2\left[-1,1\right] \longrightarrow L^2\left[-1,1\right]$$

$D(A) = C^1([-1,1])$ *n'est pas fermé mais fermable.*

Théorème 2.4.1 *Soit A un opérateur linéaire densément défini de H_1 dans H_2.*

(i) *A est fermable si et seulement si $D(A^*)$ est dense dans H_2.*

(ii) *Si A est fermable, alors $\left(\overline{A}\right)^* = A^*$ et $\overline{A} = A^{**}$.*

(iii) *A est fermé si et seulement si $A = A^{**}$.*

(iv) *Supposons que $N(A) = \{0\}$ et $R(A)$ est dense dans H_2. Alors A^* est inversible et $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*

(v) *Supposons que A est fermable et $N(A) = \{0\}$. Alors l'inverse A^{-1} de A est fermable si et seulement si $N(\overline{A}) = \{0\}$. Dans ce cas $\left(\overline{A}\right)^{-1} = \overline{(A^{-1})}$*

(vi) *Si A est inversible, alors A est fermé si et seulement si A^{-1} est fermé.*

Preuve. Voir [43, p11] ■

Remarque 2.4.2 *Il existe évidemment des opérateurs non fermables, mais nous allons voir que beaucoup d'opérateurs différentiels sont fermables. Il n'est pas souvent possible de déterminer explicitement le domaine $D(\overline{A})$ de la fermeture. C'est une des raisons qui nous oblige à introduire un appareil théorique assez élaboré.*

Chapitre 3

Quelques classes des opérateurs non bornés

Dans ce chapitre, on introduit les notions de quelques classes des opérateurs fermés non bornés, comme les opérateurs normaux, symétriques et auto-adjoints. On s'intéresse aux théorèmes et propositions qui nous donnent la normalité du produit AB et la somme $A + B$, avec une application du fameux théorème de Fugled-Putnam dans le cas non borné.

3.1 Déférence entre l'opérateur symétrique et l'opérateur auto-adjoint

Pour les opérateurs bornés dans un espace de Hilbert H, il y a une équivalence entre l'opérateur symétrique et l'opérateur auto-adjoint, car $D(A) = H = D(A^*)$. Mais pour les opérateurs non bornés en général $D(A) \neq D(A^*)$. Ce qui rend la différence entre les opérateurs auto-adjoints et les opérateurs symétriques.

Définition 3.1.1 (Opérateur auto-adjoint) *Soit H un espace de Hilbert et $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur densément défini.*

On dit que A est auto-adjoint si $A = A^*$ i.e :

$$D(A) = D(A^*) \text{ et } Af(x) = A^*f(x), \forall f \in D(A) = D(A^*)$$

Exemple 3.1.1 *Soit D l'opérateur différentiel défini de $C_0(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R})$ par :*

$$Df(x) = i\frac{df(x)}{dx} = if'(x)$$

(où $C_0(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ s'annulent à l'infini).

Alors l'opérateur D est un opérateur auto-adjoint

En effet

$$\begin{aligned}
\langle Df, g\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} i\frac{df(x)}{dx}\overline{g(x)}dx \\
&= -i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d\overline{g(x)}}{dx}dx \quad (I.P.P) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\left[i\frac{dg(x)}{dx}\right]}dx \\
&= \langle f, Dg\rangle .
\end{aligned}$$

Corollaire 3.1.1 *Puisque A^* est fermé, tout opérateur auto-adjoint est fermé.*

Proposition 3.1.1 *Si A est un opérateur auto-adjoint tel que $N(A) = \{0\}$, alors A^{-1} est aussi un opérateur auto-adjoint.*

Preuve. Puisque $A = A^*$, on a $R(A)^{\perp} = N(A^*) = N(A) = \{0\}$. Alors, $R(A)$ est dense, et d'après le théorème 2.4.1 (iv)

$$\left(A^{-1}\right)^* = (A^*)^{-1} = A^{-1}$$

■

Si A est un opérateur borné dans H, alors A admet une exstension unique à un opérateur borné sur H et alors son domaine et en plus le domaine de son adjoint est tout l'espace H, i.e $D(A) = H = D(A^*)$.

Dans le cas des opérateurs non bornés la situation est beaucoup plus compliquée. Il est possible qu'un opérateur densément défini A admet un adjoint A^* tel que $Af(x) = A^*f(x), \forall f \in D(A) \cap D(A^*)$ mais $D(A) \neq D(A^*)$, et ainsi A n'est pas auto-adjoint.

La définition suivante décrit ce cas.

Définition 3.1.2 (Opérateur symétrique) *Soient H un espace de Hilbert et $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur densément défini.*

*On dit que A est **symétrique** si $A \subseteq A^*$ i.e :*

$$D(A) \subset D(A^*) \text{ et } Ax = A^*x, \forall x \in D(A)$$

Autrement dit,

$$\langle Af, g\rangle_H = \langle f, Ag\rangle_H \,, \ \forall f, g \in D(A)$$

Remarque 3.1.1 *Tout opérateur non borné auto-adjoint est symétrique par contre un symétrique n'est pas forcément auto-adjoint.*

Exemple 3.1.2 *Pour les opérateurs différentiels définis dans l'exemple 2.4.1, on a*

- *Pour l'opérateur A_1, si $f \in D(A_1)$ on obtient :*

$$\begin{aligned}
\langle A_1 f, g\rangle &= \int_0^1 f''(x)\overline{g(x)}dx \\
&= f'(1)\overline{g(1)} - f'(0)\overline{g(0)} - \int_0^1 f'(x)\overline{g'(x)}dx \quad (I.P.P) \\
&= f'(1)\overline{g(1)} - f'(0)\overline{g(0)} - f(1)\overline{g'(1)} + f(0)\overline{g'(0)} + \int_0^1 f(x)\overline{g''(x)}dx \quad (I.P.P) \\
&= f'(1)\overline{g(1)} - f'(0)\overline{g(0)} + \langle f, A_1 g\rangle \,.
\end{aligned}$$

Pour obtenir

$$\langle A_1 f, g\rangle = \langle f, A_1 g\rangle, \forall f \in D(A_1),$$

le terme $f'(1)\overline{g(1)} - f'(0)\overline{g(0)}$ *doit être nul, i.e* $g(0) = g(1) = 0$, *et il suffit que* $g \in H^2([0,1])$, *donc*

$$D(A_1^*) = \{g \in H^2([0,1]) : g(0) = g(1) = 0\} = D(A_3),$$

alors

$$A_1^* = A_3.$$

Comme $D(A_1) \subset D(A_3)$ *et* $A_1 f = A_3 f, \forall f \in D(A_1)$ *donc* $A_1 \subset A_3$, *alors* A_1 *est symétrique mais n'est pas auto-adjoint.*

En faisant les mêmes étapes avec les opérateurs A_2, A_3, A_4 *et* A_5, *avec*

$$D(A_5) = \{f \in H^2([0,1]) : f\ (0) = f(1) = f\ '(0) = f'(1) = 0\}$$

On obtient,

$A_3^* = A_3$, *alors* A_3 *est auto-adjoint.*

$A_2^* = A_4^* = A_5$, *comme* A_5 *n'est pas une extension de* A_2 *ou* A_4, *alors ni* A_2 *ni* A_4 *est symétrique .*

$A_5^* = A_4$, *comme* $A_5 \subset A_4$, *alors* A_5 *est symétrique mais n'est pas auto-adjoint.*

Remarque 3.1.2

1. *Un opérateur A symétrique est toujours fermable puisque* $D(A^*) \supset D(A)$ *est dense.*
2. *Si* A *est un opérateur symétrique alors* A^* *et* A^{**} *sont deux extensions fermées de* A *avec* $A \subset \overline{A} \subset A^*$.
3. *Si* A *est un opérateur symétrique fermé alors* $A = A^{**} \subset A^*$.
4. *Si* A *est un opérateur auto-adjoint alors* $A = A^* = A^{**}$.

Définition 3.1.3 *Un opérateur symétrique* A *dans* H *est dit symétrique maximal, si* A

n'admet pas d'extension symétrique propre, c'est-à-dire, si les hypothèses $A \subset B$ et B symétrique implique que $B = A$.

Proposition 3.1.2 *Les opérateurs auto-adjoints sont symétriques maximaux.*

Preuve. En effet, supposons que A est auto-adjoint, B est symétrique et $A \subset B$, alors

$$B \subset B^* \subset A^* = A \subset B$$

Donc

$$B = A$$

■

Théorème 3.1.1 (Von-Neuman) *Si A est fermé alors A^*A (ou bien AA^*) est auto-adjoint.*

Preuve. Voir [41, p336] ■

Théorème 3.1.2 (Devinatz-Nussbam-Von Neuman) *Soient A, B et C des opérateurs non-bornés auto-adjoints alors :*

$$A \subseteq BC \Rightarrow A = BC.$$

3.1.1 Opérateur essentiellement auto-adjoint

Définition 3.1.4 (Essentiellement auto-adjoint) *Soit $(D(A), A)$ opérateur non borné sur H symétrique de domaine $D(A)$ dense dans H. A est dit **essentiellement auto-adjoint** si $\overline{A}$ est auto-adjoint.*

Remarque 3.1.3 *Tout opérateur auto-adjoint est essentiellement auto-adjoint. La réciproque est fausse.*
Si A est essentiellement auto-adjoint alors, A^* est la plus petite extension fermée de A.

Proposition 3.1.3 *Si A est un opérateur essentiellement auto-adjoint, alors il admet une unique extension auto-adjointe.*

Exemple 3.1.3 *Dans l'exemple 2.4.1 on a :*

- *Comme $\overline{A_1} = A_3$ et l'opérateur A_3 est auto-adjoint, alors A_1est essentiellement auto-adjoint.*
- *Comme $\overline{A_2} = A_4$ et l'opérateur A_4 n'est pas auto-adjoint, alors A_2 n'est pas essentiellement auto-adjoint.*

3.2 Opérateur normal non borné

Dans cette section en particulier, on s'intéresse à la classe d'opérateurs normaux non bornés. Une classe très importante car c'est la plus grande classe pour laquelle le théorème spectral existe.

Définition 3.2.1 (Opérateur normal) *Soit A un opérateur non borné de domaine $D(A)$ dense. On dit que A est un opérateur normal s'il est fermé et $AA^* = A^*A$.*

Proposition 3.2.1 *Si A est fermé et $AA^* \subset A^*A$, alors A est normal i-e : $AA^* = A^*A$.*

Preuve. Il est clair que si A est fermé alors AA^* est auto-adjoint d'après le théorème de Von-Neuman, on a donc

$$\begin{aligned}(AA^* \subset A^*A) &\Rightarrow (A^*A)^* \subset (AA^*)^* \\ &\Rightarrow A^*A \subset AA^* \\ &\Rightarrow A^*A = AA^*\end{aligned}$$

alors A est normal. ∎

Lemme 3.2.1 *Soit A un opérateur non borné fermé défini sur son domaine dense $D(A)$. On a :*

Si A' est une restriction de A sur $D(A^*A)$, alors $G_{A'}$ est dense dans G_A, c'est-à-dire : $\overline{G_{A'}} = G_A$.

Définition 3.2.2 *On dit que A est un opérateur formellement normal si $D(A) \subseteq D(A^*)$ et $\|Ax\| = \|A^*x\|$ pour tout $x \in D(A)$.*

Proposition 3.2.2 *Si A est un opérateur normal, alors :*

1. $D(A) = D(A^*)$
2. $\|Ax\| = \|A^*x\|$ *pour tout* $x \in D(A)$.

Preuve. 1. Si $y \in D(AA^*) = D(A^*A)$, alors :

$$\langle A^*y; A^*y\rangle = \langle y; AA^*y\rangle\,,\ \text{car } A^*y \in D(A)$$

et

$$\langle Ay; Ay\rangle = \langle y; A^*Ay\rangle\,,\ \text{car } Ay \in D(A^*)$$

donc

$$\|Ax\| = \|A^*x\| \ \text{ car } AA^*y = A^*Ay$$

Soit $x \in D(A)$, si A' est une restriction de A sur $D(A^*A)$ alors d'après le lemme précédent, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0} \subset D(A^*A)$: tel que

$$\|x_n - x\| \to 0 \text{ pour } n \to \infty$$

et

$$\|Ax_n - Ax\| \to 0 \text{ pour } n \to \infty$$

Puisque $\|A^*x_p - A^*x_q\| = \|Ax_p - Ax_q\|$, on aura $(A^*x_n)_{n\geq 0}$ est suite de Cauchy dans H. Donc il existe $z \in H$ tel que :

$$\|A^*x_n - z\| \to 0 \text{ pour } n \to \infty$$

et comme A^* est fermé, alors :

$$x \in D(A^*) \text{ et } z = A^*x$$

donc

$$D(A) \subset D(A^*)$$

de la même manière on trouve

$$D(A^*) \subset D(A)$$

alors :

$$D(A) = D(A^*)$$

2. On a :

$$\|A^*x\| = \|z\| = \lim_{n\to\infty} \|A^*x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|Ax_n\| = \|Ax\|$$

■

Corollaire 3.2.1 *Tout opérateur auto-adjoint est normal.*

Proposition 3.2.3 *Soit A un opérateur normal, alors on a :*

(i) *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'opérateur $A - \lambda I$ est normal, et $N(A - \lambda I) = N(A^* - \overline{\lambda} I)$.*

En particulier, λ est un valeur propre de A et $x \in H$ est un vecteur propre de A pour λ, si et seulement si, $\overline{\lambda}$ est un valeur propre de A^* et x est un vecteur propre de A^* pour $\overline{\lambda}$.

(ii) *Les vecteurs propres de A appartenant à différentes valeurs propres sont orthogonaux.*

(iii) $H = \overline{R(A - \lambda I)} \oplus N(A - \lambda I)$.

(iv) *Si B est un opérateur tel que $A \subseteq B$ et $D(B) \subseteq D(B^*)$, alors $A = B$.*

En particulier, tout opérateur normal est formellement normal maximal, c'est-à-dire si A est normal, B est formellement normal et $A \subseteq B$, alors $A = B$.

(v) *Si A est injectif, alors son inverse A^{-1} est également normal. En particulier, les résolvants $R_\lambda(A), \lambda \in \rho(A)$ d'un opérateur normal A sont normaux.*

Preuve.

(i) Pour $x \in D(A-\lambda I) = D(A) = D(A^*) = D((A-\lambda I)^*)$, on a

$$\begin{aligned}
\|(A-\lambda I)x\|^2 &= \|Ax\|^2 + |\lambda|^2 \|x\|^2 + \langle \lambda x, Ax\rangle + \langle Ax, \lambda x\rangle \\
&= \|A^*x\|^2 + |\lambda|^2 \|x\|^2 + \langle A^*x, \overline{\lambda} x\rangle + \langle \overline{\lambda} x, A^*x\rangle \\
&= \|(A-\lambda I)^*x\|^2,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire, $A-\lambda I$ est normal. Par conséquent, $N(A-\lambda I) = N((A-\lambda I)^*) = N(A^*-\overline{\lambda} I)$.

(ii) Supposons que $Ax_1 = \lambda_1 x_1, Ax_2 = \lambda_2 x_2$, et $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Alors $A^*x_2 = \overline{\lambda_2} x_2$ par (i) et donc

$$\lambda_1 \langle x_1, x_2\rangle = \langle Ax_1, x_2\rangle = \langle x_1, A^*x_2\rangle = \lambda_2 \langle x_1, x_2\rangle,$$

d'où $\langle x_1, x_2\rangle = 0$.

(iii) En effet,

$$\begin{aligned}
H &= N\left(A^* - \overline{\lambda} I\right) \oplus \overline{R(A-\lambda I)} \text{ car } H = N(A^*) \oplus \overline{R(A)} \\
&= N(A-\lambda I) \oplus \overline{R(A-\lambda I)} \text{ par (i)}
\end{aligned}$$

(iv) Puisque $A \subseteq B, B^* \subseteq A^*$ et $D(A) \subseteq D(B) \subseteq D(B^*) \subseteq D(A^*) = D(A)$, c'est-à-dire $D(A) = D(B)$, et alors $A = B$.

(v) Puisque A est injectif, $R(A)^\perp = N(A^*) = N(A) = \{0\}$, donc $R(A)$ est dense. D'où $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ d'après le théorème 2.4.1. Alors

$$\left(A^{-1}\right)^* A^{-1} = (A^*)^{-1} A^{-1} = (AA^*)^{-1} = (A^*A)^{-1} = A^{-1} (A^*)^{-1} = A^{-1} \left(A^{-1}\right)^*,$$

ce qui prouve que A^{-1} est normal.

■

Proposition 3.2.4 **a)** *Tout opérateur normal est fermé.*

b) *Soit A un opérateur densément défini. Si A est normal, alors A^* l'est aussi.*

c) *Si A est normal, alors $A + z$ l'est aussi pour tout $z \in \mathbb{k}$.*

3.2.1 Théorème de Fuglede-Putnam sur les opérateurs non bornés

Le théorème de Fuglede-Putnam présente un interêt très pratique dans la théorie des opérateurs.

Théorème 3.2.1 (La version non bornée) *Soit H un espace $\mathbb{C}-Hilbert$ et soient M, N deux opérateurs normaux non-bornés et A un opérateur borné sur H.*

Si $AN \subset MA$, alors : $AN^* \subset M^*A$.

Preuve. Voir [40] ■

Théorème 3.2.2 (Fugled-Putnam-Mortad) *Soit A un opérateur non borné et fermé sur son domaine $D(A)$. Soient M et N deux opérateurs non bornés normaux sur leurs domaines $D(M)$ et $D(N)$ respectivement. Si $D(N) \subset D(AN)$, alors*

$$AN \subset MA \Rightarrow AN^* \subset M^*A$$

Preuve. Voir [30] ■

Théorème 3.2.3 *Soient A et B deux opérateurs non-bornés normaux et inversibles. Alors :*

$$BA = AB \Rightarrow AB^* = B^*A \text{ et } BA^* = A^*B$$

Preuve. Voir [23] ■

3.3 Somme et produit de deux opérateurs normaux non bornés

3.3.1 Somme de deux opérateurs normaux

Dans cette partie, on s'intéresse aux théorèmes et propositions qui nous donnent la normalité de la somme $A+B$ avec des conditions imposées sur les deux opérateurs A et B.

Théorème 3.3.1 *Soient A et B deux opérateurs bornés normaux. Si AB et AB^* sont normaux tel que A est positif, alors $A+B$ est normal.*

Preuve. Voir [28] ∎

Le cas de deux opérateurs non bornés ne tient pas en général.

Exemple 3.3.1 *Soit A un opérateur auto-adjoint non borné. On pose $B=-A$.*

Alors B est aussi auto-adjoint avec le domaine $D(B)=D(A)$, donc $AB=-A^2$ est auto-adjoint sur $D(A^2)$. Cependant que,

$$A+B=A-A\subset 0$$

et alors $A+B$ n'est pas fermé et danc il ne peut pas être normal.

Théorème 3.3.2 *Soit A un opérateur normal non-borné sur le domaine $D(A)$ et $B\in B(H)$ est normal.*

Si $B^*A\subset AB^*$, alors $A+B$ est normal sur $D(A)$.

Preuve. Voir [25] ∎

Théorème 3.3.3 *[3] Soient A et B deux opérateurs normaux tel que B est borné. Si $BA^*\subset -AB^*$ et $B^*A\subset -A^*B$, alors $A+B$ est normal.*

Théorème 3.3.4 (Kato-Rellich) *[39]Soit B un opérateur non borné auto-adjoint avec le domaine $D(B)$. Si A est $B-$ borné avec la borne relative "a" tel que $a<1$, sachant que A est symétrique alors $A+B$ est auto-adjoint sur $D(B)$.*

Théorème 3.3.5 *Soient A et B deux opérateurs normaux non bornés tel que A est $B-$ borné avec un borne relative inférieure à 1. Supposons que $AB^* \subset B^*A$ et $A^*B \subset BA^*$, alors $A+B$ est normal sur $D(B)$.*

Preuve. Voir [31] ■

Théorème 3.3.6 *Soient A et B deux opérateurs non bornés auto-adjoints tel que B est inversible. Si $AB = BA$ et $D(AB^{-1}) \subset D(B)$, alors $A+B$ est auto-adjoint sur $D(A)$.*

Preuve. Voir [23] ■

Théorème 3.3.7 *Soit A un opérateur non-borné normal et B un opérateur borné et auto-adjoint. Si $BA^* \subset -AB \Rightarrow A+B$ est normal.*

En tant que premier conséquence de théorème 3.2.3, nous avons

Théorème 3.3.8 *Soient A et B deux opérateurs non-bornés, inversibles et normaux sur $D(A)$ et $D(B)$ respectivement.*

Si $AB = BA$, $D(A) \subset D(BA^*)$ et $D(AB^{-1}) = D\left(A(B^*)^{-1}\right) \subset D(B)$, alors :

$$A+B \text{ est normal sur } D(A)$$

Preuve. Voir [23] ■

3.3.2 Produit de deux opérateurs normaux

Dans cette partie, on s'intéresse aux théorèmes et propositions qui nous donnent la normalité du produit AB avec des conditions imposées sur les deux opérateurs A et B.

Premièrement on commence par le théorème de Kaplansky.

Théorème 3.3.9 (Kaplansky) *Soient A et B deux opérateurs bornés tels que A et AB sont normaux, alors*

$$A^*AB = BA^*A \Leftrightarrow (BA) \text{ est normal.}$$

Preuve. Voir [19] ■

M.H.Mortad dans [29] a généralisé le théorème de Kaplansky, on a

Théorème 3.3.10 *Soit B un opérateur fermé non borné et A borné tel que AB(resp. BA) et A sont normaux. Alors*

$$BA \text{ est normal } (\text{resp. } AB) \Rightarrow A^*AB \subset BA^*A$$

Théorème 3.3.11 *Si A est unitaire et B est un opérateur normal non borné, alors*

$$BA \text{ est normal} \Leftrightarrow AB \text{ est normal.}$$

Théorème 3.3.12 *Soient A un opérateur borné et inversible, B non-borné et fermé. Supposons que $D(B) \subset D(BAB)$ alors*

$$AB \text{ et } BA \text{ sont normaux} \Leftrightarrow \begin{cases} BAA^* = A^*AB \\ B^*BA \subset ABB^* \end{cases}$$

Preuve. Voir [3] ■

Proposition 3.3.1 *Soit B un opérateur unitaire et A un opérateur normal non-borné . Si B et A commutent (i-e $BA \subset AB$), alors BA est normal.*

Preuve. Voir [27] ■

Corollaire 3.3.1 *Soient A et B deux opérateurs auto-adjoints tel que $B^2 = I$. Si B et A commutent alors BA est auto-adjoint.*

Preuve. Puisque B est borné, on aura

$$(BA)^* = A^*B^* = AB$$

et comme B et A commutent alors :

$$BA \subset AB = (BA)^*$$

donc BA est symétrique et d'après la proposition 3.3.1 BA est normal.

Puisque BA est normal et symétrique, on trouve que BA est auto-adjoint. ■

On peut s'empasser la condition (A et B commutent) pour obtenir un autre résultat de l'auto-adjonction de BA. On a

Proposition 3.3.2 *[27]Soient B un opérateur borné et A un opérateur non borné auto-adjoint à domaine dense $D(A)$. Si pour un certain $r > 0$ on a $\|rB - I\| < 1$ et BA est symétrique, alors BA est auto-adjoint sur $D(A)$.*

Remarque 3.3.1 *La proposition précédente peut être utilisé pour établir un résultat de la normalité du produit de deux opérateurs.*

Théorème 3.3.13 *Soient B un opérateur borné normal et A un opérateur non borné normal. Supposons que B et A commutent, si pour certain $r > 0$, $\|rBB^* - I\| < 1$, alors*

i) BA est normal s'il est fermé.

ii) AB est normal .

Preuve. voir [27] ■

Théorème 3.3.14 *Soient A un opérateur non-borné normal et inversible, B un opérateur normal non-borné, si : $BA = AB$, $A^*B \subset BA^*$ et $B^*A \subset AB^*$, alors BA est normal.*

Preuve. Puisque A est fermé et inversible, B est fermé, on aura :

$$AB = BA \text{ sont fermés et } (BA)^* = A^*B^*$$

d'autre part

$$(BA)^*BA = A^*B^*BA = A^*B^*AB \subset A^*AB^*B$$

et

$$(BA)(BA)^* = BAA^*B^* = BA^*AB^* \supset A^*BAB^* = A^*ABB^*$$

donc :

$$(BA)^*BA \subset (BA)(BA)^*$$

d'où

$$(BA)^*BA = (BA)(BA)^*$$

alors BA est normal. ■

Un autre conséquence de théorème 3.2.3, nous avons le résultat suivant sur la normalité du produit de deux opérateurs normaux non bornés.

Corollaire 3.3.2 *Soient A et B deux opérateurs non-bornés normaux et inversibles sur leurs domaines $D(A)$ et $D(B)$ respectivement. Si $BA = AB$, alors BA (et AB) est normal.*

3.3.3 Produit normal de deux opérateurs auto-adjoints

Nous savons que tout opérateurs auto-adjoint sont normaux, dans cette partie on présente des conditions sur les opérateurs auto adjoints A et B pour lesquelles la normalité de AB doit être auto-adjoint. C'est une relation entre les opérateurs normaux, auto-adjoints et positifs.

Proposition 3.3.3 *[28]Si A et B sont deux opérateurs auto-adjoints bornés, l'un des deux est positif, alors la normalité de AB implique son auto-adjonction.*

Preuve. Supposons que A est positif. D'après le théorème de Fuglede-Putnam

$$A(BA) = (AB)A \Rightarrow A(BA)^* = (AB)^*A \Rightarrow A^2B = BA^2$$

et donc B commute avec la racine carrée de A^2, i.e., avec A.
On a donc

$$(AB)^* = B^*A^* = BA = AB$$

d'où AB est auto-adjoint. ■
Si A est borné, alors le rang numérique de A, désigné par $W(A)$ est définie par

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle : x \in H, \|x\| = 1\}.$$

Théorème 3.3.15 (Embry) *[14]Soient N et M deux opérateurs bornés normaux et commutent entre eux. Si A est borné tel que $0 \notin W(A)$, alors*

$$AN = MA \Rightarrow N = M.$$

On peut appliqué le théorème d'Embry à la suite

Corollaire 3.3.3 *Si A et B sont deux opérateurs auto-adjoints bornés, l'un des deux est strictement positif, alors la normalité de AB implique son auto-adjonction.*

Preuve. Supposons que A est strictement positif, alors $0 \notin W(A)$. On a donc

$$A(BA) = (AB)A = (BA)^*A.$$

Par Embry, on a $BA = (BA)^*$. ■
La même idée fonctionne pour les opérateurs non bornés. Nous avons

Théorème 3.3.16 *Si A et B sont deux opérateurs auto-adjoints (l'un des deux est non borné), l'un des deux est positif, alors la normalité de AB implique son auto-adjonction.*

Théorème 3.3.17 *Si A et B sont deux opérateurs auto-adjoints (seulement B est borné), avec B est aussi strictement positif, alors la normalité de AB implique son auto-adjonction.*

Si A et B sont non bornés, alors par d'autre version de Fuglede-Putnam établi dans [26] ce qui suit a été prouvé.

Théorème 3.3.18 *Si A et B sont deux opérateurs auto-adjoints non bornés (B est positif), alors la normalité de AB implique son auto-adjonction.*

Dans [25], il existe un contre exemple.

Théorème 3.3.19 *Si A et B sont deux opérateurs auto-adjoints non bornés (A est positif), alors la normalité de AB n'est pas nécessairement implique son auto-adjonction.*

Chapitre 4

Conditions entre les opérateurs compacts, normaux et l'opérateur de Nadir

Dans ce chapitre, on présente des relations entre les opérateurs compacts, auto-adjoints et normaux. Puis on étudie une nouvelle classe d'opérateur, c'est l'opérateur de Nadir ($N = AB^* - BA^*$ t.q A et B sont deux opérateurs non bornés densément définis). On discute précisément sur l'objectif de notre article dont on trouve des conditions sur A et B pour lesquelles l'opérateur de Nadir est compact, fermé, anti-hermitien et normal dans les trois cas :

A et B sont deux opérateurs bornés.

A est un opérateur borné, et B non borné.

A et B sont deux opérateurs non bornés.

Proposition 4.0.4 *Soit H un espace de Hilbert complexe et $A \in \mathcal{L}(H)$*

A^2 compact et A normal $\Longrightarrow$ A compact.

A^d compact et A normal $\Longrightarrow$ A compact.

Preuve. Voir [6, p157] ■

Corollaire 4.0.4 *A^2 compact et A auto-adjoint $\Longrightarrow$ A compact.*

Remarque 4.0.2 *Si A^2 compact et auto-adjoint, alors A n'est pas nécessairement compact.*

Théorème 4.0.20 *Soit A un opérateur quelconque, il existe deux opérateurs auto-adjoints T et S qui sont uniques tels que : $A = T + iS$.*

Preuve. On a : $A = T + iS \Longrightarrow A^* = (T + iS)^* = T^* - iS^*$, alors on obtient :
$\begin{cases} A = T + iS \\ A^* = T^* - iS^* \end{cases}$ .Ceci implique $T = (A + A^*)/2$ et $S = (A - A^*)/2$. ■

Théorème 4.0.21 *Un opérateur normal $A \in B(H)$ est compact, si et seulement si, il satisfait aux conditions suivantes :*

(a) *$\sigma(A)$ n'a pas de point limite sauf éventuellement 0.*

(b) *Si $\lambda \neq 0$, le dim $N(A - \lambda I) < \infty$.*

Preuve. Voir [41] ■

4.1 Trois conditions entre les opérateurs compacts et les opérateurs normaux

En 2002, **Sadkane** dans [42] présente trois conditions nécessaires et suffisantes pour une matrice $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ deviendra normal. Les trois conditions sont :

1. Pour tout $j = 1, 2, ..., N$

$$s_j(A^{m+n}) = \sqrt{s_j(A^{2n})s_j(A^{2m})}, \forall m, n = 0, 1, 2, ...$$

2. $s_j(A) = |\lambda_j(A)|$, pour $j = 1, 2, ...N$

3. Pour tout $x \in \mathbb{C}^n$,

$$\left\|A^{m+n}x\right\|_2 \leq \sqrt{\left\|A^{2n}x\right\|_2 \left\|A^{2m}x\right\|_2}, \forall n, m = 0, 1, 2, ...,$$

Où $\|\|_2$ désigne la norme euclidienne sur le $\mathbb{C}^N$, $\lambda_j(A)$ sont les valeurs propres d'une matrice $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$, et $s_j(A)$ sont les valeurs singulières $\left[s_j(A) \overset{def}{=} (\lambda_j(A^*A))^{1/2}\right]$.

Comme les matrices carrées complexes peuvent être considérés comme la classe des opérateurs linéaire compact sur l'espace de Hilbert $\mathbb{C}^n$. Il est naturel de s'interroger si ces résultats restent valable pour tous les opérateurs compacts linéaires sur un espace Hilbert complexe séparable. **J.Yang** et **H.-K.Du** dans [45] donnent une réponse affirmative à cette question.

Lemme 4.1.1 *Supposons que A est un opérateur compact sur H. Si $\lambda_j(A) \neq 0$ et $s_j(A) = |\lambda_j(A)|$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, alors pour tout $s \in \{1, ...v\}$ avec $s < +\infty$ il existe un ensemble orthonormé $\{x_1, x_2, ..., x_{m_s}\}$ de H tel que*

$$A = \sum_{j=1}^{m_s} \lambda_j(A)(x_j \otimes x_j) \oplus A_s$$

et $\{\lambda_{m_1}(A), ..., \lambda_{m_s}(A)\} \subseteq \mathbb{C}\backslash\sigma(A_s)$, où A_s est un opérateur compact sur $\cap_{i=1}^{s} N(A - \lambda_{m_i}(A)I)^{\perp}$.

Preuve. Voir [45] ■

Théorème 4.1.1

Soit A un opérateur compact sur H, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) *A est normal*

(b) *Pour tout $j \in \mathbb{N}$,*

$$s_j(A^{m+n}) = \sqrt{s_j(A^{2n})s_j(A^{2m})}, \forall m, n = 0, 1, 2, ...$$

(c) *$s_j(A) = |\lambda_j(A)|$, pour $j = 1, 2, \ldots$.*

(d) *Pour tout $x \in H$,*

$$\left\|A^{m+n}x\right\| \leq \sqrt{\left\|A^{2n}x\right\| \left\|A^{2m}x\right\|}, \forall n, m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Preuve. Voir [45] ■

4.2 Opérateur de Nadir ($N = AB^* - BA^*$) dans le cas borné

Un opérateur borné N s'appelle un opérateur de Nadir s'il écrit sous forme

$$N = AB^* - BA^*$$

où A et B sont des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert. Cet opérateur est un concept central de la mécanique quantique, puisqu'il quantifie à quel point les deux observables décrits par ces opérateurs peuvent être mesurés simultanément.

A partir de cette définition, on peut voir que si l'opérateur borné N est nul, alors $AB^* = BA^*$ représente, dans un sens, le degré auquel (AB^*) est égal à son adjoint $(AB^*)^*$, de sorte que l'ordre des deux mesures correspondantes appliquées au système physique n'a pas d'importance. Pour cela, on suppose que l'opérateur de Nadir est non nulle.

Théorème 4.2.1 *Soient A et B deux opérateurs bornés dans un espace de Hilbert H. Si l'un des deux est compact, alors l'opérateur $N = AB^* - BA^*$ l'est aussi.*

Preuve. Supposons que A est compact, B borné

A est compact $\Rightarrow A^*$ compact $\Rightarrow AB^*$ et BA^* sont compacts$\Rightarrow N$ est compact.

Les même étapes pour le deuxième cas (B est compact, A borné). ■

Théorème 4.2.2 *Soient A et B deux opérateurs bornés dans un espace de Hilbert H. L'opérateur $N = AB^* - BA^*$ est anti-autoadjoint.*

Preuve. En effet,

$$\begin{aligned} N^* &= (AB^* - BA^*)^* \\ &= (AB^*)^* - (BA^*)^* \\ &= BA^* - AB^* \\ &= -(AB^* - BA^*) \\ &= -N \end{aligned}$$

D'où, l'opérateur de Nadir N est un opérateur anti-autoadjoint. ■

Corollaire 4.2.1 *Pour tous les opérateurs bornés A et B, on a*

1. *L'opérateur $N = AB^* - BA^*$ est normal.*
2. *L'opérateur de Nadir n'est jamais égal à l'identité I.*
3. *L'opérateur $-N^2$ est positif pour tous les vecteurs non nulles x en H.*

Preuve.

1. En effet, cela résulte du théorème précédent

$$\begin{aligned} NN^* &= (AB^* - BA^*)\,(AB^* - BA^*)^* \\ &= N(-N) \\ &= (-N)N \\ &= N^*N \end{aligned}$$

2. Supposons que

$$N = AB^* - BA^* = I$$

alors

$$N^* = (AB^* - BA^*)^* = I^* = I$$

Par conséquent, de la relation $N^* = -N$, on a

$$I = -I.$$

Contradiction.

3. En effet,

$$-N^2 = -NN = N^*N,$$

et N^*N est un opérateur positif car $\langle N^*Nx, x\rangle = \|Nx\|^2 \geqslant 0$.

■

Proposition 4.2.1 *Les valeurs propres de l'opérateur de Nadir sont toutes purement imaginaires ou nulles.*

Preuve. Il est claire que chaque $T \in B(H)$ a une représentation unique $T = \alpha + i\beta$ tel que α et β sont deux opérateurs auto-adjoints.

Posons $AB^* = \alpha + i\beta$, alors

$$\begin{aligned} N &= AB^* - BA^* \\ &= AB^* - (AB^*)^* \\ &= (\alpha + i\beta) - (\alpha - i\beta) \\ &= 2\beta i. \end{aligned}$$

■

Corollaire 4.2.2 *Si H est un espace de Hilbert de dimension finie, alors l'opérateur $N - I$ est inversible.*

4.3 Etude de la fermeture et la normalité de l'opérateur de Nadir non borné

L'étude de l'opérateur de Nadir dans le cas non borné est difficile par apport au cas borné car si on parle d'adjoints, les résultats ne sont pas meilleurs. Par exemple, si A et B sont deux opérateurs non bornés densément définis, on a généralement $(AB)^* \neq B^*A^*$, $(A+B)^* \neq A^* + B^*$ et $A^{**} \neq A$. De plus, le produit AB et la somme $A+B$ de deux opérateurs fermés n'est pas généralement fermés, comme peut être A et B sont deux opérateurs densément définis mais A^*, B^* et AB ne sont pas, regardez [1], [13], [41], [43], [46].

Dans cette section, on présente des conditions suffisantes pour assurer la fermeture, l'anti-hermitien et la normalité (plus précisément l'anti-autoadjonction) de l'opérateur non borné $N = AB^* - BA^*$ dans un espace de Hilbert H.

Théorème 4.3.1 *Soit A un opérateur non borné et inversible, alors A^n est un opérateur fermé. De plus si A^n est densément défini pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, alors*

$$(A^n)^* = (A^*)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

D'ailleur si A est un opérateur normal alors, A^n l'est aussi.

Preuve. En effet, l'opérateur A est fermé parce qu'il est densément défini et inversible et même pour $A^2 = AA$ car A est fermé et inversible et ainsi de suite A^n.

Pour $n = 1, A^* = A^*$ est vrai,

Pour $n = 2$,

$$\begin{aligned} (AA)^* &= A^*A^* \text{ par la proposition 2.1.4} \\ &= (A^*)^2 \end{aligned}$$

donc $(A^2)^* = (A^*)^2$ est vrai.

Supposons que c'est vrai pour n, $(A^n)^* = (A^*)^n$ cela implique

$$\begin{aligned}
\left(A^{n+1}\right)^* &= (A^n A)^* \\
&= A^* (A^n)^* \text{ par la proposition 2.1.4} \\
&= A^* (A^*)^n \text{ par l'hypothèse ci-dessus.} \\
&= (A^*)^{n+1}.
\end{aligned}$$

D'où $(A^n)^* = (A^*)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

On a A^n est un opérateur fermé par 1), et clairement si A est un opérateur normal alors $(AA^*)^n = A^n (A^*)^n$, et par 2) on peut écrire :

$$\begin{aligned}
A^n (A^n)^* &= A^n (A^*)^n = (AA^*)^n \\
&= (A^* A)^n = (A^*)^n A^n \\
&= (A^n)^* A^n.
\end{aligned}$$

■

4.3.1 Quand $(AB^*)^* = BA^*$ et $(BA^*)^* = AB^*$ simultanément ?

Nous allons maintenant étudier lorsque d'être $(BA^*)^* = AB^*$ et $(AB^*)^* = BA^*$ simultanément.

Il est possible que A est densément défini mais A^* n'est pas, le théorème suivant assure la densité de A^*.

Théorème 4.3.2 *([41] ou [43])*

Si A est un opérateur fermé alors A^* est densément défini et $A^{**} = A$.

Corollaire 4.3.1 *Soit A un opérateur non borné. Si*

1. *B est non borné, BA^* est densément défini et A est inversible, ou*
2. *B est borné et A est fermé.*

Alors

$$(BA^*)^* = AB^*$$

Preuve. 1) Puisque A est inversible, A^* l'est aussi, alors

$$(BA^*)^* = A^{**}B^*$$

De plus, l'opérateur A est fermé car, il est densément défini et inversible, alors

$$(BA^*)^* = AB^*$$

2) En effet,

$$\begin{aligned}(BA^*)^* &= A^{**}B^* \text{ car } B \text{ est borné} \\ &= AB^* \text{ car } A \text{ est fermé}\end{aligned}$$

■

Proposition 4.3.1 *Soient A et B deux opérateurs non bornés. Si B est fermé et $R(B^*) \subset D(A)$, alors AB^* est un opérateur densément défini.*

Preuve. Nous avons $R(B^*) \subset D(A)$ alors $D(AB^*) = D(B^*)$, mais B^* est densément défini (puisqe B est fermé), alors AB^* l'est aussi. ■

Proposition 4.3.2 *Soient A et B deux opérateurs non bornés et inversibles. Si BA^* est densément défini, alors AB^* l'est aussi.*

Preuve. En effet, A est inversible et BA^* est densément défini alors,

$$(BA^*)^* = AB^*$$

D'autre part, on à BA^* est fermé car B est un opérateur fermé et inversible. Par conséquent AB^* est aussi densément défini. ■

Théorème 4.3.3 *Soient A et B deux opérateurs non bornés. Si*

1) A et B sont deux opérateurs inversibles, et $R(B^*) \subset D(A)$, ou

2) A est fermé, B est borné et inversible.

Alors AB^* et BA^* sont densément définis. De plus $(AB^*)^* = BA^*$ et $(BA^*)^* = AB^*$ simultanément.

Preuve. 1) Puisque B est fermé et $R(B^*) \subset D(A)$ alors AB^* est densément défini par la proposition 4.3.1, et puisque A et B sont inversibles alors BA^* est aussi densément défini par la proposition 4.3.2. De plus puisque A et B sont inversible alors $(AB^*)^* = BA^*$ et $(BA^*)^* = AB^*$ simultanément.

2) Nous avons B est un opérateur borné et A fermé alors $(BA^*)^* = AB^*$ d'après le corollaire 4.3.1, mais BA^* est fermé, d'où AB^* est densément défini.

D'autre part, B est inversible alors $(AB^*)^* = BA^*$. ■

4.3.2 Conditions pour l'anti-hermitien, la fermeture et l'anti-autoadjonction de l'opérateur de Nadir

Rappelons qu'un opérateur non borné A défini sur un espace de Hilbert H est appelé hermitien si $A \subset A^*$, et anti-hermitien si $A \subset -A^*$.

Théorème 4.3.4 *Soient A et B deux opérateurs non bornés et inversibles. Si*

1. *AB^* est densément défini, ou*
2. *$R(B^*) \subset D(A)$*

Alors l'opérateur $N = AB^* - BA^*$ est anti-hermitien.

Preuve. 1) Puisque A et B sont des opérateurs non bornés et inversibles et AB^* est densément défini, alors BA^* est aussi densément défini par Proposition 4.3.2.

Nous avons toujours $(BA^*)^* - (AB^*)^* \subset (BA^* - AB^*)^*$. Mais $(AB^*)^* = BA^*$ et $(BA^*)^* = AB^*$ d'après le théorème 4.3.3. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} N &= AB^* - BA^* \\ &= (AB^*)^* - (BA^*)^* \\ &\subset (BA^* - AB^*)^* \\ &= -(AB^* - BA^*)^* \\ &= -N^*. \end{aligned}$$

Donc N est un opérateur anti-hermitien.

2) Puisque A et B sont deux opérateurs non bornés et inversibles et $R(B^*) \subset D(A)$ alors AB^* et BA^* sont densément définis, $(AB^*)^* = BA^*$ et $(BA^*)^* = AB^*$ par le Théorème 4.3.3.

Avec les mêmes étapes de la première partie, on trouve : $N \subset -N^*$. ■

Le théorème suivant est appelé le théorème de Fuglede-Putnum-Mortad.

Théorème 4.3.5 [23, p6]

Soient A et B deux opérateurs non bornés normaux et inversibles, alors

$$AB = BA \Rightarrow AB^* = B^*A \text{ et } BA^* = A^*B$$

Corollaire 4.3.2 *Soient A et B deux opérateurs non bornés normaux et inversibles. Si $AB = BA$, alors AB^* (et BA^*) est normal.*

Preuve. Il est clair que AB^*(et BA^*) est un opérateur fermé, reste à prouver que

$$(AB^*)(AB^*)^* = (AB^*)^*(AB^*)$$

En effet,

$$\begin{aligned}(AB^*)(AB^*)^* &= AB^*BA^* \text{ (car } B \text{ est inversible)}\\ &= ABB^*A^* \text{(puisque } B \text{ est normal)}\\ &= BAA^*B^* \text{ (car } A \text{ et } B \text{ sont inversibles et } AB = BA)\\ &= BA^*AB^* \text{ (comme } A \text{ est normal)}\\ &= (AB^*)^*(AB^*)\end{aligned}$$

D'où AB^* est normal.

Pour la normalité de BA^* en effet,

puisque AB^* est normal, alors $(AB^*)^*$ est aussi normal. Cela signifie que BA^* est normal. ■

Théorème 4.3.6 [23, p3]

Soient A et B deux opérateurs non bornés tel que $AB = BA$. Si A est inversible, B est fermé et $D(BA^{-1}) \subset D(A)$, alors $A + B$ est fermé dans $D(B)$.

Théorème 4.3.7 [23, p4]

Soient A et B deux opérateurs non bornés et inversibles tel que $AB = BA$. Si $D(A^*(B^*)^{-1}) \subset D(B^*)$, alors $(A + B)^* = A^* + B^*$.

Maintenant, nous étudions l'opérateur $S - S^*$, avec S est un opérateur non borné, densément défini et inversible, puis nous écrivons l'opérateur de Nadir sous la forme $S - S^*$.

Si on remplace A par S et B par S^*, on constate que les deux conditions $D(BA^{-1}) \subset D(A)$ et $D(A^*(B^*)^{-1}) \subset D(B^*)$ des théorèmes 4.3.6 et 4.3.7 sont équivalentes c'est à dire :

$$D(BA^{-1}) \subset D(A) \Rightarrow D(S^*S^{-1}) \subset D(S)$$

et

$$\begin{aligned}\left[D(A^*(B^*)^{-1}) \subset D(B^*)\right] &\Rightarrow D(S^*(S^{**})^{-1}) \subset D(S^{**}) \\ &\Rightarrow D(S^*S^{-1}) \subset D(S) \text{ car } S \text{ est fermé.}\end{aligned}$$

Donc on peut écrire cette proposition.

Proposition 4.3.3 *Soit S un opérateur non borné, normal et inversible. Si $D(S^*S^{-1}) \subset D(S)$ alors*

1) $S - S^*$ est fermé dans $D(S^*)$.

2) Si $S - S^*$ est densément défini, alors il est anti-autoadjoint.

Preuve. 1) Evident.

2) En effet

$$\begin{aligned}(S - S^*)^* &= S^* - S^{**} \\ &= S^* - S \text{ car } S \text{ est fermé.} \\ &= -(S - S^*)\end{aligned}$$

D'où $S - S^*$ est un opérateur anti-autoadjoint. ■

L'hypothèse $D(S^*S^{-1}) \subset D(S)$ ne peut pas simplement être abandonné. En tant que contre exemple, soit S un opérateur densément défini, auto-adjoint et inversible avec le domaine $D(S) \subsetneq H$ où H est un espace de Hilbert complexe. Alors $S - S^* = 0$ dans $D(S)$ n'est pas fermé. De plus, S est un opérateur normal (parce qu'il est auto-adjoint). Mais

$$D(S^*S^{-1}) = D(SS^{-1}) = D(I) = H \nsubseteq D(S)$$

Le théorème suivant est le résultat principal de notre thèse

Théorème 4.3.8 *Soient A et B deux opérateurs non bornés tel que $D(BA^*(AB^*)^{-1}) \subset D(AB^*)$, alors l'opérateur de Nadir est fermé dans $D(BA^*)$ si,* *1) B est inversible, AB^* est normal et inversible, ou*

2) A et B sont deux opérateurs normaux et inversibles à gauche (ou à droite) tel que AB^* est densément défini et $AB = BA$.

Si de plus N est un opérateur densément défini, alors il est ***anti-autoadjoint****.*

Preuve. 1) Puisque B est inversible et AB^* densément défini (car AB^* est normal), alors $(AB^*)^* = BA^*$ par le corollaire 4.3.1, cela signifie que

$$N = AB^* - BA^* = AB^* - (AB^*)^*,$$

alors par la proposition 4.3.3, N est un opérateur fermé dans $D(BA^*)$.

2) A et B sont deux opérateurs inversibles d'après la Proposition 2.3.2. Et puisque $AB = BA$, l'opérateur AB^* et aussi normal et inversible par le Corollaire 4.3.2. D'où N est un opérateur fermé dans $D(BA^*)$ d'après 1).

Puisque $N = AB^* - (AB^*)^*$ alors il est anti-autoadjoint par la Proposition 4.3.3. ■

Dans le Théorème 4.3.8, si B est borné alors $D(BA^*(AB^*)^{-1}) = D(A^*(AB^*)^{-1})$ et $D(BA^*) = D(A^*)$ et par corollaire 4.3.1, on peut écrire le prochaine corollaire.

Corollaire 4.3.3 *Soit A un opérateur non borné et B un opérateur borné tel que AB^* est normal et inversible, si $D(A^*(AB^*)^{-1}) \subset D(AB^*)$ alors l'opérateur $N = AB^* - BA^*$ est fermé dans $D(A^*)$ si*

1) B est inversible, ou

2) A est fermé.

Preuve. 1) Clair, d'après le théorème précédent.

2) Puisque B est borné et A fermé $(BA^*)^* = AB^*$, alors

$$N = AB^* - BA^* = (BA^*)^* - BA^*$$

Donc N est un opérateur fermé dans $D(A^*)$ d'après la Proposition 4.3.3. ■

Conclusion générale et perspectives

L'opérateur de Nadir $N = AB^* - BA^*$ où A et B sont deux opérateurs bornés est toujours normal (plus précisément anti-autoadjoint), et compact si l'un des deux opérateurs A et B est compact. Mais dans le cas non borné, la situation est très différente car il est partiellement défini, c'est ce que lui faire perdre beaucoup de caractéristiques appréciées par les opérateurs bornés.

Le présent travail a permit de traiter la normalité de l'opérateur de Nadir non borné. On a commencé par étudier la fermeture de cet opérateur car la fermeture est une condition nécessaire pour la normalité d'un opérateur non borné. Si A et B sont deux opérateurs non bornés tel que $D(BA^*(AB^*)^{-1}) \subset D(AB^*)$, alors l'opérateur de Nadir est fermé dans $D(BA^*)$ si,

* B est inversible, AB^* est normal et inversible, ou
* A et B sont deux opérateurs normaux et inversibles à gauche (ou à droite) tel que AB^* est densément défini et $AB = BA$.

Si de plus N est un opérateur densément défini, alors il est anti-autoadjoint (opérateur normal).

Les perspectives de recherche dans le domaine traité ici dans cette thèse sont nombreuses, on peut citer quelques unes.

- Essayer de trouver des conditions suffisantes plus pratiques qui assurent l'anti-autoadjonction de l'opérateur de Nadir non borné.
- Etude de la hyponormalité ($AA^* \leq A^*A$) et la quasi-normalité ($A(A^*A) = (A^*A)A$) de l'opérateur de Nadir non borné.
- Quelle est la caractérisation du spectre de l'opérateur $N = AB^* - BA^*$?
- Généralisation de l'opérateur de Nadir.

Bibliographie

[1] M.S. Birman and M.Z. Solomjak, *Spectral theory of Self-adjoint operators in Hilbert space*, D.Reidel Publishing Company, 1986

[2] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle (théorie et applications)*, 2^e tirage, masson paris, 1983

[3] A.Benali, *Sur les opérateurs non-normaux,* Thèse de doctorat, Univ. Oran 1, A. Benbella, 2014/2015

[4] E. Cances, C. Lebris and Y. Maday, *Méthodes mathématiques en chimie quantique. Une introduction*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006

[5] A.Chaban, *Les critères de commutativité d'opérateurs bornés et non bornés,* Thèse de doctorat, Univ. Oran 1, A. Benbella,

[6] J. Charles, M. Mbekhta and H. Queffelec, *Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs,* Dunod, Paris, 2010

[7] S. Chavan, *Spectral theorem for normal operators :application,* Harish-Chandra research institute, Allahabad.

[8] H.Chebli, *Analyse Hilbertienne*, Centre publication universitaire, Tunis, 2001

[9] P.R.Chernoff, *A semibounded closed symetric operator whose square has trivial domain,* Proc. Amer. Math. Soc., 1983

[10] J. Chevalier, *Théorie spectrale et applications*, Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées,1998

[11] John B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer Verlag, New York-Berlin Heidelberg Tokyo, 1985

[12] L. Debnath, P. Mikusinski, *Hilbert spaces with applications,* Elsevier Academic Press, 2005

[13] J. Derezinski, *Unbounded linear operators*, Hoza 74, 00-682, Warszawa, Poland, 2013

[14] M.R.Embry, *Similarities involving normal operators on Hilbert space.* Pacific. J. Math, 1970

[15] E. Fricain, *Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs (cours et exercices),* Master (mathématiques pures), 2009/2010

[16] I. Gohberg, S. Goldberg, M. A. Kaashoek, *Basic Classes of Linear Operators,* BirkhäuserVerlag, Basel, 2003.

[17] S. Goldberg, *Unbounded linear operators*, Mc Graw-Hill, United States of America, 1966

[18] J. K. Hunter et B. Nachtergaele, *Applied Analysis,* University of California at Davis, 2000

[19] I. Kaplansky, *Products of normal operators,* Duke Math. J., 20/2 ,1953

[20] T.Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators,* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1995

[21] I. Lankham, B.Nachtergaele, A.Schilling, *The spectral theorem for normal linear maps*, University of california, Davis, 2007

[22] D.Li, *Notions de Théorie Spectrale*, Université d'Artois, Faculté des Sciences Jean Perrin, Analyse Fonctionnelle (Master 1 Mathématiques-Informatique).

[23] M.H. Mortad, *The sum of two unbounded linear operators, closedness, self adjointness and normality*, arXiv :1203.2545v5[$math.FA$], 2012

[24] M.H. Mortad and S. Dehimi, *Right (or left) invertibility of bounded and unbounded operators and applications to the spectrum of products*, arXiv :1505.02719v1[$math.FA$] , 2015

[25] M. H. Mortad, *On some product of two unbounded self-adjoint operator*, Integral Equations Operator Theory, 64/3, (2009) 399-408.

[26] M. H. Mortad, *An application of the Putnam-fuglede theorem to normal products of self-adjoint operators,* Proceedings of the american mathematical society, 2003

[27] M. H. Mortad,*On the closedness, the self-adjointness and the normality of the product of two unbounded operators,* Demonstratio mathematica, VOL. XLV, No1, 2012

[28] M. H. Mortad, *Products and sums of bounded and unbounded normal operators : Fuglede-Putnam versus embry,* Rev. Roumaine Math. Pures Appl.,2011

[29] M. H. Mortad, *Products of unbounded normal operators,* arXiv :1202.6143v3 [$math.FA$], 2012

[30] M. H. Mortad, *An All-unbounded-operator version of the Fuglede-Putnam Theorem.* Complex Anal. Oper. Theory (to appear).DOI : 10.1007/s11785-011-0133-6.

[31] M. H. Mortad, *On the normality of the sum of two normal operators,* Complex anal. Oper. Theory, 6/1 (2012), 105-112. DOI : 10.1007/s11785-010-0072-7.

[32] M.Nadir, *Opérateur positif,* Cours d'analyse fonctionnelle sur le site web (www.mostefanadir.com), 2017

[33] M.Nadir, *Opérateurs continus,* Cours d'analyse fonctionnelle sur le site web (www.mostefanadir.com), 2017

[34] M.Nadir, *Opérateur compact,* Cours d'analyse fonctionnelle sur le site web (www.mostefanadir.com), 2017

[35] M.Nadir, A.Smati, *Closedness and Skew self-adjointness of Nadir's operator,* in The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications. 15(1) (2018), 1-5.

[36] B.S.Nagy, *Perturbations des transformations linéaires fermées*, Acta Sci.Math, (Szeged) 14, 1951

[37] M.Naimark, *On the square of a closed symetric operator,* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1940

[38] C. Portenier, *Analyse Fonctionnelle,* Fachbereich Mathematik und informatik, Phillips-Universität Marburg, version de 01 juillet 2005

[39] M.Reed, B.Simon, *Methods of modern mathematical phisics*, Vol. 2 :Fourier Analysis, Self-adjointness, Academic Press, 1975.

[40] M. Rosemblum , *On a theorem of Fuglede and Putnam*, j. Lond. Math. Soc., 1958

[41] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, 1991 (2nd edition).

[42] M.Sadkane, *A note on normal matrices,* J. Comput. Appl. Math., 2001

[43] K. Schmudgen, *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space*, Science+Business Media Dordrecht, 2012

[44] S. Schnaubelt, *Lecture notes spectral theory*, Kharlsruhe, 2012

[45] J. Yang , H.-K. Du, *A note on compact normal operators,* J. Comput. Appl. Math., 2003

[46] K. Yosida, *Functional analysis*, Springer-verlag, Berlin Heidelberg Nen York, 1980 (Sixth Edition)

ملخص

في ميكانيكا الكم يوجد مؤثر مهم يكتب على الشكل $N = AB^* - BA^*$ (حيث A وB مؤثرين محدودين أو غير محدودين نطاقهما كثيف و A^* هو قرين A) ، هذا المؤثر يسمى مؤثر نذير. في هذه الأطروحة قمنا بدراسة خصائصه كالتراص و الناظمية عندما يكون محدودا، و لأن الكثير من المؤثرات في ميكانيكا الكم غير محدودة قمنا بتوسيع البحث و قدمنا شروطا كافية تجعل مؤثر نذير غيرالمحدود مغلقا و ناظميا، هذه الدراسة مهمة جدا لأن فئة المؤثرات الناظمية هي أكبرفئة توجد بها نظرية الطيف.

الكلمات المفتاحية: المؤثرات الناظمية، المؤثرات المتراصة، مؤثر القرين الذاتي، المؤثرات غير المحدودة، المؤثرات المغلقة، مؤثر نذير.

RÉSUMÉ

Dans la mécanique quantique, il existe un opérateur important écrit sous forme $N = AB^* - BA^*$ (tel que A et B sons des opérateurs bornés ou non bornés densément définis et A^* est l'adjoint de A), cet opérateur est appelé Opérateur de Nadir. Dans cette thèse, nous avons étudié ses caractéristiques comme la compacité et la normalité dans le cas borné. Et comme plusieurs opérateurs dans la mécanique quantique ne sons pas bornés, nous avons enrichi notre recherche dans le cas non borné en présentant quelques conditions suffisantes qui assurent la fermeture et la normalité (plus précisément l'anti-autoadjonction) de l'opérateur de Nadir non borné. Cette étude est plus importante car la classe d'opérateurs normaux est la plus grande classe dans laquelle le théorème spectral existe.

Mots clés: *Opérateurs normaux; Opérateur auto adjoint; Opérateurs non bornés; Opérateurs fermés; Opérateur de Nadir.*

ABSTRACT

In Quantum mechanics, there exist an important operator written in the form $N = AB^* - BA^*$ (such that A and B are bounded or unbounded densely defined operators and A^* is the adjoint of A). This operator is called Nadir's Operator. In this thesis, we have studied its characteristics as compactness and normality in the bounded case. And as several operators in quantum mechanics are not bounded, we have enriched our research in the unbounded case by presenting some sufficient conditions that ensure the closure and normality (more precisely the skew-selfadjoint) of unbounded Nadir's operator. This study is more important because the class of normal operators is the largest class in which the spectral theorem exists.

Keywords: *Normal operater; Selfadjoint operator; unbounded operator; Closed operator; Nadir's operator.*